PHILOSOPHIA SCIENTIÆ

PIERRE EYMARD

Comment Hilbert et Poincaré rédigeaient les mathématiques

Philosophia Scientiæ, tome 1, nº 4 (1996), p. 19-26

<http://www.numdam.org/item?id=PHSC_1996__1_4_19_0>

Comment Hilbert et Poincaré rédigeaient les mathématiques

Pierre Eymard

Université Henri Poincaré (Nancy 1)
Département de mathématiques

Philosophia Scientiæ, 1 (4), 1996, 19-26.

Résumé. David Hilbert et Henri Poincaré illustrent deux conceptions opposées de la rédaction mathématique, que, pour simplifier, nous qualifierons de dogmatique ou analytique pour le premier, d'intuitive ou synthétique pour le second.

Summary. David Hilbert and Henri Poincaré are the prototypes for two conceptions of the mathematical writing, which are poles apart, briefly speaking: a dogmatic or analytic conception for the first one, an intuitive or synthetic conception for the second one.

Il y a plusieurs manières d'écrire les mathématiques. Peut-être n'est-il pas superficiel d'étudier les différences de comportement des mathématiciens en cette matière ; ceci peut révéler leur attitude face à la rigueur, l'idée qu'ils se font de ce qu'est une démonstration, l'importance relative qu'ils attachent à la logique et à l'intuition. Le style traduit souvent la manière de penser.

Il est intéressant de comparer de ce point de vue David Hilbert et Henri Poincaré. Ces deux géants de la science mathématique, sensiblement à la même époque, à cheval sur deux siècles, illustrent, nous le verrons en détail, deux conceptions opposées de la rédaction mathématique, que, pour simplifier, nous qualifierons de dogmatique ou analytique pour le premier, d'intuitive ou synthétique pour le second.

Commençons par Hilbert. Nous faisons référence à ses *Gesammelte Abhandlungen* [1932-1935]. Sa méthode d'exposition, au fond, remonte à Euclide, et, à travers Bourbaki, s'est propagée jusqu'à nos jours. Elle est maintenant d'usage dans la quasi-totalité des articles contemporains.

La démonstration prime tout. La déduction l'emporte sur l'intuition, la logique abstraite sur l'illustration concrète. On va du général au particulier. La démarche naturelle de l'invention, qui procède des exemples vers la systématisation, est masquée, au profit de l'économie de l'exposition, où le point de vue le plus général, le plus abstrait, est adopté chaque fois que possible.

Ecoutons ce que dit Hilbert dans l'introduction à sa *Theorie der algebraischen Zahlkörper*, le célèbre *Zahlbericht* de 1897. Nous traduisons et c'est nous qui soulignons.

> Le but du présent ouvrage est de présenter l'essentiel de la théorie des nombres algébriques avec ses démonstrations dans *un développement logique* et *une conception unitaire* [...]. Les origines historiques et les questions de priorité seront passées sous silence. Pour *réduire la présentation* le plus possible, je me suis efforcé de choisir les sources les plus appropriées et, quand plusieurs se présentaient, de toujours donner la préférence aux outils les plus tranchants et *à longue portée*. La question de décider, parmi

> plusieurs démonstrations, laquelle est la plus simple et naturelle, souvent n'est pas évidente, mais savoir si elle est *susceptible de généralisation et utilisable dans d'autres recherches* est un critère très sûr. [Hilbert 1932-1935, I]

Le *Zahlbericht* est subdivisé explicitement en 4 parties, 36 chapitres, 173 paragraphes, 169 théorèmes ou propositions, et 49 lemmes tous numérotés. L'architecture de l'édifice apparaît dans les moindres détails, *a posteriori*, mais on ne sait rien du déroulement de la construction.

Hilbert applique ces principes de rédaction dans la plupart de ses oeuvres mathématiques. Ses exposés sont une succession de *Theorems*, *Sätze* et *Hilfsätze*, chacun immédiatement suivi, sans commentaire, de sa démonstration (*Beweis*), précise et irréfutable. Les cas particuliers sont traités et approfondis après le cas général, par exemple les corps quadratiques après ceux de tous degrés.

Ce style a fait école. Voici quelques phrases extraites du Mode d'emploi du *Traité* de N. Bourbaki :

> Le Traité prend les mathématiques à leur début et donne des démonstrations complètes. Le mode d'exposition suivi est axomiatique et abstrait ; il procède le plus souvent du général au particulier. Les nécessités de la démonstration exigent que les chapitres se suivent dans un ordre logique rigoureusement fixé. L'utilité de certaines considérations n'apparaîtra donc au lecteur qu'à la lecture de chapitres ultérieurs [...]. L'armature logique de chaque chapitre est constituée par les définitions, les axiomes et les théorèmes de ce chapitre. Les résultats moins importants figurent sous le nom de propositions, lemmes, corollaires, remarques etc.

