PHILOSOPHIA SCIENTIÆ

LOUIS VAX

Les logiques trivalentes sont-elles « autodescriptives » ?

Philosophia Scientiæ, tome 2, nº 2 (1997), p. 243-255

<http://www.numdam.org/item?id=PHSC_1997__2_2_243_0>

Les logiques trivalentes sont-elles "autodescriptives" ?[1]

Louis Vax
Département de Philosophie / ACERHP
Université Nancy 2

[1] Nicholas Rescher, *Many-valued Logic*, New York, St Louis, ..., 1969, en particulier p. 84-88. J'adopte autant que possible le symbolisme de cet auteur.

Résumé. Une logique est autodescriptive si elle est en mesure de formuler sur elle-même, en employant son propre symbolisme, et en tenant compte de ses propres valeurs de vérité, certaines tautologies métalogiques. Mais cette propriété n'appartient qu'à certaines logiques multivalentes, et à condition qu'on applique aux formules métalogiques en question un opérateur paramétrique qui les rend bivalente.

Abstract. A logic is autodescriptive if it is possible to express — in its language, referring to its truth-values — metalogical tautologies. But this quality belongs only to some many-valued logics, and if we apply to these metalogical formulae a parametrical operator rendering them two-valued.

1. Introduction

Il est fort douteux qu'on puisse formuler une métalogique sans recourir à la logique bivalente classique $\mathbf{C_2}$. Celle-ci gouverne sa propre métalogique. Il en va autrement des logiques non classiques. Quand Lukasiewicz, par exemple, affirme :

(1) Certaines propositions ne sont ni vraies ni fausses,

il laisse entendre que, loin d'être "self-référentielle", cette affirmation est conforme au principe du tiers-exclu. Il n'admet pas, me semble-t-il, qu'un des principes de sa logique trivalente soit indéterminé. Il les tient pour vrais et rejette leurs négations comme fausses.

Nicholas Rescher estime cependant que certaines logiques non classiques sont en mesure de se décrire elles-mêmes sans recourir aux principes et au symbolisme de la logique classique.Telles seraient en particulier les logiques trivalentes $\mathbf{L_3}$ de Lukasiewicz, $\mathbf{K_3}$ de Kleene et $\mathbf{B_3}$ de Bochvar, capables à son sens de formuler sur elles-mêmes des tautologies métalogiques en utilisant leurs propres connecteurs et en prenant en considération leurs trois "valeurs de vérité". C'est cette opinion que je me propose d'exposer et de discuter.

2. Préliminaires

2.1. Formules

— Toute variable propositionnelle p_n est une *formule logique*.
— Si α est une formule logique, $\neg\alpha$ est une formule logique.
— Si α et β sont deux formules logiques distinctes ou non, et $\ddagger$ un connecteur binaire, $\alpha \ddagger \beta$ est une formule logique.

Les minuscules grecques α, β, γ, ... elles-mêmes ne sont pas des formules, mais des *métavariables* désignant des formules quelconques. Comme cet article ressortit à la métalogique, les variables propositionnelles y figurent moins souvent que les métavariables.

2.2. Expressions

J'appelle *expression*, et désigne par une capitale grecque (Γ, Δ)
— soit une formule du calcul propositionnel,
— soit une séquence de symboles parmi lesquels figurent des paramètres (i, j), et des opérateurs paramétriques (V^*, V°).

Toute formule logique est donc une expression.

2.3. Assignations de valeurs

Aux formule de $\mathbf{C_2}$ peuvent être assignées les valeurs 1 ou 0. Si α est une formule (par exemple $\alpha = p \Leftrightarrow \neg q$), "$/ \alpha / = 1$" signifie : "j'assigne la valeur 1 à la formule α".

Aux formules α des logiques trivalentes peuvent être assignées les valeurs 1, 0 ou 1/2 : $/ \alpha / = 1$, ou $/ \alpha / = 0$, ou $/ \alpha / = 1/2$.

