PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

MICHEL HACQUE

Extensions Q-normales

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1993, fascicule 2
« Extensions Q-Normales », , p. 1-85
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1993___2_A1_0>

EXTENSIONS Q-NORMALES

Michel HACQUE

Institut de Mathématiques et Informatique de l'I.S.M.
Université Claude Bernard - LYON I
69622 VILLEURBANNE, France

INTRODUCTION

La théorie classique des *algèbres* Q-*normales* résulte essentiellement des travaux de O. TEICHMÜLLER sur la *théorie de Galois non commutative* [18], qui ont été repris et complétés par S. EILENBERG et S. Mac LANE à l'aide des techniques de la *Cohomologie Galoisienne* [3], et qui ont été *interprétés* par G. HOCHSCHILD et J.P. SERRE dans le cadre de la théorie de la *Cohomologie des extensions de groupes* (voir pages 130 à 132 de [11]) au moyen de l'une des SUITES EXACTES DE HOCHSCHILD-SERRE.

Etant donnés un corps commutatif F et un groupe *fini* d'automorphismes : $Q \subset \mathrm{Aut}(F)$, qui déterminent le corps des invariants $E = F^Q$ et par suite l'extension galoisienne : $E \subset F$, de groupe de Galois $\mathrm{Gal}[F : E] = Q \subset \mathrm{Aut}(F)$, on rappelle qu'une F-*algèbre centrale simple de rang fini* A est une ALGEBRE Q-NORMALE si l'extension :

$$E \subset A$$

est *galoisienne*, c'est-à-dire si elle vérifie la condition :

$$E = A^{\mathrm{Gal}[A\,:\,E]}$$

qui est équivalente ici au fait que le morphisme de groupes de *restriction* :

$$\mathrm{Gal}\,[A : E] \longrightarrow \mathrm{Gal}[F : E] = Q$$

est *surjectif*, ce qui signifie que *tout* automorphisme $\lambda \in Q \subset \mathrm{Aut}(F)$ admet au moins un *prolongement* constitué par un automorphisme $s \in \mathrm{Gal}[A : E] \subset \mathrm{Aut}(A)$.

Puisque S. EILENBERG et S. Mac LANE ont montré dans le Théorème 5-4 de [3] que cette propriété de Q-NORMALITE ne dépend que de la *classe de similitude* [A] de la F - algèbre centrale simple de rang fini A, représentée par un élément du groupe de Brauer Br(F) du corps F, il en résulte que l'étude classique des ALGEBRES Q-NORMALES se ramène au cas où l'algèbre A est un << *produit croisé* >> .

Plus précisément, il est possible de considérer un corps L et des extensions galoisiennes de degrés finis :

$$E \subset L \qquad \text{et} \qquad F \subset L$$

de groupes de Galois *finis :*

$$\mathrm{Gal}[L : E] = G \subset \mathrm{Aut}(L) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Gal}[L : F] = G' \subset \mathrm{Aut}(L)$$

de sorte que le groupe G' est un *sous-groupe distingué* du groupe G, vérifiant :

$$\mathrm{Gal}[F : E] = Q = G/G'$$

pour lesquels il est possible de supposer que la F - *algèbre centrale simple de rang fini* A est le *produit croisé* au sens de E. NOETHER :

$$A = (L, G', f')$$

du corps L par le groupe d'automorphismes $G' \subset \mathrm{Aut}(L)$ au moyen d'un *"système de facteurs"* au sens de E. NOETHER : $f' = (f'_{\sigma,\tau}) \in Z^2(G', L^*)$, associé à une *classe* de cohomologie :

$$\hat{f}' = \xi' \in H^2(G', L^*)$$

Il existe alors une EXTENSION de la forme :

$$L \subset A = (L, G', f')$$

dans laquelle le *produit croisé* $A = (L, G', f')$ est construit à partir d'un *sous-groupe distingué* G' du groupe d'automorphismes $G = \mathrm{Gal}[L : E] \subset \mathrm{Aut}(L)$, et le Lemme 9-1 de [3] montre que pour que l'algèbre A soit une ALGEBRE Q-NORMALE pour le groupe $Q = G/G'$, il faut et il suffit qu'elle vérifie la condition suivante : (N) = << Tout automorphisme $\alpha \in G \subset \mathrm{Aut}(L)$ admet au moins un *prolongement* constitué par un automorphisme $s \in \mathrm{Aut}(A)$ du *produit croisé* $A = (L, G', f')$ >>.

Ainsi, l'étude classique des *algèbres* Q-*normales* se ramène essentiellement à l'étude d'un problème d'existence de *prolongements d'automorphismes* dans un *produit croisé* au sens de E. NOETHER.

De plus, cette observation entraîne facilement que la caractérisation de la Q-NORMALITE *classique* au moyen de la condition (N) est susceptible d'une *généralisation naturelle* obtenue en remplaçant les *produits croisés classiques* au sens de E. NOETHER par des PRODUITS CROISES MIXTES quelconques, dont la théorie a été présentée dans [5], ce qui conduit à l'étude des EXTENSIONS Q-NORMALES, qui est l'objet du présent travail.

Une première motivation de cette généralisation et de cette étude résulte des remarques suivantes.

Avec les notations introduites, les résultats de S. EILENBERG et S. Mac LANE relatifs à la Q-NORMALITE *classique* et tels qu'ils ont été *interprétés* par G. HOCHSCHILD et J.P. SERRE, établissent principalement que pour que *l'algèbre produit croisé* A = (L, G', f') soit une ALGEBRE Q - NORMALE pour le groupe Q = G/G', il faut et il suffit que sa *classe* :

$$\hat{f}' = \xi' \in H^2(G', L^*)$$

soit *invariante* pour *l'action* du groupe G sur le groupe de *cohomologie galoisienne* $H^2(G', L^*)$, c'est-à-dire qu'elle vérifie la condition :

$$\xi' \in [H^2(G', L^*)]^G$$

pour le *groupe d'invariants* qui figure dans la SUITE EXACTE DE HOCHSCHILD-SERRE :

$$(0) \longrightarrow H^2(G/G', F^*) \xrightarrow{l_2} H^2(G, L^*) \xrightarrow{r_2} [H^2(G', L^*)]^G$$

$$\xrightarrow{t_3} H^3(G/G', F^*) \xrightarrow{l_3} H^3(G, L^*)$$

associée au *sous-groupe distingué* G' du groupe G et dans laquelle les morphismes admettent des *interprétations simples*, qui montrent en particulier que la *transgression* t_3 coïncide avec l'APPLICATION CLASSE DE TEICHMÜLLER.

Ce petit préambule montre que l'étude de la Q-NORMALITE *classique* repose sur le phénomène de *l'existence de liens étroits* entre des problèmes d'existence de *prolongements d'automorphismes* dans des *produits croisés classiques* au sens de E. NOETHER et *l'interprétation* en *cohomologie galoisienne* de certains termes et de certains morphismes d'une SUITE EXACTE DE HOCHSCHILD-SERRE.

On se propose de montrer que ce phénomène est un *cas particulier* d'un phénomène analogue qui se produit dans un *contexte infiniment plus général* obtenu en remplaçant les *produits croisés classiques* au sens de E. NOETHER par des PRODUITS CROISES MIXTES quelconques, ce qui conduit aux EXTENSIONS Q-NORMALES étudiées ici , et en remplaçant la *cohomologie galoisienne* par la COHOMOLOGIE NON ABELIENNE DES PSEUDO-MODULES, dont la théorie a été présentée dans le DIPTYQUE constitué par les deux articles [4] et [5], et dans sa PREMIERE ANNEXE [6].

Pour atteindre cet objectif, on utilisera *deux étapes*.

La *"première étape"* est constituée par le présent travail consacré à l'étude des EXTENSIONS Q-NORMALES, qui généralisent la notion classique *d'algèbre* Q - *normale,* comme cela vient d'être expliqué.

La *"second étape"*, qui complète naturellement la première, est constituée par un travail ultérieur [7] dans lequel on généralise les SUITES EXACTES DE HOCHSCHILD-SERRE dans le cadre de la COHOMOLOGIE NON ABELIENNE DES PSEUDO-MODULES, ce qui permet en particulier d'obtenir des *interprétations* tout à fait analogues à celles obtenues dans le *cas classique* des *algèbres* Q-*normales.*

Tout d'abord, dans le présent travail, l'analyse de la *situation classique* réalisée par les Exemples 2-4, la Proposition 2-5 et les Remarques 2-6, dégage les *idées directrices* qui conduisent à la Définition 3-2 des EXTENSIONS Q-NORMALES, de sorte que les Exemples 3-3 montrent bien qu'elles constituent des *généralisations* des *algèbres* Q - *normales.*

Ensuite, pour des DONNEES DE BASE :

$$\{ P = (G, \Gamma, \theta) \ ; G' \}$$

constituées par un PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$ et un SOUS-GROUPE DISTINGUE G' du groupe G, qui déterminent le PSEUDO-MODULE $P' = (G', \Gamma, \theta')$ et le GROUPE QUOTIENT $Q = G'' = G/G'$, on commence par établir le Théorème 4-7 qui assure *l'existence d'actions* naturelles du groupe G sur les groupes abéliens $\hat{H}^n(P')$ de COHOMOLOGIE CENTRALE et sur le SECOND ESPACE $\widetilde{H}^2(P')$ DE COHOMOLOGIE NON ABELIENNE.

Ces résultats permettent la formulation du Théorème 5-3 qui donne la caractérisation de l'ESPACE DES CLASSES D'EXTENSIONS Q-NORMALES comme un ESPACE D'INVARIANTS :

$$[\widetilde{H}^2(P')]^G = [\widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma)]^G = [\mathrm{Ext}_{\theta'}(G', \Gamma)]^G$$

ce qui généralise la caractérisation classique, rappelée ci-dessus, par la condition :

$\xi' \in [H^2(G', L^*)]^G$, dans le cas des *algèbres* Q - *normales.*

Le Théorème 5-4 complète l'étude de *l'action* du groupe G sur le SECOND ESPACE $\widetilde{H}^2(P') = \widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma)$ DE COHOMOLOGIE NON ABELIENNE, qui est illustrée par les Exemples 5-5.

La caractérisation des EXTENSIONS Q-NORMALES, obtenue dans le Théorème 5-3 se présente sous une *forme synthétique,* qu'il convient de compléter par des *"caractérisations techniques",* obtenues dans le Théorème 6-2, et qui sont indispensables dans les applications.

Il convient de remarquer que toutes les propriétés précédentes sont obtenues, *sans aucune hypothèse particulière,* dans un contexte très général *"non nécessairement abélien"* qui *englobe* en particulier à la fois le *"cas des groupes"* et le *"cas des anneaux"* .

Comme la richesse de la *cohomologie galoisienne* résulte essentiellement du THEOREME DE A. SPEISER [16] qui entraîne que tout corps L et tout groupe *fini* d'automorphismes : $G \subset \mathrm{Aut}(L)$, vérifient la condition :

$$H^1(G, L^*) = \{1\}$$

pour obtenir des *propriétés intéressantes* des EXTENSIONS Q-NORMALES, on est amené à généraliser la condition précédente sous la forme de la CONDITION DE SPEISER :

$$\text{(S)} \qquad \hat{H}^1(P') = \{1\}$$

dont on montre d'abord, dans le Théorème 7-3, qu'elle constitue une Condition Nécessaire et Suffisante *d'unicité des prolongements d'automorphismes "à automorphisme central intérieur près".*

Sous cette CONDITION DE SPEISER (S), l'étude technique et fastidieuse des COCYCLES DE TEICHMÜLLER est indispensable pour obtenir le Théorème 8-8, qui sert de base à la démonstration du Théorème 8-9, qui établit enfin *l'existence* de l'APPLICATION CLASSE DE TEICHMÜLLER :

$$\hat{T}_3 : [\widetilde{Z}^2(P')]^{[G]} \longrightarrow H^3_{\theta''}(G'', X^{G'})$$

ainsi que ses diverses *caractérisations.*

Ce résultat fondamental de la *"première étape"* constituée par le présent travail, se trouve à la base de la *"seconde étape"* constituée par un travail ultérieur [7], dans lequel on généralise les SUITES EXACTES DE HOCHSCHILD-SERRE dans le cadre de la COHOMOLOGIE NON ABELIENNE DES PSEUDO-MODULES.

1. PRELIMINAIRES.

Dans l'Introduction, on a expliqué rapidement les raisons pour lesquelles la théorie classique des *algèbres* Q-*normales* (voir [18], [3] et [11] pages 130 à 132) se ramène essentiellement à l'étude d'un problème d'existence de *prolongements d'automorphismes* pour une *extension* de la forme :

$$L \subset A = (L, G', f')$$

dans laquelle le *produit croisé classique* au sens de E. NOETHER :

$$A = (L, G', f')$$

est déterminé par un corps L, un groupe *fini* d'automorphismes $G \subset \mathrm{Aut}(L)$, un *sous-groupe distingué* G' du groupe G et un *"système de facteurs"* au sens de E. NOETHER : $f' = (f'_{\sigma,\tau}) \in Z^2(G', L^*)$, associé à une *classe* de cohomologie :

$$\hat{f}' = \xi' \in H^2(G', L^*)$$

On se propose d'étudier le problème analogue dans un *contexte infiniment plus général* obtenu en remplaçant les *produits croisés classiques* au sens de E. NOETHER par des PRODUITS CROISES MIXTES quelconques, dont la théorie a été présentée dans [5], ce qui revient à remplacer l'extension de la forme : $L \subset A$, par une EXTENSION DISTINGUEES D'ANNEAUX-GROUPES, au sens de [5].

Dans la suite, on utilise donc la terminologie et les notations introduites dans [4], [5] et [6], (et auxquels il est conseillé de se reporter pour un exposé détaillé).

On rappelle néanmoins la terminologie et les notations de base, ainsi que quelques résultats utiles.

Pour les raisons exposées dans l'Introduction de [4], on a été amené à considérer de nouveaux objets appelés des ANNEAUX-GROUPES.

Un *anneau-groupe* Γ est un couple $\Gamma = [V ; M]$ constitué par un *anneau* V et un *groupe* M qui est un sous-groupe $M \subset V^*$ du groupe multiplicatif V^* des éléments inversibles de l'anneau V.

Pour deux anneaux-groupes $\Gamma = [V ; M]$ et $\Gamma' = [V' ; M']$ l'ensemble $\mathrm{Hom}(\Gamma, \Gamma')$ des *morphismes d'anneaux-groupes :*

$$f : \Gamma \longrightarrow \Gamma'$$

est constitué par les *morphismes d'anneaux* $f \in \mathrm{Hom}(V, V')$ qui vérifient : $f(M) \subset M'$, c'est-à-dire qui *induisent* un *morphisme de groupes*, noté également $f \in \mathrm{Mor}[M, M']$.

Naturellement, ces conditions caractérisent une catégorie $\mathcal{C}$ appelée la CATEGORIE DES ANNEAUX-GROUPES.

En particulier, pour tout anneau-groupe $\Gamma = [V ; M]$ le *groupe des automorphismes* $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ est caractérisé par la condition :

$$\mathrm{Aut}(\Gamma) = \mathrm{Stab}[\mathrm{Aut}(V)\,;\,M]$$

c'est-à-dire constitué par les *automorphismes d'anneaux* $f \in \mathrm{Aut}(V)$, qui *stabilisent* M, c'est-à-dire qui *induisent* sur M un *automorphisme de groupes* noté également $f \in \mathrm{Aut}(M)$.

Tout anneau-groupe $\Gamma = [V\,;\,M]$ détermine *l'anneau sous-jacent* $V = \mathrm{An}(\Gamma)$, le *groupe sous-jacent* $M = \mathrm{Gr}(\Gamma)$ et le *centre-groupe* $X = \mathrm{Zg}(\Gamma)$, qui est le *groupe abélien* caractérisé par la condition :

$$X = \mathrm{Zg}(\Gamma) = \mathrm{Gr}(\Gamma) \cap Z[\mathrm{An}(\Gamma)] = M \cap Z(V)$$

dans laquelle Z(V) désigne *l'anneau centre* de l'anneau V.

La Proposition 2-4 de [4] établit l'existence d'un diagramme commutatif et exact canonique :

(1)
$$\begin{tikzcd}
\{1\} \arrow[r] & \mathrm{Zg}(\Gamma) \arrow[r] & \mathrm{Gr}(\Gamma) \arrow[r, "\omega"] & \mathrm{Aut}(\Gamma) \arrow[r, "q"] \arrow[d, "r"'] & \mathrm{Aut}_e(\Gamma) \arrow[r] \arrow[dl, "\varpi"] & \{1\} \\
 & & & \mathrm{Aut}[\mathrm{Zg}(\Gamma)] & &
\end{tikzcd}$$

dans lequel ω est le morphisme de groupes qui, à tout $a \in M = \mathrm{Gr}(\Gamma)$, associe *l'automorphisme intérieur* $\omega(a) = \langle a \rangle$ de l'anneau-groupe $\Gamma = [V\,;\,M]$ constitué par le *couple* d'automorphismes intérieurs :

$$\langle a \rangle_V \in \mathrm{Aut}_i(V) \quad \text{et} \quad \langle a \rangle_M \in \mathrm{Aut}_i(M)$$

de la forme : $x \longrightarrow axa^{-1}$, pour tout $x \in V$ ou pour tout $x \in M$, et dont *l'image* constitue le *groupe d'automorphismes intérieurs* $\mathrm{Aut}_i(\Gamma)$, de sorte que le Lemme 2-2 de [4] montre l'existence d'une suite exacte canonique :

(2) $$\{1\} \longrightarrow \mathrm{Aut}_i(\Gamma) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\Gamma) \xrightarrow{q} \mathrm{Aut}_e(\Gamma) \longrightarrow \{1\}$$

qui caractérise le *groupe des classes d'automorphismes extérieurs* $\mathrm{Aut}_e(\Gamma)$, appelé également plus simplement le *groupe des automorphismes extérieurs* de l'anneau-groupe Γ.

En adoptant une terminologie qui généralise les notions de *"Kollektiv-charakter"* et de *"Charakter"* au sens de R. BAER (p. 377 de [2]), un *groupe* G et un *anneau-groupe* Γ déterminent l'ensemble pointé :

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(G, \Gamma) = \mathrm{Mor}[G, \mathrm{Aut}_e(\Gamma)]$$

des *"caractères collectifs"* du groupe G dans l'anneau-groupe Γ, et aussi l'ensemble pointé :

$$\mathrm{Mor}[G, \mathrm{Aut}(\Gamma)]$$

des *"caractères"* du groupe G dans l'anneau-groupe Γ.

Avec la terminologie et les notations de [4], [5] et [6] on rappelle rapidement les propriétés suivantes.

Le Lemme 4-5 de [4] établit que le *groupe* $\hat{C}^1(G, \Gamma)$ des 1-*cochaînes généralisées faibles* de G dans Γ *opère à gauche* par une *action* $*$ sur *l'ensemble* $\hat{C}^2(G, \Gamma)$ des 2 - *cochaînes généralisées* de G dans Γ et le Théorème 4-8 de [4] montre que les *orbites* qui constituent les *"classes de cohomologie faible"* du groupe G dans l'anneau-groupe Γ, sont exactement les *fibres :*

$$\hat{C}^2_\theta(G, \Gamma) = \chi^{-1}(\theta)$$

de l'application de *projection surjective :*

$$\chi : \hat{C}^2(G, \Gamma) \longrightarrow \mathcal{M} = \mathcal{M}(G, \Gamma)$$

au dessus des *"caractères collectifs"* $\theta \in \mathcal{M} = \mathcal{M}(G, \Gamma)$.

Le Théorème 6-5 de [4] montre que le $\mathcal{M}$ - *ensemble* $\hat{C}^2(G, \Gamma)$ des 2-*cochaînes généralisées* de G dans Γ, le $\mathcal{M}$ - *groupe* $Z^3(G, \Gamma)$ des 3-COCYCLES (CENTRAUX) de G dans Γ et le *troisième* $\mathcal{M}$ - *groupe* $\hat{H}^3(G, \Gamma)$ de la COHOMOLOGIE CENTRALE de G dans Γ sont liés par un diagramme commutatif de la forme :

(3)
$$\begin{tikzcd} \hat{C}^2(G, \Gamma) \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\chi"'] \arrow[dr, "\hat{T}"] & Z^3(G, \Gamma) \arrow[d, "(\hat{\ })"] \\ \bar{H}^2(G, \Gamma) \simeq \mathcal{M}(G, \Gamma) \arrow[r, "\bar{T}"] & \hat{H}^3(G, \Gamma) \end{tikzcd}$$

dans lequel $(\hat{\ })$ est le *morphisme surjectif* de $\mathcal{M}$ - *groupes abéliens* canonique et dans lequel les $\mathcal{M}$ - *applications* T, $\hat{T}$ et $\bar{T}$ sont respectivement l'APPLICATION COCYCLE DE TEICHMÜLLER T, l'APPLICATION CLASSE DE TEICHMÜLLER $\hat{T}$ et l'APPLICATION OBSTRUCTION DE TEICHMÜLLER $\bar{T}$.

Par définition, l'ensemble $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(G, \Gamma)$ des *"caractères collectifs"* REALISABLES du groupe G dans l'anneau-groupe Γ est l'ensemble pointé constitué par le NOYAU de l'APPLICATION OBSTRUCTION DE TEICHMÜLLER :

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(G, \Gamma) = \operatorname{Ker} \bar{T} = \bar{T}^{-1}[\ \hat{H}^3(G, \Gamma)'] = \ \bar{T}^{-1}[\ \{\hat{1}_\theta ;\quad \theta \in \mathcal{M}\}]$$

De même, l'espace $\widetilde{Z}^2(G, \Gamma)$ des 2-COCYCLES (GENERALISES) STRICTS de G dans Γ est constitué par le NOYAU de l'APPLICATION COCYCLE DE TEICHMÜLLER :

$$\widetilde{Z}^2(G, \Gamma) = \operatorname{Ker} T = T^{-1}[\, Z^3(G, \Gamma)'] = T^{-1}\,[\{1_\theta\,;\quad \theta \in \mathcal{M}\}]$$

et le Théorème 7-4 de [4] montre qu'il est muni d'une structure de $\mathfrak{R}$ - *ensemble* caractérisée par une *partition* de la forme :

$$\widetilde{Z}^2(G, \Gamma) = \coprod_{\theta \in \mathfrak{R}} \widetilde{Z}^2_\theta(G, \Gamma) \tag{4}$$

au moyen des espaces $\widetilde{Z}^2_\theta(G, \Gamma)$ des θ - COCYCLES STRICTS de G dans Γ.

Le Lemme 8-2 de [4] établit que le groupe $\widetilde{C}^1(G, \Gamma)$ des 1-COCHAINES (GENERALISEES) STRICTES de G dans Γ opère à gauche par une *action* $\widetilde{*}$ sur l'espace $\widetilde{Z}^2(G, \Gamma)$ des 2-COCYCLES STRICTS de G dans Γ, ce qui détermine *l'ensemble quotient :*

$$\widetilde{H}^2(G, \Gamma) = \widetilde{Z}^2(G, \Gamma) \Big/^{\widetilde{(*)}}_{\widetilde{C}^1(G, \Gamma)} \tag{5}$$

appelé le SECOND ESPACE DE COHOMOLOGIE NON ABELIENNE du *groupe* G dans *l'anneau-groupe* Γ, et le Théorème 8-6 de [4] montre qu'il est muni d'une structure de $\mathfrak{R}$ - *ensemble* caractérisée par une *partition* de la forme :

$$\widetilde{H}^2(G, \Gamma) = \coprod_{\theta \in \mathfrak{R}} \widetilde{H}^2_\theta(G, \Gamma) \tag{6}$$

dans laquelle, pour tout *"caractère collectif"* REALISABLE $\theta \in \mathfrak{R} = \mathfrak{R}(G, \Gamma)$, le SECOND ESPACE DE θ - COHOMOLOGIE NON ABELIENNE $\widetilde{H}^2_\theta(G, \Gamma)$ du groupe G dans l'anneau-groupe Γ est construit comme l'ensemble quotient :

$$\widetilde{H}^2_\theta(G, \Gamma) = \widetilde{Z}^2_\theta(G, \Gamma) \Big/^{\widetilde{(*)}}_{\widetilde{C}^1(G, \Gamma)} \tag{7}$$

de l'espace $\widetilde{Z}^2_\theta(G, \Gamma) = \mathrm{Ker}\, T_\theta$ des θ-COCYCLES STRICTS de G dans Γ, par

l'action $\widetilde{*}$ du groupe $\widetilde{C}^1(G, \Gamma)$ des 1 - COCHAINES STRICTES de G dans Γ.

Ces considérations de *"cohomologie non abélienne"* des *anneaux-groupes* servent de base à la CLASSIFICATION et à la CONSTRUCTION des EXTENSIONS DISTINGUEES D'ANNEAUX-GROUPES (voir la Définition 1-2 de [5]).

Etant donnés deux anneaux-groupes $\Gamma = [V\,;\,M]$ et $\Delta = [U\,;\,N]$ qui déterminent une EXTENSION :

$$\text{(I)} \qquad \Gamma \subset \Delta$$

au sens de la Définition 1-1 de [5], la Définition 1-4 de [5] entraîne que toute EXTENSION DISTINGUEE :

$$\text{(II)} \qquad \Gamma \triangleleft \Delta$$

est caractérisée par l'existence d'une SUITE EXACTE MIXTE de la forme :

$$\text{(III)} \qquad \{0, 1\} \longrightarrow \Gamma = [V\,;\,M] \longrightarrow \Delta = [U\,;\,N] \xrightarrow{p} G \longrightarrow \{1\}$$

qui exprime *à la fois* la condition (II) et la caractérisation du GROUPE QUOTIENT :

$$\text{(IV)} \qquad G = \Delta/_{\Gamma} = \mathrm{Gr}(\Delta)/_{\mathrm{Gr}(\Gamma)} = N/_{M}$$

défini par la suite exacte de groupes :

$$\text{(V)} \qquad \{1\} \longrightarrow \mathrm{Gr}(\Gamma) = M \longrightarrow \mathrm{Gr}(\Delta) = N \xrightarrow{p} G \longrightarrow \{1\}$$

On dit alors que l'anneau-groupe $\Delta = [U\,;\,N]$ constitue une EXTENSION DE L'ANNEAU-GROUPE $\Gamma = [V\,;\,M]$ PAR LE GROUPE G.

La Définition 1-5 de [5] donne la caractérisation de l'ensemble :

$$\mathrm{Ext}(G, \Gamma)$$

des CLASSES D'EXTENSIONS DE L'ANNEAU-GROUPE $\Gamma = [V\,;\,M]$ PAR LE GROUPE G.

Le Théorème 3-3 de [5] montre que toute EXTENSION DISTINGUEE est équivalente à une extension déterminée par un PRODUIT CROISE MIXTE, dont la caractérisation est donnée dans le Théorème 2-5 et la Définition 2-6 de [5].

Le Théorème 4-6 de [5] montre alors que l'espace Ext(G, Γ) est un $\mathfrak{R}$ - *ensemble* caractérisé par la *partition :*

$$(8) \qquad \mathrm{Ext}(G, \Gamma) = \coprod_{\theta \in \mathfrak{R}} \mathrm{Ext}_\theta(G, \Gamma)$$

dans laquelle $\mathrm{Ext}_\theta(G, \Gamma)$ est l'espace des CLASSES DE θ–EXTENSIONS de Γ par G et qu'il existe un *isomorphisme* de $\mathfrak{R}$ - *ensembles :*

(9) $$\mathrm{Ext}(G, \Gamma) \xrightarrow{\sim} \widetilde{H}^2(G, \Gamma)$$

déterminé par des *bijections canoniques :*

(10) $$\mathrm{Ext}_\theta(G, \Gamma) \xrightarrow{\sim} \widetilde{H}^2_\theta(G, \Gamma)$$

pour tout *"caractère collectif"* REALISABLE $\theta \in \mathfrak{R} = \mathfrak{R}(G, \Gamma)$ du *groupe* G dans *l'anneau-groupe* Γ.

Pour les raisons exposées dans [6], on a été amené à introduire la *notion nouvelle* de PSEUDO-MODULE, caractérisée par la Définition 3-1 de [6], dont on a donné de nombreux exemples et dont on rappelle la caractérisation.

DEFINITION 1-1 - *Un PSEUDO-MODULE* P *est un triplet :*

$$P = (G, \Gamma, \theta)$$

constitué par un groupe G, *un anneau-groupe* Γ *et un* **"caractère collectif"** *REALISABLE :*

$$\theta \in \mathfrak{R} = \mathfrak{R}(G, \Gamma)$$

du groupe G *dans l'anneau-groupe* Γ.

Il convient de rappeler que la notion de PSEUDO-MODULE généralise la notion classique de G - *module* dans un *contexte non nécessairement abélien* qui *englobe* en particulier à la fois le *"cas des groupes"* et le *"cas des anneaux"*.

NOTATIONS 1-2 -

Etant donné un PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$, dont l'anneau-groupe $\Gamma = [V ; M]$ détermine l'anneau $V = \mathrm{An}(\Gamma)$, le groupe $M = \mathrm{Gr}(\Gamma)$ et le *centre-groupe* $X = \mathrm{Zg}(\Gamma) = \mathrm{Gr}(\Gamma) \cap Z[\mathrm{An}(\Gamma)]$, qui est un groupe abélien auquel est associé le G - *module* $(G, X, \theta) = X = X_\theta$ constituant le MODULE CENTRAL associé au PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$, alors :

(a) Le groupe $\hat{C}^1(P)$ des 1-COCHAINES GENERALISEES FAIBLES du PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$ est le groupe :

$$\hat{C}^1(P) = \hat{C}^1(G, \Gamma) = C^1(G, M) \times C^2(G, X)$$

des 1 - COCHAINES GENERALISEE FAIBLES de G dans Γ.

