PHILOSOPHIA SCIENTIÆ

JEAN-PAUL PIER

Henri Poincaré croyait-il au calcul des probabilités ?

Philosophia Scientiæ, tome 1, nº 4 (1996), p. 69-83
<http://www.numdam.org/item?id=PHSC_1996__1_4_69_0>

Henri Poincaré croyait-il au calcul des probabilités ?

Jean-Paul Pier
Centre Universitaire de Luxembourg
Séminaire de mathématique

Philosophia Scientiæ, 1 (4), 1996, 69-83.

Résumé. A partir de 1886, Henri Poincaré occupe la chaire de Calcul des probabilité de la Sorbonne pendant dix ans. Il rédige un *Calcul des probabilité* qui paraît en deux éditions, en 1896 et 1912. La première a un caractère élémentaire ; la seconde bénéficie d'ajouts axés sur de nouvelles perspectives. Poincaré exprime ses regrets de ne pas avoir pu formuler une théorie mathématiques rigoureuses, n'hésitant pas à parler de *contradictio in terminis*.
Cependant, les écrits de Poincaré font intervenir des considérations qui seront mises à profit ultérieurement. La seconde édition de son ouvrage fait usage de notions mathématiques modernes appelées à un grand avenir telles que groupe et système hypercomplexe. Il considère aussi un concept mathématico-physique encore très actuel, l'ergodicité. Dans «Le hasard» (1908), Poincaré formule des idées qui pourront s'interpréter dans le thème du chaos.

Abstract. From 1886 to 1896 Henri Poincaré is lecturing on Probability at the Sorbonne. He publishes a Calcul des probabilités, edited in two versions, in 1896 and 1912. The first has elementary flavour; the second is complemented by considerations opening new perspectives. Poincaré regrets not having been able to produce a rigorous mathematical theory, evoking some kind of *contradictio in terminis*.
Yet Poincaré's writing bring in ideas that will be largely studied later. The second edition of his monograph makes use of modern concept like group and hypercomplex system. Poincaré also considers a problem partaking from physics and mathematics, ergodicity. In «Le hasard» (1908) Poincaré develops ideas that may be interpreted as themes of recently introduced Catastrophe Theory.

C'est en 1886 que Poincaré devient titulaire de la chaire de Physique mathématique et de Calcul des probabilités de la Sorbonne. Elle avait été fondée en 1840. Les prédécesseurs de Poincaré ont été Briot et Lippmann ; il occupera la chaire pendant dix ans.

En vue d'évaluer les contributions et l'opinion de Poincaré concernant le calcul des probabilités il convient de se reporter presque exclusivement à une seule source, à savoir aux éditions successives de son *Calcul des probabilités* [Poincaré 1896 ; 1912]. Sheynin, dans son importante étude sur le *Calcul des probabilités* de Poincaré, fait ce commentaire :

> Probability was situated on the outskirts of his scientific interest. Poincaré was able to write a treatise that remained, perhaps for twenty years, the main book of information on the theory of probability in Europe. [Sheynin 1991, 165]

On sait, cependant, que Poincaré a été curieux de tout domaine imaginable ; mais dans l'Analyse de ses travaux scientifiques [Poincaré 1921 ; 1896], il ne mentionne guère le calcul des probabilités.

L'ancêtre immédiat du traité de Poincaré est la monographie de Bertrand [1888], portant d'ailleurs le même titre. Son livre est le produit d'un cours professé par Henri Poincaré à la Faculté des sciences de Paris pendant le second semestre de l'année 1893-94.

Une rédaction est réalisée par A. Quiquet, ancien élève de l'Ecole normale supérieure de Paris ; elle paraît en 1896.

La présentation est d'un caractère élémentaire. Les vingt-deux leçons ne comportent pas de titre. Elles marquent bien une progression continue, mais donnent tout de même l'impression d'une promenade à bâtons rompus qui se précise au fur et à mesure de l'avancement. Dans la deuxième édition, revue et augmentée par l'auteur, de 1912, les chapitres, au nombre de quinze, reçoivent des titres ; un seizième chapitre supplémentaire est consacré à des questions diverses.

