PHILOSOPHIA SCIENTIÆ

HARALD GROPP

Poincaré and graph theory

Philosophia Scientiæ, tome 1, nº 4 (1996), p. 85-95
<http://www.numdam.org/item?id=PHSC_1996__1_4_85_0>

Poincaré and Graph Theory

Harald Gropp
Mühlingstr. 19, D-69121 Heidelberg
Germany

Philosophia Scientiæ, 1 (4), 1996, 85-95.

Harald Gropp

Abstract. A short survey on the development of basic notation in graph theory between 1894 and 1936 is given. In particular, publications in French language are considered. The authors discussed here are Poincaré, Brunel, Chuard, Sainte-Laguë, and König. The basic terms are graph, vertex, edge, and incidence matrix in modern English terminology.

Résumé. L'article porte sur le développement de l'idée de dénotation dans la théorie des graphes entre 1894 et 1936. On considère en particulier les publications de langue française. Les auteurs discutés sont Poincaré, Brunel, Chuard, Sainte-Laguë et König. Les notions, en terminologie française moderne, sont graphe, sommet, arête et matrice d'incidence.

1. Introduction

1.1. The Zeroth Book on Graph Theory

It is usually said that the first book on graph theory was written by D. König in [1936]. However, it is nearly unknown that ten years earlier A. Sainte-Laguë published a book in French [Sainte-Laguë 1926] which I shall consequently call the 'zeroth' book on graph theory. The fact that this book is not cited in modern books written outside of France is quite strange since it is mentioned in König's book several times.

> Manche Autoren haben allerdings die Graphen schon ihrer selbst willen untersucht: neben G. Brunel und A. Sainte-Laguë ist hier vor allem H. Whitney zu nennen [...]
> Auch einige bibliographische Angaben des Mémorialreferates von Sainte-Laguë uber Graphen konnte ich gebrauchen. [König 1936, p. VI]

König mentions Sainte-Laguë as a mathematician who investigated graphs as objects in their own right and especially mentions his bibliographical list which was useful to him.

Sainte-Laguë's book of [1926] is an extension of his thesis in Paris of 1924 which investigated polygonal and bipartite graphs. The following table of contents should give the reader an overview.

I. Introduction et définition
II. Arbres
III. Chaines et circuits
IV. Réseaux réguliers
V. Réseaux cubiques
VI. Tableaux
VII. Réseaux cerclés
VIII. Échiquier
IX. Marche du cavalier

The reason that Sainte-Laguë's book of 64 pages is much shorter than König's is that many results are not proved in the text. Instead Sainte-Laguë refers to his thesis [Sainte-Laguë 1924] or to unpublished manuscripts of his own. A more detailed discussion of [Sainte-Laguë 1926] will be contained in a subsequent paper of the author.

1.2 From Brunel and Poincaré to Sainte-Laguë's book

The fact that this book of Sainte-Laguë is rather unknown together with the remark of König that he could use it quite well made the author start to investigate the development of early graph theory in the French mathematical literature. Thus this paper will describe the use of some notions in graph theory, mainly for the basic objects which are called vertices and edges today (in French *sommets* and *arêtes)*. The main authors of this period are G. Brunel and H. Poincaré at the end of the 19th century and J. Chuard and A. Sainte-Laguë after 1920.

Throughout this paper the basic citations are given in the original language and are not translated in order not to exceed the allowed size of this paper. Instead the contents of the citations is described briefly.

2. Henri Poincaré and Jules Chuard

In the years around 1900 the famous French mathematician Henri Poincaré wrote a series of papers on what he called *analysis situs*. These papers were a breakthrough in the development of modern topology.

In one of the *compléments* [Poincaré 1899] Poincaré discusses polyhedra in p dimensions which consist of certain *variétés* v_p (the v_1 are edges *(arêtes)* and the v_0 are vertices *(sommets)* of the polyhedron). He continues as follows.

> Considérons l'une des v_{p-1}, a a_1^{p-1} par exemple ; cette variété devra séparer, l'une de l'autre, deux des v_p et deux seulement, de sorte que, parmi les nombres $\varepsilon_{i,1'}^{p}$ il y en aura un qui sera égal à +1, un qui sera égal à -1 et tous les autres seront égaux à 0. [Poincaré 1899, 12, p.292]

In this text Poincaré introduces a number $\varepsilon_{i,1'}^{p}$ describing, the incidence relation of *variétés* v_{p-1} and v_p by numbers +1, -1, and 0.