(b) Le groupe $\widetilde{C}^1(P)$ des 1-COCHAINES (GENERALISEES) STRICTES du PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$ est le groupe :

$$\widetilde{C}^1(P) = \widetilde{C}^1(G, \Gamma) = C^1(G, M) \times \{1\}$$

des 1 - COCHAINES (GENERALISEES) STRICTES de G dans Γ.

(c) Le groupe $C^1(P)$ des 1 - COCHAINES du PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$ est le *groupe intermédiaire :*

$$\widetilde{C}^1(P) \subset C^1(P) \subset \hat{C}^1(P)$$

caractérisé par la condition :

$$C^1(P) = C^1(G, M) \times Z^2_\theta(G, X)$$

dans laquelle le groupe $Z^2_\theta(G, X)$ est le groupe des θ-2-COCYCLES CENTRAUX de G dans Γ, appelé également le groupe des 2-COCYCLES CENTRAUX du PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$.

(d) L'espace $\widetilde{Z}^2(P)$ des 2 - COCYCLES STRICTS du PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$ est l'espace :

$$\widetilde{Z}^2(P) = \widetilde{Z}^2_\theta(G, \Gamma) = \mathrm{Ker}\, T_\theta$$

des θ - COCYCLES STRICTS de G dans Γ.

On rappelle que d'après la Définition 4-2 et le Scholie 4-3 de [4], *l'ensemble* $\hat{C}^2(G, \Gamma)$ des 2 - *cochaînes généralisées* de G dans Γ est constitué par les couples:

$$z = (\eta, m) = (\eta = (\eta_\alpha), m = (m_{\alpha,\beta})) \in C^1(G, \mathrm{Aut}(\Gamma)) \times C^2(G, \mathrm{Gr}(\Gamma))$$

vérifiant la condition :

(11) $\eta_\alpha \eta_\alpha = < m_{\alpha,\beta} > \eta_{\alpha\beta}$ pour tout $(\alpha, \beta) \in G^2$

Avec les notations du diagramme commutatif et exact canonique (1) et en posant pour simplifier les notations :

$q(s) = \bar{s} \in \mathrm{Aut}_e(\Gamma)$ pour tout $s \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$, compte tenu du Théorème 4-8 de [4], la condition :

$$z = (\eta, m) \in \hat{C}^2_\theta(G, \Gamma) = \chi^{-1}(\theta)$$

se traduit par la condition :

(12) $q(\eta_\alpha) = \bar{\eta}_\alpha = \theta(\alpha)$ pour tout $\alpha \in G$

Enfin, compte tenu du Lemme 6-2, de la Définition 6-3 et de la Définition 7-2 de [4], pour toute θ-COCHAINE GENERALISEE :

$$z = (\eta, m) \in \hat{C}^2_\theta(G, \Gamma) = \chi^{-1}(\theta)$$

la condition :

$$z = (\eta, m) \in \tilde{Z}^2(P) = \tilde{Z}^2_\theta(G, \Gamma) = \mathrm{Ker}\, T_\theta$$

s'exprime par la condition :

$$T[z] = T_\theta[z] = T_\theta[(\eta, m)] = (t_{\alpha,\beta,\gamma}) = t = 1 \in Z^3_\theta(G, X) = Z^3_\theta(G, \Gamma) \subset Z^3(G, \Gamma)$$

qui se traduit par la condition :

(13) $t_{\alpha,\beta,\gamma} = \eta_\alpha(m_{\beta,\gamma})\, m_{\alpha,\beta\gamma}\, m^{-1}_{\alpha\beta,\gamma}\, m^{-1}_{\alpha,\beta} = 1$ pour tout $(\alpha, \beta, \gamma) \in G^3$

La définition précédente montre donc que les 2-COCYCLES STRICTS :

$$z = (\eta, m) = (\eta = (\eta_\alpha), m = (m_{\alpha,\beta})) \in \tilde{Z}^2(P)$$

du PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$ sont constitués par les *couples* $z = (\eta, m)$ formés par une 1 - *cochaîne spéciale :*

$$\eta = (\eta_\alpha) \in C^1(G, \mathrm{Aut}(\Gamma))$$

et par une 2 - *cochaîne spéciale :*

$$m = (m_{\alpha,\beta}) \in C^2(G, \mathrm{Gr}(\Gamma)) = C^2(G, M)$$

vérifiant *l'ensemble* des trois conditions (11), (12) et (13).

(e) Le SECOND ESPACE DE COHOMOLOGIE NON ABELIENNE $\tilde{H}^2(P)$ du PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$, défini par la condition :

$$\tilde{H}^2(P) = \tilde{H}^2_\theta(G, \Gamma) \simeq \mathrm{Ext}_\theta(G, \Gamma) = \mathrm{Ext}[P] \tag{14}$$

coïncide avec le SECOND ESPACE DE θ - COHOMOLOGIE NON ABELIENNE du groupe G dans l'anneau-groupe Γ, identifiable à l'espace des CLASSES DE θ-EXTENSIONS de l'anneau-groupe Γ par le groupe G, dont la relation (7) donne également la caractérisation :

$$\tilde{H}^2(P) = \tilde{Z}^2(P) \Big/ \overset{\widetilde{(*)}}{\tilde{C}^1(P)} \tag{15}$$

(f) La COHOMOLOGIE CENTRALE $\hat{H}^*(P) = \{\hat{H}^n(P)\}$ du PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$, définie par la condition :

$$\hat{H}^*(P) = \hat{H}^*_\theta(G, \Gamma) = H^*_\theta(G, X) = \{H^n_\theta(G, X)\} \tag{16}$$

coïncide avec la θ-COHOMOLOGIE CENTRALE du groupe G dans l'anneau-groupe Γ et avec la *cohomologie abélienne* ordinaire du G-MODULE CENTRAL $(G, X, \theta) = X = X_\theta$ associé au PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$.

REMARQUES 1-3 - Le Théorème 4-9 de [6] assure *l'existence* de la CATEGORIE $\mathfrak{P}$ DES PSEUDO-MODULES.

Il en résulte, d'après le Théorème 5-2 et le Théorème 6-4 de [6], que l'espace $\widetilde{H}^2(P)$ et les groupes $\widehat{H}^n(P)$ *"dépendent fonctoriellement"* de P.

La terminologie, les notations et les propriétés qui viennent d'être rappelées, seront librement utilisées dans la suite.

2. PROLONGEMENT D'AUTOMORPHISMES.

La nature de la condition (N) de l'Introduction, suggère l'examen du problème de l'existence de *prolongements d'automorphismes* dans le cadre de la catégorie $\mathfrak{C}$ des *anneaux-groupes*.

Naturellement, étant donnés deux anneaux-groupes $\Gamma = [V; M]$ et $\Delta = [U ; N]$ qui déterminent une EXTENSION :

$$\text{(I)} \qquad \Gamma \subset \Delta$$

un automorphisme $f \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ admet un *prolongement* constitué par un automorphisme $F \in \mathrm{Aut}(\Delta)$, si l'automorphisme *d'anneaux-groupes* $F \in \mathrm{Aut}(\Delta)$ *stabilise* l'anneau-groupe $\Gamma = [V; M]$ (c'est-à-dire à la fois l'anneau V et le groupe $M \subset V^*$) et *induit* l'automorphisme $f \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$.

Dans la suite de ce paragraphe, on se limite au cas particulier d'une EXTENSION DISTINGUEE :

$$\text{(II)} \qquad \Gamma \lhd \Delta$$

caractérisée par l'existence d'une SUITE EXACTE MIXTE de la forme :

$$\text{(III)} \qquad \{0, 1\} \longrightarrow \Gamma = [V; M] \longrightarrow \Delta = [U; N] \xrightarrow{p} G \longrightarrow \{1\}$$

qui exprime *à la fois* la condition (II) et la caractérisation du GROUPE QUOTIENT :

$$\text{(IV)} \qquad G = \Delta/_\Gamma = \mathrm{Gr}(\Delta)/_{\mathrm{Gr}(\Gamma)} = N/_M$$

défini par la suite exacte de groupes :

$$\text{(V)} \qquad \{1\} \longrightarrow \mathrm{Gr}(\Gamma) = M \longrightarrow \mathrm{Gr}(\Delta) = N \xrightarrow{p} G \longrightarrow \{1\}$$

ce qui signifie que l'anneau-groupe $\Delta = [V; M]$ constitue une EXTENSION DE L'ANNEAU-GROUPE $\Gamma = [V; M]$ PAR LE GROUPE G.

Dans ce cas, pour un automorphisme $f \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$, qui admet un *prolongement* constitué par un automorphisme $F \in \mathrm{Aut}(\Delta)$, la Définition 1-2 et le Lemme 1-3 de [5] entraînent facilement l'existence d'un *automorphisme unique* $\psi \in \mathrm{Aut}(G)$, rendant commutatif le diagramme :

(VI)
$$
\begin{tikzcd}
\{0,1\} \arrow[r] & \Gamma = [V;M] \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \Delta = [U;N] \arrow[r, "p"] \arrow[d, "F"'] & G \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\psi"] & \{1\} \\
\{0,1\} \arrow[r] & \Gamma = [V;M] \arrow[r] & \Delta = [U;N] \arrow[r, "p"] & G \arrow[r] & \{1\}
\end{tikzcd}
$$

Cette propriété justifie la Définition suivante.

DEFINITION 2-1 - *Etant donnée une EXTENSION DISTINGUEE :*

$$\text{(II)} \quad \Gamma \lhd \Delta$$

caractérisée par l'existence d'une SUITE EXACTE MIXTE (III), *le GROUPE D'AUTOMORPHISMES D'EXTENSIONS :*

$$\mathrm{Aut}(\Delta\,;\Gamma)$$

de l'EXTENSION DISTINGUEE (II) *ou de la SUITE EXACTE MIXTE* (III) *est formé par les triplets :*

$$(f, F, \psi)$$

constitués par des automorphismes :

$$f \in \mathrm{Aut}(\Gamma) \qquad F \in \mathrm{Aut}(\Delta) \qquad \psi \in \mathrm{Aut}(G)$$

rendant commutatif le diagramme (VI), *la composition étant induite par le produit des compositions.*

REMARQUE 2-2 - Pour toute EXTENSION DISTINGUEE (II), tout automorphisme :

$$(f, F, \psi) \in \mathrm{Aut}(\Delta; \Gamma)$$

est entièrement déterminé par sa *"composante"* F, qui est un *automorphisme d'anneaux-groupes* $F \in \mathrm{Aut}(\Delta)$, assujetti à la seule condition :

$$F \in \mathrm{Stab}[\mathrm{Aut}(\Delta); \Gamma]$$

de sorte que l'automorphisme $f \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ est alors l'image de F par le morphisme de groupes, canonique, *de restriction* :

$$\mathrm{Stab}[\mathrm{Aut}(\Delta)\,; \Gamma] \longrightarrow \mathrm{Aut}(\Gamma)$$

Il en résulte un isomorphisme canonique :

$$\text{(17)} \qquad \mathrm{Aut}(\Delta; \Gamma) \simeq \mathrm{Stab}[\mathrm{Aut}((\Delta)\,; \Gamma]$$

obtenu en *identifiant* $(f, F, \psi) \in \mathrm{Aut}(\Delta; \Gamma)$ à $F \in \mathrm{Stab}[\mathrm{Aut}(\Delta); \Gamma]$, et des morphismes de groupes :

(18) $\mathrm{Aut}(\Delta;\Gamma) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\Gamma)$ et (19) $\mathrm{Aut}(\Delta;\Gamma) \longrightarrow \mathrm{Aut}(G)$

définis par *"restriction"* et par *"passage au quotient"*.

DEFINITION 2-3 - *Etant donnée une EXTENSION DISTINGUEE :*

$$\text{(II)} \quad \Gamma \lhd \Delta$$

caractérisée par l'existence d'une SUITE EXACTE MIXTE (III), *un* **couple** *d'automorphismes :*

$$(f, \psi) \in \mathrm{Aut}(\Gamma) \times \mathrm{Aut}(G)$$

est appelé un **couple** *COMPATIBLE s'il existe au moins un AUTOMORPHISME D'EXTENSIONS de la forme :*

$$(f, F, \psi) \in \mathrm{Aut}(\Delta\,;\Gamma)$$

dans lequel **l'automorphisme d'anneaux-groupes :**

$$F \in \mathrm{Aut}(\Delta)$$

constitue un **prolongement** *du couple* (f, ψ) *COMPATIBLE.*

Sous cette condition, la notation $\mathcal{F}(f, \psi)$ *désigne l'ensemble* **non vide** des **prolongements** $F \in \mathrm{Aut}(\Delta)$ *du couple* (f, ψ).

EXEMPLES 2-4 - Pour illustrer le cas classique des *algèbres* Q-*normales*, on considère des *"données classiques"* constituées par : un *corps* L, un groupe *fini* d'automorphismes $G \subset \mathrm{Aut}(L)$ et un sous-groupe *distingué* G' du groupe G.

Les Exemples 3-1 de [4] montrent que le *corps* L détermine canoniquement *l'anneau-groupe :*

$$\Gamma = [L; L^*] = \hat{L}$$

pour lequel :

(21) $V = \mathrm{An}(\Gamma) = L \;;\; M = \mathrm{Gr}(\Gamma) = L^* \;;\; X = \mathrm{Zg}(\Gamma) = L^*$

et qui vérifie :

(22) $\mathrm{Aut}_e(\Gamma) = \mathrm{Aut}(\Gamma) = \mathrm{Aut}(\hat{L}) = \mathrm{Aut}([L\,;L^*]) = \mathrm{Aut}(L)$

Les morphismes de groupes canoniques injectifs :

$$\theta : G \longrightarrow \mathrm{Aut}_e(\Gamma) = \mathrm{Aut}(\Gamma) = \mathrm{Aut}(\hat{L}) = \mathrm{Aut}(L)$$

et

$$\theta' : G' \longrightarrow \mathrm{Aut}_e(\Gamma) = \mathrm{Aut}(\Gamma) = \mathrm{Aut}(\hat{L}) = \mathrm{Aut}(L)$$

déterminés par les groupes $G \subset \mathrm{Aut}(L)$ et $G' \subset \mathrm{Aut}(L)$, caractérisent des *"caractères collectifs"* REALISABLES :

$$\theta \in \mathfrak{R} = \mathfrak{R}(G, \Gamma) \qquad \text{et} \qquad \theta' \in \mathfrak{R}' = \mathfrak{R}(G', \Gamma)$$

qui déterminent des PSEUDO-MODULES :

$$P = (G, \Gamma, \theta) \qquad \text{et} \qquad P' = (G', \Gamma, \theta')$$

Comme l'anneau-groupe $\Gamma = [V; M]$ est ABELIEN puisque : $Zg(\Gamma) = X = M = Gr(\Gamma)$, les Exemples (b) du paragraphe 9 de [4] entraînent l'existence de *l'identification* :

(23) $$\widetilde{H}^2(P') = \widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma) = \hat{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma) = H^2_{\theta'}(G', X) = H^2(G', L^*)$$

qu'il est possible de préciser.

En effet, toute *classe* de *cohomologie non abélienne :*

$$\xi' = \widetilde{z}\,' \in \widetilde{H}^2(P') = \widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma)$$

est déterminée par un 2-COCYCLE STRICT :

$$z' = (\eta', m') = (\eta' = (\eta'_\sigma),\ m' = (m'_{\sigma,\tau})) \in \widetilde{Z}^2_{\theta'}(G', \Gamma) = \widetilde{Z}^2(P')$$

du PSEUDO-MODULE $P' = (G', \Gamma, \theta')$, qui vérifie nécessairement la condition :

(24) $$\eta'_\sigma = \sigma \qquad \text{pour tout } \sigma \in G'$$

de sorte qu'il peut être identifié au 2 - COCYCLE CENTRAL :

$$m' = (m'_{\sigma,\tau}) \equiv (f'_{\sigma,\tau}) = f' \in Z^2_{\theta'}(G', X) = Z^2(G', L^*)$$

qui détermine donc la *classe* de *cohomologie galoisienne :*

$$\hat{f}\,' \in H^2(G', L^*)$$

qui peut être *identifiée* à la *classe* $\xi' \in \widetilde{H}^2(P')$.

Malgré cette *identification*, la *classe* de *cohomologie non abélienne :*

$$\widetilde{z}\,' \in \widetilde{H}^2(P') = \widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma)$$

et la *classe* de *cohomologie galoisienne :*

$$\hat{f}\,' \in H^2(G', L^*)$$

déterminent néanmoins des EXTENSIONS de *"natures distinctes"*.

En effet, d'une part, le 2 - COCYCLE CENTRAL :

$$f' = (f'_{\sigma,\tau}) \in Z^2(G', L^*)$$

constitue un *système de facteurs* au sens de E. NOETHER, qui détermine le *produit croisé classique* au sens de E. NOETHER :

(25) $$A = (L, G', f')$$

et par suite une EXTENSION D'ANNEAUX :

(I') $$L \subset A = (L, G', f')$$

et d'autre part, le 2 - COCYCLE STRICT :

$$z' = (\eta', m') \in \widetilde{Z}^2(P') = \widetilde{Z}^2_{\theta'}(G', \Gamma)$$

du PSEUDO-MODULE $P' = (G', \Gamma, \theta')$, constitue un SYSTEME DE FACTEURS MIXTES, qui détermine le PRODUIT CROISE MIXTE :

(26) $$\Delta' = (\Gamma, G', z')$$

et par suite une EXTENSION DISTINGUEE D'ANNEAUX-GROUPES :

(II') $$\Gamma \lhd \Delta'$$

qui peut être caractérisée par l'existence d'une SUITE EXACTE MIXTE de la forme :

(III') $$\{0, 1\} \longrightarrow \Gamma = [V ; M] \longrightarrow \Delta' = [U' ; N'] \xrightarrow{p'} G' \longrightarrow \{1\}$$

ce qui signifie que l'anneau-groupe $\Delta' = [U' ; N']$ constitue une θ' - EXTENSION DE L'ANNEAU-GROUPE $\Gamma = [V ; M]$ PAR LE GROUPE G', dont la *classe :*

$$Cl[\Delta'] \in Ext_{\theta'}(G', \Gamma) = Ext[P']$$

coïncide également avec la *classe :*

$$\xi' \in \widetilde{H}^2(P') = \widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma) \simeq Ext_{\theta'}(G', \Gamma) = Ext[P']$$

de *cohomologie non abélienne* du PSEUDO-MODULE $P' = (G', \Gamma, \theta')$.

Pour comparer les EXTENSIONS (I') et (II'), on utilisera librement les propriétés des PRODUITS CROISES MIXTES établies dans [5] et en particulier celles qui résultent du Théorème 2-5 de [5], qui montrent que pour *l'anneau-groupe :*

$$\Delta' = (\Gamma, G', z') = [U' ; N']$$

l'anneau sous-jacent $An(\Delta') = U'$ et le *groupe* sous-jacent $Gr(\Delta') = N'$ sont caractérisés par les conditions :

(27) $$U' = \bigoplus_{\sigma \in G'} Vu_\sigma = \bigoplus_{\sigma \in G'} Lu_\sigma$$

et

(28) $$N' = \coprod_{\sigma \in G'} Mu_\sigma = \coprod_{\sigma \in G'} L^*u_\sigma$$

l'addition étant celle du groupe abélien U' et la *multiplication* dans l'anneau U' et dans le *groupe* $N' \subset U'^*$ étant caractérisée (par distributivité dans U') au moyen des conditions :

(29) $$u_\sigma\, x = \eta'_\sigma(x)\, u_\sigma = \sigma(x)\, u_\sigma$$

pour tout $\sigma \in G'$ et tout $x \in V = L$ ou $x \in M = L^*$, et :

(30) $$u_\sigma\, u_\tau = m'_{\sigma,\tau}\, u_{\sigma\tau} = f'_{\sigma,\tau}\, u_{\sigma\tau}$$

pour tout $(\sigma, \tau) \in G'^2$, le morphisme de groupes surjectif :

$$p' : N' \longrightarrow G'$$

étant celui qui, à tout $n' \in N'$, de la forme : $n' = x_\sigma\, u_\sigma$, dans laquelle $x_\sigma \in M$, associe : $p'(n') = \sigma \in G'$.

Il en résulte immédiatement l'*égalité :*

(31) $$U' = A = (L, G', f')$$

qui montre que l'EXTENSION D'ANNEAUX (I') est tout simplement *l'extension d'anneaux sous-jacente* à l'EXTENSION DISTINGUEE D'ANNEAUX-GROUPE (II').

Dans ce contexte, compte tenu de la relation (22) qui donne *l'identification :*

(32) $$\mathrm{Aut}(L) = \mathrm{Aut}(\Gamma)$$

pour tout automorphisme (de *corps* ou *d'anneaux-groupes*) :

$$f \in \mathrm{Aut}(L) = \mathrm{Aut}(\Gamma)$$

a priori, il convient de *bien distinguer* les *prolongements* éventuels en un *automorphisme d'anneaux* $\bar{f} \in \mathrm{Aut}(A) = \mathrm{Aut}(U')$ et les prolongements éventuels en un *automorphisme d'anneaux-groupes* $F \in \mathrm{Aut}(\Delta')$.

On a cependant le résultat suivant.

PROPOSITION 2-5 - *Avec les hypothèses et les notations des Exemples 2-4, pour toute* **classe** :

$$\xi' \in \widetilde{H}^2(P') = \hat{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma) = H^2(G', L^*)$$

associée à L'EXTENSION D'ANNEAUX :

(I') $$L \subset A = (L, G', f')$$

et à l'EXTENSION DISTINGUEE D'ANNEAUX-GROUPES :

(II') $$\Gamma \lhd \Delta' = (\Gamma\, , G', z') = [U'\, ;\, N']$$

dans lesquelles figure le même **anneau** :

$$A = U'$$

pour tout élément :

$$g \in G \subset \mathrm{Aut}(L) = \mathrm{Aut}(\Gamma)$$

qui détermine l'automorphisme de groupes $\psi_g \in \mathrm{Aut}(G')$ *caractérisé par la condition :*

$\psi_g(\sigma) = \langle g, \sigma \rangle = g\,\sigma\,g^{-1}$ pour tout $\sigma \in G'$

les conditions suivantes sont équivalentes:

(a) *L'automorphisme* $g \in G \subset \mathrm{Aut}(L)$ *admet au moins un* **prolongement** *constitué par un automorphisme* $\bar{g} \in \mathrm{Aut}(A)$ *de* **l'anneau** *produit croisé* : $A = (L, G', f) = U'$.

(b) *Pour l'EXTENSION DISTINGUEE* (II'), *le* **couple** *d'automorphismes:*

$$(g, \psi_g) \in \mathrm{Aut}(\Gamma) \times \mathrm{Aut}(G')$$

est un **couple** *COMPATIBLE.*

De plus, sous ces conditions équivalentes, l'ensemble **non vide** $\bar{\mathcal{F}}(g)$ *des* **prolongements** $\bar{g} \in \mathrm{Aut}(A)$ *de* **l'automorphisme de corps** $g \in G \subset \mathrm{Aut}(L)$, *coïncide avec l'ensemble* **non vide** $\mathcal{F}(g, \psi_g)$ *des* **prolongements** $F \in \mathrm{Aut}(\Delta')$ *du* **couple** (g, ψ_g) *COMPATIBLE.*

PREUVE - Tout d'abord, en considérant le corps d'invariants : $F = L^{G'}$, d'après la Théorie des produits croisés classiques, on sait que l'anneau $A = (L, G', f) = U'$ est une F-*algèbre centrale simple de rang fini* et que le corps L un sous corps commutatif maximal de l'anneau A, qui coïncide avec son *commutant* A(L) dans l'anneau A, ce qui donne la relation :

(33) $$A(L) = L$$

Sous la condition (a), soit $\bar{g} \in \mathrm{Aut}(A) = \mathrm{Aut}(U')$ un *prolongement* de l'automorphisme $g \in G \subset \mathrm{Aut}(L)$.

Il en résulte : $\bar{g}(A^*) = A^*$, de sorte que la relation : $N' \subset U'^* = A^*$, implique : $\bar{g}(N') \subset A^*$, et par suite, pour tout $\sigma \in G'$, la condition (28) entraîne l'existence d'un élément inversible :

$$\bar{g}(u_\sigma) = \bar{u}_\sigma \in A^*$$

Par l'application de $\bar{g}$ qui prolonge g, la condition (29) entraîne la condition :

$$\bar{u}_\sigma\; g(x) = g \circ \sigma(x)\, \bar{u}_\sigma \qquad \text{pour tout } x \in V = L$$

et en posant : $g(x) = x'$, il en résulte la condition :

(34) $$\bar{u}_\sigma\; x'\, \bar{u}^{-1}_\sigma = \langle g, \sigma \rangle (x') \qquad \text{pour tout } x' \in V = L$$

De même, compte tenu de la relation : $N' \subset U'^* = A^*$, pour tout $\sigma \in G'$, la condition (28) entraîne que u_σ est un élément inversible $u_\sigma \in A^*$, pour lequel la condition (29) entraîne la condition :

$$u_\sigma\, x'\, u_\sigma^{-1} = \sigma(x') \qquad \text{pour tout } x' \in V = L$$

ce qui implique la condition :

(35) $$u_{<g,\,\sigma>}\, x'\, u^{-1}_{<g,\,\sigma>} = <g, \sigma>\,(x') \qquad \text{pour tout } x' \in V = L$$

Pour tout $\sigma \in G'$, en considérant l'élément inversible :

$$\bar{u}^{-1}{}_\sigma \; u_{<g,\,\sigma>} = a_\sigma \in A^*$$

les conditions (34) et (35) entraînent la condition :

$$a_\sigma\, x' = x'\, a_\sigma \qquad \text{pour tout } x' \in V = L$$

qui montre que a_σ appartient au *commutant* $A(L)$ du corps L dans l'anneau A, de sorte que la relation (33) entraîne :

$$a_\sigma \in A^* \cap A(L) = L^*$$

avec la condition :

(36) $$u_{<g,\,\sigma>} = \bar{u}_\sigma\, a_\sigma \qquad \text{pour tout } \sigma \in G'$$

En considérant la 1 - *cochaîne spéciale :*

$$c = (c_\sigma) \in C^1(G', M) = C^1(G', L^*)$$

définie par la condition :

(37) $$c_\sigma = <g, \sigma>\,(a_\sigma^{-1}) \qquad \text{pour tout } \sigma \in G'$$

la condition (36) entraîne facilement la condition :

(38) $$\bar{g}(u_\sigma) = \bar{u}_\sigma = c_\sigma\, u_{<g,\,\sigma>} \qquad \text{pour tout } \sigma \in G'$$

Pour tout élément $n' \in N'$, de la forme :

$$n' = x_\sigma\, u_\sigma$$

dans laquelle $x_\sigma \in M = L^*$, la condition (38) entraîne la relation :

(39) $$\bar{g}(n') = g(x_\sigma)\, c_\sigma\, u_{<g,\,\sigma>}$$

D'une part, la relation (39) montre que l'automorphisme d'anneaux $\bar{g} \in \mathrm{Aut}(A) = \mathrm{Aut}(U')$ *stabilise* le groupe $N' \subset U'^*$, c'est-à-dire *induit* un *automorphisme d'anneaux-groupes* :

$$\bar{g} = F \in \mathrm{Aut}(\Delta')$$

D'autre part, pour *tout* automorphisme de groupes $\psi \in \mathrm{Aut}(G')$ vérifiant la condition :

$$(g, F, \psi) \in \mathrm{Aut}(\Delta' ; \Gamma)$$

équivalente à la condition :

$$\psi \circ p' = p' \circ F$$

la caractérisation du morphisme de groupes, surjectif :

$$p' : N' \longrightarrow G'$$

et la relation (39) entraînent la condition :

$$\psi(\sigma) = <g, \sigma> = \psi_g(\sigma) \qquad \text{pour tout } \sigma \in G'$$

c'est-à-dire :

(40) $$\psi = \psi_g$$

Ainsi, avec *l'identification* décrite dans la Remarque 2-2, la condition (a), équivalente à : $\bar{\mathcal{F}}(g) \neq \emptyset$, implique :

(41) $$\bar{\mathcal{F}}(g) \subset \mathcal{F}(g, \psi_g)$$

d'où : $\mathcal{F}(g, \psi_g) \neq \emptyset$, c'est-à-dire la condition (b).

Réciproquement, il est évident que la condition (b) implique la condition (a), avec de plus :

(42) $$\mathcal{F}(g, \psi_g) \subset \bar{\mathcal{F}}(g)$$

Il en résulte l'équivalence des conditions (a) et (b).

Enfin, compte tenu des relations (41) et (42), elles entraînent :

(43) $$\bar{\mathcal{F}}(g) = \mathcal{F}(g, \psi_g)$$

ce qui achève la démonstration.