Les variables x et y parcourent l'ensemble $\{1, 1/2, 0\}$.

Les mêmes principes s'appliquent aux formules métalogiques.

2.3. $\mathbf{L_3}$, $\mathbf{K_3}$ et $\mathbf{B_3}$ ont une table de vérité commune de la négation :

	Γ	$\neg\ \Delta$
f_1	1	0
f_2	1/2	1/2
f_3	0	1

Les assignations f_1 et f_3 sont celles de la logique $\mathbf{C_2}$.

2. 4. Les connecteurs binaires les plus usités sont l'implicateur ($\Rightarrow$), le conjoncteur ($\wedge$), le disjoncteur ($\vee$), et le symbole d'équivalence ($\Leftrightarrow$).

2. 5. Les valeurs de vérité des formules $\neg \alpha$, $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \Rightarrow \beta$ de $\mathbf{L_3}$, $\mathbf{K_3}$ et $\mathbf{B_3}$ ne diffèrent pas de celles des formules correspondantes de $\mathbf{C_2}$ quand seules les valeurs "extrêmes", 1 ou 0 sont assignées à leurs arguments α et β. Mais il en va autrement quand la valeur "intermédiaire" 1/2 est assignée à l'un ou l'autre. Lorsqu'une confusion est possible, l'un des indices λ, κ et χ précise que le connecteur appartient à $\mathbf{L_3}$, $\mathbf{K_3}$ ou $\mathbf{B_3}$. On verra par exemple que $/ \alpha \Rightarrow_\lambda \alpha / = 1$, alors que $/ \alpha \Rightarrow_\chi \alpha / = 1/2$.

2.6. Une formule logique α est une tautologie si $/ \alpha / = 1$ pour toute assignation de valeur aux variables propositionnelle. Les deux formules : "$p \Rightarrow p$", et "$p \vee \neg p$" sont des tautologies de $\mathbf{C_2}$, mais la première seule est tautologique dans $\mathbf{L_3}$. Elle ne l'est cependant pas dans $\mathbf{K_3}$. $\mathbf{B_3}$ ne comporte aucune tautologie.

Une expression métalogique Γ est une tautologie si elle prend la valeur 1 pour toute assignation de valeur aux variables propositionnelles et aux paramètres qui y figurent.

3. Les deux premiers critères de l'autodescriptivité

3.1. Rescher ne retient comme autodescriptives, parmi les logiques trivalentes, que celles dont le symbolisme comporte :

3.1.1.- un conjoncteur $\wedge$ tel que, si $/\Gamma/ = /\Delta/ = 1$, alors : $/\Gamma \wedge \Delta/ = 1$.

3.1.2.- un implicateur $\Rightarrow$ tel que, si $/\Gamma \Rightarrow \Delta/ = /\Gamma/ = 1$, alors $/\Delta/ = 1$[2].

Ces exigences sont naturellement celles de la logique classique. La première précise qu'est vraie la conjonction de deux propositions si et seulement si chacune d'elles l'est également, la seconde qu'est vraie la conclusion en Modus ponens *de deux prémisses vraies.*

Une implication logique ou métalogique $\Gamma \Rightarrow \Delta$ est une tautologie de $\mathbf{C_2}$ si et seulement si, à toute assignation de la valeur 1 à Γ, correspond une assignation de la même valeur à Δ.