More than twenty years after Poincaré's paper Jules Chuard wrote his *thèse de doctorat* in Lausanne in 1921 and published a paper [Chuard 1922] on *analysis situs* referring to the papers of

Poincaré on the same subject in his introduction. In his first chapter Chuard introduces an object which he calls *configuration linéaire* as follows.

> Nous considérons dans un espace, dont il n'est pas nécessaire, pour l'instant, de fixer la dimension, un certain nombre de segments linéaires. Soit α_1 ce nombre. Ces segments peuvent être rectilignes ou courbes, plans ou gauches, peu importe. Nous conviendrons de les désigner sous le nom d'arêtes.
> Nous nommerons sommet un point qui est situé à l'extrémité d'une arête [...]
> Soit α_0 le nombre des sommets.
> Maintenant nous désignons sous le nom de *configuration linéaire* l'ensemble des arêtes considérées et de leurs sommets frontières [...] [Chuard 1922, 187]

Chuard's *configuration linéaire* consists of certain linear segments (which can be straight or curved) called *arêtes* with end points (*sommets*). The incidence relations in this structure are described by a certain matrix as follows.

> Il est possible de caractériser une configuration linéaire au moyen d'une certaine matrice à laquelle nous donnerons le nom de matrice T_1 [...]. [Chuard 1922, 191]

> Chaque arête relie toujours et seulement deux sommets différents de la configuration. Deux arêtes qui se rencontrent apparemment en un point, non indiqué comme sommet, ne sont pas censées se couper en ce point. [Chuard 1922, 188]

The last sentences of Chuard describe very clearly that each *arête* is related to exactly two *sommets*. If two *arêtes* intersect in a point which is not a *sommet* they are considered to be disjoint. This shows clearly that Chuard regards his structure to be finite. He discusses combinatorial structures which were later called graphs. A direct translation of his term "linear configuration" was fortunately not used since configurations had already been defined more than forty years earlier. For further details see [Gropp 1990] and other publications of the author.

3. George Brunel

Another mathematician of French language who influenced the development of terminology in graph theory was George Brunel. He published a lot of papers in Bordeaux in the last decade of the 19th century. His perhaps best known paper was published after his death in 1900 in a better available French journal [Brunel 1901]. There he determined all Steiner triple systems with thirteen elements. For further details on their history see [Gropp 1991].

In a paper of [1895], Brunel already defines a *réseau* consisting of *sommets*, et *arêtes* and explicitly mentions that the form of an *arête* is not at all important.

> Considérons un ensemble de points reliés les uns aux autres par des lignes de forme quelconque ; la configuration formée par la totalité des points et des lignes constitue un *réseau* ; les points recevront le nom de *sommets,* les lignes le nom *d'arêtes* du réseau. Au point de vue où nous nous plaçons ici, la forme d'une arête que relie deux sommets est complètement indifférente [...]
> Le nombre des sommets d'où part un nombre impair d'arêtes est toujours pair [...]. [Brunel 1895, 165]

The last cited sentence states the fact that the number of vertices of odd degree is even; this is the so-called 'hand-shaking lemma'. In the following he introduces a matrix describing whether two *sommets* are connected. A double entry in cell (i, j) denotes that i and j are connected by an edge, otherwise the cell is empty. The example describes the graph K_3, a triangle.

> Un réseau étant donné, distinguons les différents sommets [...] par des lettres *a, b, c, d,* [...]. En désignant par *S* le nombre des sommets, on formera un tableau à double entrée contenant *S* lignes et *S* colonnes. [Brunel 1895, 166]

	a	*b*	*c*
a		*a* *b*	*a* *c*
b	*b* *a*		*b* *c*
c	*c* *a*	*c* *b*	

One of the reasons of Brunel's interest in these *réseaux* can be found in two consecutive papers of the same journal. In [Brunel 1894a] he introduces regular graphs where all degrees are equal.

> Nous appelons *réseau régulier* un réseau tel que de chaque sommet parte le même nombre d'arêtes. [Brunel 1894a, 4]

In the second paper [Brunel 1894b] he applies this notion to the problem of determining the structure of chemical molecules, e.g. C_6H_6.