REMARQUE 2-6 - Sous les hypothèses de la Proposition 2-5, elle montre que pour que l'EXTENSION D'ANNEAUX (I') vérifie la condition (N) de l'Introduction, il faut et il suffit que l'EXTENSION DISTINGUEE D'ANNEAUX GROUPES (II') vérifie la condition :

(N_0) - << Pour tout élément $g \in G$, le *couple* d'automorphismes :

$$(g, \psi_g) \in \mathrm{Aut}(\Gamma) \times \mathrm{Aut}(G')$$

est un *couple* COMPATIBLE >>.

3. EXTENSIONS Q-NORMALES.

Comme cela a été expliqué dans l'Introduction, pour définir les EXTENSIONS Q-NORMALES, qui généralisent les *algèbres* Q-*normales,* on est amené à *substituer* aux données classiques $\{L; G; G'\}$, constituées par :

- un corps L,

- un groupe *fini* d'automorphismes $G \subset \mathrm{Aut}(L)$,

- un sous-groupe *distingué* G' du groupe G ;

de nouvelles DONNEES DE BASE $\{P = (G, \Gamma, \theta); G'\}$, constituées par :

- un PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$,

- un SOUS-GROUPE DISTINGUE G' du groupe G.

Il convient de noter que cette *"substitution"* réalise bien une ***généralisation des données***, puisque d'après les Exemples 2-4, des données classiques sont équivalentes à de nouvelles DONNEES DE BASE *particulières*.

NOTATIONS 3.1 -

Dans toute la suite, on considère des DONNEES DE BASE :

$$\{P = (G, \Gamma, \theta) ; G'\}$$

constituées par un PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$ et un SOUS-GROUPE DISTINGUE G' du groupe G, *arbitraires* mais *fixés*.

Ces DONNEES DE BASE déterminent automatiquement les éléments suivants.

Tout d'abord, le SOUS-GROUPE DISTINGUE G' du groupe G, détermine le GROUPE QUOTIENT $Q = G'' = G/G'$, caractérisé par une suite exacte de la forme :

(44) $$\{1\} \longrightarrow G' \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p''} G'' \longrightarrow \{1\}$$

Ensuite, compte tenu du Lemme 2-1 de [6], la condition :

(45) $$\theta' = i^*(\theta) = \theta \circ i$$

caractérise un *"caractère collectif"* REALISABLE :

$$\theta' \in \mathfrak{R}' = \mathfrak{R}(G', \Gamma)$$

qui détermine le PSEUDO-MODULE :

$$P' = (G', \Gamma, \theta')$$

obtenu à partir du PSEUDO-MODULE :

$$P = (G, \Gamma, \theta)$$

par la *"restriction"* déterminée par le morphisme de groupes, injectif :
$i \in \mathrm{Mor}[G', G]$, de la suite exacte canonique (44).

Compte tenu de la condition (14), le PSEUDO-MODULE $P' = (G', \Gamma, \theta')$ détermine son SECOND ESPACE DE COHOMOLOGIE NON ABELIENNE :

(46) $$\widetilde{H}^2(P') = \widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma) \simeq \mathrm{Ext}_{\theta'}(G', \Gamma) = \mathrm{Ext}[P']$$

de sorte que toute *classe* :

$$\xi' = \widetilde{z}' \in \widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma) = \widetilde{H}^2(P')$$

déterminée par un θ'-COCYCLE (GENERALISE) STRICT :

$$z' = (\eta', m') = (\eta' = (\eta'_\sigma), m' = (m'_{\sigma,\tau})) \in \widetilde{Z}^2_{\theta'}(G', \Gamma) = \widetilde{Z}^2(P')$$

c'est-à-dire par un 2-COCYCLE STRICT du PSEUDO-MODULE $P' = (G', \Gamma, \theta')$, est *identifiée* à la *classe* :

$$\mathrm{Cl}[\Delta'] = \xi' \in \mathrm{Ext}_{\theta'}(G', \Gamma) \simeq \widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma)$$

de l'EXTENSION DISTINGUEE D'ANNEAUX-GROUPES :

(II') $$\Gamma \lhd \Delta'$$

déterminée par le PRODUIT CROISE MIXTE :

(I') $$\Delta' = \Delta'_{\xi'} = \Delta'_{z'} = (\Gamma, G', z')$$

de l'ANNEAU-GROUPE $\Gamma = [V; M]$ par le GROUPE G' au moyen du SYSTEME DE FACTEURS MIXTES $z' = (\eta', m')$, et qui est caractérisée par l'existence d'une SUITE EXACTE MIXTE de la forme :

(III') $$\{0, 1\} \longrightarrow \Gamma = [V; M] \longrightarrow \Delta' = [U'; N'] \xrightarrow{p'} G' \longrightarrow \{1\}$$

qui exprime *à la fois* la condition (II') et la caractérisation du GROUPE QUOTIENT :

(IV') $$G' = \Delta'/\Gamma = \mathrm{Gr}(\Delta')/\mathrm{Gr}(\Gamma) = N'/M$$

défini par la suite exacte de groupes :

(V') $$\{1\} \longrightarrow \mathrm{Gr}(\Gamma) = M \longrightarrow \mathrm{Gr}(\Delta') = N' \xrightarrow{p'} G' \longrightarrow \{1\}$$

et pour lequel, l'action par automorphismes intérieurs du groupe N' sur Γ, détermine, par passage au quotient, le *"caractère collectif"* REALISABLE $\theta' \in \mathfrak{R}' = \mathfrak{R}(G', \Gamma)$ du groupe G' dans l'anneau-groupe Γ.

Enfin, tout élément $g \in G$, détermine les automorphismes de groupes, réciproques :

$$\psi_g \in \mathrm{Aut}(G') \qquad \text{et} \qquad \varphi_g \in \mathrm{Aut}(G')$$

caractérisés respectivement par la condition :

(47) $$\psi_g(\sigma) = \langle g, \sigma \rangle = g\,\sigma\,g^{-1} \qquad \text{pour tout } \sigma \in G$$

et par la condition :

(48) $$\varphi_g(\sigma) = (g, \sigma) = g^{-1}\,\sigma\, g \qquad \text{pour tout } \sigma \in G$$

Toutes ces notations seront librement utilisées dans la suite.

DEFINITION 3.2 - *Pour des DONNEES DE BASE :*

$$\{P = (G, \Gamma, \theta)\ ;\ G'\}$$

constituées par un PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$ *et un SOUS-GROUPE DISTINGUE* G' *du groupe* G, *qui déterminent le PSEUDO-MODULE* $P' = (G', \Gamma, \theta')$ *et le GROUPE QUOTIENT* $Q = G'' = G/G'$, *étant donnée une* **classe** :

$$\xi' \in \widetilde{H}^2(P') = \widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma) \simeq \mathrm{Ext}_{\theta'}(G', \Gamma) = \mathrm{Ext}[P']$$

pour laquelle le PRODUIT CROISE MIXTE :

(I') $$\Delta' = \Delta'_{\xi'} = \Delta'_{z'} = (\Gamma, G', z')$$

détermine l'EXTENSION DISTINGUEE D'ANNEAUX-GROUPES :

(II') $$\Gamma \lhd \Delta'$$

caractérisée par la SUITE EXACTE MIXTE :

(III') $$\{0,1\} \longrightarrow \Gamma = [V; M] \longrightarrow \Delta' = [U'; N'] \xrightarrow{p'} G' \longrightarrow \{1\}$$

alors :

(a) *L'EXTENSION DISTINGUEE D'ANNEAUX-GROUPES* (II') *est appelée une* EXTENSION Q-NORMALE *si elle vérifie la condition :*

(N') - << *Pour tout élément* $g \in G$ *et pour tout 2-COCYCLE STRICT :*

$$z = (\eta, m) = (\eta = (\eta_\alpha),\ m = (m_{\alpha,\beta})) \in \widetilde{Z}^2_\theta(G, \Gamma) = \widetilde{Z}^2(P)$$

du PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$, *le* **couple** *d'automorphismes :*

$$(\eta_g, \psi_g) \in \mathrm{Aut}(\Gamma) \times \mathrm{Aut}(G')$$

est un **couple** *COMPATIBLE, ce qui signifie que l'ensemble* $\mathcal{F}(\eta_g, \psi_g)$ *des* **prolongements** $F \in \mathrm{Aut}(\Delta')$ *du* **couple** (η_g, ψ_g) **n'est pas vide.** >>

(b) *Sous la condition précédente, la* **classe** $\xi' \in \widetilde{H}^2(P')$ *est alors appelée une* CLASSE D'EXTENSIONS Q-NORMALES.

Il convient de noter la *cohérence* de cette Définition, qui résulte du fait que la Q-NORMALITE de l'EXTENSION (II') ne dépend bien que de sa *classe.*

EXEMPLES 3.3 - Dans le cas où les DONNEES DE BASE $\{P = (G, \Gamma, \theta); G'\}$ sont associées à des *données classiques* $\{L; G; G'\}$ par la méthode décrite dans les Exemples 2-4, compte tenu de l'analogue de la condition (24), qui entraîne la condition :

(49) $$\eta_g = g \qquad \text{pour tout } g \in G$$

les Exemples 2-4, la Proposition 2-5 et la Remarque 2-6 montrent que la condition (N) de l'Introduction s'exprime alors par la condition (N').

Il en résulte bien que les EXTENSIONS Q-NORMALES constituent des *généralisations* des *algèbres* Q-*normales*.

4. LES DIVERSES COHOMOLOGIES.

On considère toujours des DONNEES DE BASE :

$$\{P = (G, \Gamma, \theta) ; G'\}$$

constituées par un PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$ et un SOUS-GROUPE DISTINGUE G' du groupe G, qui déterminent le PSEUDO-MODULE $P' = (G', \Gamma, \theta')$ et le GROUPE QUOTIENT $Q = G'' = G/G'$.

Les PSEUDO-MODULES :

$$P = (G, \Gamma, \theta) \qquad \text{et} \qquad P' = (G', \Gamma, \theta')$$

déterminent donc, d'une part les SECONDS ESPACES DE COHOMOLOGIE NON ABELIENNE :

$$\widetilde{H}^2(P) = \widetilde{H}^2_\theta(G, \Gamma) \simeq \mathrm{Ext}_\theta(G, \Gamma) \quad \text{et} \quad \widetilde{H}^2(P') = \widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma) \simeq \mathrm{Ext}_{\theta'}(G', \Gamma)$$

et d'autre part, pour chaque entier naturel $n \in \mathbf{N}$, les $n^{\text{ièmes}}$ GROUPES DE COHOMOLOGIE CENTRALE :

$$\widehat{H}^n(P) = \widehat{H}^n_\theta(G, \Gamma) = H^n_\theta(G, X) \qquad \text{et} \qquad \widehat{H}^n(P') = \widehat{H}^n_{\theta'}(G', \Gamma) = H^n_{\theta'}(G', X)$$

On se propose en particulier d'établir l'existence *d'actions naturelles* du groupe G sur l'*espace* $\widetilde{H}^2(P')$ et sur les *groupes abéliens* $\widehat{H}^n(P')$.

On commence d'abord par *"relier"* les PSEUDO-MODULES P et P'.

LEMME 4-1 - *Les DONNEES DE BASE déterminent de façon unique un MORPHISME DE PSEUDO-MODULES :*

$$\Phi = (i, 1_\Gamma) = (i, 1_\Gamma, z, z^*) : P = (G, \Gamma, \theta) \longrightarrow P' = (G', \Gamma, \theta')$$

constitué par un QUASI-MORPHISME **sous-jacent** :

$$\Phi_0 = (i, 1_\Gamma) : P = (G, \Gamma, \theta) \longrightarrow P' = (G', \Gamma, \theta')$$

et par un **couple** :

$$(z, z^*)$$

"défini à une équivalence près" *et formé par des COCYCLES (GENERALISES) STRICTS :*

$$z = (\eta, m) = (\eta = (\eta_\alpha), m = (m_{\alpha,\beta})) \in \widetilde{Z}^2_\theta(G, \Gamma) = \widetilde{Z}^2(P)$$

et

$$z^* = (\eta^*, m^*) = (\eta^* = (\eta^*_\sigma), m^* = (m^*_{\sigma,\tau})) \in \widetilde{Z}^2_{\theta'}(G', \Gamma) = \widetilde{Z}^2(P')$$

qui vérifient l'ensemble (c) *des* **"conditions de compatibilité"** *constitué par les deux conditions suivantes :*

(c_1) $\qquad \eta^*_\sigma = \eta_{i(\sigma)} = \eta_\sigma \qquad$ pour tout $\sigma \in G'$

(c_2) $\qquad m^*_{\sigma,\tau} = m_{i(\sigma), i(\tau)} = m_{\sigma,\tau} \qquad$ pour tout $(\sigma, \tau) \in G'^2$

de telle sorte que le **"morphisme d'espaces homogènes"** :

$$\Phi^* : \widetilde{Z}^2_\theta(G, \Gamma) = \widetilde{Z}^2(P) \longrightarrow \widetilde{Z}^2_{\theta'}(G', \Gamma) = \widetilde{Z}^2(P')$$

est caractérisé par la condition :

(50) $\qquad \Phi^*[z] = z^*$

PREUVE - La Définition 4-1, le Lemme 4-2 et la Définition 4-5 de [6] montrent que les DONNEES DE BASE déterminent de façon unique un QUASI-MORPHISME :

$$\Phi_0 = (i, 1_\Gamma) \ : P = (G, \Gamma, \theta) \longrightarrow P' = (G', \Gamma, \theta')$$

La Définition 4-6 de [6], appliquée en choisissant :
$\Gamma' = \Gamma$, $\varphi = i$ et $f = 1_\Gamma$, montre que les conditions (c_1) et (c_2) caractérisent bien un PRE-MORPHISME :

$$\Phi = (i, 1_\Gamma, z, z^*) : P = (G, \Gamma, \theta) \longrightarrow P' = (G', \Gamma, \theta')$$

Le Lemme 4-7 de [6] montre alors que ce PRE-MORPHISME détermine un *morphisme de groupes :*

$$\Phi^*_0 : C^1(P) \longrightarrow C^1(P')$$

qui, à toute 1-COCHAINE :

$$c = (a, b) \in C^1(P) = C^1(G, M) \times Z^2_\theta(G, X)$$

associe la 1-COCHAINE :

$$\Phi^*_o[c] = \Phi^*_o[(a, b)] = c^* = (a^*, b^*) \in C^1(P') = C^1(G', M) \times Z^2_{\theta'}(G', X)$$

caractérisée par les conditions :

(c3) $\quad a^*_\sigma = a_{i(\sigma)} = a_\sigma \qquad$ pour tout $\sigma \in G'$

(c4) $\quad b^*_{\sigma,\tau} = b_{i(\sigma),\, i(\tau)} = b_{\sigma,\tau} \qquad$ pour tout $(\sigma, \tau) \in G'^2$

De même, le Lemme 4-7 de [6] montre aussi que ce PRE-MORPHISME $\Phi : P \to P'$, détermine une *application* :

$$\Phi^* : \widetilde{Z}^2_\theta(G, \Gamma) = \widetilde{Z}^2(P) \longrightarrow \widetilde{Z}^2_{\theta'}(G', \Gamma) = \widetilde{Z}^2(P')$$

qui est caractérisée par le fait qu'elle constitue un *"morphisme d'espaces homogènes"*, en ce sens que les *actions* $*$ et $*'$, associées à P et à P', rendent commutatif le diagramme :

(51)
$$\begin{array}{ccc} C^1(P) \times \widetilde{Z}^2(P) & \xrightarrow{\;*\;} & \widetilde{Z}^2(P) \\ \Phi^*_o \downarrow \quad \downarrow \Phi^* & & \downarrow \Phi^* \\ C^1(P') \times \widetilde{Z}^2(P') & \xrightarrow{\;*'\;} & \widetilde{Z}^2(P') \end{array}$$

et qu'elle vérifie la condition :

(50) $$\Phi^*[z] = z^*$$

Enfin, le Lemme 4-7 de [6] entraîne que le *couple* (z, z*) est alors *"défini à une équivalence près"*, ce qui, d'après la Définition 4-8 de [6], entraîne bien *l'existence* du MORPHISME DE PSEUDO-MODULES :

$$\Phi = (i, 1_\Gamma) = (i, 1_\Gamma, z, z^*) \; : P = (G, \Gamma, \theta) \longrightarrow P' = (G', \Gamma, \theta')$$

et achève la démonstration.

LEMME 4.2 - *Les DONNEES DE BASE* :

$$\{P = (G, \Gamma, \theta) \; ; G'\}$$

caractérisent le MORPHISME DE PSEUDO-MODULES :

$$\Phi = (i, 1_\Gamma) : P = (G, \Gamma, \theta) \longrightarrow P' = (G', \Gamma, \theta')$$

qui détermine alors :

(a) *Une APPLICATION DE RESTRICTION :*

$$\widetilde{r}_2 : \widetilde{H}^2_\theta(G, \Gamma) = \widetilde{H}^2(P) \longrightarrow \widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma) = \widetilde{H}^2(P')$$

caractérisée par la condition :

(52) $$\widetilde{r}_2 = \widetilde{\Phi} = \widetilde{H}^2(\Phi)$$

(b) *Pour tout entier naturel* $n \in \mathbb{N}$ *, un HOMOMORPHISME DE RESTRICTION :*

$$\hat{r}_n : \hat{H}^n_\theta(G, \Gamma) = \hat{H}^n(P) \longrightarrow \hat{H}^n_{\theta'}(G', \Gamma) = \hat{H}^n(P')$$

qui est un **morphisme de groupes abéliens,** *caractérisé par la condition :*

(53) $$\hat{r}_n = \hat{\Phi}^n = \hat{H}^n(\Phi)$$

PREUVE - Compte tenu du Lemme 4-1, le Théorème 5-2 de [6] qui établit *l'existence* du FONCTEUR COHOMOLOGIE NON ABELIENNE :

$$\hat{H}^2(\,) : \mathfrak{P} \longrightarrow \mathfrak{E}$$

prouve la partie (a) et le Théorème 6-4 de [6] qui établit *l'existence* du FONCTEUR COHOMOLOGIE CENTRALE :

$$\hat{H}^*(\,) = \{\hat{H}^n(\,)\}_{n \in \mathbb{N}} : \mathfrak{P} \longrightarrow (\mathfrak{A})^{\mathbb{N}}$$

entraîne la partie (b), ce qui achève la démonstration.

LEMME 4-3 - *Pour le PSEUDO-MODULE* $P' = (G', \Gamma, \theta')$, *les* **automorphismes** :

$$\Psi = (\varphi, f, z', z'') \in \mathrm{Aut}(P')$$

du PSEUDO-MODULE $P' = (G', \Gamma, \theta')$ *sont* **caractérisés** *par leur QUASI-MORPHISME* **sous-jacent** $\Psi_0 = (\varphi, f) \equiv \Psi$ *constitué par un couple d'automorphismes :*

$$\Psi = (\varphi, f) \in \mathrm{Aut}(G') \times \mathrm{Aut}(\Gamma)$$

associé par la condition :

(54) $$\psi = \varphi^{-1}$$

à un **couple** d'automorphismes :

$$(f, \psi) \in \mathrm{Aut}(\Gamma) \times \mathrm{Aut}(G')$$

vérifiant la condition :

(55) $$\theta' \circ \psi = f_e \circ \theta'$$

dans laquelle **l'automorphisme "extérieur"** $f_e \in \mathrm{Aut}_e(\Gamma)$ *est* **induit** *par l'automorphisme* $f \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$, *agissant par automorphismes intérieurs sur le groupe* $\mathrm{Aut}(\Gamma)$.

De plus, dans la caractérisation :

$$\Psi = (\varphi, f, z', z'') \equiv (\varphi, f)$$

le couple (z', z'') **"défini à une équivalence près"** *est constitué par des COCYCLES STRICTS* :

$$z' = (\eta', m') \in \widetilde{Z}^2_{\theta'}(G', \Gamma) = \widetilde{Z}^2(P') \text{ et } z'' = (\eta'', m'') \in \widetilde{Z}^2_{\theta'}(G', \Gamma) = \widetilde{Z}^2(P')$$

reliés par les conditions :

(c_1''') $$\eta''_{\psi(\sigma)} = f \circ \eta'_\sigma \circ f^{-1} \qquad \text{pour tout } \sigma \in G'$$

(c_2''') $$m''_{\psi(\sigma), \psi(\tau)} = f[m'_{\sigma,\tau}] \qquad \text{pour tout } (\sigma, \tau) \in G'^2$$

qui traduisent la condition :

(56) $$\Psi^*[z'] = z''$$

PREUVE - Elle résulte immédiatement du Lemme 9-1 de [6].

LEMME 4-4 - *Les DONNEES DE BASE :*

$$\{P = (G, \Gamma, \theta) \; ; G'\}$$

déterminent une application :

$$G \times \widetilde{Z}^2(P) \longrightarrow \mathrm{Aut}(P')$$

qui, à tout couple $(g, z) \in G \times \widetilde{Z}^2(P)$, *constitué par un élément* $g \in G$ *et par un COCYCLE (GENERALISE) STRICT de la forme :*

$$z = (\eta, m) = (\eta = (\eta_\alpha), m = (m_{\alpha,\beta})) \in \widetilde{Z}^2_\theta(G, \Gamma) = \widetilde{Z}^2(P)$$

associe l'AUTOMORPHISME :

(57) $$\Psi_{g, z} = (\varphi_g, \eta_g) \in \mathrm{Aut}(P')$$

du PSEUDO-MODULE $P' = (G', \Gamma, \theta')$.

PREUVE - Avec les Notations 3-1, les automorphismes :

$$\eta_g = f \in \mathrm{Aut}(\Gamma) \quad \varphi_g = \varphi \in \mathrm{Aut}(G') \quad \text{et} \quad \psi_g = \psi \in \mathrm{Aut}(G')$$

sont reliés par la condition (54).

Pour tout $\sigma \in G'$, en posant : $\psi(\sigma) = \psi_g(\sigma) = <g, \sigma> = g\,\sigma\,g^{-1} = \sigma' \in G'$, ce qui entraîne : $g\sigma = \sigma' g$, la condition (11) implique :

$$\eta_g\,\eta_\sigma = < m_{g,\sigma} > \eta_{g\sigma} \qquad \text{et} \qquad \eta_{\sigma'}\,\eta_g = < m_{\sigma',g} > \eta_{\sigma' g}$$

ce qui donne la relation :

$$\eta_g\,\eta_\sigma\,\eta_g^{-1} = < m_{g,\sigma} > < m_{\sigma',g}^{-1} > \eta_{\sigma'}$$

c'est-à-dire la relation :

$$f \circ \eta_\sigma \circ f^{-1} = < m_{g,\sigma}\, m_{\sigma', g}^{-1} > \eta_{\psi(\sigma)}$$

dans le groupe $\mathrm{Aut}(\Gamma)$.

Son image canonique dans le groupe $\mathrm{Aut}_e(\Gamma)$ donne la relation :

$$f_e[\bar{\eta}_\sigma] = \bar{\eta}_{\psi(\sigma)}$$

c'est-à-dire la condition :

$$f_e \circ \theta(\sigma) = \theta[\psi(\sigma)] \qquad \text{pour tout } \sigma \in G'$$

La condition (45) entraîne alors la condition :

$$f_e \circ \theta'(\sigma) = \theta' \circ \psi(\sigma) \qquad \text{pour tout } \sigma \in G'$$

c'est-à-dire la condition (55).

Le Lemme 4-3 entraîne alors que le couple d'automorphismes :

$$(\varphi_g, \eta_g) = (\varphi, f) \in \mathrm{Aut}(G') \times \mathrm{Aut}(\Gamma)$$

caractérise bien un AUTOMORPHISME :

$$\Psi_{g,z} = (\varphi_g, \eta_g) \in \mathrm{Aut}(P')$$

du PSEUDO-MODULE $P' = (G', \Gamma, \theta')$, ce qui achève la démonstration.

LEMME 4-5 - *Avec les DONNEES DE BASE :*

$$\{P = (G, \Gamma, \theta) \; ; \; G'\}$$

pour tout AUTOMORPHISME DE PSEUDO-MODULES :

$$\Psi' \in \mathrm{Aut}(P')$$

qui est INTERIEUR en ce sens qu'il est de la forme :

$$\Psi' = (\varphi = 1_{G'}, f = \langle a \rangle)$$

pour un **automorphisme intérieur** $f = \langle a \rangle \in \mathrm{Aut}_i(\Gamma)$ *de l'anneau-groupe* $\Gamma = [V; M]$, *alors :*

(a) *Pour tout entier naturel* $n \in \mathbb{N}$, *son image par le foncteur* $\hat{H}^n(\ )$ *constitue* **l'automorphisme neutre** :

$$\hat{H}^n(\Psi') = 1 \in \mathrm{Aut}[\hat{H}^n_{\theta'}(G', \Gamma)] = \mathrm{Aut}[\hat{H}^n(P')] = \mathrm{Aut}[H^n_{\theta'}(G', X)]$$

(b) *Son image par le FONCTEUR COHOMOLOGIE NON ABELIENNE* $\widetilde{H}^2(\ )$ *constitue* **l'automorphisme d'ensembles neutre** :

$$\widetilde{H}^2(\Psi') = 1 \in \mathrm{Aut}[\widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma)] = \mathrm{Aut}[\widetilde{H}^2(P')]$$

PREUVE - Tout d'abord, il convient de remarquer que l'hypothèse : $f = \langle a \rangle \in \mathrm{Aut}_i(\Gamma)$, entraîne $f_e = 1 \in \mathrm{Aut}_e(\Gamma)$, de sorte que le Lemme 4-3 entraîne bien *l'existence* de l'AUTOMORPHISME :

$$\Psi' = (\varphi = 1_{G'}, f = \langle a \rangle) \in \mathrm{Aut}(P')$$

Le Lemme 4-7 et le Théorème 6-2 de [6] montrent que par l'application du FONCTEUR MODULE CENTRAL :

$$c(\ ) : \mathfrak{P} \longrightarrow \mathfrak{M}$$

les PSEUDO-MODULES :

$$P = (G, \Gamma, \theta) \qquad \text{et} \qquad P' = (G', \Gamma, \theta')$$

déterminent respectivement les MODULES CENTRAUX associés, constitués par le G-*module* :

$$c(P) = X = (G, X, \theta) = X_\theta$$

et par le G'-*module* :

$$c(P') = X' = (G', X, \theta') = X_{\theta'}$$

caractérisés par *le même groupe abélien* $X = Z_g(\Gamma)$ muni des structures de G-module et de G'-module déterminées par les *"caractères"* :

$$\varpi \circ \theta = \underline{\theta} \in \mathrm{Mor}[G, \mathrm{Aut}(X)]$$

et

$$\varpi \circ \theta' = \underline{\theta}' \in \mathrm{Mor}[G', \mathrm{Aut}(X)]$$

notés plus simplement :

$$\theta \in \mathrm{Mor}[G, \mathrm{Aut}(X)] \qquad \text{et} \qquad \theta' \in \mathrm{Mor}[G', \mathrm{Aut}(X)]$$

De même, le Lemme 4-7 et le Théorème 6-2 de [6] montrent que par l'application du FONCTEUR MODULE CENTRAL c( ), l'AUTOMORPHISME INTERIEUR DE PSEUDO-MODULES,

$$\Psi' = (\varphi = 1_{G'}, f = \langle a \rangle) \in \mathrm{Aut}(P')$$

détermine l'automorphisme de G'-*module* :

$$c(\Psi') = \underline{\Psi}' = (\varphi = 1_{G'}, \underline{f} = 1_X) \in \mathrm{Aut}(X')$$

qui est *l'automorphisme neutre* :

$$c(\Psi') = \underline{\Psi}' = (\varphi = 1_{G'}, 1_{X'}) = 1 \in \mathrm{Aut}(X')$$

Puisque la Remarque 6-5 de [6] donne la relation :

$$\hat{H}^*(\ ) = H^*(\ ) \circ c(\ ) \tag{58}$$

les relations :

$$\hat{H}^n(P') = \hat{H}^n_{\theta'}(G', \Gamma) = H^n_{\theta'}(G', X) = H^n(G', X')$$

entraînent les relations :

$$\hat{H}^n(\Psi') = H^n(\underline{\Psi}') = H^n(1) = 1 \in \mathrm{Aut}[\hat{H}^n(P')] \tag{59}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui achève la preuve de la partie (a).

Le Théorème 5-2 de [6] montre que par l'application du FONCTEUR COHOMOLOGIE NON ABELIENNE :

$$\hat{H}^2(\ ) : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{E}$$

l'AUTOMORPHISME INTERIEUR DE PSEUDO-MODULES :

$$\Psi' = (\varphi = 1_{G'}, f = \langle a \rangle) \in \mathrm{Aut}(P')$$

détermine *l'automorphisme d'ensembles :*

$$\tilde{H}^2(\Psi') = \tilde{\Psi}' \in \mathrm{Aut}[\tilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma)] = \mathrm{Aut}[\tilde{H}^2(P')]$$

Compte tenu des conditions :

$$\varphi^{-1} = \psi = 1_{G'} \in \mathrm{Aut}(G') \qquad \text{et} \qquad f = \langle a \rangle \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$$

le Lemme 4-3 entraîne que pour des COCYCLES STRICTS :

$$z' = (\eta', m') \in \widetilde{Z}^2_{\theta'}(G', \Gamma) = \widetilde{Z}^2(P') \text{ et } z'' = (\eta'', m'') \in \widetilde{Z}^2_{\theta'}(G', \Gamma) = \widetilde{Z}^2(P')$$

la condition :

(60) $$\Psi'^*[z'] = z''$$

qui se traduit par les conditions (c'''_1) et (c'''_2), s'exprime ici par *l'ensemble* des deux conditions :

(61) $\eta''_\sigma = < a > o\, \eta'_\sigma\, o < a^{-1} >$ pour tout $\sigma \in G'$

(62) $m''_{\sigma,\tau} = a \,.\, m'_{\sigma,\tau} \,.\, a^{-1}$ pour tout $(\sigma, \tau) \in G'^2$

La condition :

(63) $a'_\sigma = a\eta'_\sigma(a^{-1})$ pour tout $\sigma \in G'$

détermine alors une 1-*cochaîne spéciale :*

$$a' = (a'_\sigma) \in C^1(G', M)$$

du groupe G' dans le groupe $M = Gr(\Gamma)$.