La leçon I (Chap. I. Définition des probabilités) débute ainsi :

> L'on ne peut guère donner une définition satisfaisante de la Probabilité. On dit ordinairement : La probabilité d'un événement est le rapport du nombre des cas favorables à cet événement au nombre total des cas possibles. [Poincaré 1896, 1]

Comme exemples Poincaré cite le jeu de dés, le tirage de cartes ou de boules. Il mentionne deux autres exemples dus a Bertrand relatifs au tirage de coffrets et au jeu de boules. Il insiste sur la nécessité de distinguer des cas qui ne sont pas également probables :

> La définition complète de la probabilité est donc une sorte de pétition de principe : comment reconnaître que tous les cas sont également probables ? Une définition mathématique ici n'est pas possible ; nous devrons dans chaque application faire des conventions, dire que nous considérons tel et tel cas comme également probables. Ces conventions ne sont pas tout à fait arbitraires, mais échappent à l'esprit du mathématicien qui n'aura pas à les examiner, une fois qu'elles sont admises.
> Ainsi tout problème de probabilité offre deux périodes d'étude : la première, métaphysique pour ainsi dire, qui légitime telle ou telle convention ; la seconde, mathématique, qui applique à ces conventions les règles du calcul. [Poincaré 1896, 5-6]

Poincaré annonce qu'il va considérer successivement trois situations : 1°) Le nombre des cas est fini non très grand ; 2°) il est très grand ; 3°) il est infini. Dans la première situation on peut faire appel à l'analyse combinatoire ; dans la deuxième on ne dispose que d'une expression approchée de la probabilité moyennant la loi des grands nombres de Bernoulli ; pour la dernière situation Poincaré cite à titre d'exemple le problème de l'aiguille de Buffon.

Dans la leçon II (Chap. II. Probabilités totales et composées) Poincaré transcrit deux theorèmes fondamentaux : 1°) Le théorème des probabilités totales pour le cas où un événement peut se produire de plusieurs manières ; 2°) le théorème des probabilités composées concernant des événements indépendants. Les exemples cités sont relatifs encore aux jeux de dés ou de cartes, mais aussi aux scrutins électoraux.

Au cours de la leçon III (Chap. III. L'espérance mathématique) les principes précédents sont illustrés au moyen de nouveaux exemples ou exercices concernant le jeu de dés, la loterie, le jeu de la poule.

Si à un moment donné un joueur a la probabilité p de réaliser un gain d'un montant α, $p\alpha$ se définit comme l'espérance mathématique.

La leçon IV expose le paradoxe de Saint-Pétersbourg. La probabilité de la ruine d'un joueur est d'autant plus petite que sa fortune est plus grande.

La leçon V (Chap. IV. Le théorème de Bernoulli) établit la probabilité pour qu'au cours de m épreuves deux événements contradictoires de probabilités respectives p et q aient lieu le premier α fois, le second m-α fois, à savoir

$$u_\alpha = \frac{m!}{\alpha!(m-\alpha)!} p^\alpha q^{m-\alpha};$$

c'est un terme du développement du binôme $(p + q)^m$.

Afin d'évaluer le cas le plus probable, Poincaré considère le rapport $\frac{u_{\alpha+1}}{u_\alpha} = \frac{m-\alpha}{\alpha+1}\frac{p}{q}$ de deux termes consécutifs du développement. Pour la probabilité maximale il faut avoir $\frac{u_{\alpha+1}}{u_\alpha} < 1$ et $\frac{u_\alpha}{u_{\alpha-1}} > 1$, à savoir $mp + p > \alpha > mp - q$. Si m est très grand, $\frac{\alpha}{m}$ est voisin de p.