> D'une façon générale, la représentation graphique des composés chimiques de formule donnée peut être faite à l'aide d'un réseau déterminé [...]. Étant donnés 6 atomes tétravalents et 6 atomes monovalents, comment peut-on relier entre eux ces 12 atomes en sorte que toutes les valences soient occupées ? [Brunel 1894b, 8]

The description of chemical molecules was one of the roots of graph theory in the 19th century. After different notations of Couper (1858), Loschmidt (1861), and Kekulé (1861), it was Alexander Crum Brown, a chemist in Edinburgh, who in 1864 introduced the way of describing chemical molecules which has been usual until now.

A further application of Brunel's investigations of graphs is in the theory of configurations which was quite important at the turn of the century. For further details see [Gropp 1990]. Brunel used the configurations 10_3 for his construction of the Steiner systems S(2,3,13) [Brunel 1901; Gropp 1991]. In one of his papers [Brunel 1894c] Brunel explains the relation of configurations and graphs.

> Si l'on considère 9 éléments que nous représenterons par les chiffres 1, 2, 3, ..., 9, on peut former un synthème de triades contenant toutes les duades, et chacune d'elles une seule fois ; une des formes [...] est la suivante :
>
> 123 145 167 189
> 478 279 258 246 A
> 569 368 349 357
>
> Il en est de même de la suite
>
> 145 235 378
> 167 246 349 C
> 189 279 568
>
> où n'apparait aucune des duades
>
> $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{8}, \frac{3}{6}, \frac{4}{7}, \frac{4}{8}, \frac{5}{7}, \frac{5}{9}, \frac{6}{9}$
>
> [Brunel 1894c, 28-29]

Brunel's example C is a configuration 9_3. For the 2-subsets which do not occur in a line of the configuration he uses the same notation as in his matrix cells. The 3 configurations 9_3 can be distinguished by these configuration graphs.

4. André Sainte-Laguë

André Sainte-Laguë continues the research of Brunel, Poincaré and Chuard. In a paper of 1923 [Sainte-Laguë 1923] he introduces *réseaux* consisting of *sommets* and *chemins.*

> La présente Note contient les principales propriétés des réseaux, ce mot désignant un ensemble de points du plan ou de l'espace dont certains sont joints par des chemins de forme arbitraire, le seul point

essentiel étant de savoir pour deux sommets donnés s'il sont ou non joints par un chemin. Deux réseaux sont donc identiques si on peut les faire correspondre chemin à chemin et sommet à sommet.
Cette étude, que nous avons commencée il y aura bientôt vingt ans, a été jusqu'ici peu poussée en France comme à l'étranger (où au lieu du mot réseau on emploie parfois celui de graphe) [...]. [Sainte-Laguë 1923, 1202]

In the special case of bipartite graphs he considers a certain *tableau rectangulaire.* This matrix describes the graph and is used again in his thesis of [1924] (see below).

A tout réseau bipartie uniforme on peut associer un tissu, c'est-à-dire un tableau rectangulaire dont certaines cases contiennent des croix, le nombre des croix étant le même dans chaque ligne d'une part et dans chaque colonne d'autre part. [Sainte-Laguë 1923, 1204]

Nous appellerons *réseau* un ensemble de points ou carrefours qui seront les *sommets,* joints entre eux par des traits ou côtés qui seront les *chemins* du réseau [...] Deux réseaux seront dits *homéomorphes* [...] Il en résulte que la forme des schémas, plans ou gauches, par lesquels il pourra être commode de représenter des réseaux n'a aucune importance théorique. [Sainte-Laguë 1924, 3]

After having introduced the subject in his thesis Sainte-Laguë discusses *réseaux biparties* where the edges are denoted by pairs of numbers as follows.

CHAPITRE II. Réseaux biparties et tissus.

On peut numéroter 1, 2, 3, ... les sommets A d'une catégorie et de même les sommets B de l'autre. Un réseau [...] se représente alors par une liste telle que la suivante.

12, 13, 24, 14, 23, 34

La première ligne indique que B1 est joint à A1 et A2; la deuxième que B2 est joint à A1 et A3 etc...
Le tableau ci dessus peut s'écrire autrement : 1 se trouve dans le lignes 1, 2 et 4 ; 2 dans les lignes 1, 3 et 5, ..., d'où le nouveau tableau :

124, 135, 256, 346

Il est identique à celui qu'on aurait obtenu ci-dessus en faisant jouer aux sommets A le rôle des sommets B, et inversement [...]. [Sainte-Laguë 1924, 50]

By interchanging the role of A and B Sainte-Laguë obtains the 'dual' structure. He describes both graphs by a matrix with entries X or blank space.