D'une part, il est immédiat que la condition (61) se traduit par la condition :

(64) $\eta''_\sigma = < a'_\sigma > \eta'_\sigma$ pour tout $\sigma \in G'$

D'autre part, compte tenu de la condition (11), qui donne ici la condition :

(65) $\eta'_\sigma\, \eta'_\tau = < m'_{\sigma,\tau} > \eta'_{\sigma\tau}$ pour tout $(\sigma, \tau) \in G'^2$

puisque les éléments η'_σ, η'_τ et $\eta'_{\sigma\tau}$ du groupe d'automorphismes :

$$Aut(\Gamma) = Stab[Aut(V); M]$$

constituent également des éléments du groupe d'automorphismes Aut(M) du groupe $M = Gr(\Gamma)$, dans ce groupe M, la condition (63) entraîne successivement les relations :

$$\begin{aligned}
a'_\sigma\, \eta'_\sigma(a'_\tau)\, m'_{\sigma,\tau}\, a'^{-1}_{\sigma\tau} &= a\eta'_\sigma(a^{-1})\, \eta'_\sigma[a\eta'_\tau(a^{-1})]\, m'_{\sigma,\tau}\, a'^{-1}_{\sigma\tau} \\
&= a\eta'_\sigma(a^{-1})\, \eta'_\sigma(a)\, [\eta'_\sigma\eta'_\tau(a^{-1})]\, m'_{\sigma,\tau}\, a'^{-1}_{\sigma\tau} \\
&= a[\eta'_\sigma\eta'_\tau(a^{-1})]\, m'_{\sigma,\tau}\, a'^{-1}_{\sigma\tau} \\
&= a[m'_{\sigma,\tau}\, \eta'_{\sigma\tau}(a^{-1})\, m'^{-1}_{\sigma,\tau}]m'_{\sigma,\tau}\, a'^{-1}_{\sigma\tau} \\
&= am'_{\sigma,\tau}\, \eta'_{\sigma\tau}(a^{-1})\, [a\eta'_{\sigma\tau}(a^{-1})]^{-1} \\
&= am'_{\sigma,\tau}\, \eta'_{\sigma\tau}(a^{-1})\, \eta'_{\sigma\tau}(a)\, a^{-1} \\
&= am'_{\sigma,\tau}\, a^{-1}
\end{aligned}$$

de telle sorte que la condition (62) se traduit par la condition :

(66) $m''_{\sigma,\tau} = a'_\sigma\eta'_\sigma(a'_\tau)\, m'_{\sigma,\tau}\, a'^{-1}_{\sigma\tau}$ pour tout $(\sigma, \tau) \in G'^2$

D'après le Lemme 4-5 de [4], les deux conditions :

(64) et (66) se condensent en la seule condition :

(67) $$z'' = (\eta'', m'') = (a', 1) * (\eta', m') = a' \,\widetilde{*}\, (\eta', m') = a' \,\widetilde{*}\, z'$$

qui est donc *équivalente* à la condition (60).

Ainsi, il existe une 1-COCHAINE STRICTE :

$$a' = (a', 1) \in \widetilde{C}^1(G', \Gamma) = C^1(G', M) \times \{1\} = \widetilde{C}^1(P')$$

pour laquelle la condition (60) entraîne la condition (67), qui signifie, d'après la Définition 8-3 de [4], que les COCYCLES STRICTS z' et z" sont *strictement cohomologues,* c'est-à-dire qu'ils déterminent *la même classe de cohomologie stricte :*

$$\xi' = \widetilde{z}' = \widetilde{z}'' \in \widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma) = \widetilde{H}^2(P')$$

Comme le Lemme 5-1 de [6] montre que *l'automorphisme d'ensembles* $\widetilde{H}^2(\Psi') = \widetilde{\Psi}'$ se déduit de la *bijection :*

$$\Psi'^* : \widetilde{Z}^2_{\theta'}(G', \Gamma) = \widetilde{Z}(P') \longrightarrow \widetilde{Z}^2_{\theta'}(G', \Gamma) = \widetilde{Z}^2(P')$$

par le *"passage au quotient" :*

$$\widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma) = \widetilde{Z}^2_{\theta'}(G', \Gamma) \Big/ \overset{\widetilde{(*)}}{\widetilde{C}^1(G', \Gamma)}$$

il en résulte immédiatement que $\widetilde{H}^2(\Psi') = \widetilde{\Psi}'$ est l'automorphisme d'ensembles *neutre*, ce qui termine la preuve de la partie (b) et achève la démonstration.

LEMME 4-6 - *Avec les DONNEES DE BASE :*

$$\{ P = (G, \Gamma, \theta);\ G' \}$$

pour tout **couple** :

$$(g, z) \in G \times \widetilde{Z}^2(P)$$

qui détermine l'AUTOMORPHISME DE PSEUDO-MODULES :

$$\Psi_{g,z} = (\varphi_g, \eta_g) \in \mathrm{Aut}(P')$$

alors :

(a) *Pour tout entier naturel* $n \in \mathbb{N}$, *son image par le foncteur* $\hat{H}^n(\ )$ *constitue un automorphisme de groupes :*

$$\hat{H}^n(\Psi_{g,z}) = \hat{g}^n \in \mathrm{Aut}[H^n_{\theta'}(G', \Gamma)] = \mathrm{Aut}[\hat{H}^n(P')] = \mathrm{Aut}[H^n_{\theta'}(G', X)]$$

indépendant du choix *du COCYCLE STRICT* $z = (\eta, m) \in \widetilde{Z}^2(P)$.

(b) *Son image par le FONCTEUR COHOMOLOGIE NON ABELIENNE* $\widetilde{H}^2(\;)$ *constitue un* **automorphisme d'ensembles :**

$$\widetilde{H}^2(\Psi_{g,z}) = \widetilde{g} \in \mathrm{Aut}[\,\widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma)] = \mathrm{Aut}[\,\widetilde{H}^2(P')]$$

indépendant du choix *du COCYCLE STRICT* $z = (\eta, m) \in \widetilde{Z}^2(P)$.

PREUVE - Pour deux COCYCLES STRICTS quelconques :

$$z = (\eta, m) \in \widetilde{Z}^2_\theta(G, \Gamma) = \widetilde{Z}^2(P) \quad \text{et} \quad z' = (\eta', m') \in \widetilde{Z}^2_\theta(G, \Gamma) = \widetilde{Z}^2(P)$$

la partie (a) du Lemme 4-4 de [6] entraîne qu'il existe au moins une 1-COCHAINE:

$$(a, b) \in C^1(P) = C^1(G, M) \times Z^2_\theta(G, X)$$

du PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$, telle que :

(68) $$z' = (\eta', m') = (a, b) * (\eta, m) = (a, b) * z$$

ce qui, d'après le Lemme 4-5 de [4], se traduit par *l'ensemble* des deux conditions:

(69) $$\eta'_\alpha = < a_\alpha > \eta_\alpha \qquad \text{pour tout } \alpha \in G$$

(70) $$m'_{\alpha,\beta} = a_\alpha\, \eta_\alpha(a_\beta)\, m_{\alpha,\beta}\, a^{-1}_{\alpha\beta}\, b_{\alpha,\beta} \quad \text{pour tout } (\alpha, \beta) \in G^2$$

En considérant l'AUTOMORPHISME INTERIEUR DE PSEUDO-MODULES :

$$\Psi'_g = (\varphi = 1_{G'}\,,\, f = < a_g >) \in \mathrm{Aut}(P')$$

compte tenu du Lemme 4-4, la condition (69) entraîne la relation :

(71) $$\Psi_{g,z'} = \Psi'_g \circ \Psi_{g,z}$$

dans le groupe d'automorphismes Aut(P') du PSEUDO-MODULE $P'=(G', \Gamma, \theta')$.

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, compte tenu de la partie (a) du Lemme 4-5, le Théorème 6-4 de [6] montre que l'application du foncteur $\hat{H}^n(\;)$ à la relation (71) entraîne la relation :

(72) $$\hat{H}^n(\Psi_{g,z'}) = \hat{H}^n(\Psi_{g,z})$$

ce qui termine la preuve de la partie (a).

De même, compte tenu de la partie (b) du Lemme 4-5, le Théorème 5-2 de [6] montre que l'application du FONCTEUR COHOMOLOGIE NON ABELIENNE $\widetilde{H}^n(\ )$ à la relation (71) entraîne la relation :

$$\widetilde{H}^2(\Psi_{g,\,z'}) = \widetilde{H}^2(\Psi_{g,\,z}) \tag{73}$$

ce qui termine la preuve de la partie (b) et achève la démonstration.

THEOREME 4-7 - *Pour des DONNEES DE BASE :*

$$\{P = (G, \Gamma, \theta)\ ;\ G'\}$$

constituées par un PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$ *et un SOUS-GROUPE DISTINGUE* G' *du groupe* G, *qui déterminent le PSEUDO-MODULE* $P' = (G', \Gamma, \theta')$ *et le GROUPE QUOTIENT* $Q = G'' = G/G'$, *alors :*

(a) *Pour tout entier naturel* $n \in \mathbb{N}$, *il existe une* **action** *du groupe* G *sur le* $n^{ième}$ *GROUPE DE COHOMOLOGIE CENTRALE :*

$$\hat{H}^n(P') = \hat{H}^n_{\theta'}(G', \Gamma) = H^n_{\theta'}(G', X) = H^n(G', X_{\theta'})$$

du PSEUDO-MODULE $P' = (G', \Gamma, \theta')$, *caractérisée par le morphisme de groupes :*

$$\theta_n : G \longrightarrow \mathrm{Aut}[\hat{H}^n_{\theta'}(G', \Gamma)] = \mathrm{Aut}[\hat{H}^n(P')]$$

noté aussi plus simplement : $\theta_n = \theta$, *et qui, à tout élément* $g \in G$, *associe* **l'automorphisme de groupes :**

$$\theta_n(g) = \hat{g}^n \in \mathrm{Aut}[\hat{H}^n_{\theta'}(G', \Gamma)] = \mathrm{Aut}[\hat{H}^n(P')]$$

caractérisé par la condition :

$$\theta_n(g) = \hat{g}^n = \hat{H}^n(\Psi_{g,\,z}) \tag{74}$$

pour **un choix quelconque** *du COCYCLE (GENERALISE) STRICT :*

$z = (\eta, m) \in \widetilde{Z}^2_{\theta}(G, \Gamma) = \widetilde{Z}^2(P)$, *ce qui détermine le* **G-module :**

$$(G, \hat{H}^n_{\theta'}(G', \Gamma), \theta) = \hat{H}^n_{\theta'}(G', \Gamma) = \hat{H}^n(P')$$

(b) *Il existe une* **action** *du groupe* G *sur le SECOND ESPACE DE COHOMOLOGIE NON ABELIENNE :*

$$\widetilde{H}^2(P') = \widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma) \simeq \mathrm{Ext}_{\theta'}(G', \Gamma) = \mathrm{Ext}[P']$$

du PSEUDO-MODULE $P' = (G', \Gamma, \theta')$, *caractérisée par le morphisme de groupes :*

$$\widetilde{\theta} : G \longrightarrow \mathrm{Aut}[\widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma)] = \mathrm{Aut}[\widetilde{H}^2(P')]$$

noté aussi plus simplement : $\widetilde{\theta} = \theta$, *et qui, à tout élément* $g \in G$, *associe l'***automorphisme d'ensembles :**

$$\widetilde{\theta}(g) = \widetilde{g} \in \mathrm{Aut}[\widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma)] = \mathrm{Aut}[\widetilde{H}^2(P')]$$

caractérisé par la condition :

(75) $$\widetilde{\theta}(g) = \widetilde{g} = \widetilde{H}^2(\Psi_{g,z}) = \widetilde{\Psi}_{g,z}$$

pour **un choix quelconque** *du COCYCLE (GENERALISE) STRICT :*

$z = (\eta, m) \in \widetilde{Z}^2_{\theta}(G, \Gamma) = \widetilde{Z}^2(P)$, *ce qui détermine le* G-**ensemble :**

$$(G, \widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma), \theta) = \widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma) = \widetilde{H}^2(P')$$

PREUVE - Le Lemme 4-6 montre que les conditions imposées dans les parties (a) et (b) caractérisent bien des *applications* θ_n et $\widetilde{\theta}$. Tout revient à montrer que ce sont des *morphismes de groupes.*

Pour tout $(\alpha, \beta) \in G^2$, compte tenu de la condition (11), en considérant l'AUTOMORPHISME INTERIEUR DE PSEUDO-MODULES :

$$\Psi'_{\alpha,\beta} = (\varphi = 1_{G'}, f = < m_{\alpha,\beta} >) \in \mathrm{Aut}(P')$$

le Lemme 4-4 entraîne la relation :

(76) $$\Psi_{\alpha,z} \circ \Psi_{\beta,z} = \Psi'_{\alpha,\beta} \circ \Psi_{\alpha\beta,z}$$

et compte tenu du Lemme 4-5, le Théorème 6-4 et le Théorème 5-2 de [6] montrent que l'application du foncteur $\hat{H}^n(\ )$ et du foncteur $\widetilde{H}^2(\ )$ à la relation (76) entraîne les relations :

(77) $$\hat{H}^n(\Psi_{\alpha,z}) \circ \hat{H}^n(\Psi_{\beta,z}) = \hat{H}^n(\Psi_{\alpha\beta,z})$$

et

$$\widetilde{H}^2(\Psi_{\alpha,z}) \circ \widetilde{H}^2(\Psi_{\beta,z}) = \widetilde{H}^2(\Psi_{\alpha\beta,z}) \tag{78}$$

Il en résulte bien que θ_n et $\widetilde{\theta}$ sont des *morphismes de groupes*, ce qui achève la démonstration.

5. CLASSES D'EXTENSIONS Q-NORMALES.

On se propose de généraliser la caractérisation, rappelée dans l'Introduction, de l'espace des *classes d'algèbres Q-normales.*

LEMME 5-1 - *Avec les DONNEES DE BASE :*

$$\{P = (G, \Gamma, \theta) ; G'\}$$

et avec les Notations 3-1, pour toute **classe :**

$$\xi' \in \widetilde{H}^2(P') = \widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma) \simeq \mathrm{Ext}_{\theta'}(G', \Gamma) = \mathrm{Ext}[P']$$

pour laquelle un PRODUIT CROISE MIXTE.

(I') $$\Delta' = \Delta'_{\xi'} = \Delta'_{z'} = (\Gamma, G', z')$$

détermine l'EXTENSION DISTINGUEE D'ANNEAUX-GROUPES :

(II') $$\Gamma \lhd \Delta'$$

caractérisée par la SUITE EXACTE MIXTE :

(III') $$\{0, 1\} \longrightarrow \Gamma = [V; M] \longrightarrow \Delta' = [U'; N'] \xrightarrow{p'} G' \longrightarrow \{1\}$$

pour tout 2-COCYCLE STRICT :

$$z = (\eta, m) = (\eta = (\eta_\alpha), m = (m_{\alpha,\beta})) \in \widetilde{Z}^2_\theta(G, \Gamma) = \widetilde{Z}^2(P)$$

du PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$ *et pour tout élément* $g \in G$, *qui déterminent en particulier l'AUTOMORPHISME :*

$$\Psi_{g,z} = (\varphi_g, \eta_g) \in \mathrm{Aut}(P')$$

du PSEUDO-MODULE $P' = (G', \Gamma, \theta')$, *les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *Pour l'EXTENSION DISTINGUEES* (II') *caractérisée par la SUITE EXACTE MIXTE* (III'), *le* **couple d'automorphismes :**

$$(\eta_g, \psi_g) \in \mathrm{Aut}(\Gamma) \times \mathrm{Aut}(G')$$

est un **couple** *COMPATIBLE, ce qui signifie que l'ensemble* $\mathcal{F}(\eta_g, \psi_g)$ *des* **prolongements** $F \in \mathrm{Aut}(\Delta')$ *du* **couple** (η_g, ψ_g) **n'est pas vide.**

(b) *La classe* $\xi' \in \widetilde{H}^2(P')$ *est* **invariante** *par l'automorphisme :*

$$\Psi_{g,z} = (\varphi_g, \eta_g) \in \mathrm{Aut}(P')$$

pour **l'action naturelle** $\widetilde{H}^2(\ )$ *du groupe d'automorphismes* $\mathrm{Aut}(P')$ *sur l'espace* $\widetilde{H}^2(P')$, *ce qui signifie que* **l'automorphisme d'ensembles :**

$$\widetilde{H}^2(\Psi_{g,z}) = \widetilde{\Psi}_{g,z} \in \mathrm{Aut}[\widetilde{H}^2(P')]$$

vérifie la condition :

(79) $$\widetilde{\Psi}_{g,z}(\xi') = \xi'$$

(c) *La classe* $\xi' \in \widetilde{H}^2(P')$ *est invariante par l'élément* $g \in G$, *pour* **l'action** *du groupe* G *sur l'espace* $\widetilde{H}^2(P')$, *c'est-à-dire vérifie la condition :*

(80) $$\widetilde{g}\,(\xi') = \xi'$$

(d) *Il existe au moins une* 1-*COCHAINE STRICTE :*

$$a' = (a'_\sigma) = (a', 1) \in \widetilde{C}^1(G', \Gamma) = C^1(G', M) \times \{1\} = \widetilde{C}^1(P')$$

qui vérifie la condition :

(81) $$\Psi^*_{g,z}[z'] = a' \,\widetilde{*}\,' \, z'$$

équivalente à l'ensemble des deux conditions :

(81') $\eta''_\sigma = \eta_g \circ \eta'_{(g,\sigma)} \circ \eta^{-1}_g = \langle a'_\sigma \rangle \eta'_\sigma$ pour tout $\sigma \in G'$

(81") $m''_{\sigma,\tau} = \eta_g[m'_{(g,\sigma),(g,\tau)}] = a'_\sigma \eta'_\sigma(a_\tau)\, m'_{\sigma,\tau} a'^{-1}_{\sigma\tau}$ pour tout $(\sigma, \tau) \in G'^2$

PREUVE - Le Lemme 4-4 assure *l'existence* de l'AUTOMORPHISME :

$$\Psi_{g,z} = (\varphi_g, \eta_g) \in \mathrm{Aut}(P')$$

associé au *couple* d'automorphismes :

$$(\eta_g, \psi_g) \in \mathrm{Aut}(\Gamma) \times \mathrm{Aut}(G')$$

par la condition : $\psi_g = \varphi_g^{-1}$, analogue à la condition (54).

Le Théorème 9-3 de [6] entraîne alors l'équivalence des conditions (a) et (b).

Compte tenu du Théorème 4-7, qui assure l'*existence* de l'*action* du groupe G sur l'espace $\widetilde{H}^2(P')$, la condition (75) entraîne l'équivalence des conditions (b) et (c).

Le Lemme 4-3 montre que les premières égalités des conditions (81') et (81") caractérisent le 2-COCYCLE STRICT :

$$\Psi^*_{g,z}[z'] = z'' = (\eta'', m'')$$

de sorte que le Lemme 4-5 de [4] montre que la condition (81) est alors équivalente à l'ensemble des deux conditions (81') et (81").

D'après la Définition 8-3 de [4], la condition (d) exprime alors que z' et z" sont *"strictement cohomologues"*, c'est-à-dire que $\widetilde{z}\,' = \widetilde{z}\,''$, ce qui équivaut à la condition (79).

Il en résulte l'équivalence des conditions (b) et (d), ce qui achève la démonstration.

LEMME 5-2 - *Sous les hypothèses du Lemme 5-1 et lorsque le PRODUIT CROISE MIXTE :*

(I') $$\Delta' = \Delta'_{\xi'} = \Delta'_{z'} = (\Gamma, G', z') = [U'; N']$$

est caractérisé par les conditions :

$$(\mathrm{I}'_1)\ U' = \bigoplus_{\sigma\in G'} Vu_\sigma \qquad \text{et} \qquad (\mathrm{I}'_2)\qquad N' = \coprod_{\sigma\in G'} Mu_\sigma$$

si les conditions équivalentes (a), (b), (c), (d) *du Lemme 5-1 sont vérifiées, alors :*

(a) *L'ensemble* **non vide** $\mathcal{F}(\eta_g, \psi_g)$ *des* **prolongements** $F \in \mathrm{Aut}(\Delta')$ *du* **couple** (η_g, ψ_g) *COMPATIBLE, contient en particulier le* **prolongement** :

$$F_{a'} \in \mathrm{Aut}(\Delta')$$

caractérisé par l'une des conditions équivalentes :

(82) $$F_{a'}[u_{(g,\sigma)}] = a'_\sigma\, u_\sigma \qquad \text{pour tout } \sigma \in G'$$

ou

(83) $$F_{a'}[u_\sigma] = a'_{<g,\,\sigma>}\, u_{<g,\,\sigma>} \qquad \text{pour tout } \sigma \in G'$$

de sorte que :

(84) $$F_{a'}(x) = F_{a'}\left[\sum_{\sigma\in G} x_\sigma\, u_\sigma\right] = \sum_{\sigma\in G} \eta_g(x_\sigma)\, a'_{<g,\,\sigma>}\, u_{<g,\,\sigma>}$$

pour tout $x \in U'$ *de la forme :* $x = \sum_{\sigma\in G} x_\sigma\, u_\sigma$, *pour une famille* (x_σ) *d'éléments* $x_\sigma \in V$ **presque tous nuls.**

(b) *Il existe une* **action** *de groupe* :

$$Z^1_{\theta'}(G', X) \times \mathcal{F}(\eta_g, \psi_g) \longrightarrow \mathcal{F}(\eta_g, \psi_g)$$

$$(e = (e_\sigma), F) \longrightarrow e.\,F = F'$$

caractérisée par la condition :

(85) $\quad F'(u_\sigma) = e \,.\, F(u_\sigma) = F(e_\sigma u_\sigma) = \theta_g(e_\sigma)\, F(u_\sigma)$ pour tout $\sigma \in G'$

et qui fait **opérer** *le groupe abélien de* 1*-COCYCLES CENTRAUX :*

$$Z^1_{\theta'}(G', X) = Z^1(G', X_{\theta'}) = Z^1(P')$$

librement *et* **transitivement** *sur l'ensemble* $\mathfrak{F}(\eta_g, \psi_g)$*, ce qui détermine sur l'ensemble* $\mathfrak{F}(\eta_g, \psi_g)$ *une structure de* $Z^1(P')$**-ensemble homogène principal.**

PREUVE - En considérant la 1-COCHAINE STRICTE :

$$c = (c_\sigma) \in C^1(G', M) = \widetilde{C}^1(G', \Gamma)$$

caractérisée par les conditions équivalentes :

$$c_\sigma = a'_{<g,\sigma>} \qquad \text{et} \qquad a'_\sigma = c_{(g,\sigma)}$$

pour tout $\sigma \in G'$, il est facile de vérifier que la condition (81), équivalente à l'ensemble des deux conditions (81') et (81"), s'exprime par une condition analogue à la condition (62) du Corollaire 8-4 de [6], de sorte qu'il détermine un automorphisme :

$$F_{a'} = F_c \in \mathrm{Aut}(\Delta')$$

caractérisé par la condition (84) et par les conditions équivalentes (82) et (83), ce qui prouve la partie (a).

Le Théorème 9-5 de [6] implique la partie (b), ce qui achève la démonstration.

THEOREME 5-3 - *Pour des DONNEES DE BASE :*

$$\{P = (G, \Gamma, \theta) \,;\, G'\}$$

constituées par un PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$ *et un SOUS-GROUPE DISTINGUE* G' *du groupe* G*, qui déterminent le PSEUDO-MODULE* $P' = (G', \Gamma, \theta')$ *et le GROUPE QUOTIENT* $Q = G'' = G/G'$*, pour toute* **classe** :

$$\xi' \in \widetilde{H}^2(P') = \widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma) \simeq \mathrm{Ext}_{\theta'}(G', \Gamma) = \mathrm{Ext}[P']$$

représentée par un PRODUIT CROISE MIXTE :

(I') $\quad \Delta' = \Delta'_{\xi'} = \Delta'_{z'} = (\Gamma, G', z') = [U'; N']$

qui détermine l'EXTENSION DISTINGUEE D'ANNEAUX-GROUPES :

(II') $\Gamma \lhd \Delta'$

caractérisée par la SUITE EXACTE MIXTE :

(III') $\{0, 1\} \longrightarrow \Gamma = [V; M] \longrightarrow \Delta' = [U'; N'] \xrightarrow{p'} G' \longrightarrow \{1\}$

les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) *La* **classe** $\xi' \in \widetilde{H}^2(P')$ *est une* CLASSE D'EXTENSIONS Q-NORMALES.

(b) *La* **classe** $\xi' \in \widetilde{H}^2(P')$ *est* **invariante** *pour l'***action** *du groupe* G sur *l'espace:*

$$\widetilde{H}^2(P') = \widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma) \simeq Ext_{\theta'}(G', \Gamma) = Ext[P']$$

*En d'autres termes, l'***espace des invariants :**

$$[\widetilde{H}^2(P')]^G = [\widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma)]^G \simeq [Ext_{\theta'}(G', \Gamma)]^G = [Ext[P']]^G$$

*s'***interprète** *comme l'*ESPACE DES CLASSES D'EXTENSIONS Q-NORMALES.

PREUVE - D'après la Définition 3-2 le Lemme 5-1 montre que la condition (a) pour tout $g \in G$, qui s'exprime par la condition (N'), est équivalente à la condition :

(86) $\widetilde{g}(\xi') = \xi'$ pour tout $g \in G$

c'est-à-dire à la condition (b), ce qui achève la démonstration.

THEOREME 5-4 - *Pour des DONNEES DE BASE :*

$$\{P = (G, \Gamma, \theta) ; G'\}$$

constituées par un PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$ *et un SOUS-GROUPE DISTINGUE* G' *du groupe* G, *qui déterminent le PSEUDO-MODULE* $P' = (G', \Gamma, \theta')$ *et le GROUPE QUOTIENT* $Q = G'' = G/G'$, *alors :*

(a) *Pour* **l'action** *du groupe* G, *le sous-espace des* **invariants :**

$$[\widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma)]^G = [\widetilde{H}^2(P')]^G$$

contient **l'image** *de l'APPLICATION DE RESTRICTION :*

$$\widetilde{r}_2 : \widetilde{H}^2_{\theta}(G, \Gamma) = \widetilde{H}^2(P) \longrightarrow \widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma) = \widetilde{H}^2(P')$$

qui **induit** *donc également une APPLICATION DE RESTRICTION :*

$$\widetilde{r}_2 : \widetilde{H}^2_{\theta}(G, \Gamma) = \widetilde{H}^2(P) \longrightarrow [\widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma)]^G = [\widetilde{H}^2(P')]^G$$

(b) *Le sous-groupe distingué* G' *du groupe* G **opère trivialement** *sur le SECOND ESPACE DE COHOMOLOGIE NON ABELIENNE :*

$$\widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma) = \widetilde{H}^2(P')$$

du PSEUDO-MODULE $P' = (G', \Gamma, \theta')$, *et par suite il en résulte une* **action** *du* **groupe quotient** $Q = G'' = G/G'$, *caractérisée par un morphisme de groupes :*

$$\widetilde{\theta}'' : G'' \longrightarrow \mathrm{Aut}[\widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma)] = \mathrm{Aut}[\widetilde{H}^2(P')]$$

noté aussi plus simplement : $\widetilde{\theta}'' = \theta''$, *ce qui détermine le* **Q-ensemble** *ou le* **G"-ensemble :**

$$(G'', \widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma), \theta'') = \widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma) = \widetilde{H}^2(P')$$

PREUVE - Pour démontrer la partie (a), on considère une *classe :*

$$\widetilde{z}' = \xi' \in \widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma) = \widetilde{H}^2(P')$$

qui appartient à l'image de l'APPLICATION DE RESTRICTION $\widetilde{r}_2$ caractérisée dans le Lemme 4-2, ce qui signifie que le COCYCLE STRICT :

$$z' = (\eta', m') \in \widetilde{Z}^2_{\theta'}(G', \Gamma) = \widetilde{Z}^2(P')$$

est *obtenu par restriction* à partir d'un COCYCLE STRICT :

$$z = (\eta, m) \in \widetilde{Z}^2_{\theta}(G, \Gamma) = \widetilde{Z}^2(P)$$

ce qui s'exprime par l'ensemble des deux conditions :

(87) $\eta'_\sigma = \eta_\sigma$ pour tout $\sigma \in G'$

(88) $m'_{\sigma,\tau} = m_{\sigma,\tau}$ pour tout $(\sigma, \tau) \in G'^2$

et le Théorème 4-7 montre qu'il est possible de choisir ce COCYLE STRICT

$z \in \widetilde{Z}^2(P)$ pour exprimer la caractérisation de l'automorphisme d'ensembles :

$$\widetilde{\theta}(g) = \widetilde{g} = \widetilde{H}^2(\Psi_{g,z})$$

déterminé par un élément $g \in G$.