On le voit, il s'agit d'un exposé dogmatique, qui n'est pas sans rappeler le style juridique : en vertu de l'arrêté du tant, du décret numéro tant, de la jurisprudence précitée, etc., l'accusé est reconnu coupable.

De nos jours, presque tous les articles publiés dans des revues mathématiques se conforment à ce modèle. Qui s'en écarterait se verrait prié, par le Rapporteur et le Comité de rédaction, de revoir sa copie.

Bien entendu ce mode d'exposition a des avantages. La correction des raisonnements apparaît clairement ; il ne subsiste pas de doutes sur la vérité des résultats. Le travail du Rapporteur est facilité ; l'éditeur économise le papier. Le morcellement des preuves, et la généralité recherchée dans chaque pièce de la construction, ouvrent la perspective de les utiliser dans d'autres recherches, et facilite les références, comme d'un dictionnaire.

Mais il y a quelques inconvénients. Le déroulement progressif de la recherche n'apparaît pas ; l'ordre naturel d'émergence des idées n'est pas indiqué ; rien ne subsiste des versions préliminaires, des cas particuliers préalablement examinés, souvent les plus significatifs. La problématique est masquée ; l'intérêt de la lecture est peu soutenu ; la perspective disparaît sous les détails.

Comment Poincaré lui-même réagissait-il à ce style de rédaction ? Nos références sont à ses *Oeuvres complètes*. Ecoutons son neveu, Pierre Boutroux, parlant des lectures scientifiques de Poincaré :

> Il ne pouvait s'astreindre à suivre la longue chaîne de déductions, la trame serrée de définitions et de théorèmes, que l'on trouve généralement dans les Mémoires de mathématiques. Mais, allant tout droit au résultat qui lui paraissait le centre du Mémoire, il l'interprétait et le repensait à sa manière ; il le contrôlait par ses propres moyens ; après quoi seulement, reprenant le livre en mains, il jetait un rapide regard circulaire sur les lemmes, propositions et corollaires, qui constituaient la garniture du Mémoire. [Poincaré, *Œuvres*, XI, 148]

Cette garniture ne manque pas de sel...

Poincaré lui-même, à plusieurs reprises, a donné son opinion sur la balance entre la logique et l'intuition dans l'exposition des mathématiques. Par exemple :

> Pour comprendre une théorie, il ne suffit pas de constater que le chemin qu'on a suivi n'est pas coupé par un obstacle, il faut se rendre compte des raisons qui l'ont fait choisir. Pourra-t-on donc jamais dire qu'on comprend une théorie si on veut lui donner d'emblée sa forme définitive, celle que la logique impeccable lui impose, sans qu'il reste aucune trace des tâtonnements qui y ont conduit ? Non, on ne la comprend pas réellement, on ne pourra même la retenir, ou on ne la retiendra qu'à force de l'apprendre par coeur. [Poincaré, *Œuvres*, XI, 132]

Et encore, dans *Science et Méthode* :

> Quand le logicien aura décomposé chaque démonstration en une foule d'opérations élémentaires, toutes correctes, il ne possédera pas encore la réalité toute entière ; ce je ne sais quoi qui fait l'unité de la démonstration lui échappera complètement. [Poincaré 1908, 133]

Venons-en à la façon dont lui-même rédigeait ses oeuvres mathématiques. Ecoutons encore P. Boutroux, le témoin privilégié :

> Poincaré s'asseyait quelques heures par jour devant une main de papier écolier rayé, et l'on voyait alors les feuillets se couvrir, avec une rapidité et une régularité surprenantes, de son écriture fine et anguleuse. Presque jamais une rature, très rarement une hésitation.

> En quelques jours, un long Mémoire se trouvait achevé, prêt à être imprimé, et mon oncle ne s'y intéressait plus désormais que comme à une chose du passé. [Poincaré, *Œuvres*, XI, 146]

C'est donc un premier jet qui est publié, écrit au jour le jour selon le cheminement naturel de la pensée, et non élagué, non réordonné, tant il est pressé d'en finir, car une autre recherche maintenant l'accapare, qui va s'exprimer dans un nouveau Mémoire.

Essayons de dégager quelques principes formels, quelques constantes d'écriture, qui apparaissent dans ces oeuvres.

D'abord les principaux résultats sont rarement mis en exergue sous l'aspect de Théorèmes, Propositions, Lemmes, Corollaires. Simplement le discours est parsemé de courts énoncés en italique, dont l'importance respective n'est pas formellement indiquée. Ces énoncés ne sont pas placés *a priori*, mais apparaissent en général à point nommé, *après* leur démonstration, comme conclusion d'une investigation naturelle. Ils sont introduits par des expressions telles que : *En résumé* ; *En définitive* ; *Enonçons le résultat obtenu*, etc...