3.2. $\mathbf{L_3}$, $\mathbf{K_3}$ et $\mathbf{B_3}$ satisfont au critères 3.1.1. (assignations f_1) :

	Γ	Δ	$\Gamma \wedge_\lambda \Delta$	$\Gamma \wedge_\kappa \Delta$	$\Gamma \wedge_\chi \Delta$
f_1	1	1	1	1	1
f_2	1	1/2	1/2	1/2	1/2
f_3	1	0	0	0	0
f_4	1/2	1	1/2	1/2	1/2
f_5	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2
f_6	1/2	0	0	0	1/2
f_7	0	1	0	0	0
f_8	0	1/2	0	0	1/2
f_9	0	0	0	0	0

2 Est exclue, entre autres, la logique trivalente de Post, P_3 où , pour toute valeur x, $x \wedge x \neq x$.

3.3. Les logiques $\mathbf{L_3}$, $\mathbf{K_3}$ et $\mathbf{B_3}$ satisfont aussi au critère 3.1.2. (assignations f_1) :

	Γ	Δ	$\Gamma \Rightarrow_\lambda \Delta$	$\Gamma \Rightarrow_\kappa \Delta$	$\Gamma \Rightarrow_\chi \Delta$
f_1	1	1	1	1	1
f_2	1	1/2	1/2	1/2	1/2
f_3	1	0	0	0	0
f_4	1/2	1	1	1	1/2
f_5	1/2	1/2	1	1/2	1/2
f_6	1/2	0	1/2	1/2	1/2
f_7	0	1	1	1	1
f_8	0	1/2	1	1	1/2
f_9	0	0	1	1	1

Les assignations f_1, f_3, f_7 et f_9 de $\Gamma \wedge \Delta$ et $\Gamma \Rightarrow \Delta$ sont celles de $\mathbf{C_2}$.

4. L'opérateur bivalent V^* et le troisième critère de Rescher

4.1. Pour être qualifiée d'autodescriptive, une logique trivalente doit aussi satisfaire, selon Rescher, à un troisième critère. Selon ce dernier, *certaines expressions métalogiques,* dans lesquelles figurent, avec un "opérateur paramétrique" (V^* ou V°)[3], un ou deux paramètres (i, j), *doivent être des tautologies.* Voici un exposé "naïf" de sa conception.

Examinons d'abord l'emploi des paramètres i et j, et de l'opérateur paramétrique V^*.

4.2. Soient par exemple α une formule du calcul propositionnel et i un paramètre. À chacun de ces deux symboles peut être assignée, dans une logique trivalente, une valeur :

[3] Rescher désigne de manière ambiguë, par le symbole V, deux opérateurs distincts, le premier bivalent, que j'appelle V^*, le second trivalent, que je nomme V°.

$/ \alpha / = 1, 1/2$ ou 0 ; de même : i = 1, 1/2 ou 0.

Du point de vue du calcul logique, la signification de 1, 1/2 et 0 n'a pas d'importance. Admettons pourtant, à titre d'illustration, que l'expression : '$i\ \alpha$' se lise : j'assigne la valeur i à la formule α. Si i = 1 et $/ \alpha / = 1/2$, l'expression :"V^*1, 1/2" signifie : "J'assigne la valeur 1 à la formule α, bien que cette dernière ait, en fait, la valeur 1/2". Il est évident que je me trompe, en sorte que : "V^* 1, 1/2 = 0". En revanche, si j'assigne à i et à α une même valeur x, il va de soi que : V^* x, x = 1. En somme, en affirmant que le vrai est vrai, que l'indéterminé est indéterminé et que le faux est faux, je suis dans le vrai[4]. Si j'en décide autrement, je suis dans l'erreur. Donc:

V^* 1, 1 = V^* 1/2, 1/2 = V^* 0, 0 = 1, alors que :

V^* 1, 1/2 = V^* 1, 0 = V^*1/2, 1 = V^* 1/2, 0 = V^* 0, 1 = V^* 0, 1/2 = 0

Il en ressort que, bien que l'opérateur V^* prenne ses arguments dans l'ensemble {1, 1/2, 0}, il leur assigne toujours une valeur appartenant à l'ensemble {1, 0} des valeurs de la logique classique. L'application de V^* à une formule ou une sous-formule trivalente engendre nécessairement une expression bivalente. Pour cette raison Rescher qualifie l'opérateur V^* de *bivalent*.