Lorsque cet élément $g \in G$ est *fixé*, pour simplifier les notations, pour *tout* $\sigma \in G$, on conviendra de poser :

(89) $\sigma' = \varphi_g(\sigma) = (g, \sigma) = g^{-1}\sigma g$

ce qui équivaut à la condition :

(90) $\sigma = \psi_g(\sigma') = < g, \sigma' > = g\, \sigma' g^{-1}$

et aussi à la condition :

(91) $g\, \sigma' = \sigma g$

En particulier, le Lemme 4-3 montre que la condition :

(92) $\Psi^*_{g,z}[z'] = z'' = (\eta'', m'')$

détermine un COCYCLE STRICT :

$$z'' = (\eta'', m'') \in \widetilde{Z}^2_{\theta'}(G', \Gamma) = \widetilde{Z}^2(P')$$

caractérisé par l'ensemble des deux conditions :

(93) $\eta''_\sigma = \eta_g \circ \eta_{\sigma'} \circ \eta^{-1}_g$ pour tout $\sigma \in G'$

(94) $m''_{\sigma,\tau} = \eta_g[m_{\sigma',\tau'}]$ pour tout $(\sigma, \tau) \in G'^2$

Il est immédiat que la condition :

(95) $a'_\sigma = m_{g,\sigma'}\, m^{-1}_{\sigma,g}$ pour tout $\sigma \in G'$

définit une *1-cochaîne spéciale :*

$$a' = (a'_\sigma) \in C^1(G', M)$$

du groupe G' dans le groupe $M = Gr(\Gamma)$, qui détermine la 1-COCHAINE STRICTE :

$$a' = (a'_\sigma) = (a', 1) \in \widetilde{C}^1(G', \Gamma) = C^1(G', M) \times \{1\} = \widetilde{C}^1((P')$$

Il *existe* alors un COCYCLE (GENERALISE) STRICT :

$$z^* = (\eta^*, m^*) = (\eta^* = (\eta^*_\sigma), m^* = (m^*_{\sigma,\tau})) \in \widetilde{Z}^2_{\theta'}(G', \Gamma) = \widetilde{Z}^2(P')$$

défini par la condition :

(96) $z^* = (\eta^*, m^*) = (a', 1) *' (\eta', m') = a' \ \widetilde{*}\,' (\eta', m') = a' \ \widetilde{*}\,' z'$

qui s'exprime par l'*ensemble* des deux conditions :

(97) $\eta^*_\sigma = < a'_\sigma > \eta'_\sigma$ pour tout $\sigma \in G'$

(98) $m^*_{\sigma,\tau} = a'_\sigma \eta'_\sigma(a'_\tau)\, m'_{\sigma,\tau}\, a'^{-1}_{\sigma\tau}$ pour tout $(\sigma, \tau) \in G'^2$

ce qui, compte tenu des conditions (87) et (88), est ***équivalent*** à l'***ensemble*** des deux conditions :

(99) $\eta^*_\sigma = < a'_\sigma > \eta_\sigma$ pour tout $\sigma \in G$

(100) $m^*_{\sigma,\tau} = a'_\sigma \eta_\sigma(a'_\tau)\, m_{\sigma,\tau}\, a'^{-1}_{\sigma\tau}$ pour tout $(\sigma, \tau) \in G'^2$

La condition (13) peut s'exprimer par la condition :

(13') $\eta_\alpha(m_{\beta,\gamma})\, m_{\alpha,\beta\gamma} = m_{\alpha,\beta}\ m_{\alpha\beta,\gamma}$ pour tout $(\alpha, \beta, \gamma) \in G^3$

Pour tout $(\sigma,\tau) \in G'^2$, avec les conventions introduites qui entraînent : $g\,\sigma' = \sigma g$ et $g\tau' = \tau g$, par des choix convenables de $(\alpha, \beta, \gamma) \in G^3$, la condition (13') entraîne en particulier les conditions suivantes:

(101) $\eta_\sigma(m_{g,\tau'})\, m_{\sigma,g\tau'} = m_{\sigma,g}\, m_{g\sigma',\tau'}$

(102) $\eta_\sigma(m_{\tau,g})\, m_{\sigma,g\tau'} = m_{\sigma,\tau}\, m_{\sigma\tau,g}$

(103) $\eta_g(m_{\sigma',\tau'})\, m_{g,\sigma'\tau'} = m_{g,\sigma'}\, m_{g\sigma',\tau'}$

qui peuvent s'écrire sous la forme des conditions :

(101') $m^{-1}_{\sigma,g}\, \eta_\sigma(m_{g,\tau'}) = m_{g\sigma',\tau'}\, m^{-1}_{\sigma,g\tau'}$

(102') $\eta_\sigma(m^{-1}_{\tau,g})\, m_{\sigma,\tau} = m_{\sigma,g\tau'}\, m^{-1}_{\sigma\tau,g}$

(103') $\eta_g(m_{\sigma',\tau'}) = m_{g,\sigma'}\, m_{g\sigma',\tau'}\, m^{-1}_{g,\sigma'\tau'}$

D'une part, pour tout $\sigma \in G'$, la condition (11) entraîne les relations :

$$\eta_g\, \eta_{\sigma'} = < m_{g,\sigma'} > \eta_{g\sigma'}$$

et

$$\eta_\sigma\, \eta_g = < m_{\sigma,g} > \eta_{\sigma g}$$

et compte tenu des conditions (91) et (95), il en résulte facilement la relation :

$$\eta_g \circ \eta_{\sigma'} \circ \eta_g^{-1} = < m_{g,\sigma'}\, m^{-1}_{\sigma,g} > \eta_\sigma = < a'_\sigma > \eta_\sigma$$

c'est-à-dire, compte tenu des conditions (93) et (99), la condition :

(104) $\eta''_\sigma = \eta^*_\sigma$ pour tout $\sigma \in G'$

qui s'exprime par l'égalité :

(105) $\eta'' = \eta^*$

D'autre part, pour tout $(\sigma, \tau) \in G'^2$, dans le groupe $M = Gr(\Gamma)$, et pour l'automorphisme :

$$\eta_\sigma \in \mathrm{Aut}(\Gamma) = \mathrm{Stab}\,[\mathrm{Aut}(V); M]$$

qui constitue en particulier un automorphisme du groupe $M = \mathrm{Gr}(\Gamma)$, les conditions (95) et (100) impliquent :

$$m^*_{\sigma,\tau} = a'_\sigma\, \eta_\sigma(a'_\tau)\, m_{\sigma,\tau}\, a'^{-1}_{\sigma\tau}$$

$$= m_{g,\sigma'}\, m^{-1}_{\sigma,g}\, \eta_\sigma[m_{g,\tau'}\, m^{-1}_{\tau,g}]\, m_{\sigma,\tau}\, [m_{g,\sigma'\tau'}\, m^{-1}_{\sigma\tau,g}]^{-1}$$

$$= m_{g,\sigma'}[m^{-1}_{\sigma,g}\, \eta_\sigma(m_{g,\tau'})][\eta_\sigma(m^{-1}_{\tau,g})m_{\sigma,\tau}]\, m_{\sigma\tau,g}\, m^{-1}_{g,\sigma'\tau'}$$

de sorte que les conditions (101') et (102') entraînent :

$$m^*_{\sigma,\tau} = m_{g,\sigma'}\, m_{g\sigma',\tau'}\, m^{-1}_{\sigma,g\tau'}\, m_{\sigma,g\tau'}\, m^{-1}_{\sigma\tau,g}\, m_{\sigma\tau,g}\, m^{-1}_{g,\sigma'\tau'}$$

$$= m_{g,\sigma'}\, m_{g\sigma',\tau'}\, m^{-1}_{g,\,\sigma'\tau'}$$

et par suite, la condition (103') entraîne :

$$m^*_{\sigma,\tau} = \eta_g(m_{\sigma',\tau'})$$

c'est-à-dire, compte tenu de la condition (94), la condition :

(106) $$m''_{\sigma,\tau} = m^*_{\sigma,\tau} \qquad \text{pour tout } (\sigma, \tau) \in G'^2$$

qui s'exprime par l'égalité :

(107) $$m'' = m^*$$

Les égalités (105) et (107) entraînent l'égalité :

(108) $$z'' = (\eta'', m'') = (\eta^*, m^*) = z^*$$

de sorte que les conditions (92) et (96) entraînent alors la condition :

(81) $$\Psi^*_{g,z}[z'] = a' \,\widetilde{*}\,'\, z'$$

qui figure dans le Lemme 5-1, et par suite, il entraîne la condition :

(109) $$\widetilde{g}\,(\xi') = \xi' \qquad \text{pour tout } g \in G$$

Ainsi, il en résulte bien :

$$\xi' \in [\widetilde{H}^2(P')]^G$$

ce qui prouve la partie (a).

La démonstration de la partie (b) repose sur les remarques suivantes.

D'une part, pour tout PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$, en choisissant $G' = G$, ce qui entraîne : $P' = P$ et $\widetilde{H}^2(P') = \widetilde{H}^2(P)$, le Théorème 4-7 entraîne l'existence d'une *"action directe"* du groupe G sur $\widetilde{H}^2(P) = \widetilde{H}^2(P')$ et la partie (a) entraîne que cette *"action directe"* est *triviale*, ce qui se traduit par la condition:

(110) $$[\widetilde{H}^2(P)]^G = \widetilde{H}^2(P)$$

D'autre part, en revenant au *cas général*, pour l'*action* du groupe G sur $\widetilde{H}^2(P')$, un élément $g \in G$ agit par l'automorphisme :

$$\widetilde{H}^2(\Psi_{g,z}) = \widetilde{g}$$

pour un COCYCLE STRICT quelconque $z = (\eta, m) \in \widetilde{Z}^2(P)$ et de même, pour *"l'action directe"* du groupe G' sur $\widetilde{H}^2(P')$, la condition (110) entraîne la condition :

(110') $$[\widetilde{H}^2(P')]^{G'} = \widetilde{H}^2(P')$$

de sorte qu'un élément $g' \in G'$ agit par l'automorphisme *neutre* :

$$\widetilde{H}^2(\Psi'_{g',z'}) = \widetilde{g}' = 1 \in \mathrm{Aut}[\widetilde{H}^2(P')]$$

pour un COCYCLE STRICT quelconque $z' = (\eta', m') \in \widetilde{Z}^2(P')$.

Lorsque : $g = g' \in G'$, les automorphismes $\eta_g \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ et $\eta'_{g'} \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ admettent la même classe $\overline{\eta}_g = \overline{\eta}'_{g'} \in \mathrm{Aut}_e(\Gamma)$ et par suite, il existe au moins un élément $c \in M = Gr(\Gamma)$ tel que :

$$\eta_g = \langle c \rangle \eta'_{g'}$$

ce qui entraîne :

(111) $$\Psi_{g,z} = (\varphi = 1_{G'}, f = \langle c \rangle) \circ \Psi'_{g',z'}$$

Compte tenu de la partie (b) du Lemme 4-5, l'application du foncteur $\widetilde{H}^2(\ )$ à la relation (111) entraîne :

$$\widetilde{g} = \widetilde{H}^2(\Psi_{g,z}) = \widetilde{H}^2(\Psi'_{g',z'}) = \widetilde{g}' = 1 \in \mathrm{Aut}[\widetilde{H}^2(P')]$$

Ainsi, le sous-groupe distingué G' de G *opère trivialement* sur $\widetilde{H}^2(P')$, ce qui entraîne immédiatement la partie (b) et achève la démonstration.

EXEMPLES 5-5 - Etant donnée une EXTENSION DISTINGUEE :

(II) $$\Gamma \lhd \Delta$$

caractérisée par une SUITE EXACTE MIXTE :

(III) $$\{0, 1\} \longrightarrow \Gamma = [V; M] \longrightarrow \Delta = [U; N] \xrightarrow{p} G \longrightarrow \{1\}$$

pour tout SOUS-GROUPE DISTINGUE G' du groupe G, il est facile de vérifier que les *"images réciproques"* définies par les conditions :

$$(112) \qquad N' = p^{-1}(G') = p_N^{-1}(G') \qquad \text{et} \qquad (113) \qquad U' = \sum_{n' \in N'} Vn' = p_U^{-1}(G')$$

déterminent une SUITE EXACTE MIXTE :

$$(\mathrm{III'}) \qquad \{0,1\} \longrightarrow \Gamma = [V; M] \longrightarrow \Delta' = [U'; N'] \xrightarrow{p'} G' \longrightarrow \{1\}$$

qui caractérise une EXTENSION DISTINGUEE :

$$(\mathrm{II'}) \qquad \Gamma \lhd \Delta'$$

obtenue à partir de (II) par la *"restriction"* déterminée par $G' \lhd G$.

Cette *constructions* détermine donc une application canonique :

$$r : \mathrm{Ext}(G, \Gamma) \longrightarrow \mathrm{Ext}(G', \Gamma)$$

qui, à $\mathrm{Cl}[\Delta] = \xi \in \mathrm{Ext}(G, \Gamma)$, associe $\mathrm{Cl}[\Delta'] = \xi' \in \mathrm{Ext}(G', \Gamma)$.

De plus, le Lemme 1-3 de [5] entraîne l'existence d'un diagramme commutatif et exact de la forme :

$$(\mathrm{VII}) \qquad \begin{array}{ccccccccc}
 & & \{0,1\} & & \{0,1\} & & \{1\} & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\{0,1\} & \longrightarrow & \Gamma = [V; M] & \longrightarrow & \Delta' = [U'; N'] & \xrightarrow{p'} & G' & \longrightarrow & \{1\} \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\{0,1\} & \longrightarrow & \Gamma = [V; M] & \longrightarrow & \Delta = [U; N] & \xrightarrow{p} & G & \longrightarrow & \{1\} \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \{1\} & \longrightarrow & \Delta/\Delta' & \longrightarrow & Q = G'' & \longrightarrow & \{1\} \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & \{1\} & & \{1\} & &
\end{array}$$

dans lequel les deux premières lignes et les deux premières colonnes sont des SUITES EXACTES MIXTES.

En considérant le *"caractère collectif"* REALISABLE θ tel que :

$$\mathrm{Cl}[\Delta] = \xi \in \mathrm{Ext}_\theta(G,\Gamma) \simeq \widetilde{H}^2_\theta(G, \Gamma)$$

ce qui détermine des DONNEES DE BASE :

$$\{P = (G, \Gamma, \theta) \ ; G'\}$$

il est possible de vérifier directement que l'EXTENSION DISTINGUEE :

$$(\mathrm{II'}) \qquad \Gamma \lhd \Delta'$$

est une EXTENSION Q-NORMALE, déterminée par la *"restriction"* :

$$r_\theta : \mathrm{Ext}_\theta(G, \Gamma) \longrightarrow \mathrm{Ext}_{\theta'}(G', \Gamma)$$

Compte tenu de la condition (14) qui donne :

$$\widetilde{H}^2(P) = \widetilde{H}^2_\theta(G, \Gamma) \simeq \mathrm{Ext}_\theta(G, \Gamma) = \mathrm{Ext}[P]$$

et

$$\widetilde{H}^2(P') = \widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma) \simeq \mathrm{Ext}_\theta(G', \Gamma) = \mathrm{Ext}[P']$$

cette propriété résulte également de la partie (a) du Théorème 5-4, du Théorème 5-3 et du fait que la *"restriction"* r_θ coïncide avec l'APPLICATION DE RESTRICTION :

$$\widetilde{r}_2 : \widetilde{H}^2_\theta(G, \Gamma) = \widetilde{H}^2(P) \longrightarrow [\widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma)]^G = [\widetilde{H}^2(P')]^G$$

dont la CONSTRUCTION décrite ci-dessus donne donc une INTERPRETATION.

6. CARACTERISATIONS TECHNIQUES.

La caractérisation des EXTENSIONS Q-NORMALES, obtenue dans le Théorème 5-3, se présente sous une *forme synthétique*.

Il convient de la compléter par des *"caractérisations techniques"*, indispensables dans les applications.

NOTATIONS 6-1 - On considère toujours des DONNEES DE BASE :

$$\{P = (G, \Gamma, \theta) : G'\}$$

constituées par un PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$ et un SOUS-GROUPE DISTINGUE G' du groupe G, qui déterminent le PSEUDO-MODULE $P' = (G', \Gamma, \theta')$ et le GROUPE QUOTIENT $Q = G'' = G/G'$, caractérisé par la suite exacte :

(44) $$\{1\} \longrightarrow G' \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p''} G'' = Q \longrightarrow \{1\}$$

qui permet d'interpréter le groupe G comme une *extension* du groupe G' par le groupe $G'' = Q$.

Dans toute la suite, on considère une *"représentation"* (R) *fixée* du groupe G comme une *extension* du groupe G' par le groupe $G'' = Q$, au moyen des données suivantes.

On choisit une 1-*cochaîne spéciale* :

$$\upsilon = (\upsilon(\lambda)) = (\upsilon_\lambda) \in C^1(G'', G)$$

qui constitue une *section* du morphisme de groupe p''.

De façon générale, pour simplifier les notations, on adoptera la CONVENTION selon laquelle, pour tout $\lambda \in Q = G''$, s'il n'y a pas de risque de confusion, l'élément $\upsilon(\lambda) \in G$, figurant par exemple en *indice*, pourra être remplacé par *l'indice* $\lambda \in Q = G''$.

Ainsi, pour tout $\lambda \in Q = G''$, les automorphismes de groupes, réciproques :

$$\psi_\lambda = \psi_{\upsilon(\lambda)} \in \mathrm{Aut}(G') \qquad \text{et} \qquad \varphi_\lambda = \varphi_{\psi(\lambda)} \in \mathrm{Aut}(G')$$

seront caractérisés respectivement par les notations :

(47') $\quad < \lambda,\sigma > = \psi_\lambda(\sigma) = < \upsilon(\lambda), \sigma > = \upsilon(\lambda)\, \sigma\upsilon(\lambda)^{-1} \qquad$ pour tout $\sigma \in G'$

et

(48') $\quad (\lambda, \sigma) = \varphi_\lambda(\sigma) = (\upsilon(\lambda), \sigma) = \upsilon(\lambda)^{-1}\, \sigma\upsilon(\lambda) \qquad$ pour tout $\sigma \in G'$

Il existe, alors un *"système de facteurs"* constitué par une 2-*cochaîne spéciale :*

$$(\omega(\lambda, \mu)) = (\omega_{\lambda,\mu}) \in C^2(G'', G')$$

qui est un 2-*cocycle*, c'est-à-dire qui vérifie la condition :

(112) $\quad <\lambda, \omega(\mu, \nu) > \omega(\lambda, \mu\nu) = \omega(\lambda, \mu)\, \omega(\lambda\mu, \nu) \qquad$ pour tout $(\lambda, \mu, \nu) \in G''^3$

de telle sorte que soient vérifiées les conditions :

(113) $\quad \upsilon(\lambda)\, \upsilon(\mu) = \omega(\lambda, \mu)\, \upsilon(\lambda\mu) \qquad$ pour tout $(\lambda, \mu) \in G''^2$

(114) $\quad \upsilon(\lambda)\sigma = < \lambda, \sigma > \upsilon(\lambda) \qquad$ pour tout $(\sigma, \lambda) \in G'\times G''$

Des éléments quelconques $\alpha \in G$ et $\beta \in G$ s'expriment alors de façon unique sous la forme :

(115) $\quad \alpha = \sigma\upsilon(\lambda) \quad ; \quad \beta = \tau\upsilon(\mu)$

pour des éléments : $\sigma \in G'$ et $\tau \in G'$, et des éléments :

$$p''(\alpha) = \bar{\alpha} = \lambda \in G'' = Q \quad ; \quad p''(\beta) = \bar{\beta} = \mu \in G'' = Q$$

de sorte que leur produit $\alpha\beta$ est donné, par la *table de multiplication* constituée par les conditions (113) et (114), sous la forme :

(116) $\quad \alpha\beta = [\sigma\upsilon(\lambda)]\, [\tau\upsilon(\mu)] = \sigma_1\upsilon(\lambda\mu),\ $ avec : $\sigma_1 = \sigma < \lambda, \tau > \omega(\lambda, \mu)$

Ces conditions caractérisent une REPRESENTATION (R) *fixée* du groupe G comme une *extension* du groupe G' par le groupe G'' = Q.

Pour un COCYCLE (GENERALISE) STRICT ARBITRAIRE :

$$z = (\eta, m) = (\eta = (\eta_\alpha), m = (m_{\alpha,\beta})) \in \widetilde{Z}^2_\theta(G, \Gamma) = \widetilde{Z}^2(P)$$

du PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$, la CONVENTION adoptée détermine pour tout $\lambda \in G'' = Q$, l'automorphisme :

(117) $\quad \eta_{\upsilon(\lambda)} = \eta_\lambda \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$

et par suite, le *couple* d'automorphismes :

$$(\eta_\lambda, \psi_\lambda) = (\eta_{\upsilon(\lambda)}, \psi_{\upsilon(\lambda)}) \in \mathrm{Aut}(\Gamma) \times \mathrm{Aut}(G')$$

et l'AUTOMORPHISME :

$$\Psi_{\lambda,z} = (\varphi_\lambda, \eta_\lambda) = (\varphi_{\upsilon(\lambda)}, \eta_{\upsilon(\lambda)}) = \Psi_{\upsilon(\lambda),z} \in \mathrm{Aut}(P')$$

du PSEUDO-MODULE $P' = (G', \Gamma, \theta')$.

THEOREME 6-2 - *Pour des DONNEES DE BASE :*

$$\{P = (G, \Gamma, \theta) \; ; \; G'\}$$

constituées par un PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$ *et un SOUS-GROUPE DISTINGUE* G' *du groupe* G, *qui déterminent le PSEUDO-MODULE* $P' = (G', \Gamma, \theta')$ *et le GROUPE QUOTIENT* $Q = G'' = G/G'$, *pour tout COCYCLE (GENERALISE) STRICT :*

$$z' = (\eta', m') = (\eta' = (\eta'_\sigma), m' = (m'_{\sigma,\tau}) \in \widetilde{Z}^2_{\theta'}(G', \Gamma) = \widetilde{Z}^2(P')$$

du PSEUDO-MODULE $P' = (G', \Gamma, \theta')$, *qui détermine la* **classe** :

$$\xi' \in \widetilde{H}^2(P') = \widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma) \simeq \mathrm{Ext}_{\theta'}(G', \Gamma) = \mathrm{Ext}[P']$$

représentée par le PRODUIT CROISE MIXTE :

(I') $\qquad \Delta' = \Delta'_{\xi'} = \Delta'_{z'} = (\Gamma, G', z') = [U' \; ; \; N']$

qui détermine l'EXTENSION DISTINGUEE D'ANNEAUX-GROUPES :

(II') $\qquad \Gamma \lhd \Delta'$

caractérisée par la SUITE EXACTE MIXTE :

(III') $\qquad \{0, 1\} \longrightarrow \Gamma = [V \; ; \; M] \longrightarrow \Delta' = [U'; N'] \xrightarrow{p'} G' \longrightarrow \{1\}$

avec les Notations précédentes, les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) *La classe* $\xi' \in \widetilde{H}^2(P')$ *est une* CLASSE D'EXTENSIONS Q-NORMALES.

(b) *L'EXTENSION DISTINGUEE* (II') *est une* EXTENSION Q-NORMALE.

(c) *Pour l'EXTENSION DISTINGUEE* (II') *caractérisée par la SUITE EXACTE MIXTE* (III'), *pour tout* $\lambda \in Q = G''$, *le* **couple** *d'automorphismes :*

$$(\eta_\lambda, \psi_\lambda) \in \mathrm{Aut}(\Gamma) \times \mathrm{Aut}(G')$$

est un **couple** *COMPATIBLE, ce qui signifie que l'ensemble* $\mathcal{F}_\lambda = \mathcal{F}(\eta_\lambda, \psi_\lambda)$ *des* **prolongements** $F \in \mathrm{Aut}(\Delta')$ *du* **couple** $(\eta_\lambda, \psi_\lambda)$ **n'est pas vide.**

(d) *Il existe au moins une* **1-cochaîne spéciale :**

$$a = (a_\lambda) = (a_{\lambda,\sigma}) \in C^1(G'', C^1(G', M))$$

déterminant des 1-COCHAINES STRICTES :

$$a_\lambda = (a_{\lambda,\sigma}) = (a_\lambda\,,\,1) \in \widetilde{C}^1(G', \Gamma) = C^1(G', M) \times \{1\} = \widetilde{C}^1(P')$$

qui vérifient la condition :

(118) $$\Psi^*_{\lambda,z}[z'] = a_\lambda \;\widetilde{*}'\; z' \qquad \text{pour tout } \lambda \in Q = G''$$

équivalente à l'ensemble des deux conditions :

(118') $$\eta_\lambda \circ \eta'_{(\lambda,\sigma)} \circ \eta_\lambda^{-1} = < a_{\lambda,\sigma} > \eta'_\sigma$$

(118") $$\eta_\lambda[m'_{(\lambda,\sigma),(\lambda,\tau)}] = a_{\lambda,\sigma}\, \eta'_\sigma(a_{\lambda,\tau})\, m'_{\sigma,\tau}\, a^{-1}_{\lambda,\sigma\tau}$$

pour tout $\sigma \in G'$, *pour tout* $(\sigma, \tau) \in G'^2$ *et pour tout* $\lambda \in Q = G''$.

De plus, sous ces conditions équivalentes, l'ensemble **non vide** $\mathcal{F}_\lambda = \mathcal{F}(\eta_\lambda, \psi_\lambda)$ *des* **prolongements** $F \in \mathrm{Aut}(\Delta')$ *du* **couple** $(\eta_\lambda, \psi_\lambda)$ *COMPATIBLE, contient en particulier le* **prolongement :**

$$F_\lambda \in \mathrm{Aut}(\Delta')$$

caractérisé par la condition :

(119) $$F_\lambda[u_{(\lambda,\sigma)}] = a_{\lambda,\sigma}\, u_\sigma \qquad \text{pour tout } (\lambda, \sigma) \in G'' \times G'$$

et le groupe abélien de 1-COCYCLES CENTRAUX :

$$Z^1_{\theta'}(G', X) = Z^1(G', X_{\theta'}) = Z^1(P')$$

opère **librement** *et* **transitivement** *sur l'ensemble* $\mathcal{F}_\lambda = \mathcal{F}(\eta_\lambda, \psi_\lambda)$, *par* **l'action** *caractérisée par la condition :*

(120) $$e\,.\,F(u_\sigma) = F(e_\sigma\, u_\sigma) = \eta_\lambda(e_\sigma)\, F(u_\sigma) \qquad \text{pour tout } \sigma \in G'$$

ce qui détermine sur l'ensemble $\mathcal{F}_\lambda = \mathcal{F}(\eta_\lambda, \psi_\lambda)$ *une structure de* $Z^1(P')$**-ensemble homogène principal.**

PREUVE - D'après le Théorème 5-3, les conditions équivalentes (a) et (b), s'expriment par la condition :

(86) $$\widetilde{g}(\xi') = \xi' \qquad \text{pour tout } g \in G$$

La partie (b) du Théorème 5-4 montre que cette condition est *automatiquement vérifiée* pour tout $g = \sigma \in G'$, de sorte que, l'écriture de tout $\alpha \in G$ sous la forme (115), entraîne que la condition (86) est équivalente à la condition :

(121) $$\widetilde{\upsilon(\lambda)}(\xi') = \xi' \qquad \text{pour tout } \lambda \in Q = G''$$

Compte tenu des Notations introduites, qui entraînent en particulier :

$\upsilon(1) = 1$, ce qui permet de choisir : $a_{1,\sigma} = 1$ pour tout $\sigma \in G'$, le Lemme 5-1 implique l'équivalence de la condition (121) avec chacune des conditions (c) et (d). Il en résulte l'équivalence des conditions (a), (b), (c) et (d).

Enfin, les affirmations complémentaires résultent du Lemme 5-2, ce qui achève la démonstration.

REMARQUES 6.3 -

(a) La caractérisation des EXTENSIONS Q-NORMALES donnée par la condition (c) du Théorème 6-2, constitue bien une *généralisation formelle* de la *caractérisation initiale* des *algèbres Q-normales*, qui peut être formulée par une condition *d'existence* de *prolongements* $s \in \mathrm{Gal}[A: E] \subset \mathrm{Aut}(A)$, des automorphismes $\lambda \in Q = \mathrm{Gal}[F: E] \subset \mathrm{Aut}(F)$, comme cela a été expliqué dans l'Introduction.

(b) Lorsque le Théorème 6-2 est appliqué à des *données classiques :*

$$\{L ; G ; G'\}$$

la condition (118') est *automatiquement vérifiée*, et modulo des changements de notations, la condition (118") se traduit par la condition (9-9) du Théorème 9-2 de [3].

Compte tenu de la Proposition 2-5, il en résulte que par sa condition (c), le Théorème 6-2 constitue en particulier la généralisation du Théorème 9-2 de [3], dans lequel S. EILENBERG et S. Mac LANE donnent une caractérisation de la Q-*normalité* des *produits croisés classiques* au sens de E. NOETHER.