Le souci est constant de donner des motivations heuristiques. D'ailleurs, le discours est ponctué d'interrogations ; on peut souvent le diviser en tranches ternaires : interrogation, investigation, réponse à l'interrogation ; nouvelle interrogation etc...

La compréhension est aidée par des images empruntées à la géométrie et même à la physique. Par exemple :

> Mais, avant de démontrer, par des procédés rigoureux, l'intégrabilité de cette équation, je veux d'abord *la faire pressentir* par un de ces aperçus dont on fait quelquefois usage en Physique mathématique. [Poincaré, *Œuvres*. IX, 571]

Souvent la démonstration se fait par énumération de cas particuliers, et parfois elle se satisfait d'une considération non exhaustive de ces cas. Par exemple :

> Les résultats auxquels je suis arrivé s'appliquent à une forme quelconque, mais, *ne voulant pas sacrifier la clarté à la généralité*, je me suis restreint aux formes les plus simples [...]. On verra aisément d'ailleurs quels sont ceux des théorèmes qui s'étendent au cas le plus général et comment on *devrait* faire pour les généraliser. [Poincaré, *Œuvres*. V, 29]

Ou encore :

> Pour pousser plus loin l'étude, je vais prendre un exemple particulier, à savoir [...] La méthode que j'emploierai *s'étendrait* d'ailleurs au cas le plus général. [Poincaré, *Œuvres*, V, 29]

On notera le conditionnel. Et aussi :

> La plupart du temps, *pour plus de commodité*, nous choisirons tel cas particulier, mais cela n'a rien d'essentiel. [Poincaré, *Œuvres*, V, 29]

Citons encore :

> Le théorème analogue pour les fonctions de deux variables n'est pas encore démontré. Je crois être arrivé à en donner une démonstration rigoureuse, mais, comme elle est un peu longue, je n'en donnerai pas ici tous les détails ; je me bornerai à en exposer les traits principaux, qui suffiront aux géomètres pour la reconstituer. [Poincaré, *Œuvres*, IV, 147]

Ceci conduit à une question qu'on ne saurait esquiver. Ce mode de rédaction n'est-il pas au détriment de la rigueur ? Est-ce que parfois la preuve complète n'est pas remplacée par l'intime conviction ?

Dans *Entwicklung der Mathematik im 19sten Jahrhundert VIII*, Félix Klein, qui remarque que le style de Poincaré est en complète opposition avec celui de son maître Hermite, en fait la critique suivante :

> Comme Cauchy, Poincaré publiait très vite, et donc ne soignait pas la forme. Oui, il y a dans la fougue de ses premières publications non seulement beaucoup de provisoire, mais aussi des affirmations fausses ou excessives. En revanche, il usa par la suite d'un style brillant et clair qui, en relation avec la profondeur de sa pensée, justifie le grand succès de ses oeuvres mathématico-philosophiques. [Klein 1926]

Quant à Minkowski, qui écrivait un livre sur la *Géométrie des Nombres*, il écrit à ce propos à Hilbert : «Tout doit être clair et net (*klipp und klar*) avant de l'envoyer à l'éditeur», et, quoiqu'il nomme Poincaré «le plus grand mathématicien du monde», il dit «qu'il ne pourrait lui-même envisager de publier quelque chose dans la forme où Poincaré le fait» (cité par C. Reid, dans sa biographie *Hilbert* [Reid 1970, 41]).

Il faut admettre que si la formidable intuition de Poincaré lui a permis, la plupart du temps, d'éviter l'écueil des énoncés faux, parfois il prête le flanc à ces critiques. Par exemple, il dit : «Il n'est pas douteux que des considérations analogues à celles qui précèdent [...] peuvent servir à démontrer le théorème suivant [...]» [Poincaré, *Œuvres*, IV, 161]. Puis vient un énoncé que Poincaré n'a jamais démontré par la suite ; il fallut attendre 1931 pour que H. Cartan éclaircisse la question. Il arrive d'ailleurs que Poincaré publie un second mémoire pour lever les objections faites à un premier par exemple, cf. [Poincaré, *Œuvres*, IV, 57 et 70].