Poincaré écrit :

> C'est une forme d'établissement du théorème de Bernoulli. [Poincaré 1896, 53]

Poincaré enchaîne en disant que la valeur probable de la quantité M est

$$\sum M u_\alpha = \sum M \frac{m!}{\alpha!(m-\alpha)!} p^\alpha q^{m-\alpha} = F(p,q);$$

il observe que celle de $M\alpha$ vaut $p\frac{\partial F}{\partial p}(p,q)$. Si M = 1, on a

$x\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = mx(x+y)^{m-1}$; on fait $x = p$, $y = 1 - p = q$ pour voir que mp est la valeur probable de α. Opérant deux fois de cette manière, il écrit

$$x(m(x+y)^{m-1} + m(m-1)x(x+y)^{m-2}),$$

fait $x = p$, $y = q$ et dit que la valeur probable de α^2 est $mp + m^2p^2 - mp^2$.

Définissant l'écart $h = \alpha - mp$, Poincaré veut déterminer la valeur probable de $|h|$. D'après sa méthode, la valeur probable de $h^2 = \alpha^2 - 2mp\alpha + m^2p^2$ est

$$(mp + m^2p^2 - mp^2) - 2mpmp + m^2p^2 = mp(1-p).$$

La leçon VI (Chap. V. Application de la formule de Stirling) s'occupe de la détermination de valeurs approchées grâce à la formule de Stirling

$$n! = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = \Gamma(n+1).$$

Ecrivant $n! = n^n e^{-n}\sqrt{n}F(n)$, il est montré que

$$\lim_{n\to\infty} Log \frac{F(n+1)}{F(n)} = c \in R$$

La formule de Wallis fournit $c = \sqrt{2\pi}$. A son tour, la formule de Stirling conduit, avec $\alpha = mp + \lambda\sqrt{m}$, à

$$Log\ u_\alpha \sim Log \frac{1}{\sqrt{2\pi mpq}} - \frac{\lambda^2}{2pq},$$

$$u_\alpha \sim \frac{e^{-\frac{\lambda^2}{2pq}}}{\sqrt{2\pi mpq}}.$$

Le maximum de u_α correspond à $\lambda = 0$.

Poincaré formule la question suivante :

> Quelle est la probabilité pour que λ soit compris entre λ et $\lambda + d\lambda$?

C'est une somme de termes tels que α varie de α à $\alpha + k$, où

$$\alpha = mp + \lambda\sqrt{m}$$

$$\alpha + k = mp + (\lambda + d\lambda)\sqrt{m} \;;$$

donc le nombre entier k s'ecrit $d\lambda\sqrt{m}$.

La probabilité vaut $u_{\alpha+1}+\ldots+u_{\alpha+k}$; ces k termes sont tous sensiblement égaux à u_α ; la probabilité cherchée est

$$\frac{ke^{-\frac{\lambda^2}{2pq}}}{\sqrt{2\pi mpq}} = \frac{e^{-\frac{\lambda^2}{2pq}}}{\sqrt{2\pi pq}}d\lambda .$$

La probabilité pour que λ soit compris entre λ_0 et λ_1 tend vers

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}\sqrt{\frac{1}{2\pi pq}}e^{-\frac{\lambda^2}{2pq}}d\lambda .$$

Ces considérations sont prolongées dans la leçon VII (Chap. VI. La loi de Gauss et les épreuves répétées). Lorsque la probabilité pour que x soit compris entre x_0 et x_1 est donnée par

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}dx,$$

la loi de probabilité sera dite normale.

Le Cam écrit prestement en 1986, faisant le point du théorème limite central autour de 1935 :

> Bertrand and Poincaré wrote treatises on the calculus of probability, a subject neither of the two appeared to know. [Le Cam 1986, 81]

La leçon VIII (Chap. VII. Probabilité du continu) illustre les difficultés qui se rencontrent quand on veut passer du cas fini au cas infini, à la suite du remplacement de Σ par $\int$. Poincaré cite le cas du *paradoxe de Bertrand* où des choix différents de la probabilité conduisent à des résultats divergents pour le problème suivant : Quelle est la probabilité pour qu'une corde d'une circonférence donnée soit plus grande que le côté du triangle équilatéral inscrit ? Poincaré affirme :

> Le mathématicien n'a plus aucune prise sur le choix de cette hypothèse ; mais, il doit une fois qu'elle est choisie, porter son attention à ne pas en faire une autre qui la contredise. [Poincaré 1896, 97]

Au cours de la leçon IX (Chap. VIII. Applications diverses) Poincaré traite de plusieurs problèmes géométriques faisant intervenir des intégrales doubles ou triples.