Le réseau déjà considéré au début du chapitre devient ici :

X	X		X		
X		X		X	
	X			X	X
		X	X		X

Nous appellerons tissu tout tableau rectangulaire de m lignes et n colonnes, tel que le nombre p des lettres X situées dans chaque ligne soit constant, ainsi, d'autre part, que le nombre q des lettres X situées dans chaque colonne. Les lettres m, n, p, q ont gardé la signification indiquée au début du chapitre précédent, et l'on a toujours: pm = qn [...]

THEOREME. *Dans tout tissu carré on peut trouver une permutation.*

[Sainte-Laguë 1924, 51-52]

Sainte-Laguë introduces the word tissu for a rectangular matrix with constant row sum and column sum, in modern terminology a tactical configuration. The theorem is equivalent to the Theorem of König of 1914 proved by Steinitz in 1894 (Compare [Gropp 1996]).

In the conclusion Sainte-Laguë refers to the numerous relations of graph theory to other parts of mathematics.

Conclusion. L'étude des réseaux peut être poursuivie dans bien des voies différentes et chacune des définitions posées au début permet d'amorcer une recherche nouvelle [...]
Bien des questions d'arithmétique supérieure, de géométrie de situation, de théorie des jeux, par exemple les recherches de Lucas ou de Tarry se rattachent immédiatement à la théorie des réseaux.
[Sainte-Laguë 1924, 62]

Two years after his thesis Sainte-Laguë published his first book [Sainte-Laguë 1926]. It is an extension of the thesis and will be described in a further paper as already mentioned in the introduction.

An important contribution to the notation of graph theory was made by Chuard [Chuard 1932] in 1932 where he used the following matrix to describe a certain nonconnected graph with 6 vertices a^0_1, ..., a^0_6 and 5 edges a^1_1, ..., a^1_5 where the entry 1 denotes incidence and 0 denotes non-incidence of vertex and edge. This is exactly the modern version of an incidence matrix.

	a_1^1	a_2^1	a_3^1	a_4^1	a_5^1
a_1^0	1	1	0	0	0
a_2^0	0	1	1	0	0
a_3^0	1	0	1	0	0
a_4^0	0	0	0	1	0
a_5^0	0	0	0	1	1
a_6^0	0	0	0	0	1

5. Dénes König

Ten years after the appearance of the 'zeroth' and not much known book on graph theory the Hungarian mathematician Dénes König wrote the first book on graph theory [König 1936]. It served as the reference book on graph theory for about twenty-five years .

In his preface König mentions two points of view, the topological one and the combinatorial, set-theoretical one. These are also represented in the subtitle of the book *Kombinatorische Topologie der Streckenkomplexe.* He explicitly states that the *Punkte* are just distinguishable elements and a *Kante* is nothing else than the union of their two *Punkte*.

> Vorwort. Die Graphentheorie läßt sich von zwei verschiedenen Standpunkten aus auffassen. Erstens bildet sie, als die Theorie der eindimensionalen Komplexe, den ersten Teil der allgemeinen Topologie. Zweitens läßt sie sich — wenn man von ihrem kontinuierlich-geometrischen Inhalt abstrahiert — als ein Zweig der Kombinatorik und der abstrakten Mengenlehre auffassen [...] Die Punkte (Knotenpunkte) sind beliebige unterscheidbare Elemente, und eine Kante ist nichts anderes als eine Zusammenfassung ihrer beiden Endpunkte. [König 1936, 1]

In the beginning of his book König fixes his terminology in German. He calls the whole structure a *Graph,* the elements are called *Punkte* or *Knotenpunkte* and the union of two of them *Kante.* In a footnote he refers to the following alternative names in German, French, and English.

> *Graph:* Linearkomplexion, Liniensystem, Streckenkomplex, Kantenkomplex, Netz, (Fr.) réseau.

> *Knotenpunkt:* (En.) node, knot, vertex, (Fr.) sommet, noeud, carrefour.
>
> *Kante:* (En.) branch, edge, (Fr.) chemin, arête, lien.