Un exemple très connu se trouve dans le *Mémoire sur l'Arithmétique des courbes algébriques* [Poincaré, *Œuvres*, V, 483-548]. Poincaré admet implicitement l'existence de systèmes de points rationnels fondamentaux *en nombre fini* sur les courbes de genre un, en particulier les cubiques, ce qui est vrai, mais difficile, et ne fut en fait prouvé qu'en 1922 par Mordell, puis fut l'objet ultérieurement d'une généralisation aux courbes de genre supérieur à un par A. Weil (cf. l'analyse de cette question par Weil dans [Poincaré, *Œuvres*, XI, 211]). Mais il faut noter que, dans l'introduction de ce Mémoire, Poincaré le qualifie modestement de «programme d'études plutôt qu'une véritable théorie». On peut donc penser dans ce cas, bien qu'il subsiste un doute, qu'il ne s'agissait pas d'une affirmation sans preuve, mais d'une conjecture, géniale pour le coup.

Quoi qu'il en soit, le style de Poincaré n'est plus employé de nos jours dans les rédactions des articles ou des traités de mathématiques. Comment cela s'est-il fait ? Pourquoi le style de Hilbert a-t-il prévalu ? Les Allemands étaient les maîtres de l'Algèbre au XIXème siècle et au début du XXème, depuis Dedekind, Kummer, jusqu'à Hilbert précisément et ses disciples, notamment Steinitz et E. Noether. Or on constate, dans l'histoire des mathématiques, qu'un phénomène évolutif profond affecte inévitablement toute théorie, toute branche mathématique, à savoir son *algébrisation* progressive. Au commencement, la théorie est naïve, pragmatique, les résultats fondamentaux sont devinés, plus que démontrés. Puis, petit à petit, les concepts se dégagent, s'organisent, se généralisent ; les axiomes fondamentaux sont mis en évidence, desquels procède la théorie toute entière. Bientôt la nature concrète des objets mathématiques n'a plus d'importance ; seules les structures comptent. Finalement l'exposition est descriptive, déduisant d'axiomes imposés *a priori* les théorèmes et propositions, indépendamment des êtres susceptibles de les revêtir. Comme le remarque C. Chevalley :

> la mathématique contemporaine cherche à définir les objets mathématiques en compréhension, c'est-à-dire par leurs propriétés caractéristiques, et non en extension, c'est-à-dire par construction. [Chevalley 1935]

Et il écrit encore :

> L'axiomatisation des théorèmes a très profondément modifié le style des écrits mathématiques contemporains. Tout d'abord, pour chaque résultat obtenu, il y a toujours lieu de chercher quelles sont les propriétés strictement indispensables pour pouvoir l'établir. On se préoccupera donc très fortement de donner de ce résultat une démonstration *minima*, et pour cela de déterminer exactement dans quel domaine des mathématiques on se trouve, de manière à rejeter

> autant que possible les méthodes étrangères à ce domaine [...]. Ce souci d'exacte adéquation des méthodes remet en honneur la recherche de l'élégance des démonstrations, quelque peu négligée par les géomètres de l'école précédente. [Chevalley 1935]

Parmi ces géomètres, sans doute comptait-il Poincaré.

Ainsi l'on voit que l'algébrisation de chaque théorie ne cesse de croître au fil du temps, comme l'entropie d'un système physique, jusqu'à ce que rien n'y puisse plus évoluer. La théorie est alors complètement axiomatisée, donc bourbakisable, puis bourbakisée, c'est-à-dire figée, canonisée. Cette comparaison de l'algébrisation avec l'entropie, nous l'avons recueillie, il y a trente ans, d'une conversation avec René Thom, qui ajoutait que, dès lors, le mathématicien fécond devait se détourner d'une théorie ainsi sclérosée pour s'intéresser à une branche plus jeune, plus jaillissante, plus chaotique, où l'intuition jouerait à nouveau le rôle principal ; et d'agir ainsi lui-même à l'époque en topologie différentielle.

C'est sans doute aux théories jeunes, en voie de développement, que le style de Poincaré est le mieux adapté.

C'est à Poincaré que nous laisserons le soin de conclure :

> Les mathématiciens eux-mêmes ne se ressemblent pas, les uns ne connaissent que l'implacable logique, les autres font appel à l'intuition et voient en elle la source unique de la découverte. [Poincaré 1908]

Bibliographie

Bourbaki, Nicolas

Eléments de Mathématiques, Paris : Hermann.

Chevalley, C.

1935 *in* : *Revue de Métaphysique et de Morale*, 42.

Hilbert, David

1932-5 *Gesammelte Abhandlungen*, Berlin : Springer.

Klein, Félix

1926 *Entwicklung der Mathematik im 19sten Jahrhundert*, Berlin.

Poincaré, Henri

1952 *Œuvres complètes*, Paris : Gauthier-Villars.

1908 *Science et Méthode*, Paris : Flammarion.

Reid, Constance

1970 *Hilbert*, Berlin/Heidelberg/New York : Springer Verlag.