En général, il envisage la question suivante : Sur une sphère on trace une figure mobile ; quelle est la probabilité pour que cette figure satisfaisse à certaines conditions ?

La leçon X est encore relative à des problèmes géometriques de natures très diverses.

La leçon XI (Chap. IX. Probabilités des causes) porte sur l'étude des probabilités des causes : Etant donné que tel effet s'est produit, quelle est la probabilité que telle cause ait été mise en jeu ? La formule de Bayes est présentée.

Poincaré dit encore:

> La convention qui repose sur des cas regardés comme également probables contiendra toujours un très large degré d'arbitraire. [Poincaré 1896, 131].

Dans la leçon XII (Chap. X. La théorie des erreurs et la moyenne arithmétique) est abordée la théorie des erreurs. Si pour une grandeur on a mesuré les valeurs $x_1, ..., x_n$, quelle est la probabilité pour que la valeur exacte soit comprise entre z et $z + dz$? Pour Poincaré, il faut alors introduire une loi des erreurs qui est à admettre par convention. Voici ce qu'il dit à ce propos dans son Cours d'astronomie générale professé à l'Ecole polytechnique de Paris en 1907-08 :

> On admet que dans toutes les observations [les erreurs accidentelles] obéissent à la loi de Gauss : la probabilité pour que l'erreur soit comprise entre x et $x + dx$ est $Ke^{-hx^2}dx$, h et K désignant deux constantes. [Poincaré 1907-1908, 7]

> La loi de Gauss est généralement admise, soit comme un théorème, soit comme un fait d'expérience. En réalité elle n'a pas été démontrée rigoureusement et l'expérience ne la vérifie pas toujours. La loi de Gauss sera applicable chaque fois que l'erreur totale sera la résultante d'erreurs partielles, accidentelles, très nombreuses, très petites et indépendantes. [Poincaré 1907-1908, 8]

Ici il apporte ce commentaire :

> [La loi des erreurs] ne s'obtient pas par des déductions rigoureuses ; plus d'une démonstration qu'on a voulu en donner est grossière, entre autres celle qui s'appuie sur l'affirmation que la probabilité des écarts est proportionnelle aux écarts. Tout le monde y croit cependant, me disait un jour M. Lippmann, car les expérimentateurs s'imaginent que c'est un théorème de mathématiques, et les mathématiciens que c'est un fait expérimental. [Poincaré 1896, 149]

Poincaré explicite la methode de Gauss.

Si dz est constant, la probabilité pour que z soit compris dans l'intervalle dz s'écrit

$$\psi(z)\varphi(x_1,z)\varphi(x_2,z)\dots\varphi(x_n,z)dz$$

Gauss choisit d'abord $\psi = 1$ et $\varphi(u, v) = \varphi(v\text{-}u)$. Quand la valeur

$$\varphi(z-x_1)\varphi(z-x_2)\dots\varphi(z-x_n)$$

est-elle maximale ? Le passage à la dérivée logarithmique par rapport à z conduit à

$$\frac{\varphi'(z-x_1)}{\varphi(z-x_1)}+\frac{\varphi'(z-x_2)}{\varphi(z-x_2)}+\dots+\frac{\varphi'(z-x_n)}{\varphi(z-x_n)}=0$$

$$F(x_1) + F(x_2) + \dots + F(x_n) = 0$$

Cette condition est à réaliser chaque fois que $x_1 + x_2 + \dots + x_n = nz$. Ecrivons

$$F'(x_1)dx_1 + F'(x_2)dx_2+\dots+F'(x_n)dx_n = 0$$

$$dx_1 + dx_2 + \dots + dx_n = 0$$

Alors, $F'(x_1) = F'(x_2) = \dots = F'(x_n) = -a$;