4.3. Nous sommes maintenant en mesure de formuler le troisième critère de Rescher, à savoir le caractère tautologique de certaines expressions métalogiques. Chacune d'elles se décompose en sous-formules qui, gouvernées par l'opérateur V^*, ne prennent d'autres valeurs que 1 ou 0.

Dans chacune des expressions dont on se proposera d'établir le caractère tautologique peut bien figurer soit un conjoncteur $\wedge_\lambda$, $\wedge_\kappa$ ou $\wedge_\chi$, soit un implicateur $\Rightarrow_\lambda$, $\Rightarrow_\kappa$ ou $\Rightarrow_\chi$. Mais, comme ils s'appliquent toujours à des formules de valeur 1 ou 0, ils ne diffèrent en rien dans leur emploi des connecteurs $\wedge$ et $\Rightarrow$ de la logique classique. Pour cette raison, je négligerai dans ce paragraphe l'emploi des indices λ, κ et χ.

4 Telle est la signification des "valeurs de vérité" dans la logique trivalente de Lukasiewicz. Bochvar, par exemple, leur donne une autre interprétation. Mais peu importe ici.

Pour démontrer le caractère tautologique d'une formule, il suffit d'établir, comme dans la logique classique, que toute assignation de la valeur 1 à l'antécédent entraîne la même assignation au conséquent.

Il nous faut examiner trois cas :

4.3.1. Premier cas : Si α est une variable propositionnelle p_n, alors :

$V^*{}_i\, p_n \Rightarrow V^*{}_i\, p_n$ est une tautologie.

Cette proposition est une conséquence immédiate de la tautologie classique $\alpha \Rightarrow \alpha$ et de l'application de V^* à l'antécédent et au conséquent de cette formule.

4.3.2. Deuxième cas : si α *est une négation* $\neg\, \beta$,

$V^*\ i\, \beta \Rightarrow V^*\langle \neg\, i\rangle\, (\neg\, \beta)$ est une tautologie.

(Si vous avez assigné la valeur i à la formule β, vous obtiendrez le même résultat en appliquant le négateur à i d'abord, à / β / ensuite).

Dans cette formule, le paramètre i et la variable β prennent chacune des trois valeurs 1, 1/2, 0. La preuve "mécanique" est une "table de vérité" portant sur $3^2 = 9$ assignations :

	i	β	$V^*\ i\ \ \beta$	$\Rightarrow$	V^*	$\langle \neg\, i\rangle$	$(\neg\, \beta)$
f_1	1	1	1	**1**	1	0	0
f_2	1	1/2	0	**1**	0	0	1/2
f_3	1	0	0	**1**	0	0	1
f_4	1/2	1	0	**1**	0	1/2	0
f_5	1/2	1/2	1	**1**	1	1/2	1/2
f_6	1/2	0	0	**1**	0	1/2	1
f_7	0	1	0	**1**	0	1	0
f_8	0	1/2	0	**1**	0	1	1/2
f_9	0	0	1	**1**	1	1	1

On remarque qu'à chacune des sous-formules : i, β, $\neg$ i et $\neg$ β sont assignées les trois valeurs, alors que les sous-formules immédiates V^* i β et $V^*\langle \neg i \rangle (\neg \beta)$, et par conséquent la formule complète $V^* (i\ \beta) \Rightarrow V^* \langle \neg i \rangle (\neg \beta)$, ne prennent que celles de la logique classique. Voici une preuve plus élégante de 4.4. :

$/V^*i\ \beta / = 1$ *si et seulement si* $i = / \beta / = x$. Dans ce cas, $/V^* \langle \neg i \rangle (\neg \beta) / = V^* \langle - x \rangle (- x) = 1$.

4.3.3. Troisième cas : si α *est une formule* $\gamma \ddagger \delta$,

(1) $V^*\ i\ \gamma \wedge V^*\ j\ \delta \Rightarrow V^* \langle i \ddagger j \rangle (\gamma \ddagger \delta)$ est une tautologie[5].