7. LA CONDITION DE SPEISER.

La richesse de la *cohomologie galoisienne* résulte essentiellement du THEOREME DE A. SPEISER [16], qui entraîne que tout corps L et tout groupe *fini* d'automorphismes $G \subset \mathrm{Aut}(L)$, vérifient la condition :

(122) $$H^1(G, L^*) = \{1\}$$

(on peut voir également, par exemple la Proposition 3 p. 202 de [1], le Théorème 1.1 p. 332 de [9] ou la Proposition 2 p. 158 de [15]).

Cette condition ou une condition analogue jouent un rôle fondamental dans de nombreuses questions (voir par exemple : [1], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14],

[15], [17]) et en particulier dans la *théorie des corps de nombres algébriques*(Théorème 2-1 p. 354 de [10]) et dans la *théorie des Formations de Classes* (voir par exemple l'Axiome I. p. 203 de [1], l'Axiome CF 1. p. 225 de [13] ou l'Axiome I. p. 174 de [15]).

On se propose d'introduire une généralisation de la condition (122).

DEFINITION 7-1 - *Pour des DONNEES DE BASE :*

$$\{P = (G, \Gamma\ \theta)\ ;\ G'\}$$

constituées par un PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$ *et un SOUS-GROUPE DISTINGUE* G' *du groupe* G, *qui déterminent le PSEUDO-MODULE* $P' = (G', \Gamma, \theta')$ *et le GROUPE QUOTIENT* $Q = G'' = G/G'$, *la* CONDITION DE SPEISER *est la condition :*

$$\text{(S)} \qquad \hat{H}^1(P') = \{1\}$$

qui exprime la **trivialité** *du premier groupe de COHOMOLOGIE CENTRALE :*

$$\hat{H}^1(P') = \hat{H}^1_{\theta'}(G', \Gamma) = H^1_{\theta'}(G', X) = H^1(G', X)$$

du PSEUDO-MODULE $P' = (G', \Gamma, \theta')$.

EXEMPLE 7-2 - Lorsque les DONNEES DE BASE représentent des *"données classiques" :*

$$\{L; G; G'\}$$

les Exemples 2-4 entraînent la relation :

$$\hat{H}^1(P') = \hat{H}^1_{\theta'}(G', \Gamma) = H^1_{\theta'}(G', X) = H^1(G', X) = H^1(G', L^*)$$

de sorte que la condition (122) entraîne que la CONDITION DE SPEISER (S) est vérifiée.

THEOREME 7-3 - *Pour des DONNEES DE BASE :*

$$\{P = (G, \Gamma, \theta)\ ;\ G'\}$$

constituées par un PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$ *et un SOUS-GROUPE DISTINGUE* G' *du groupe* G, *qui déterminent le PSEUDO-MODULE* $P' = (G', \Gamma, \theta')$ *et le GROUPE QUOTIENT* $Q = G'' = G/G'$, *et sous les* *hypothèses et les conditions équivalentes* (a), (b), (c), (d) *du Théorème 6-2, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *Les DONNEES DE BASE vérifient la* CONDITION DE SPEISER :

(S) $$\hat{H}^1(P') = \{1\}$$

(b) *Pour tout* $\lambda \in Q = G''$, *l'ensemble* **non vide** $\mathfrak{F}_\lambda = \mathfrak{F}(\eta_\lambda, \psi_\lambda)$ *des* **prolongements** $F \in \mathrm{Aut}(\Delta')$ *du* **couple** $(\eta_\lambda, \psi_\lambda)$ *COMPATIBLE est constitué par* **"une seule classe"**, *ce qui signifie que deux* **prolongements** $F \in \mathrm{Aut}(\Delta')$ *et* $F' \in \mathrm{Aut}(\Delta')$ *du* **couple** $(\eta_\lambda, \psi_\lambda)$ *COMPATIBLE sont nécessairement EQUIVALENTS, en ce sens qu'ils diffèrent d'un automorphisme intérieur* $\tau_x = < x > \in \mathrm{Aut}_i(\Delta')$, *déterminé par un élément* x *du* **centre-groupe** $X = Z_g(\Gamma)$ *de l'anneau-groupe* $\Gamma = [V; M]$.

PREUVE - Pour chaque $\lambda \in Q = G''$, le Théorème 9-5 de [6] montre que l'ensemble *non vide* $\mathfrak{F}_\lambda = \mathfrak{F}(\eta_\lambda, \psi_\lambda)$ constitue un $Z^1(P')$-***ensemble homogène principal*** et que, par passage au quotient, l'ensemble $\mathfrak{F}[\eta_\lambda, \psi_\lambda]$ des *"classes d'équivalences"* [F] des éléments $F \in \mathfrak{F}_\lambda$, est muni d'une structure de $\hat{H}^1(P')$-*ensemble homogène principal.*

La Définition 8-6 de [6] entraîne alors immédiatement l'équivalence des conditions (a) et (b), ce qui achève la démonstration.

REMARQUE 7.4 - Sous les hypothèses et les conditions équivalentes (a), (b), (c), (d) du Théorème 6-2, pour chaque $\lambda \in Q = G''$, l'ensemble *non vide* $\mathfrak{F}_\lambda = \mathfrak{F}(\eta_\lambda, \psi_\lambda)$ contient *au moins* une *classe* $[F_\lambda]$ pour un *prolongement* $F_\lambda \in \mathfrak{F}_\lambda$ du *couple* $(\eta_\lambda, \Psi_\lambda)$ COMPATIBLE.

Le Théorème 7-3 montre alors que la CONDITION DE SPEISER (S) équivaut à la condition :

(123) $$\mathfrak{F}_\lambda = [F_\lambda] \qquad \text{pour tout } \lambda \in Q = G''$$

qui exprime une *condition d'unicité des prolongements "à automorphisme central intérieur près".*

8. LES COCYCLES DE TEICHMÜLLER.

Sous la CONDITION DE SPEISER, on se propose de généraliser aux EXTENSIONS Q-NORMALES, la notion classique de COCYCLE DE TEICHMÜLLER d'une *algèbre* Q-*normale* [3].

HYPOTHESES 8.1 - On considère maintenant des DONNEES DE BASE :

$$\{P = (G, \Gamma, \theta) ; G'\}$$

qui vérifient la CONDITION DE SPEISER :

$$\text{(S)} \qquad \hat{H}^1(P') = \{1\}$$

et on considère également une CLASSE D'EXTENSIONS Q-NORMALES :

$$\xi' \in [\widetilde{H}^2(P')]^G = [\widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma)]^G = [\mathrm{Ext}_{\theta'}(G', \Gamma)]^G$$

associée à un COCYCLE (GENERALISE) STRICT :

$$z' = (\eta', m') = (\eta' = (\eta'_\sigma), m' = (m'_{\sigma,\tau})) \in \widetilde{Z}^2_{\theta'}(G', \Gamma) = \widetilde{Z}^2(P')$$

du PSEUDO-MODULE $P' = (G', \Gamma, \theta')$, et représentée par le PRODUIT CROISE MIXTE :

$$\text{(I')} \qquad \Delta' = \Delta'_{\xi'} = \Delta'_{z'} = (\Gamma, G', z') = [U'; N']$$

qui détermine l'EXTENSION Q-NORMALE :

$$\text{(II')} \qquad \Gamma \triangleleft \Delta'$$

caractérisée par la SUITE EXACTE MIXTE :

$$\text{(III')} \quad \{0, 1\} \longrightarrow \Gamma = [V; M] \longrightarrow \Delta' = [U'; N'] \xrightarrow{p'} G' \longrightarrow \{1\}$$

On utilisera librement les propriétés des PRODUITS CROISES MIXTES établies dans [5], qui montrent que pour *l'anneau-groupe :*

$$\Delta' = (\Gamma, G', z') = [U'; N']$$

l'anneau sous-jacent $An(\Delta') = U'$ et le *groupe* sous-jacent $Gr(\Delta') = N'$ sont caractérisés par les conditions :

$$(I'_1) \qquad U' = \bigoplus_{\sigma \in G'} V u_\sigma \qquad \text{et} \qquad (I'_2) \qquad N' = \coprod_{\sigma \in G'} M u_\sigma$$

l'addition étant celle du groupe abélien U' et la *multiplication* dans l'anneau U' et dans le groupe $N' \subset U^*$ étant caractérisée (par distributivité dans U') au moyen des conditions :

$$(124) \qquad u_\sigma x = \eta'_\sigma(x) u_\sigma$$

pour tout $\sigma \in G'$ et tout $x \in V$ ou $x \in M$, et :

$$(125) \qquad u_\sigma u_\tau = m'_{\sigma,\tau} u_{\sigma\tau}$$

pour tout $(\sigma, \tau) \in G'^2$.

On utilise également la REPRESENTATION (R) du groupe G, caractérisée par les conditions (112) à (116).

LEMME 8.2 - *Sous les hypothèses précédentes, alors :*

(a) *Tout COCYCLE (GENERALISE) STRICT :*

$$z = (\eta, m) = (\eta = (\eta_\alpha), m = (m_{\alpha,\beta})) \in \widetilde{Z}^2_\theta(G, \Gamma) = \widetilde{Z}^2(P)$$

du PSEUDO-MODULE $P = (G, \Gamma, \theta)$, *détermine un espace* **non vide** :

$$\hat{C}^2_{z',z}(G'', \Delta')$$

constitué par les 2-**cochaînes généralisées** *de la forme :*

$$\Omega = ((F_\lambda), (n_{\lambda,\mu})) \in \hat{C}^2(G'', \Delta')$$

dans laquelle la 1-**cochaîne spéciale :**

$$(F_\lambda) \in C^1(G'', \mathrm{Aut}(\Delta'))$$

vérifie la condition :

(126) $\qquad F_\lambda \in \mathcal{F}(\eta_\lambda, \psi_\lambda) \qquad$ pour tout $\lambda \in Q = G''$

et dans laquelle la 2-**cochaîne spéciale :**

$$(n_{\lambda,\mu}) \in C^2(G'', \mathrm{Gr}(\Delta')) = C^2(G'', N')$$

qui vérifie naturellement la condition :

(127) $\qquad F_\lambda F_\mu = \langle n_{\lambda,\mu} \rangle F_{\lambda\mu} \qquad$ pour tout $(\lambda, \mu) \in G''^2$

vérifie aussi la condition :

(128) $\qquad n_{\lambda,\mu} \in M\, u_{\omega(\lambda,\mu)} \qquad$ pour tout $(\lambda, \mu) \in G''^2$

(b) *Pour chaque* $\lambda \in Q = G''$, *l'automorphisme d'anneaux-groupes :* $F_\lambda \in \mathrm{Aut}(\Delta')$, *détermine sa* **"classe d'automorphismes extérieurs"** :

(129) $\qquad \Theta(\lambda) = \Theta_{z'}(\lambda) = \bar{F}_\lambda \in \mathrm{Aut}_e(\Delta')$

qui est **indépendante du choix** *du COCYCLE STRICT* $z = (\eta, m) \in \widetilde{Z}^2(P)$.

(c) *Le COCYCLE (GENERALISE) STRICT :* $z' = (\eta', m') \in \widetilde{Z}^2(P')$, *détermine un* **"caractère collectif"** :

(130) $\qquad \Theta = \Theta_{z'} \in \mathcal{M}(G'', \Delta') = \mathrm{Mor}[G'', \mathrm{Aut}_e(\Delta')]$

du **groupe** $Q = G'' = G/G'$, *dans* **l'anneau-groupe** :

$$\Delta' = (\Gamma, G', z') = [U' ; N']$$

qui peut également être caractérisé par la condition :

(131) $$\Omega = ((F_\lambda), (n_{\lambda,\mu})) \in \overset{\wedge 2}{C}_\Theta(G'', \Delta')$$

PREUVE - D'après le Théorème 6-2, les Hypothèses entraînent que pour chaque $\lambda \in Q = G''$, l'ensemble $\mathcal{F}(\eta_\lambda, \psi_\lambda)$ *n'est pas vide,* et par suite, en choisissant : $F_1 = 1 \in \mathrm{Aut}(\Delta')$, il en résulte *l'existence* de 1-*cochaînes spéciales:*

$$(F_\lambda) \in C^1(G'', \mathrm{Aut}(\Delta'))$$

vérifiant la condition (126).

Pour les COCYCLES STRICTS :

$$z = (\eta, m) \in \widetilde{Z}^2(P) \qquad \text{et} \qquad z' = (\eta', m') \in \widetilde{Z}^2(P')$$

il est évident qu'il existe au moins une 1-*cochaîne spéciale :*

$$(a'_\sigma) \in C^1(G', M)$$

vérifiant la condition :

(132) $$\eta_\sigma = \langle a'_\sigma \rangle \eta'_\sigma \qquad \text{pour tout } \sigma \in G'$$

et qu'il existe une 2-*cochaîne spéciale :*

$$(c_{\lambda,\mu}) \in C^2(G'', M)$$

caractérisée par la condition :

(133) $$c_{\lambda,\mu} = m_{\lambda,\mu}\, m^{-1}_{\omega(\lambda,\mu),\lambda\mu} = m_{v(\lambda),v(\mu)}\, m^{-1}_{\omega(\lambda,\mu),\upsilon(\lambda\mu)}$$

pour tout $(\lambda,\mu) \in G''^2$.

Avec la CONVENTION adoptée, compte tenu de la condition (113), pour tout $(\lambda, \mu) \in G''^2$, la condition (11) entraînent facilement la condition :

(134) $$\eta_\lambda \eta_\mu = \langle c_{\lambda,\mu} \rangle \eta_{\omega(\lambda,\mu)} \eta_{\lambda\mu}$$

et par suite la condition (132) entraîne la condition :

(135) $$\eta_\lambda \eta_\mu = \langle c_{\lambda,\mu}\, a'_{\omega(\lambda,\mu)} \rangle \eta'_{\omega(\lambda,\mu)} \eta_{\lambda\mu}$$

alors que la condition (113) entraîne également la condition :

(136) $$\psi_\lambda \psi_\mu = 1_{G'} \quad \psi_{\omega(\lambda,\mu)} \psi_{\lambda\mu}$$

La condition (126) entraîne les relations :

(137) $$F_\lambda \in \mathcal{F}(\eta_\lambda, \psi_\lambda) \ ; \ F_\mu \in \mathcal{F}(\eta_\mu, \psi_\mu) \ ; \ F_{\lambda\mu} \in \mathcal{F}(\eta_{\lambda\mu}, \psi_{\lambda\mu})$$

De même, pour tout $(\lambda, \mu) \in G''^2$, en posant pour simplifier les notations :

(138) $$u_{\omega(\lambda,\mu)} = u_{\lambda,\mu} \ ; \ \eta'_{\omega(\lambda,\mu)} = \eta'_{\lambda,\mu} \ ; \ \psi_{\omega(\lambda,\mu)} = \psi_{\lambda,\mu}$$

et

(139) $$\underline{c}_{\lambda,\mu} = c_{\lambda,\mu}\, a'_{\omega(\lambda,\mu)}$$

la condition (124) montre que l'élément : $u_{\lambda,\mu} \in N' = \mathrm{Gr}(\Delta')$, détermine un automorphisme intérieur $\langle u_{\lambda,\mu} \rangle \in \mathrm{Aut}_i(\Delta')$, vérifiant la relation :

(140) $$<u_{\lambda,\mu}> \in \mathcal{F}(\eta'_{\lambda,\mu}, \psi_{\lambda,\mu})$$

et que l'élément $\underline{c}_{\lambda,\mu} \in M \subset N' = Gr(\Delta')$, détermine un automorphisme intérieur $<\underline{c}_{\lambda,\mu}> \in Aut_i(\Delta')$, vérifiant la relation :

(141) $$<\underline{c}_{\lambda,\mu}> \in \mathcal{F}(<c_{\lambda,\mu}\, a'_{\omega(\lambda,\mu)}>, 1_{G'})$$

Compte tenu des conditions (135) et (136) qui entraînent, dans le groupe produit : $Aut(\Gamma) \times Aut(G')$, la relation :

$$(\eta_\lambda, \psi_\lambda)(\eta_\mu, \psi_\mu)(\eta_{\lambda\mu}, \psi_{\lambda\mu})^{-1}(\eta'_{\lambda,\mu}, \psi_{\lambda,\mu})^{-1}(<c_{\lambda,\mu}\, a'_{\omega(\lambda,\mu)}>, 1_{G'})^{-1} = (1_\Gamma, 1_{G'})$$

les relations (137), (140) et (141) entraînent que l'automorphisme :

(142) $$F_\lambda F_\mu F_{\lambda\mu}^{-1} <u_{\lambda,\mu}^{-1}> <\underline{c}_{\lambda,\mu}^{-1}> = H_{\lambda,\mu} \in Aut(\Delta')$$

constitue un *prolongement* du *couple* $(1_\Gamma, 1_{G'}) \in Aut(\Gamma) \times Aut(G')$, ce qui implique la condition :

(143) $$H_{\lambda,\mu} \in \mathcal{F}(1_\Gamma, 1_{G'}) \qquad \text{pour tout } (\lambda, \mu) \in G''^2$$

Compte tenu de la CONDITION DE SPEISER(S), le Corollaire 9-6 de [6] montre que la condition (143) entraîne que $H_{\lambda,\mu}$ coïncide avec un *automorphisme intérieur* de l'anneau-groupe $\Delta' = [U'; N']$, déterminé par un *élément* du *centre-groupe* $X = Z_g(\Gamma)$ de l'anneau-groupe $\Gamma = [V; M]$, qui vérifie naturellement la relation : $X \subset M \subset N'$.

Il en résulte immédiatement l'existence d'une 2-*cochaîne spéciale :*

$$(x_{\lambda,\mu}) \in C^2(G'', X)$$

vérifiant la condition :

(144) $$H_{\lambda,\mu} = <x_{\lambda,\mu}> \in Aut_i(\Delta') \qquad \text{pour tout } (\lambda, \mu) \in G''^2$$

de sorte que la condition (142) entraîne la condition :

(145) $$F_\lambda F_\mu = <x_{\lambda,\mu}\, \underline{c}_{\lambda,\mu}\, u_{\lambda,\mu}> F_{\lambda\mu} \qquad \text{pour tout } (\lambda, \mu) \in G''^2$$

Il existe alors au moins une 2-*cochaîne spéciale :*

$$(n_{\lambda,\mu}) \in C^2(G'', Gr(\Delta')) = C^2(G'', N')$$

caractérisée par la condition :

(146) $$n_{\lambda,\mu} = x_{\lambda,\mu}\, \underline{c}_{\lambda,\mu}\, u_{\lambda,\mu} \qquad \text{pour tout } (\lambda, \mu) \in G''^2$$

de sorte que la condition (145) se traduit par la condition (127), et qui vérifie aussi la condition (128).

La Définition 4-2 et le Scholie 4-3 de [4] entraînent alors :

$$\Omega = ((F_\lambda), (n_{\lambda,\mu})) \in \hat{C}^2_{z,z'}(G'', \Delta') \subset \hat{C}^2(G'', \Delta')$$

ce qui prouve la partie (a).

Compte tenu de la CONDITION DE SPEISER (S), pour chaque $\lambda \in Q = G''$, le Théorème 7-3 entraîne la relation :

(147) $$\mathcal{F}(\eta_\lambda, \psi_\lambda) \subset \bar{F}_\lambda \in \mathrm{Aut}_e(\Delta')$$

De plus, comme le Lemme 4-4 de [6] montre que $\widetilde{Z}^2(P)$ est un $C^1(P)$-*espace homogène* pour *l'action* $*$, un *changement* du COCYCLE STRICT $z = (\eta, m) \in \widetilde{Z}^2(P)$ se traduit par son *remplacement* par un COCYCLE STRICT $\underline{z} = (\underline{\eta}, \underline{m}) \in \widetilde{Z}^2(P)$, vérifiant en particulier une condition de la forme :

(149) $$\underline{\eta}_\alpha = \langle \underline{a}_\alpha \rangle \eta_\alpha \qquad \text{pour tout } \alpha \in G$$

pour une certaine 1-*cochaîne spéciale :*

$$(\underline{a}_\alpha) \in C^1(G, M)$$

Pour *toute* 1-*cochaîne spéciale :*

$$(\underline{F}_\lambda) \in C^1(G'', \mathrm{Aut}(\Delta'))$$

liée au COCYCLE STRICT $\underline{z} = (\underline{\eta}, \underline{m}) \in \widetilde{Z}^2(P)$, par la condition de la partie (a), ce qui entraîne en particulier :

(126) $$(\underline{F}_\lambda) \in \mathcal{F}(\underline{\eta}_\lambda, \psi_\lambda) \qquad \text{pour tout } \lambda \in Q = G''$$

un raisonnement analogue à celui fait pour la démonstration de la partie (a) montre que la condition (149) entraîne l'existence d'une 1-*cochaîne spéciale :*

$$(\underline{x}_\lambda) \in C^1(G'', X)$$

vérifiant la condition :

(150) $$\underline{F}_\lambda = \langle \underline{x}_\lambda \, \underline{a}_\lambda \rangle F_\lambda \qquad \text{pour tout } \lambda \in G''$$

qui entraîne alors la condition :

(151) $$\overline{\underline{F}}_\lambda = \bar{F}_\lambda \in \mathrm{Aut}_e(\Delta') \qquad \text{pour tout } \lambda \in G''$$

ce qui achève la preuve de la partie (b).

La condition (127) entraîne :

$$\bar{F}_\lambda \, \bar{F}_\mu = \bar{F}_{\lambda\mu} \qquad \text{pour tout } (\lambda, \mu) \in G''^2$$

c'est-à-dire :

$$\Theta_{z'}(\lambda)\, \Theta_{z'}(\mu) = \Theta_{z'}(\lambda\mu) \qquad \text{pour tout } (\lambda, \mu) \in G''^2$$

ce qui prouve que la caractérisation (129) entraîne bien *l'existence* du *"caractère collectif"* :

(130) $$\Theta = \Theta_{z'} \in \mathcal{M}(G'', \Delta') = \mathrm{Mor}[G'', \mathrm{Aut}_e(\Delta')]$$

du *groupe* $Q = G'' = G/G'$, dans *l'anneau-groupe* $\Delta' = [U', N']$.

Le Théorème 4-8 de [4] montre alors que les parties (a) et (b) impliquent sa caractérisation par la condition (131), ce qui termine la preuve de la partie (c) et achève la démonstration.

LEMME 8-3 - *Sous les Hypothèses précédentes, alors :*

(a) *Le* **centre-groupe** $X = Z_g(\Gamma)$ *de l'anneau-groupe* $\Gamma = [V; M]$ *est muni d'une structure de* G-module $(G, X, \theta) = X = X_\theta$, *constituant le MODULE CENTRAL associé au PSEUDO-MODULE* $P = (G, \Gamma, \theta)$.

(b) *Le* **groupe d'invariants** $X' = X^{G'}$ *est muni, par passage au quotient, d'une structure de* **G"-module** $(G", X', \theta") = X' = X'_{\theta"} = X^{G'}$.

(c) *Le* **centre-groupe** $Y = Z_g(\Delta')$ *de l'anneau-groupe* $\Delta' = [U'; N']$ *est muni d'une structure de* **G"-module** $(G", Y, \Theta) = Y = Y_\Theta$, **"induite"** *par* **"caractère collectif"** : $\Theta = \Theta_{z'} \in \mathcal{M}(G", \Delta')$, *du groupe* $Q = G" = G/G'$ *dans l'anneau-groupe* $\Delta' = [U'; N'] = (\Gamma, G', z')$.

(d) *Dans le groupe* $N' = Gr(\Delta')$, *les* **centres-groupes** :

$$Z_g(\Gamma) = X = M \cap Z(V) \qquad \text{et} \qquad Z_g(\Delta') = Y = N' \cap Z(U')$$

vérifient la relation :

$$(152) \qquad Z_g(\Gamma) \cap Z_g(\Delta') = X \cap Y = X^{G'} = X'$$

de sorte que l'inclusion canonique :

$$(153) \qquad X^{G'} = X' \subset Y = Z_g(\Delta')$$

est un **monomorphisme** *du* **G"-module** $(G", X', \theta") = X' = X'_{\theta"} = X^{G'}$ *dans le* **G"-module** $(G", Y, \Theta) = Y = Y_\Theta$ *associé au COCYCLE STRICT* $z' = (\eta', m') \in \widetilde{Z}^2(P')$.

PREUVE - La partie (g) des Exemples 3-2 de [6] établit la partie (a), qui entraîne immédiatement la partie (b).

Le diagramme commutatif et exact canonique (1), appliqué à l'anneau-groupe $\Delta' = [U'; N']$, montre que le composé du morphisme canonique : $Aut_e(\Delta') \longrightarrow Aut[Z_g(\Delta')] = Aut(Y)$ et du *"caractère collectif"* $\Theta = \Theta_{z'} \in \mathcal{M}(G", \Delta') = Mor[G", Aut_e(\Delta')]$ détermine un *"caractère"* $\underline{\Theta} \in \mathcal{M}(G", Y) = Mor[G", Aut(Y)]$, noté aussi simplement $\Theta = \Theta_{z'}$, du groupe G" dans le groupe abélien $Y = Z_g(\Delta')$, ce qui détermine le G"-*module* $(G", Y, \Theta) = Y = Y_\Theta$ et prouve la partie (c).

Les caractérisations de $X = Z_g(\Gamma)$ et de $Y = Z_g(\Delta')$ entraînent :

$$X \cap Y = X \cap Z(U') \qquad \text{avec} \qquad X \subset Z(V)$$

de sorte que la condition (I'_1) montre que $X \cap Y$ est constitué par les éléments $x \in X$ qui commutent aux éléments u_σ pour tout $\sigma \in G'$, et par suite, la condition (124) entraîne :

(154) $$X \cap Y = \{x \in X \mid \eta'_\sigma(x) = x \quad \text{pour tout } \sigma \in G'\}$$

Comme le G-*module* $(G, X, \theta) = X = X_\theta$ peut être caractérisé par la condition :

(155) $$\theta_\alpha(x) = \eta_\alpha(x) \qquad \text{pour tout } x \in X$$

la condition (132) et la relation : $X \subset Z(M)$, entraînent la condition :

(156) $$\eta'_\sigma(x) = \eta_\sigma(x) = \theta_\sigma(x) \qquad \text{pour tout } x \in X \text{ et tout } \sigma \in G'$$

Les conditions (154) et (156) entraînent alors :

$$X \cap Y = \{x \in X \mid \theta_\sigma(x) = x \quad \text{pour tout } \sigma \in G'\} = X^{G'}$$

c'est-à-dire la relation (152).

De même, compte tenu du Lemme 8-2, le G"-*module* $(G'', Y, \Theta) = Y = Y_\Theta$ peut être caractérisé par la condition :

(157) $$\Theta_\lambda(y) = F_\lambda(y) = \eta_\lambda(y) \qquad \text{pour tout } y \in Y$$

Pour tout $x' \in X \cap Y = X'$, les conditions (155) et (157) entraînent alors la condition :

(158) $$\Theta_\lambda(x') = \eta_\lambda(x') = \eta_{\upsilon(\lambda)}(x') = \theta_{\upsilon(\lambda)}(x') = \theta''_\lambda(x') \quad \text{pour tout } \lambda \in G''$$

qui montre que le G"-*module* $(G'', X', \theta'') = X' = X'_{\theta''} = X^{G'}$, est bien, au moyen de l'inclusion canonique (153), un *sous* G"-*module* du G"-*module* $(G'', Y, \Theta) = Y = Y_\Theta$ associé au COCYCLE STRICT : $z' = (\eta', m') \in \widetilde{Z}^2(P')$, ce qui termine la preuve de la partie (d) et achève la démonstration.

NOTATIONS 8-4 - Sous les Hypothèses précédentes, le diagramme commutatif (3), appliqué au *groupe* $Q = G'' = G/G'$ et à *l'anneau-groupe* $\Delta' = \Delta'_{\xi'} = \Delta'_{z'} = (\Gamma, G', z') = [U'; N']$ donne un diagramme commutatif de la forme :

(VIII) $$\begin{array}{ccc} \hat{C}^2(G'', \Delta') & \xrightarrow{\quad T \quad} & Z^3(G'', \Delta') \\ \chi \Big\downarrow & \hat{T} & \Big\downarrow (\hat{\ }) \\ \mathcal{M}(G'', \Delta') & \xrightarrow{\quad \bar{T} \quad} & \hat{H}^3(G'', \Delta') \end{array}$$

dans lequel figurent l'APPLICATION COCYCLE DE TEICHMÜLLER T, l'APPLICATION CLASSE DE TEICHMÜLLER $\hat{T}$ et l'APPLICATION OBSTRUCTION DE TEICHMÜLLER $\bar{T}$, associées au *groupe* Q = G" = G/G' et à *l'anneau-groupe* $\Delta' = (\Gamma, G', z')$.

En fait, ce diagramme *dépend du choix* du COCYLE STRICT :

$z' = (\eta', m') \in \widetilde{Z}^2(P')$, dont la classe $\widetilde{z}' = \xi' \in \widetilde{H}^2(P')$ vérifie la CONDITION DE Q-NORMALITE :

$$\xi' \in [H^2(P')]^G$$

Comme le Lemme 8-2 montre que ce COCYCLE STRICT $z' = (\eta', m') \in \widetilde{Z}^2(P')$ détermine un *"caractère collectif"* :

$$\Theta = \Theta_{z'} \in \mathcal{M}(G", \Delta') = \mathrm{Mor}[G", \mathrm{Aut}_e(\Delta')]$$

du *groupe* Q = G" = G/G' dans *l'anneau-groupe :*

$$\Delta' = (\Gamma, G', z') = [U'; N']$$

le Théorème 4-8 de [4] montre que la *"classe de cohomologie faible"* :

$$\hat{C}^2_\Theta(G", \Delta') = \chi^{-1}(\Theta) = \chi^{-1}(\Theta_{z'})$$

est un $\hat{C}^1(G", \Delta')$-*espace homogène*, appelé l'ESPACE DES Θ-COCHAINES du groupe G" dans l'anneau-groupe Δ'.