$$F(x_1) = a(z\text{-}x_1) + b,$$

$$\text{Log } \varphi(z-x_1) = \frac{a(z-x_1)^2}{2} + b(z-x_1)+c\ .$$

D'autre part,

$$0 = F(x_1) + F(x_2)+\dots+F(x_n) = \sum_{i=1}^{n} a(z-x_i)+nb\ ,$$

$$0 = x_1 + x_2+\dots+x_n - nz = -\sum_{i=1}^{n}(z-x_i)\ .$$

D'où $b = 0$ et

$$\varphi(z-x_1) = e^c e^{\frac{a(z-x_1)^2}{2}}\ .$$

Enfin, c se détermine par la condition

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(z-x_1)dx_1 = 1\ .$$

Posant $-a = 2h$, $z - x_1 = y$, via la formule de Stirling, on arrive finalement à

$$\varphi(y) = \sqrt{\frac{h}{\pi}} e^{-hy^2} .$$

Poincaré rappelle les objections de Bertrand : Le choix de ψ et φ. Ne confond-on pas *valeur la plus probable* avec *valeur probable ?*

Poursuivant ces réflexions au cours de la leçon XIII et se demandant pour quelle raison le choix de la moyenne semble denué de sens, Poincaré écrit :

> Pourquoi cependant ne nous trompe-t'elle guère ? Pourquoi est-il légitime de prendre la moyenne ? C'est, au fond, parce que les erreurs sont très petites ? [Poincaré 1896, 166]

Si au lieu de z, c'est $f(z)$ qu'on mesure, et qu'on applique le postulat de Gauss,

$$f(z) = \frac{f(x_1)+\ldots+f(x_n)}{n} .$$

Pour x_1 voisin de z, on a

$$f(x_1) = f(z) + (x_1 - z)f'(z)$$

et de même avec $x_2, \ldots, x_n$; donc

$$f(z) = f(z) + \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - z)f'(z)}{n} ,$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - z) = 0 ,$$

$$nz = x_1 + \ldots + x_n .$$

Et Poincaré de conclure :

> On arrive donc au même résultat qu'on ait mesuré directement la grandeur z ou une fonction quelconque $f(z)$ de cette grandeur.
> Voilà, en somme, pourquoi on a le droit de prendre la moyenne. [Poincaré 1896, 167]

Revenant sur la théorie des erreurs selon Gauss au cours de la leçon XIV (Chap. XI. Justification de la loi de Gauss), Poincaré écrit :

> Avec toute autre loi [que celle de Gauss], la moyenne deviendra de plus en plus probable quand les observations deviendront de plus en plus nombreuses, mais elle ne sera pas la valeur la plus probable. [Poincaré 1896, 175]

La leçon XV présente une variante pour approcher la loi de Gauss.

Voici le début de la leçon XVI :

> J'ai plaidé de mon mieux jusqu'ici en faveur de la loi de Gauss dont nous allons maintenant tirer les conséquences. Peut-être pourtant la cause n'est-elle pas parfaitement bonne.
> Il ne faudrait pas avoir une sorte de superstition pour la méthode des moindres carrés, à laquelle va nous conduire la loi de Gauss. Nous avons vu que l'on avait parfois des raisons de ne pas adopter cette loi.
> Elle suppose, en effet, qu'il n'y a pas d'erreur systématique et il y en a toujours. [Poincaré 1896, 196]

Envisageant le problème des erreurs commises sur la situation d'un point dans le plan repéré au moyen de deux coordonnées, à l'exemple de Gauss (Chap. XII. Erreurs sur la situation d'un point), Poincaré s'appuie sur le *postulat* : La position la plus probable est le centre de gravité des positions observées, affectées toutes de la même masse.

La XVII^e leçon (Chap. XIII. Méthode des moindres carrés) est relative à la determination des *valeurs les plus convenables* grâce à la méthode des moindres carrés.

Au cours de la XVIII^e leçon Poincaré explique que le problème se proposant de rendre minimum l'expression

$$\sum h_i(z_i - x_i)^2$$

peut, à l'aide d'une normalisation, se ramener au même problème pour l'expression

$$\sum (z_i - x_i)^2 .$$

Il illustre les procédures sur des exemples.