(Soient i et j deux paramètres, γ et δ deux formules, et $\ddagger$ un connecteur binaire. Si vous assignez la valeur i à la formule γ puis la valeur j à la formule δ, vous obtiendrez le même résultat en appliquant $\ddagger$ à i et j d'abord, à $/ \gamma /$ et $/ \delta /$ ensuite).

Le nombre des variables : i, j, γ et δ étant de 4, la preuve "mécanique" de 4.5. consiste en autant de tables de vérité de $3^4 = 81$ entrées qu'il y a de connecteurs binaires $\ddagger$ dans chacune des logiques $\mathbf{L_3}$, $\mathbf{K_3}$ et $\mathbf{B_3}$. Voici une preuve moins fastidieuse de 4.5. :

$/V^*\ i\ \gamma \wedge V^*\ j\ \delta / = 1$ si et seulement si :
$/ V^*i\ \gamma / = /V^*j\ \delta / = 1$, c'est-à-dire si $i = / \gamma / = x$ et $j = / \delta / = y$.
Dans ce cas, $/V^* \langle i \ddagger j \rangle (\gamma \ddagger \delta) / = V^* \langle x \ddagger y \rangle (x \ddagger y) = V^* 1, 1 = 1$.

Chacun des connecteurs $\wedge$, $\Rightarrow$ et $\ddagger$ est bien soit $\wedge_\lambda$, $\Rightarrow_\lambda$ et $\ddagger_\lambda$, soit $\wedge_\kappa$, $\Rightarrow_\kappa$ et $\ddagger_\kappa$, soit $\wedge_\chi$, $\Rightarrow_\chi$ et $\ddagger_\chi$. Il en résulte que l'expression (1) décrit bien dans la langue de $\mathbf{L_3}$ (resp. $\mathbf{K_3}$ ou $\mathbf{B_3}$) une propriété de cette logique. Cependant, chacune de ses sous-formules que lie le conjoncteur ou l'implicateur est gouvernée par l'opérateur V^*, qui lui assigne l'une des valeurs de la logique $\mathbf{C_2}$. Il n'en va pas de même des connecteurs, $\ddagger$, mais ces derniers n'interviennent pas dans la preuve.

---

[5] La plupart des auteurs se contentent de la conjonction, de la disjonction, de l'implication et de l'équivalence. Le problème de l'"interdéfinissabilité" doit être examiné cas par cas. Admises dans la logique classique, les définitions "$\alpha \vee \beta =_{Df} \neg \alpha \Rightarrow \beta$" et "$\alpha \Rightarrow \beta =_{Df} \neg \alpha \vee \beta$" ne le sont pas dans la logique trivalente de Lukasiewicz.

4.4. On vérifie aisément que la logique classique $\mathbf{C_2}$ est autodescriptive pour $\mathbf{V}^*$.

4.5. $\mathbf{L_3}$, $\mathbf{K_3}$ et $\mathbf{B_3}$ sont autodescriptives pour $\mathbf{V}^*$.

Ces propositions sont des corollaires de 4. 3.1., 4.3.2. et 4.3.3.

5. L'opérateur trivalent $\mathbf{V}^\circ$ et le troisième critère de Rescher

5.1. *Définition.* Soient x = i et y = / α /:

$$\mathbf{V}^\circ x\, y = \mathbf{V}^\circ y\, x = 1 \text{ si } x = y,$$
$$= 1/2 \text{ si } | x - y | = 1/2,$$
$$= 0 \text{ si } | x - y | = 1.$$

Donc :

$$\mathbf{V}^\circ\, 1, 1 = \mathbf{V}^\circ 1/2, 1/2 = \mathbf{V}^\circ\, 0, 0 = 1,$$
$$\mathbf{V}^\circ 1, 0 = \mathbf{V}^\circ\, 0, 1 = 0,$$
$$\mathbf{V}^\circ\, 1, 1/2 = \mathbf{V}^\circ 1/2, 1 = \mathbf{V}^\circ\, 1/2, 0 = \mathbf{V}^\circ\, 0, 1/2 = 1/2.$$