König continues by again mentioning explicitly the abstract character of graphs as well as their geometrical visualization.

> Bei der anschaulichen Deutung der Graphentheorie (besonders im Falle endlicher Graphen) kann man die Knotenpunkte und Kanten als in einen metrischen (oder nur topologischen) Raum, etwa in den zwei- oder dreidimensionalen Euklidischen Ranm eingebettet betrachten und die Kanten etwa als Jordansche Kurvenbogen interpretieren. Dies ist aber keineswegs notwendig. Vom prinzipiellen Standpunkte aus, den wir einnehmen, sind die Punkte beliebige Elemente, und die Kante *AB* besitzt die einzige definierende Eigenschaft, daß sie ihre Endpunkte *A* und *B* bestimmt. [König 1936, p.V]

Later in his book König introduces matrices to describe graphs in the same way as Poincaré around forty years earlier.

> Es seien P_i ($i = 1,2, ..., \alpha_0$) Knotenpunkte und k_j ($j = 1, 2, ..., \alpha_1$) die Kanten eines endlichen gerichteten Graphen G. Wir definieren $\alpha_0\alpha_1$ Zahlen ε_{ij} ($=1,2,...,\alpha_0; j = 1,2,...,\alpha_1$) folgendermaßen:
>
> $\varepsilon_{ij} = 1$, wenn P_i der Anfangspunkt von k_j ist;
> $\varepsilon_{ij} = -1$, wenn P_i der Schlußpunkt von k_j ist;
> $\varepsilon_{ij} = 0$, wenn P_i kein Endpunkt von k_j ist.
>
> Die so definierte Matrix [...] welche α_0 Zeilen und α_1 Spalten besitzt, heißt die Inzidentmatrix von G [...]. [König 1936, 141]

6. Conclusion

The author's aim in writing this paper was, on the one hand, to describe the development of graph-theoretic notation in the forty years before the appearance of König's book. Although the 'zeroth' book of Sainte-Laguë became not much known the French writing authors which are discussed in this paper contributed a lot to this development.

On the second hand, it was my aim to explain where graph theory originated from. Although the terminology was geometrical more or less it can be clearly seen from the citations that the objects were rather set-theoretical than geometrical ones. I think that the origin of graph theory as a by-product of topology describes only a small part of the truth. Many applications of graph theory contributed to its establishment as a mathematical theory of its own. It is hard to decide whether the work of Poincaré or the papers of more unknown mathematicians like Chuard and Brunel had a greater influence on the books of Sainte-Laguë and König. Anyhow, the further development of this new theory after 1936 can be understood in a better way if the early beginnings which are described in this paper are taken into consideration.

References

Brunel, Georges

1894a Réseaux réguliers, *Mém. soc. des sciences physiques et naturelles de Bordeaux* (1894-1895), 3-7.

1894b Polymérisation du carbone, *Mém. soc. des sciences physiques et naturelles de Bordeaux* (1894-1895), 8-10.

1894c Sur le problème des alignements, *Mém. soc. des sciences physiques et naturelles de Bordeaux* (1894-1895), 28-32.

1895 *Analysis situs*, Recherches sur les réseaux, *Mém. soc. des sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 5, 165-215.

1901 Sur les deux systèmes de triades de treize éléments, *Journal de Math. pures et appl. (5)* 7, 305-330.

Chuard, Jules

1922 Questions d'*analysis situs*, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 46, 185-224.

1932 Les réseaux cubiques et le problème des quatre couleurs, *Mém. Soc. Vaudoise des Sciences Naturelles*, 25, 41-101.

Gropp, Harald

1990 *On the history of configurations*, ed. A.Diez, J.Echeverria, A.Ibarra, Bilbao, 263-268.

1991 The history of Steiner systems S(2,3,13), *Mitteilungen Math. Ges. Hamburg*, 12, 849-861.

1996 *On combinatorial papers of König and Steinitz* (submitted).

König, Dénes

1936 *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, Leipzig.

Poincaré, Henri

1899 Complément à l'*analysis situs*, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 13, 285-343.

Sainte-Laguë, André

1923 Les réseaux, *Comptes rendus hebdomaires des séances de l'acad. de sciences*, 176, 1202-1205.

1924 *Les réseaux, Dissertation*, Paris.

1926 *Les réseaux (ou graphes)*, Paris.