La XIX^e leçon (Chap. XIV. Calcul de l'erreur à craindre) est consacrée à la minimisation de l'expression

$$(y - \lambda_1\mu_1 - \lambda_2\mu_2)^2 ,$$

où μ_1 et μ_2 sont des fonctions *linéaires* en y_1, y_2. Il s'agit de rendre minimal un polynôme homogène du second degré.

La leçon XX est consacrée au problème général de la probabilité *a posteriori*.

La leçon XXI (Chap. XV. Théorie de l'interpolation) aborde une question nouvelle, à savoir la recherche d'une fonction pour le graphe de laquelle on connaît un nombre fini de points.

Cette question est traitée encore plus spécifiquement si on suppose la fonction développable en série dans un domaine.

A la fin de la rédaction, au cours de la leçon XXII, on lit :

> Cherchons à dégager une impression de l'ensemble de ce cours. Dans les données des problèmes, il est entré une part considérable d'arbitraire, même dans les cas les plus simples. [Poincaré 1896, 272]

> On ne peut dépouiller complètement [d']hypothèses arbitraires les questions de probabilités ; aussi le mot de calcul semble-t-il ambitieux, et il ne sert qu'à dissimuler l'ignorance absolue. [Poincaré 1896, 273]

La conclusion est assez brutale :

> On ne doit pas s'attendre à rencontrer quelque résultat satisfaisant. Le calcul des probabilités offre une contradiction dans les termes mêmes qui servent à le désigner et, si je ne craignais de rappeler ici un mot trop souvent répété, je dirais qu'il nous enseigne surtout une chose : c'est de savoir que nous ne savons rien. [Poincaré 1896, 274]

D'ailleurs, dans «Le hasard», article inclus dans l'ouvrage *Science et méthode,* Poincaré affirme :

> Le hasard n'est que la mesure de notre ignorance. [Poincaré 1908, 65]

De l'étude de ce livre de grande valeur se dégage donc l'impression que Poincaré a manqué de satisfaction puisqu'il a dû reconnaître son impuissance à produire un ouvrage de mathématiques suffisamment rigoureux à ses yeux. Il semblait tout de même y tenir car les problèmes envisagés étaient considérés dignes d'interêt et d'une toute autre nature que ceux qu'il écartait délibérément comme l'application du calcul des probabilités à la détermination de la culpabilité d'un accusé.

Au cours de son discours prononcé à l'occasion du jubilé de Bertrand en 1894, Poincaré lui adresse ces paroles-ci, faisant allusion aux œuvres des prédécesseurs :

> Cependant vous ne pouvez partager leur naïve confiance dans l'instrument qu'ils ont créé. Vous savez trop bien qu'ils n'ont pu soumettre à la règle de fer du Calcul ce qui est, par essence, si incertain et si fugitif, qu'à force d'accumuler les hypothèses tacites. Ces hypothèses souvent arbitraires, vous les avez dénoncées impitoyablement, portant vous-même de rudes coups à la science que vous aimez. [Poincaré 1894, 159-160]

Toutefois, dans son livre, Poincaré dit :

> Une question de probabilité ne se pose que par suite de notre ignorance : il n'y aurait place que pour la certitude si nous

> connaissions toutes les données du problème. D'autre part, notre ignorance ne doit pas être complète, sans quoi nous ne pourrions rien évaluer. [Poincaré 1896, 8]

Darboux a raison de rendre cet hommage a Poincaré :

> Bertrand s'était borné à critiquer et à démolir. Poincaré a commencé à reconstruire. [Darboux 1916, xxiv]

Il est vrai que Poincaré ne cite pratiquement aucune référence. Il ne mentionne ni Tchebychev, ni Liapounov, et même ni Laplace ni Poisson. Mais Sheynin observe a juste titre :

> Obviously, as his entire *Calcul des probabilités* also testifies, he never tried to memorize the work of his predecessors and for this very reason he was afraid to refer to them. [Sheynin, 167]

Poincaré ne semble pas avoir été au courant des travaux de Markov. Il ne fera aucune allusion à Borel, grâce aux travaux duquel la notion de mesure a commencé à se présenter comme une donnée fondamentale du calcul des probabilités moderne. Borel avait pourtant été son auditeur et son rédacteur.