5.2. Conséquences de la définition.

On a vu que, si Δ est une expression quelconque, $/\mathbf{V}^*\Delta / = 1$ ou 0. En revanche $/\mathbf{V}^\circ\Delta / = 1$, 0 ou 1/2. Dans ce dernier cas, l'évaluation d'une expression comme $\Delta \wedge \Gamma$ ou $\Delta \Rightarrow \Gamma$ dépend de la définition des connecteurs dans chacune des logiques, $\mathbf{L_3}$, $\mathbf{K_3}$ et $\mathbf{B_3}$.

Soient par exemple : $/ \Delta / = 1$ et $/ \Gamma / = 1/2$.

$/ \Delta \wedge_\lambda \Gamma / = / \Delta \wedge_\kappa \Gamma / = 0$, mais $/ \Delta \wedge_\chi \Gamma / = 1/2$.

Posons maintenant $/ \Delta / = / \Gamma / = 1/2$:

$/ \Delta \Rightarrow_\lambda \Gamma / = 1$, mais $/ \Delta \Rightarrow_\kappa \Gamma / = / \Delta \Rightarrow_\chi \Gamma / = 1/2$.

Les calculs, d'une complexité décourageante, sont inutiles. En effet :

5.3. Aucune des logiques $\mathbf{L_3}$, $\mathbf{K_3}$ et $\mathbf{B_3}$ n'est autodescriptive pour $\mathbf{V}^\circ$, ce que montrent des contre-exemples :

5.4. Soient i = j = 1/2, / β / = 1 et / γ /= 0.

$/ V^\circ \ i\,\beta \wedge_\lambda V^\circ \ j\,\gamma \Rightarrow_\lambda V^\circ \langle i \Rightarrow_\lambda j \rangle (\beta \Rightarrow_\lambda \gamma) /$
$= / V^\circ 1/2, 1 \wedge_\lambda V^\circ 1/2, 0 / \Rightarrow_\lambda / V^\circ \langle 1/2 \Rightarrow_\lambda 1/2 \rangle (1 \Rightarrow_\lambda 0) /$
$= 1/2 \wedge_\lambda 1/2 \Rightarrow_\lambda V^\circ \ 1\ 0$
$= 1/2 \Rightarrow_\lambda 0$
$= 1/2.$

$\mathbf{L_3}$ n'est donc pas autodescriptive pour V°.

5.5. Soient une fois encore : i = j = 1/2, / β / = 1 et / γ / = 0.

$/ V^\circ \ i\,\beta \wedge_\kappa V^\circ j\,\gamma \Rightarrow_\kappa V^\circ \langle i \Rightarrow_\kappa j \rangle (\beta \Rightarrow_\kappa \gamma)$
$= / V^\circ \ 1/2, 1 \wedge_\kappa V^\circ \ 1/2, 0 \Rightarrow_\kappa V^\circ \langle 1/2 \Rightarrow_\kappa 1/2 \rangle (1 \Rightarrow_\kappa 0) /$
$= 1/2 \wedge_\kappa 1/2 \Rightarrow_\kappa V^\circ \ 1/2, 0$
$= 1/2 \Rightarrow_\kappa 1/2$
$= 1/2.$

$\mathbf{K_3}$ n'est donc pas autodescriptive pour V°.

Remarque. Les résultats sont identiques, mais les calculs différents, comme en témoignent les tables de l'implicateur et du conjoncteur dans les deux logiques.