Par *restriction*, le diagramme commutatif (VIII) détermine alors le diagramme commutatif :

$$\text{(IX)} \qquad \begin{array}{ccc} \hat{C}^2_\Theta(G", \Delta') & \xrightarrow{T = T_\Theta} & Z^3_\Theta(G", \Delta') = Z^3_\Theta(G", Y) \\ \downarrow & \searrow & \Big\downarrow \hat{T} = \hat{T}_\Theta \quad (\hat{\ }) \\ \{\Theta = \Theta_{z'}\} & \xrightarrow{\bar{T} = \bar{T}_\Theta} & \hat{H}^3_\Theta(G", \Delta') = H^3_\Theta(G", Y) \end{array}$$

qui *dépend aussi du choix* du COCYCLE STRICT : $z' = (\eta', m') \in \widetilde{Z}^2(P')$.

Le Théorème 6-5 de [4] montre que *l'image* par $T = T_\Theta$, de la *classe de cohomologie faible :*

$$\overset{\wedge 2}{C}_{\Theta}(G'', \Delta') = \chi^{-1}(\Theta) = \chi^{-1}(\Theta_{z'})$$

est *exactement constituée* par un ensemble de 3-COCYCLES CENTRAUX de G'' dans Δ', qui caractérise une CLASSE DE COHOMOLOGIE CENTRALE :

(159) $$\bar{T}[\Theta_{z'}] = \bar{T}[\Theta] = \zeta'(z') = \zeta' \in \overset{\wedge 3}{H}_{\Theta}(G'', \Delta') = H^{3}_{\Theta}(G'', Y)$$

du *groupe* G'' dans *l'anneau-groupe* $\Delta' = (\Gamma, G', z')$, caractérisant l'OBSTRUCTION DE TEICHMÜLLER du *"caractère collectif"* $\Theta = \Theta_{z'} \in \mathcal{M}(G'', \Delta')$ du *groupe* G'' dans *l'anneau-groupe* $\Delta' = (\Gamma, G', z')$, associé au COCYCLE GENERALISE : $z' = (\eta', m') \in \widetilde{Z}^2(P')$, vérifiant les Hypothèses précédentes.

Dans l'ESPACE DES Θ-COCHAINES :

$$\overset{\wedge 2}{C}_{\Theta}(G'', \Delta')$$

le Lemme 8-2 assure *l'existence* du *sous-espace non vide :*

$$\overset{\wedge 2}{C}_{z'}(G'', \Delta') = \bigcup_{z \in \widetilde{Z}^2(P)} \overset{\wedge 2}{C}_{z',z}(G'', \Delta')$$

appelé l'ESPACE DES Θ-COCHAINES ELEMENTAIRES.

De même, le Lemme 8-3 entraîne l'existence du groupe :

(160) $$\overset{\wedge 1}{C}_{e}(G'', \Delta') = C^1(G'', M) \times C^2(G'', X^{G'}) = \hat{C}^1(G'', \Gamma) \cap \hat{C}^1(G'', \Delta')$$

appelé le groupe des 1-*cochaînes généralisées faibles* ELEMENTAIRES, qui admet pour sous-groupes, le groupe :

(161) $$\widetilde{C}^1_{e}(G'', \Delta') = C^1(G'', M) \times \{1\} = \widetilde{C}^1(G'', \Gamma) \cap \widetilde{C}^1(G'', \Delta')$$

appelé le groupe des 1-COCHAINES STRICTES ELEMENTAIRES, et aussi le groupe :

(162) $$\widetilde{C}^1_{f}(G'', \Delta') = C^1(G'', X) \times C^2(G'', X^{G'})$$

appelé le *"groupe d'isotropie"*.

LEMME 8-5 - *Sous les Hypothèses précédentes, alors :*

(a) *L'action* $*$ *habituelle, du groupe* $\hat{C}^1(G'', \Delta')$ *de* 1-**cochaînes généralisées faibles** *de* G" *dans* Δ', *sur l'espace* $\hat{C}^2(G'', \Delta')$ *des* 2-**cochaînes généralisées** *de* G" *dans* Δ', **induit** *une* **action** :

$$\hat{C}^1_e(G'', \Delta') \times \hat{C}^2_{z'}(G'', \Delta') \xrightarrow{\underline{*}} \hat{C}^2_{z'}(G'', \Delta')$$

pour laquelle la condition :

(163) $\qquad \underline{\Omega} = ((\underline{F}_\lambda), (\underline{n}_{\lambda,\mu})) = (\underline{a}, \underline{b}) \underline{*} ((F_\lambda), (n_{\lambda,\mu})) = (\underline{a}, \underline{b}) * \Omega$

est équivalente à l'ensemble des deux conditions :

(163') $\qquad \underline{F}_\lambda = \langle \underline{a}_\lambda \rangle F_\lambda \qquad$ pour tout $\lambda \in G''$

(163") $\qquad \underline{n}_{\lambda,\mu} = \underline{a}_\lambda F_\lambda(\underline{a}_\mu) n_{\lambda,\mu} \underline{a}^{-1}_{\lambda\mu} \underline{b}_{\lambda,\mu} \qquad$ pour tout $(\lambda,\mu) \in G''^2$

(b) *Pour cette* **action** $\underline{*}$, *l'APPLICATION CLASSE DE TEICHMÜLLER* $T = T_\Theta$ *vérifie la condition :*

(164) $$T[(\underline{a}, \underline{b}) \underline{*} \Omega] = \delta^3_{\theta''}(\underline{b})\, T[\Omega]$$

pour toute Θ*-COCHAINE ELEMENTAITAIRE* :

$$\Omega = ((F_\lambda), (n_{\lambda,\mu})) \in \hat{C}^2_{z'}(G'', \Delta')$$

et pour toute 1-**cochaîne généralisée faible** *ELEMENTAIRE :*

$$(\underline{a}, \underline{b}) \in \hat{C}_e(G'', \Delta') = C^1(G'', M) \times C^2(G'', X^{G'})$$

(c) *Pour cette* **action** $\underline{*}$, *l'ESPACE* $\hat{C}^2_{z'}(G'', \Delta')$ *DES* Θ*-COCHAINES ELEMENTAIRES est un* $\hat{C}^1_e(G'', \Delta')$ - **espace homogène.**

(d) *Par restriction de cette* **action** $\underline{*}$, *le groupe* $\tilde{C}_e(G'', \Delta')$ **opère transitivement** *sur* **l'ensemble** *des* **sous-espaces** :

$$\{\hat{C}^2_{z',z}(G'', \Delta') \mid z \in \tilde{Z}^2(P)\}$$

(e) *Pour chaque COCYCLE STRICT* $z = (\eta, m) \in \widetilde{Z}^2(P)$, *l'espace* $\hat{C}^2_{z',z}(G'', \Delta')$ *est un* $\widetilde{C}^1_f(G'', \Delta')$**-espace homogène.**

PREUVE - Compte tenu du Lemme 4-5 de [4], pour prouver la partie (a), il suffit de montrer que la condition :

$$\Omega = ((F\lambda), (n_{\lambda,\mu})) \in \hat{C}^2_{z',z}(G'', \Delta') \subset \hat{C}^2_{z'}(G'', \Delta')$$

et la condition (163), entraînent la condition :

$$\underline{\Omega} = ((\underline{F}\lambda), (\underline{n}_{\lambda,\mu})) \in \hat{C}^2_{z',\underline{z}}(G'', \Delta') \subset \hat{C}^2_{z'}(G'', \Delta')$$

pour un certain COCYCLE STRICT : $\underline{z} = (\underline{\eta}, \underline{m}) \in \widetilde{Z}^2(P)$.

Il est immédiat qu'il existe au moins une 1-*cochaîne spéciale :*

$$a = (a_\alpha) \in C^1(G, M)$$

vérifiant la condition : $\underline{a}_\lambda = a_{\upsilon(\lambda)}$ pour tout $\lambda \in G''$, et en posant :

$$a \mathbin{\widetilde{*}} z = (a, 1) * (\eta, m) = (\underline{\eta}, \underline{m}) = \underline{z} \in \widetilde{Z}^2(P)$$

il en résulte la condition :

$$\underline{\eta}_\lambda = \langle \underline{a}_\lambda \rangle \eta_\lambda \qquad \text{pour tout } \lambda \in G''$$

de sorte que les conditions (163') et (126) entraînent la condition :

$$(\underline{126}) \qquad \underline{F}\lambda \in \mathcal{F}(\underline{\eta}_\lambda, \psi_\lambda) \qquad \text{pour tout } \lambda \in Q = G''$$

et les conditions (163") et (128) entraînent facilement la condition :

$$(\underline{128}) \qquad \underline{n}_{\lambda,\mu} \in M\, u_{\omega(\lambda,\mu)} \qquad \text{pour tout } (\lambda, \mu) \in G''^2$$

De plus, compte tenu du Lemme 8-3 qui entraîne la relation :

$$\langle \underline{b}_{\lambda,\mu} \rangle = 1 \in \mathrm{Aut}_i(\Delta')$$

le Lemme 4-5 de [4] montre que les conditions (163) et (127) entraînent la condition :

$$(\underline{127}) \qquad \underline{F}\lambda\, \underline{F}\mu = \langle \underline{n}_{\lambda,\mu} \rangle\, \underline{F}\lambda\mu \qquad \text{pour tout } (\lambda, \mu) \in G''^2$$

Il en résulte bien la condition :

$$\underline{\Omega} = ((\underline{F}\lambda), (\underline{n}_{\lambda,\mu})) \in \hat{C}^2_{z',\underline{z}}(G'', \Delta') \subset \hat{C}^2_{z'}(G'', \Delta')$$

ce qui achève la preuve de la partie (a).

Comme le Lemme 8-3 entraîne la relation :

$$\delta^3_{\Theta}(\underline{b}) = \delta^3_{\theta''}(\underline{b})$$

le Lemme 6-4 de [4] entraîne la partie (b).

Etant données deux Θ-COCHAINES ELEMENTAIRES arbitraires :

$$\Omega = ((F_\lambda), (n_{\lambda,\mu})) \in \hat{C}^2_{z',z}(G'', \Delta') \subset \hat{C}^2_{z'}(G'', \Delta')$$

et

$$\underline{\Omega} = ((\underline{F}_\lambda), (\underline{n}_{\lambda,\mu})) \in \hat{C}^2_{z',\underline{z}}(G'', \Delta') \subset \hat{C}^2_{z'}(G'', \Delta')$$

comme le Lemme 4-4 de [6] montre que $\widetilde{Z}^2(P)$ est un $C^1(P)$-*espace homogène*, il existe d'abord au moins une 1-COCHAINE :

$$(a, b) \in C^1(P) = C^1(G, M) \times Z^2_\theta(G, X)$$

vérifiant la condition : $\underline{z} = (a, b) * z$, qui entraîne en particulier la condition :

$$\underline{\eta}_\lambda = \langle a_\lambda \rangle \eta_\lambda \qquad \text{pour tout } \lambda \in G''$$

de sorte que, compte tenu de la CONDITION DE SPEISER (S), le Corollaire 9-6 de [6] montre que la condition (126) entraîne l'existence d'au moins une 1-*cochaîne spéciale :*

$$(x_\lambda) \in C^1(G'', X)$$

vérifiant la condition :

$$\underline{F}_\lambda = \langle x_\lambda\, a_\lambda \rangle F_\lambda \qquad \text{pour tout } \lambda \in G''$$

La condition : $\underline{a}_\lambda = x_\lambda\, a_\lambda$ pour tout $\lambda \in G''$, caractérise alors une 1-*cochaîne spéciale :*

$$\underline{a} = (\underline{a}_\lambda) \in C^1(G'', M)$$

vérifiant la condition (163'), et pour laquelle la partie (a) détermine la Θ-COCHAINE ELEMENTAIRE :

$$\underline{\Omega}' = ((\underline{F}_\lambda)\ (\underline{n}'_{\lambda,\mu})) = [(\underline{a}, 1) * \Omega] \in \hat{C}^2_{z',\underline{z}}(G'', \Delta')$$

Appliquée à $\underline{\Omega}$ et $\underline{\Omega}'$, la condition (127) entraîne, dans le groupe $\mathrm{Aut}_i(\Delta')$, la condition :

$$\langle \underline{n}_{\lambda,\mu} \rangle = \langle \underline{n}'_{\lambda,\mu} \rangle \qquad \text{pour tout } (\lambda, \mu) \in G''^2$$

et de même, la condition (128) entraîne l'existence d'une 2-*cochaîne spéciale :*

$$(\underline{b}_{\lambda,\mu}) \in C^2(G'', M)$$

vérifiant la condition :

$$\underline{n}_{\lambda,\mu} = \underline{b}_{\lambda,\mu}\, \underline{n}'_{\lambda,\mu} \qquad \text{pour tout } (\lambda, \mu) \in G''^2$$

ce qui entraîne la condition :

$$<\underline{b}_{\lambda,\mu}> = 1 \in \mathrm{Aut}_i(\Delta') \qquad \text{pour tout } (\lambda, \mu) \in G''^2$$

pour laquelle le Lemme 8-3 implique la condition :

$$(\underline{b}_{\lambda,\mu}) \in C^2(G'', X^{G'})$$

Ainsi, les caractérisations précédentes entraînent la relation :

$$\underline{\Omega} = ((\underline{F}_\lambda), (\underline{n}_{\lambda,\mu})) = (\underline{a}, \underline{b}) * ((F_\lambda), (n_{\lambda,\mu})) = (\underline{a}, \underline{b}) * \Omega$$

ce qui termine la preuve de la partie (c).

La construction précédente prouve *l'existence* d'un élément :

$$(\underline{a}, 1) \in \widetilde{C}_e(G'', \Delta') = C^1(G'', M) \times \{1\}$$

qui transforme la Θ-COCHAINE ELEMENTAIRE $\Omega \in \hat{C}^2_{z',z}(G'', \Delta')$ en une Θ-COCHAINE ELEMENTAIRE $\underline{\Omega}' \in \hat{C}^2_{z',\underline{z}}(G'', \Delta')$. Il en résulte facilement la relation :

$$(\underline{a}, 1) * [\hat{C}^2_{z',z}(G'', \Delta')] = \hat{C}^2_{z',\underline{z}}(G'', \Delta')$$

ce qui prouve la partie (d).

La partie (a) entraîne facilement que le groupe $\widetilde{C}^2_f(G'', \Delta')$ est le *stabilisateur strict* de chaque sous-espace $\hat{C}^2_{z',z}(G'', \Delta')$.

La partie (c) entraîne alors la partie (e), ce qui achève la démonstration.

LEMME 8-6 - *Pour des DONNEES DE BASE* **quelconques** :

$$\{P = (G, \Gamma, \theta)\ ;\ G'\}$$

et pour un COCYCLE STRICT :

$$z' = (\eta', m') = (\eta' = (\eta'_\sigma), m' = (m'_{\sigma,\tau})) \in \widetilde{Z}^2_{\theta'}(G', \Gamma) = \widetilde{Z}^2(P')$$

tout *COCYCLE STRICT :*

$$z = (\eta, m) = (\eta = (\eta_\alpha), m = (m_{\alpha,\beta})) \in \widetilde{Z}^2_\theta(G, \Gamma) = \widetilde{Z}^2(P)$$

est **strictement cohomologue** *à un COCYCLE STRICT :*

$$\underline{z} = (\underline{\eta}, \underline{m}) = (\underline{\eta} = (\underline{\eta}_\alpha), \underline{m} = (\underline{m}_{\alpha,\beta})) \in \widetilde{Z}^2_\theta(G, \Gamma) = \widetilde{Z}^2(P)$$

défini *par la condition :*

(165) $$\underline{z} = (\underline{\eta}, \underline{m}) = (a, 1) * (\eta, m) = a \,\widetilde{*}\, (\eta, m) = a \,\widetilde{*}\, z$$

pour une certaine **1-cochaîne spéciale :**

$$a = (a_\alpha) \in C^1(G, M)$$

et qui vérifie les deux propriétés suivantes :

(a) *Le COCYCLE STRICT* $\underline{z} = (\underline{\eta}, \underline{m}) \in \widetilde{Z}^2(P)$ *est AU DESSUS du COCYCLE STRICT* $z' = (\eta', m') \in \widetilde{Z}^2(P')$, *en ce sens qu'il vérifie la condition :*

(166) $$\underline{\eta}_\sigma = \eta'_\sigma \qquad \text{pour tout } \sigma \in G'$$

(b) *Le COCYCLE STRICT* $\underline{z} = (\underline{\eta}, \underline{m}) \in \widetilde{Z}^2(P)$ *est ADAPTE à la REPRESENTATION* (R) *du groupe* G, *en ce sens qu'il vérifie la condition :*

(AR) $$\underline{m}_{\sigma,\upsilon(\mu)} = \underline{m}_{\sigma,\mu} = 1 \qquad \text{pour tout } (\sigma, \mu) \in G' \times G''$$

PREUVE - La démonstration du Lemme 8-2 a utilisé l'existence d'au moins une 1-*cochaîne spéciale* $(a'_\sigma) \in C^1(G', M)$, vérifiant la condition :

(132) $$\eta_\sigma = \langle a'_\sigma \rangle \eta'_\sigma \qquad \text{pour tout } \sigma \in G'$$

La 1-*cochaîne spéciale* $a = (a_\alpha) \in C^1(G, M)$ est définie par la condition :

(167) $$a_\alpha = a'^{-1}_\sigma m_{\sigma,\upsilon(\lambda)} = a'^{-1}_\sigma m_{\sigma\lambda}$$

pour tout élément $\alpha \in G$ de la forme :

(115) $$\alpha = \sigma\upsilon(\lambda)$$

pour des éléments $\sigma \in G'$ et $p''(\alpha) = \bar{\alpha} = \lambda \in G'' = Q$.

La condition (167) entraîne en particulier :

$$a_\sigma = a'^{-1}_\sigma m_{\sigma,1} = a'^{-1}_\sigma \qquad \text{et} \qquad a_{\upsilon(\mu)} = a'^{-1}_1 m_{1,\upsilon(\mu)} = 1$$

pour tout $\sigma \in G'$ et tout $\mu \in G''$.

Les conditions (165) et (132) entraînent :

$$\underline{\eta}_\sigma = \langle a_\alpha \rangle \eta_\sigma = \langle a'^{-1}_\sigma \rangle \eta_\sigma = \langle a'^{-1}_\sigma a'_\sigma \rangle \eta'_\sigma = \eta'_\sigma$$

c'est-à-dire la condition (166), ce qui prouve la partie (a).

De même, la condition (165) entraîne alors :

$$\underline{m}_{\sigma,\upsilon(\mu)} = a_\sigma \, \eta_\sigma(a_{\upsilon(\mu)}) \, m_{\sigma,\upsilon(\mu)} \, a^{-1}_{\sigma\upsilon(\mu)}$$

$$= a'^{-1}_\sigma \, \eta_\sigma(1) \, m_{\sigma,\upsilon(\mu)} [a'^{-1}_\sigma \, m_{\sigma,\upsilon(\mu)}]^{-1} = 1$$

c'est-à-dire la condition (AR), ce qui termine la preuve de la partie (b) et achève la démonstration.

LEMME 8-7 - *Sous les Hypothèses 8-1, alors :*

(a) *Il est possible de choisir un COCYCLE STRICT :*

$$z = (\eta, m) = (\eta = (\eta_\alpha), m = (m_{\alpha,\beta})) \in \widetilde{Z}^2_\theta(G, \Gamma) = \widetilde{Z}^2(P)$$

qui est AU DESSUS du COCYLE STRICT $z' = (\eta', m') \in \widetilde{Z}^2(P')$, *en ce sens qu'il vérifie la condition :*

(168) $\qquad \eta_\sigma = \eta'_\sigma \qquad$ pour tout $\sigma \in G'$

et qui ADAPTE à la REPRESENTATION (R) *du groupe* G, *en ce sens qu'il vérifie la condition :*

(AR) $\qquad m_{\sigma,\upsilon(\mu)} = m_{\sigma,\mu} = 1 \qquad$ pour tout $(\sigma, \mu) \in G' \times G''$

(b) *Avec* **un tel choix,** *et avec les notations des conditions* (112) *à* (117) *toute* Θ*-COCHAINE ELEMENTAIRE :*

$$\Omega = ((F_\lambda), (n_{\lambda,\mu})) \in \hat{C}^2_{z',z}(G'', \Delta')$$

*détermine un RELEVEMENT canonique, constitué par une 2-***cochaîne généralisée :**

$$\hat{\Omega} = ((F_\alpha), (n'_{\alpha,\beta})) \in \hat{C}^2(G, \Delta')$$

vérifiant la **condition de compatibilité :**

(169) $\qquad F_\alpha \in \mathfrak{F}(\eta_\alpha, \psi_\alpha) \qquad$ pour tout $\alpha \in G$

et les conditions de relèvement :

(170) $\qquad F_\lambda = F_{\upsilon(\lambda)} \qquad$ pour tout $\lambda \in G''$

et

(171) $\qquad n_{\lambda,\mu} = n'_{\upsilon(\lambda),\upsilon(\mu)} \, u_{\omega(\lambda,\mu)} \qquad$ pour tout $(\lambda, \mu) \in G''^2$

et qui est caractérisée par la 1-**cochaîne spéciale :**

$$(F_\alpha) \in C^1(G, \mathrm{Aut}(\Delta'))$$

définie *par la condition :*

(172) $F_\alpha = F_\sigma F_\lambda$ avec : $F_\sigma = \langle u_\sigma \rangle \in \mathrm{Aut}_i(\Delta')$

pour tout élément $\alpha \in G$ *de la forme :* $\alpha = \sigma\upsilon(\lambda)$, *avec* $(\sigma, \lambda) \in G' \times G''$, *et par la* 2-**cochaîne spéciale :**

$$(n'_{\alpha,\beta}) \in C^2(G, M) \subset C^2(G, \mathrm{Gr}(\Delta'))$$

définie *par la condition :*

(173) $n'_{\alpha,\beta} = u_\sigma F_\lambda(u_\tau)\, n_{\lambda,\mu}\, u_{\sigma_1}^{-1}$

pour des éléments $\alpha \in G$ *et* $\beta \in G$, *de la forme :* $\alpha = \sigma\upsilon(\lambda)$ *et* $\beta = \tau\upsilon(\mu)$, *avec :* $(\sigma, \lambda) \in G' \times G''$ *et* $(\tau, \mu) \in G' \times G''$, *et avec :* $\sigma_1 = \sigma \langle \lambda, \tau \rangle\, \omega(\lambda, \mu)$.

(c) *De plus, ce RELEVEMENT* $\hat{\Omega}$ *vérifie les* **conditions de compatibilité :**

(174) $F_\sigma \in \mathcal{F}(\eta'_\sigma, \psi_\sigma)$ pour tout $\sigma \in G'$

et

(175) $n'_{\sigma,\tau} = m'_{\sigma,\tau}$ pour tout $(\sigma, \tau) \in G'^2$

vis-à-vis du COCYCLE STRICT $z' = (\eta', m') \in \widetilde{Z}^2(P')$.

PREUVE - Le Lemme 8-6 entraîne la partie (a).

Avec *un tel choix*, caractérisé par les conditions de la partie (a), compte tenu de la condition (11), la condition (AR) entraîne la condition :

(176) $\eta_\sigma \eta_\mu = \eta_{\sigma\upsilon(\mu)}$ pour tout $(\sigma, \mu) \in G' \times G''$

qui, avec les notations introduites, entraîne la condition :

(177) $\eta_\alpha = \eta_\sigma \eta_\lambda$

pour tout $\alpha \in G$, de la forme : $\alpha = \sigma\upsilon(\lambda)$, avec $(\sigma, \lambda) \in G' \times G''$.

Pour tout $\sigma \in G'$, l'élément $u_\sigma \in N' = \mathrm{Gr}(\Delta')$, détermine l'automorphisme intérieur :

$$F_\sigma = \langle u_\sigma \rangle \in \mathrm{Aut}_i(\Delta')$$

pour lequel la condition (124) entraîne naturellement la condition :

(174) $F_\sigma \in \mathcal{F}(\eta'_\sigma, \psi_\sigma)$ pour tout $\sigma \in G'$

de sorte que la condition (168) entraîne la condition :

(178) $F_\sigma \in \mathcal{F}(\eta_\sigma, \psi_\sigma)$ pour tout $\sigma \in G'$

Il est immédiat que la condition (172) caractérise une 1-*cochaîne spéciale :*

$$(F_\alpha) \in C^1(G, \mathrm{Aut}(\Delta'))$$

vérifiant la condition (170) et aussi la condition (174).

Compte tenu de la condition (126) et de la condition (178), les conditions (172) et (177) entraînent immédiatement la condition (169).

Il est immédiat que la condition (173) caractérise une 2-*cochaîne spéciale* :

$$(n'_{\alpha,\beta}) \in C^2(G, N') = C^2(G, \mathrm{Gr}(\Delta'))$$

vérifiant la condition (171) et aussi la condition (175), en tenant compte de la condition (125).

Pour tout $(\alpha, \beta) \in G^2$, la condition (172) entraîne :

$$F_\alpha\, F_\beta = F_\sigma\, F_\lambda\, F_\tau\, F_\mu = \langle u_\sigma\rangle\, F_\lambda\, \langle u_\tau\rangle\, F_\mu = \langle u_\sigma\, F_\lambda(u_\tau)\rangle\, F_\lambda\, F_\mu$$

et :

$$F_{\alpha\beta} = F_{\sigma_1}\, F_{\lambda\mu} = \langle u_{\sigma_1}\rangle\, F_{\lambda\mu}$$

de sorte que, compte tenu de la condition (127) qui entraîne alors :

$$F_\alpha\, F_\beta = \langle u_\sigma\, F_\lambda(u_\tau)\rangle\, \langle n_{\lambda,\mu}\rangle\, F_{\lambda\mu} = \langle u_\sigma F_\lambda(u_\tau)\, n_{\lambda,\mu}\rangle\, F_{\lambda\mu}$$

il en résulte :

$$F_\alpha F_\beta = \langle u_\sigma\, F_\lambda(u_\tau)\, n_{\lambda,\mu}\, u_{\sigma_1}^{-1}\rangle\, F_{\alpha\beta}$$

c'est-à-dire, compte tenu de la condition (173), la condition :

(179) $$F_\alpha F_\beta = \langle n'_{\alpha,\beta}\rangle\, F_{\alpha\beta} \qquad \text{pour tout } (\alpha, \beta) \in G^2$$

Compte tenu de ce qui précède, cette condition (179), qui est l'analogue dans le cas présent de la condition (11), prouve *l'existence* de la 2-*cochaîne généralisée :*

$$\hat{\Omega} = ((F_\alpha), (n'_{\alpha,\beta})) \in \hat{C}^2(G, \Delta')$$

Pour achever la preuve des parties (b) et (c), tout revient à montrer que la 2-*cochaîne spéciale :*

$$(n'_{\alpha,\beta}) \in C^2(G, N') = C^2(G, \mathrm{Gr}(\Delta'))$$

est en fait *à valeurs* dans le *groupe* M = Gr(Γ).

Dans ce but, sous les hypothèses de la partie (a), il convient d'abord d'examiner la structure d'une Θ-COCHAINE ELEMENTAIRE quelconque :

$$\Omega = ((F_\lambda), (n_{\lambda,\mu})) \in \hat{C}^2_{z',z}(G'', \Delta') \subset \hat{C}^2_{z'}(G'', \Delta')$$

En suivant la démonstration du Lemme 8-2, lorsque la 1-*cochaîne spéciale* $(F_\lambda) \in C^1(G'', \mathrm{Aut}(\Delta'))$ est *fixée,* la condition (146) décrit *l'une des formes possibles* de la 2-*cochaîne spéciale* $(n_{\lambda,\mu}) \in C^2(G'', N')$.

Le Lemme 8-3 et les conditions (126) et (127) entraînent facilement que toute autre forme s'en déduit par multiplication par une 2-*cochaîne spéciale :*

$$(x'_{\lambda,\mu}) \in C^2(G'', X^{G'})$$

ce qui préserve la forme de la condition (146).