Cependant, Darmois pourra dire que le souvenir de Poincaré

> reste attaché à quelques-uns des plus beaux, des plus profonds et des plus féconds développements du Calcul des probabilités. [Darmois 1956, 132]

> En même temps que la forme concrète des problèmes, [à Poincaré] apparaissent immédiatement les correspondants abstraits, la construction mathématique, l'outil efficace qu'il utilise ou qu'il fabrique [...]. Les problèmes qui se présentaient les premiers à l'esprit de Poincaré étaient ceux qui étaient au cœur d'une question générale. [Darmois 1956, 128]

C'est ainsi qu'à la fin de l'édition de 1912 (Chap. XVI. Questions diverses) parlant de *questions diverses,* à propos du problème du battage de cartes, Poincaré fait intervenir la notion de groupe de permutations, qui est en fait plutôt, celle de semi-groupe.

> Un ensemble de permutations forme un groupe quand le produit de deux permutations quelconques de l'ensemble appartient à l'ensemble. [Poincaré 1912, 302]

Si, pour les diverses permutations les probabilités respectives sont p_0, p_1, ..., p_r, Poincaré représente la loi de probabilité par un *nombre complexe* :

> On sait que l'on a inauguré des nombres complexes de la forme
>
> $$X = x_0e_0 + x_1e_1 + \ldots + x_re_r,$$

> où les x sont des quantités ordinaires et les e des unités complexes. Les opérations sur ces nombres complexes se font d'après les règles ordinaires du calcul, avec cette différence que la multiplication, qui reste distributive et associative, peut ne pas être commutative. On définit un système de nombres complexes, en se donnant la règle de multiplication, c'est-à-dire en définissant le produit $e_i e_j$ de deux unités complexes quelconques. [Poincaré 1912, 302]

Poincaré représente la loi de probabilité par le *nombre complexe*

$$P = p_0 e_0 + p_1 e_1 + \ldots + p_r e_r.$$

En fait, il s'agit du *systeme hypercomplexe* qui donnera le concept d'algèbre de Lie. Poincaré fait appel à la théorie des valeurs propres qui a été introduite par E. Cartan.

A la fin de l'édition de 1912 de sa monographie, Poincaré développe ses idées sur l'utilisation du calcul des probabilités dans l'étude du mélange de liquides :

> Je ne dirai que quelques mots d'une autre question dont l'importance est très grande, mais que je ne suis pas en mesure de résoudre. [Poincaré 1912, 322]

Considérant deux volumes v et v', les probabilités P et P' pour trouver une molécule de l'un ou de l'autre en un point du mélange, il se demande :

> Peut-on admettre que, quelle que soit la distribution initiale du liquide, le rapport $\frac{P}{P'}$, tendra vers 1 quand [le temps] t croîtra indéfiniment, et cela d'autant plus vite que les deux volumes v et v' seront plus grands et d'une forme plus simple ?
> Si nous ne pouvons admettre cela, pouvons-nous admettre au moins que le rapport $\dfrac{\int_0^T P dt}{\int_0^T P' dt}$ tend vers 1 quand T croît indéfiniment ?
>
> [*ibid.*]

Poincaré ajoute :

> Nous avons [...] pour ainsi dire, à étudier le mouvement d'un liquide dans un vase à $2n$ dimensions. [Poincaré 1912, 323]

correspondant à un système mécanique à n coordonnées.