Soient i = 1 et / β / = 1/2

$/ V^\circ \ i\,\beta \Rightarrow_\lambda V^\circ \ i\,\beta / = V^\circ \ 1, 1/2 \Rightarrow_\lambda V^\circ \ 1, 1/2$
$= 1/2 \Rightarrow_\lambda 1/2 = 1$

En revanche :

$/ V^\circ \ i\,\beta \Rightarrow_\kappa V^\circ \ i\,\beta / = V^\circ \ 1, 1/2 \Rightarrow_\kappa V^\circ \ 1, 1/2$
$= 1/2 \Rightarrow_\kappa 1/2 = 1/2.$

5.6. Adoptons une dernière fois les mêmes assignations :

$/ V^\circ \ i\,\beta \wedge_\chi V^\circ \ j\,\gamma \Rightarrow_\chi V^\circ \langle i \Rightarrow_\chi j \rangle (\beta \Rightarrow_\chi \gamma /$
$= / V^\circ \ 1/2\ 1 \wedge_\chi V^\circ \ 1/2\ 0 \Rightarrow_\chi V^\circ \langle 1/2 \Rightarrow_\chi 1/2 \rangle (1 \Rightarrow_\chi 0) /$
$= 1/2 \wedge_\chi 1/2 \Rightarrow_\chi V^\circ \ 1/2, 0.$
$= 1/2 \Rightarrow_\chi 1/2$
$= 1/2.$

Ce raisonnement est identique au précédent parce que, dans $\mathbf{K_3}$ et $\mathbf{B_3}$, $1/2 \Rightarrow_\kappa 1/2 = 1/2 \Rightarrow_\chi 1/2 = 1/2$.

$\mathbf{B}_3$ n'est donc pas autodescriptive pour V°.

5.7. J'ai suivi l'argumentation de Rescher. Mais ce dernier semble avoir perdu de vue que toute variable propositionnelle est une formule. — Soit i = /p/ = 1/2.

Or $/V^* \text{ i p} \Rightarrow_{\kappa} V^* \text{ i p}/ = /V^* \text{ i p} \Rightarrow_{\chi} V^* \text{ i p}/$
$= /\alpha \Rightarrow \alpha/ = 1/2.$

Cette simple remarque établit que ni $\mathbf{K}_3$ ni $\mathbf{B}_3$ ne sont autodescriptives pour V°.

5.8. La logique bivalente $\mathbf{C}_2$ est autodescriptive pour V°. En effet, comme 1 et 0 sont ses seules valeurs, l'application de V° ne diffère pas pour elle de celle de V^*.

6. Conclusions

6.1. Les logiques les plus favorables à première vue à la thèse de Rescher ne sont "autodescriptives", si l'on ose dire, que dans le cadre de la logique classique, ce qui revient à avouer que, en dépit des efforts du logicien, les assertions métalogiques sont bivalentes.

6.2. La plupart des logiques trivalentes ont été conçues à des fins philosophiques ou mathématiques. Les auteurs font généralement de "1" le symbole du vrai et de "0" celui du faux. L'interprétation de "1/2" est variable. Lukasiewicz l'utilise à des fins métaphysiques. Elle caractérise les propositions relatives aux futurs contingents, celles qui, n'étant ni vraies ni fausses, sont *indéterminées*.[6] Elle convient, pour Kleene, à la valeur *indéfinie* que peuvent prendre des fonctions propositionnelles[7] lorsqu'on y substitue la variable libre par certaines constantes. Rescher cite celle-ci (p.35) :

---

[6] La notion d'indétermination n'est pas épistémique, mais aléthique. Elle ne relève pas de la théorie de la connaissance, mais de la théorie de la vérité. Supposons qu'apprenant qu'elle est enceinte, une femme déclare, avant d'être fixée sur le sexe de l'embryon :«Je suis enceinte d'un garçon, futur médecin». Du point de vue épistémique, les deux affirmations sont incertaines; du point de vue aléthique, la première est vraie ou fausse (le sexe de l'embryon étant déjà déterminé), alors que la seconde, relevant d'un futur contingent, est indéterminée.

[7] On sait qu'une fonction propositionnelle est une expression où figure une variable libre, et de laquelle on tire une proposition en lui préfixant un quantificateur ou en substituant la variable par une constante.

$P(x)$ si et seulement si $1 \leq 1/x \leq 2$

Cette formule est vraie si et seulement si $1/2 \leq x \leq 1$, indéfinie si $x = 0$, fausse dans les autres cas.

Elle permet à Bochvar d'élaborer une logique de l'*absurde.* Dans chaque cas, la table de la négation reproduit "en miroir" celle de l'affirmation. La chose est naturelle. La négation d'une proposition indéterminée est en effet indéterminée et la négation d'une proposition indéfinie indéfinie, mais la négation d'une proposition absurde ("les racines cubiques sont comestibles") n'a pas plus de sens que l'affirmation qu'elle rejette, parce que la qualité de "comestible" ne peut être ni accordée ni refusée à une entité mathématique.

6.3. Il me semble que, incapable d'établir l'autodescriptivité de $\mathbf{L_3}$, $\mathbf{K_3}$ et $\mathbf{B_3}$, l'opérateur V° incite aussi à défendre des opinions insoutenables. Soient par exemple :

(1) Ce soir, je promène Azor[8]

(2) Ce soir, je ne promène pas Azor.

Selon Lukasiewicz :

(3) La proposition (1) est indéterminée.

(4) La proposition (2) est indéterminée.

parce qu'elles portent l'une et l'autre sur un futur contingent. Supposez pourtant que je m'avise de lui dire, par exemple :

(5) La proposition (3) est indéterminée,

ou :

(6) La proposition (4) est indéterminée.

---

[8] Je n'aborde pas le problème de la nature des entités appelées "propositions". Il me semble que les phrases (1) et (2) ne peuvent exprimer des propositions que sous certaines conditions : que je possède un chien, que j'exprime l'intention de le promener ce soir, et non d'illustrer un point de grammaire ou de logique, etc. Des esprits vétilleux remarqueront que j'use de termes et d'expressions équivoques comme "je" ou "ce soir". Mais il leur est loisible de leur substituer des noms propres et des coordonnées spatio-temporelles. Et cependant, dans le meilleur des cas, les phrases citées expriment-elles des propositions ? Une conjecture est-elle véritablement une proposition ? Si j'affirme en revanche «J'ai l'intention de promener Azor ce soir», mon assertion est vraie dès maintenant si je suis sincère, fausse dans le cas contraire. Enfin, à supposer que la notion d'indétermination soit parfaitement défendable, les conséquences qu'en tire Lukasiewicz sur les limites des principes du tiers exclu et de contradiction sont discutables. Si l'avenir est indéterminé, je sais dès maintenant que l'une des deux hypothèses incompatibles se réalisera, et qu'elles ne se réaliseront pas ensemble.

«Vous êtes dans l'erreur», répondrait-il assurément. En effet :

(7) La proposition (3) est vraie,

et :

(8) La proposition (4) est vraie.

En somme, la métalogique d'une logique trivalente est vouée à être bivalente. Traduire dans la langue courante des expressions techniques comme : "V° 1, 1/2 = 1/2" ou : "V° 0, 1/2 = 1/2" revient donc à soutenir, si l'on adopte l'interprétation de Lukasiewicz, que l'indéterminé est soit une demi-vérité, soit une erreur excusable, soit même une sorte de notion intermédiaire entre le vrai (ou le faux) et l'indéterminé lui-même... De telles assertions relèvent à mon sens de la confusion mentale.

Écrire en revanche : "V^{*} x y = 1 si x = y", et : "V^{*}x y = 0 si x ≠ y", c'est adopter la thèse, aussi saine que banale, selon laquelle le vrai est vrai, le faux faux et l'indéterminé indéterminé, toute autre imputation de valeur étant une aberration.

L'opérateur paramétrique V° n'a pas de raison d'être.