Poincaré peut être considéré comme un précurseur de l'étude d'un thème lié au calcul des probabilités et qui continue à être actuelle, à savoir le mouvement brownien. Il écrit :

> Quelle que soit la probabilité de telle ou telle situation du système à l'instant zéro, n'allons-nous pas avoir une probabilité uniforme pour cette situation à l'instant *t*, pourvu que *t* soit assez grand ?
> C'est là ce qu'on postule dans la théorie cinétique des gaz, et en particulier quand on veut établir le théorème de Boltzmann-Maxwell. Il y aurait donc un grand intérêt à justifier ce postulat. [Poincaré 1912, 323]

Il s'agit de bien plus que du coup d'envoi de la théorie de l'ergodicité qui ne recevra une première solution que vingt ans plus tard, de la part de Birkhoff. A ce propos, Hadamard écrira :

> Quoique, physiquement parlant, la conclusion visée [...] reste valable, on voit que les conditions de sa validité mathématique sont à préciser.
> Les nouveaux aspects que prenait ainsi la théorie physique ont mis une fois de plus en évidence, en en faisant sentir tout le prix, cette universalité, cette maîtrise simultanée des domaines les plus divers, qui est une des caractéristiques du génie de Poincaré. [Hadamard 1921, 272]

L'une des raisons principales évoquées par Ruelle pour expliquer le laps de temps s'écoulant entre le travail de Poincaré et les études modernes est formulée ainsi :

> Poincaré n'avait pas à sa disposition ces outils mathématiques de base que sont la théorie de la mesure ou la théorie ergodique, et ne pouvait donc pas exprimer ses brillantes idées intuitives dans un langage précis. [Ruelle 1991, 65]

Dans le but d'appréhender le concept de hasard, Poincaré réfléchit sur les exemples fournis par les problèmes de la météorologie ou la distribution des petites planètes. Il écrit encore :

> Si un cône repose sur sa pointe, nous savons bien qu'il va tomber, mais nous ne savons pas de quel côté ; il nous semble que le hasard seul va en décider. Si le cône était parfaitement symétrique, si son axe était parfaitement vertical, s'il n'était soumis à aucune autre force que la pesanteur, il ne tomberait pas du tout. Mais le moindre défaut de symétrie va le faire pencher légerement d'un côté ou de l'autre, et dès qu'il penchera, si peu que ce soit, il tombera tout à fait de ce côté. Si même la symétrie est parfaite, une trépidation très légère, un souffle d'air pourra le faire incliner de quelques secondes d'arc ; ce sera assez pour déterminer sa chute et même le sens de sa chute qui sera celui de l'inclinaison initiale. [Poincaré 1908, 68]

C'est là une présentation intuitive d'une théorie moderne très vivante, et même assez populaire, à savoir du *chaos*. Il est remarquable qu'à la recherche d'une définition du hasard, Poincaré ait énoncé cette formulation heureuse : *L'équilibre instable* [Poincaré 1908, 67]

Bibliographie

Bertrand, J.

1888 *Calcul des probabilités*, Paris : Gauthier-Villars, 1907.

Darboux, Gaston.

1916 Eloge historique d'Henri Poincaré, in *Henri Poincaré, Œuvres* II, VII-LXXXI. Paris : Gauthier-Villars.

Darmois, Georges.

1956 Répercussions des travaux d'Henri Poincaré dans le domaine du calcul des probabilités et de ses applications, in *Henri Poincaré Œuvres XI*, Paris : Gauthier-Villars, 127-132.

Hadamard, Jacques.

1921 L'œuvre mathématique de Poincaré, *Acta Math.*, 38, 203-287.

Le Cam, Lucien

1986 The central limit theorem around 1935, *Statistical science* I, 1, 78-92.

Poincaré, Henri.

1894 Discours prononcé au jubilé de Bertrand, *Annuaire de l'Ecole polytechnique* 1894, Savants et écrivains, 157-161, Paris : Flammarion, 1970.

1896 *Calcul des probabilités*, Paris : Carré.

1907-8 *Cours d'astronomie générale*, Ecole polytechnique de Paris.

1908 *Science et méthode*, Paris : Flammarion, 64-94.

1912 *Calcul des probabilités*, Paris : Gauthier-Villars.

1921 Analyse des travaux mathématiques, *Acta Math.*, 38, 3-135.

Ruelle, David.

1991 *Hasard et chaos*, Paris : Odile Jacob.

Sheynin, O.B.

1991 H. Poincaré's work on probability, *Arch. Hist. Exact Sciences*, 42, 131-171.