La condition (168) montre que dans la condition (132), il est possible de choisir : $a'_\sigma = 1$ pour tout $\sigma \in G'$, et la condition (AR) montre ensuite que les conditions (132), (133) et (139) entraînent :

$$\underline{c}_{\lambda,\mu} = c_{\lambda,\mu} = m_{\lambda,\mu} \qquad \text{pour tout } (\lambda, \mu) \in G''^2$$

Il en résulte la *caractérisation :*

(146') $$n_{\lambda,\mu} = x_{\lambda,\mu}\, m_{\lambda,\mu}\, u_{\omega(\lambda,\mu)} \qquad \text{pour tout } (\lambda, \mu) \in G''^2$$

pour une *certaine* 2-*cochaîne spéciale :*

$$(x_{\lambda,\mu}) \in C^2(G'', X).$$

Ensuite, le Théorème 6-2 montre qu'il existe au moins une 1-*cochaîne spéciale :*

$$a = (a_\lambda) = (a_{\lambda,\sigma}) \in C^1(G'', C^1(G', M))$$

de sorte que les automorphismes : $F_\lambda \in \mathcal{F}(\eta_\lambda, \psi_\lambda)$, soient caractérisés par une condition de la forme :

(119) $$F_\lambda[u_{(\lambda,\sigma)}] = a_{\lambda,\sigma}\, u_\sigma \qquad \text{pour tout } (\lambda, \sigma) \in G'' \times G'$$

et par suite, en posant pour simplifier les notations $<\lambda, \tau> = \tau'$, il en résulte la condition :

(119') $$F_\lambda[u_\tau] = a_{\lambda,\tau'}\, u_{\tau'} \qquad \text{pour tout } (\lambda, \tau) \in G'' \times G'$$

En utilisant systématiquement les conditions (124) et (125), pour tout $(\alpha, \beta) \in G^2$, les conditions (173), (119') et (146'), entraînent successivement :

$$\begin{aligned} n'_{\alpha,\beta}\, u_{\sigma_1} &= u_\sigma\, F_\lambda(u_\tau)\, n_{\lambda,\mu} \\ &= u_\sigma\, a_{\lambda,\tau'}\, u_{\tau'}\, n_{\lambda,\mu} \\ &= \eta'_\sigma(a_{\lambda,\tau'})\, u_\sigma\, u_{\tau'}\, n_{\lambda,\mu} \\ &= \eta'_\sigma(a_{\lambda,\tau'})\, m'_{\sigma,\tau'}\, u_{\sigma\tau'}\, x_{\lambda,\mu}\, m_{\lambda,\mu}\, u_{\omega(\lambda,\mu)} \\ &= \eta'_\sigma(a_{\lambda,\tau'})\, m'_{\sigma,\tau'}\, \eta'_{\sigma\tau'}(x_{\lambda,\mu}\, m_{\lambda,\mu})\, u_{\sigma\tau'}\, u_{\omega(\lambda,\mu)} \\ &= \eta'_\sigma(a_{\lambda,\tau'})\, m'_{\sigma,\tau'}\, \eta'_{\sigma\tau'}(x_{\lambda,\mu}\, m_{\lambda,\mu})\, m'_{\sigma\tau',\omega(\lambda,\mu)}\, u_{\sigma_1} \end{aligned}$$

de sorte que dans le *groupe* $N' = Gr(\Delta')$, la *simplification* par l'élément u_{σ_1} entraîne la condition :

(180) $$n'_{\alpha,\beta} = \eta'_\sigma(a_{\lambda,\tau'})\, m'_{\sigma,\tau'}\, \eta'_{\sigma\tau'}\, (x_{\lambda,\mu}\, m_{\lambda,\mu})\, m'_{\sigma\tau',\omega(\lambda,\mu)}$$

pour tout $(\alpha, \beta) \in G^2$ de la forme : $\alpha = \sigma\upsilon(\lambda)$ et $\beta = \tau\upsilon(\mu)$, avec: $(\sigma, \lambda) \in G' \times G''$ et $(\tau, \mu) \in G' \times G''$, et avec : $\tau' = <\lambda,\tau>$.

Il convient de remarquer que le *membre de droite* de la condition (180) caractérise un élément du sous-groupe :

$$M = Gr(\Gamma) \subset N' = Gr(\Delta')$$

ce qui entraîne donc la condition :

(181) $\qquad n'_{\alpha,\beta} \in M = Gr(\Gamma) \qquad$ pour tout $(\alpha,\beta) \in G^2$

Ainsi, la condition (180) donne la CARACTERISATION DIRECTE de la 2-*cochaîne spéciale :*

$$(n'_{\alpha,\beta}) \in C^2(G, M) \subset C^2(G, Gr(\Delta')$$

ce qui achève la démonstration.

THEOREME 8-8 - *Pour des DONNEES DE BASE :*

$$\{P = (G, \Gamma, \theta) ; G'\}$$

qui vérifient la CONDITION DE SPEISER :

(S) $\qquad \hat{H}^1(P') = \{1\}$

et qui déterminent l'espace **noté symboliquement :**

$$[\widetilde{Z}^2(P')]^{[G]} = \{z' = (\eta', m') \in \widetilde{Z}^2(P') \mid \widetilde{z}' = \xi' \in [\widetilde{H}^2(P')]^G\}$$

pour tout COCYCLE (GENERALISE) STRICT :

$$z' = (\eta', m') = (\eta' = (\eta'_\sigma), m' = (m'_{\sigma,\tau})) \in [\widetilde{Z}^2(P')]^{[G]}$$

dont la CLASSE D'EXTENSIONS Q-NORMALES :

$$\xi' = \widetilde{z}' \in [\widetilde{H}^2(P')]^G = [\widetilde{H}^2_{\theta'}(G', \Gamma)]^G = [Ext_{\theta'}(G', \Gamma)]^G$$

est représentée par le PRODUIT CROISE MIXTE :

(I') $\qquad \Delta' = \Delta'_{\xi'} = \Delta'_{z'} = (\Gamma, G', z') = [U' ; N']$

*qui détermine l'*EXTENSION Q-NORMALE :

(II') $\qquad \Gamma \lhd \Delta'$

caractérisée par la SUITE EXACTE MIXTE :

(III') $\qquad \{0, 1\} \longrightarrow \Gamma = [V; M] \longrightarrow \Delta' = [U'; N'] \xrightarrow{p'} G' \longrightarrow \{1\}$

avec les notations précédentes, alors :

(a) *Il existe au moins un COCYCLE STRICT :*

$$z = (\eta, m) = (\eta = (\eta_\alpha), m = (m_{\alpha,\beta})) \in \widetilde{Z}^2_\theta(G, \Gamma) = \widetilde{Z}^2(P)$$

qui est AU DESSUS du COCYCLE STRICT $z' = (\eta', m') \in [\widetilde{Z}^2(P')]^{[G]}$ *et qui est ADAPTE à la REPRESENTATION* (R) *du groupe* G, *de sorte que, pour le*

GROUPE QUOTIENT Q = G" = G/G', *il existe une application :*

$$\widehat{(\_)} : \hat{C}^2_{z',z}(G'', \Delta') \longrightarrow \hat{C}^2_\theta(G, \Gamma)$$

qui, à toute Θ*-COCHAINE ELEMENTAIRE :*

$$\Omega = ((F_\lambda), (n_{\lambda,\mu})) \in \hat{C}^2_{z',z}(G'', \Delta')$$

admettant un RELEVEMENT canonique:

$$\hat{\Omega} = ((F_\alpha), (n'_{\alpha,\beta})) \in \hat{C}^2(G, \Delta')$$

associe la θ*-COCHAINE [ou le* θ*-COCYCLE LARGE] :*

$$\underline{\hat{\Omega}} = ((\eta_\alpha), (n'_{\alpha,\beta})) \in \hat{C}^2_\theta(G, \Gamma)$$

caractérisée par la condition (173) *du Lemme 8-7.*

(b) *Il existe un diagramme commutatif de la forme :*

$$\text{(X)} \qquad \begin{array}{ccc} \hat{C}^2_{z',z}(G'', \Delta') & \xrightarrow{T_\Theta} & Z^3_{\theta''}(G'', X^{G'}) \subset Z^3_\Theta(G'', Y) = Z^3_\Theta(G'', \Delta') \\ \Big\downarrow \widehat{(\_)} & & \Big\downarrow l_3 \\ \hat{C}^2_\theta(G, \Gamma) & \xrightarrow{T_\theta} & B^3_\theta(G, X) \subset Z^3_\theta(G, X) = Z^3_\theta(G, \Gamma) \end{array}$$

dans lequel l_3 *est le morphisme de groupes* **d'inflation** *associé à l'épimorphisme de groupes* p" : G ⟶ G" = G/G' = Q, *dans lequel* T_θ *est l'APPLICATION COCYCLE DE TEICHÜLLER associée au* **"caractère collectif"** *"REALISABLE :* $\theta \in \mathfrak{R}(G, \Gamma)$ *et dans lequel* T_Θ *est l'application obtenue , par* **factorisation** *au travers du* **sous-groupe** $Z^3_{\theta''}(G'', X^{G'})$, *à partir de l'APPLICATION COCYCLE DE TEICHMÜLLER* T_Θ *associée au* **"caractère collectif"** : $\Theta = \Theta_{z'} \in \mathcal{M}(G'', \Delta')$, *déterminé par le COCYCLE STRICT :* $z' = (\eta', m') \in [\tilde{Z}^2(P')]^{[G]}$.

PREUVE - Le Lemme 8-2 assure *l'existence* du *"caractère collectif"* :

$$\Theta = \Theta_{z'} \in \mathcal{M}(G'', \Delta')$$

déterminé par le COCYCLE STRICT : $z' = (\eta', m') \in [\widetilde{Z}^2(P')]^{[G]}$, et aussi *l'existence* des espaces $\hat{C}^2_{z',z}(G'', \Delta')$ de Θ-COCHAINE ELEMENTAIRES.

Dans ce contexte, le Lemme 8-7 entraîne la partie (a), en remarquant que la condition de compatibilité (169) entraîne que le RELEVEMENT $\hat{\Omega}$ détermine bien, *par restriction,* une θ-COCHAINE : $\underline{\hat{\Omega}} = ((\eta_\alpha), (n'_{\alpha,\beta})) \in \hat{C}^2_\theta(G, \Gamma)$, caractérisée

par le condition (173) du Lemme 8-7, et que le Lemme 7-3 de [4] montre que pour le *"caractère collectif"* REALISABLE $\theta \in \mathfrak{R}(G, \Gamma)$, l'espace $\hat{C}^2_\theta(G, \Gamma)$ des

θ-COCHAINES coïncide avec l'espace $\hat{Z}^2_\theta(G, \Gamma) = \operatorname{Ker} \hat{T}_\theta$ des θ-COCYCLES

LARGES.

Le Théorème 6-5 de [4] entraîne alors la relation :

(182) $$T_\theta[\hat{C}^2_\theta(G, \Gamma)] = B^3_\theta(G, X) \subset Z^3_\theta(G, X)$$

qui justifie *l'existence* de la ligne inférieure du diagramme (X).

De façon classique, le morphisme *d'inflation* l_3 est celui qui, à tout cocycle :

$$t = (t_{\lambda,\mu,\nu}) \in Z^3_{\theta''}(G'', X^{G'})$$

associe le *cocycle :*

$$l_3(t) = t^* = (t^*_{\alpha,\beta,\gamma}) \in Z^3_\theta(G, X)$$

caractérise par la condition :

(183) $$t^*_{\alpha,\beta,\gamma} = t_{\lambda,\mu,\nu}$$

pour tout $(\alpha, \beta, \gamma) \in G^3$, tel que : $\lambda = \bar{\alpha} = p''(\alpha)$, $\mu = \bar{\beta} = p''(\beta)$ et $\nu = \bar{\gamma} = p''(\gamma)$.

Les Notations 8-4 montrent que le *"caractère collectif" :*

$$\Theta = \Theta_{z'} \in \mathcal{M}(G'', \Delta') = \operatorname{Mor}[G'', \operatorname{Aut}_e(\Delta')]$$

détermine en fait une APPLICATION DE TEICHMÜLLER :

(184) $$T_\Theta : \hat{C}^2_\Theta(G'', \Delta') \longrightarrow Z^3_\Theta(G'', \Delta') = Z^3_\Theta(G'', Y)$$

pour laquelle le Lemme 8-3 entraîne la relation :

(185) $$Z^3_{\theta''}(G'', X^{G'}) \subset Z^3_{\Theta}(G'', Y)$$

Pour achever la démonstration, tout revient donc à montrer que la *restriction* de l'application (184) au *sous-espace* $\hat{C}^2_{Z',Z}(G'', \Delta')$ de Θ-COCHAINES ELEMENTAIRES , *"se factorise"* au travers du *sous-groupe* défini par la relation (185), de façon à rendre commutatif le diagramme (X) ainsi obtenu.

Dans ce but, on considère une Θ-COCHAINE ELEMENTAIRE :

$$\Omega = ((F_\lambda), (n_{\lambda,\mu})) \in \hat{C}^2_{Z',Z}(G'', \Delta')$$

qui détermine la θ-COCHAINE [ou le θ-COCYCLE LARGE] :

$$\hat{\underline{\Omega}} = ((\eta_\alpha), (n'_{\alpha,\beta})) \in \hat{C}^2_\theta(G, \Gamma)$$

caractérisée par la condition :

(173) $$n'_{\alpha,\beta} = u_\sigma F_\lambda(u_\tau)\, n_{\lambda,\mu}\, u^{-1}_{\sigma_1}$$

pour des éléments $\alpha \in G$ et $\beta \in G$, de la forme : $\alpha = \sigma\upsilon(\lambda)$ et $\beta = \tau\upsilon(\mu)$, avec : $(\sigma, \lambda) \in G' \times G''$ et $(\tau, \mu) \in G' \times G''$, et avec : $\sigma_1 = \sigma <\lambda, \tau> \omega(\lambda, \mu)$.

Le Lemme 6-2 et la Définition 6-3 de [4] montrent que Ω détermine le COCYCLE DE TEICHMÜLLER :

$$T_\Theta[\Omega] = t = (t_{\lambda,\mu,\nu}) \in Z^3_\Theta(G'', Y) = Z^3_\Theta(G'', \Delta')$$

caractérisé par la condition :

(186) $$F_\lambda(n_{\mu,\nu})\, n_{\lambda,\mu\nu} = t_{\lambda,\mu,\nu}\, n_{\lambda,\mu}\, n_{\lambda\mu,\nu}$$

pour tout $(\lambda, \mu,\nu) \in G''^3$, et que $\hat{\underline{\Omega}}$ détermine le COCYCLE DE TEICHMÜLLER :

$$T_\theta[\hat{\underline{\Omega}}] = \underline{t} = (\underline{t}_{\alpha,\beta,\gamma}) \in B^3_\theta(G, X) \subset Z^3_\theta(G, X) = Z^3_\theta(G, \Gamma)$$

caractérisé par la condition :

(187) $$\eta_\alpha(n'_{\beta,\gamma})\, n'_{\alpha,\beta\gamma} = \underline{t}_{\alpha,\beta,\gamma}\, n'_{\alpha,\beta}\, n'_{\alpha\beta,\gamma}$$

Il convient de remarquer que pour achever la démonstration, *tout revient à démontrer l'égalité :*

(188) $$t^* = \underline{t}$$

En effet, avec les notations de la condition (183), compte tenu du Lemme 8-3, l'égalité (188) entraîne la condition :

(189) $$\underline{t}_{\alpha,\beta,\gamma} = t^*_{\alpha,\beta,\gamma} = t_{\lambda,\mu,\nu} \in X \cap Y = X' = X^{G'}$$

pour tout $(\alpha, \beta, \gamma) \in G^3$ ou tout $(\lambda, \mu, \nu) \in G''^3$.

Il en résulte que la relation (185) implique la relation :

(190) $$T_\Theta[\Omega] = t = (t_{\lambda,\mu,\nu}) \in Z^3_{\theta''}(G'', X^{G'}) \subset Z^3_\Theta(G'', Y)$$

ce qui prouve bien *l'existence* de la *"factorisation"* de la *restriction* de l'application (184) au *sous-espace* $\hat{C}^2_{z',z}(G'', \Delta')$ de Θ-COCHAINES ELEMENTAIRES, au travers du *sous-groupe* défini par la relation (185), de sorte que l'égalité (188) implique la commutativité du diagramme (X) ainsi obtenu.

Pour démontrer l'égalité (188), il suffit d'adapter la méthode de S. EILENBERG et S. Mac LANE, utilisée dans le cas des *algèbres Q-normales,* pour démontrer le Théorème 10-1 de [3].

On utilise la REPRESENTATION (R) du groupe G, caractérisée par les conditions (112) à (116).

En particulier, avec les notations de la condition (183), des éléments $\alpha \in G$, $\beta \in G$ et $\gamma \in G$ s'écrivent sous la forme :

(191) $$\alpha = \sigma\upsilon(\lambda) \quad ; \quad \beta = \tau\upsilon(\mu) \quad ; \quad \gamma = \rho\upsilon(\nu)$$

ce qui entraîne les conditions :

(192) $$\alpha\beta = \sigma_1\upsilon(\lambda\mu), \quad \text{avec :} \quad \sigma_1 = \sigma<\lambda, \tau> \omega(\lambda,\mu)$$

et :

(193) $$\beta\gamma = \tau_1\upsilon(\mu\nu), \quad \text{avec :} \quad \tau_1 = \tau<\mu, \rho> \omega(\mu, \nu)$$

L'associativité de la multiplication dans le groupe G entraîne l'existence d'une relation de la forme :

(194) $$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma) = \varepsilon\upsilon(\lambda\mu\nu)$$

pour un élément $\varepsilon \in G'$, dont il est facile d'obtenir une *double caractérisation* par la relation :

(195) $$\varepsilon = \sigma_1<\lambda\mu,\rho> \omega(\lambda\mu,\nu) = \sigma<\lambda, \tau_1> \omega(\lambda, \mu\nu)$$

La condition (173) du Lemme 8-7 donne alors les relations :

(196) $$n'_{\alpha,\beta}\, u_{\sigma_1} = u_\sigma F_\lambda(u_\tau)\, n_{\lambda,\mu}$$

(197) $$n'_{\beta,\gamma}\, u_{\tau_1} = u_\tau F_\mu(u_\rho)\, n_{\mu,\nu}$$

(198) $$n'_{\alpha\beta,\gamma}\, u_\varepsilon = u_{\sigma_1} F_{\lambda\mu}(u_\rho)\, n_{\lambda\mu,\nu}$$

(199) $$n'_{\alpha,\beta\gamma} u_\varepsilon = u_\sigma F_\lambda(u_{\tau_1})\, n_{\lambda,\mu\nu}$$

D'une part, les relations (198) et (196) entraînent successivement :

$$n'_{\alpha,\beta}\, n'_{\alpha\beta,\gamma}\, u_\varepsilon = n'_{\alpha,\beta}\, u_{\sigma_1} F_{\lambda\mu}(u_\rho)\, n_{\lambda\mu,\nu}$$

$$= u_\sigma F_\lambda(u_\tau)\, n_{\lambda,\mu}\, F_{\lambda\mu}(u_\rho)\, n_{\lambda\mu,\nu}$$

$= u_\sigma F_\lambda(u_\tau)\ [<n_{\lambda,\mu}> \circ F_{\lambda\mu}(u_\rho)]\ n_{\lambda,\mu}\ n_{\lambda\mu,\nu}$

ce qui, compte tenu de la condition (127), donne la relation :

(200) $$n'_{\alpha,\beta}\ n'_{\alpha\beta,\gamma}\ u_\varepsilon = E\ n_{\lambda,\mu}\ n_{\lambda\mu,\nu}$$

en posant :

(201) $$E = u_\sigma F_\lambda(u_\tau)\ F_\lambda F_\mu(u_\rho)$$

D'autre part, la *condition de compatibilité* (169) et les conditions (199), (172) et (197) entraînent successivement :

$$\begin{aligned}\eta_\alpha(n'_{\beta,\gamma})\ n'_{\alpha,\beta\gamma}\ u_\varepsilon &= F_\alpha(n'_{\beta,\gamma})\ u_\sigma F_\lambda(u_{\tau_1})\ n_{\lambda,\mu\nu}\\ &= F_\sigma F_\lambda(n'_{\beta,\gamma})\ u_\sigma F_\lambda(u_{\tau_1})\ n_{\lambda,\mu\nu}\\ &= u_\sigma F_\lambda(n'_{\beta,\gamma})\ F_\lambda(u_{\tau_1})\ n_{\lambda,\mu\nu}\\ &= u_\sigma F_\lambda(n'_{\beta,\gamma}\ u_{\tau_1})\ n_{\lambda,\mu\nu}\\ &= u_\sigma F_\lambda(u_\tau F_\mu(u_\rho)\ n_{\mu,\nu})\ n_{\lambda,\mu\nu}\\ &= u_\sigma F_\lambda(u_\tau)\ F_\lambda F_\mu(u_\rho)\ F_\lambda(n_{\mu,\nu})\ n_{\lambda,\mu\nu}\end{aligned}$$

c'est-à-dire, compte tenu de la condition (201), la relation :

(202) $$\eta_\alpha(n'_{\beta,\gamma})\ n'_{\alpha,\beta\gamma}\ u_\varepsilon = E \cdot F_\lambda(n_{\mu,\nu})\ n_{\lambda,\mu\nu}$$

Comme les calculs précédents sont effectués dans le *groupe* $N' = Gr(\Delta')$ dont le *centre* $Z(N')$ contient le *centre-groupe* $Y = Z_g(\Delta')$ de *l'anneau-groupe* $\Delta' = [U'; N']$, il en résulte la relation :

$$t_{\lambda,\mu,\nu} \in Y = Z_g(\Delta') \subset Z(N') \subset N'$$

qui montre que l'élément $t_{\lambda,\mu,\nu}$ *commute* à l'élément $E \in N'$, de sorte que la relation (200) entraîne la relation :

(203) $$t_{\lambda,\mu,\nu}\ n'_{\alpha,\beta}\ n'_{\alpha\beta,\gamma}\ u_\varepsilon = E t_{\lambda,\mu,\nu}\ n_{\lambda,\mu}\ n_{\lambda\mu,\nu}$$

La condition (186) et les relations (202) et (203) entraînent alors, dans le groupe $N' = Gr(\Delta')$, la relation :

$$\eta_\alpha(n'_{\beta,\gamma})\ n'_{\alpha,\beta\gamma}\ u_\varepsilon = t_{\lambda,\mu,\nu}\ n'_{\alpha,\beta}\ n'_{\alpha\beta,\gamma}\ u_\varepsilon$$

de sorte que par *simplification* par u_ε, il en résulte, dans le groupe $N' = Gr(\Delta')$, la relation :

(204) $$\eta_\alpha(n'_{\beta,\gamma})\ n'_{\alpha,\beta\gamma} = t_{\lambda,\mu,\nu}\ n'_{\alpha,\beta}\ n'_{\alpha\beta,\gamma}$$

Dans le *groupe* $N' = Gr(\Delta')$, la comparaison de la condition (187) et de la relation (204) entraîne la condition :

(205) $$t_{\lambda,\mu,\nu} = \underline{t}_{\alpha,\beta,\gamma}$$

qui, compte tenu de la condition (183), *exprime* l'égalité (188), ce qui achève la démonstration.

THEOREME 8-9 - *Pour des DONNEES DE BASE :*

$$\{P = (G, \Gamma, \theta) ; G'\}$$

qui vérifient la CONDITION DE SPEISER :

(S) $$\hat{H}^1(P') = \{1\}$$

et qui déterminent l'espace **noté symboliquement** :

$$[\widetilde{Z}^2(P')]^{[G]} = \left\{ z' = (\eta', m') \in \widetilde{Z}^2(P') \mid \widetilde{z}' = \xi' \in [\widetilde{H}^2(P')]^{[G]} \right\}$$

il existe une APPLICATION CLASSE DE TEICHMÜLLER :

$$\hat{T}_3 : [\widetilde{Z}^2(P')]^{[G]} \longrightarrow H^3_{\theta''}(G'', X^{G'})$$

et une **"application multivoque"** :

$$T_3 : [\widetilde{Z}^2(P')]^{[G]} \longrightarrow Z^3_{\theta''}(G'', X^{G'})$$

c'est-à-dire une **application :**

$$T_3 : [\widetilde{Z}^2(P')]^{[G]} \longrightarrow \mathcal{P}[Z^3_{\theta''}(G'', X^{G'})]$$

à valeurs dans **l'ensemble des parties** *du groupe abélien de* 3*-cocycles* $Z^3_{\theta''}(G'', X^{G'})$, *associées et caractérisées par les conditions suivantes.*

Pour tout COCYCLE STRICT :

$$z' = (\eta', m') \in [\widetilde{Z}^2(P')]^{[G]} = [\widetilde{Z}^2_{\theta'}(G', \Gamma)]^{[G]}$$

pour lequel le PRODUIT CROISE MIXTE :

(I') $$\Delta' = \Delta'_{z'} = (\Gamma, G', z') = [U'; N']$$

*détermine l'*EXTENSION Q-NORMALE :

(II') $$\Gamma \lhd \Delta'$$

avec les notations précédentes, alors :

(a) *Son image* $T_3[z']$ *par* **l'application multivoque** T_3 *est une* **partie non vide** *du groupe abélien de* 3*-cocycles* $Z^3_{\theta''}G'', X^{G'})$, *qui* **constitue exactement** *une* **classe de cohomologie**, *appelée la CLASSE DES COCYCLES DE TEICHMÜLLER de l'*EXTENSION Q-NORMALE (II'), *et qui est caractérisée par l'une des conditions équivalentes suivantes :*

(a$_1$) $$T_3[z'] = T_\Theta[\hat{C}^2_{z'}(G'', \Delta')]$$

(a$_2$) $$T_3[z'] = T_\Theta[\hat{C}^2_{z',z}(G'', \Delta')]$$

pour un COCYCLE STRICT ARBITRAIRE : $z = (\eta, m) \in \tilde{Z}^2(P)$.

(b) *Son image* $\hat{T}_3[z']$ par l'application $\hat{T}_3$ *est la* **classe de cohomologie**, *dans le* **troisième groupe de cohomologie** $H^3_{\theta''}(G'', X^{G'})$, *de* **l'un quelconque** *des* 3-*COCYCLES DE TEICHMÜLLER :*

$$t = (t_{\lambda,\mu,\nu}) \in T_3[z']$$

qui peut également être identifiée à la **classe** : $T_3[z'] \subset Z^3_{\theta''}(G'', X^{G'})$.

PREUVE - Le Lemme 8-2 assure l'existence du *"caractère collectif"* :

$$\Theta = \Theta_{z'} \in \mathcal{M}(G'', \Delta') = \mathrm{Mor}[G'', \mathrm{Aut}_e(\Delta')]$$

et des espaces de Θ-COCHAINES ELEMENTAIRES :

$$\hat{C}^2_{z',z}(G'', \Delta') \subset \hat{C}^2_\Theta(G'', \Delta')$$

pour tout COCYCLE STRICT $z = (\eta, m) \in \tilde{Z}^2(P)$, qui déterminent l'ESPACE DES Θ-COCHAINES ELEMENTAIRES :

(206) $$\hat{C}^2_{z'}(G'', \Delta') = \bigcup_{z \in \tilde{Z}^2(P)} \hat{C}^2_{z',z}(G'', \Delta')$$

du groupe G" dans l'anneau-groupe Δ'.

Pour deux COCYCLES STRICTS *quelconques* $z \in \tilde{Z}^2(P)$ et $\underline{z} \in \tilde{Z}^2(P)$, la partie (d) du Lemme 8-5 entraîne l'existence d'un élément :

$$(\underline{a}, 1) \in \tilde{C}^1_e(G'', \Delta') = C^1(G'', M) \times \{1\}$$

qui détermine une *bijection :*

$$\underline{a}[\ \ ] : \hat{C}^2_{z',z}(G'', \Delta') \xrightarrow{\sim} \hat{C}^2_{z',\underline{z}}(G'', \Delta')$$

caractérisée par la condition :

$$\underline{a}[\Omega] = \underline{\Omega} = (\underline{a}, 1) \underset{-}{*} \Omega$$

de sorte que la partie (b) du Lemme 8-5 entraîne alors :

$$T_\Theta[\Omega] = T_\Theta[(\underline{a}, 1) \underset{-}{*} \Omega] = T_\Theta[\underline{\Omega}]$$

ce qui implique l'égalité :

$$(207) \qquad T_\Theta[\hat{C}^2_{z',z}(G'', \Delta')] = T_\Theta[\hat{C}^2_{z',\underline{z}}(G'', \Delta')]$$

Les égalités (206) et (207) entraînent immédiatement *l'équivalence* des caractérisations exprimées par les conditions (a_1) et (a_2).

De plus, compte tenu du *"degré de liberté"* dans le choix du COCYCLE STRICT $z = (\eta, m) \in \widetilde{Z}^2(P)$, le Théorème 8-8 montre qu'il est possible de le choisir de façon à ce qu'il soit AU DESSUS du COCYCLE STRICT $z' = (\eta', m')$ $\in [\widetilde{Z}^2(P')]^{[G]}$ et ADAPTE à la REPRESENTATION (R) du groupe G, de sorte que le Théorème 8-8 entraîne alors l'inclusion :

$$(208) \qquad T_\Theta[\hat{C}^2_{z',z}(G'', \Delta')] \subset Z^3_{\theta''}(G'', X^{G'})$$

L'égalité (207) entraîne alors que l'inclusion (208) *reste vraie* pour *tout* COCYCLE STRICT $z = (\eta, m) \in \widetilde{Z}^2(P)$.

Les parties (e) et (b) du Lemme 8-5 entraînent alors facilement que la *partie non vide* $T_3[z']$ du groupe abélien de 3-cocycles $Z^3_{\theta''}(G'', X^{G'})$, *constitue exactement* une *classe de cohomologie*, ce qui termine la preuve de la partie (a).

Les conditions de la partie (b) caractérisent bien une *application* $\hat{T}_3$, ce qui achève la démonstration.

9. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

Compte tenu des Exemples 2-4 et des Exemples 3-3 qui montrent que les EXTENSIONS Q-NORMALES constituent des *généralisations* des *algèbres* Q-*normales*, tous les développements précédents s'appliquent naturellement au cas particulier des DONNEES CLASSIQUES, qui vérifient automatiquement la CONDITION DE SPEISER (S) d'après les Exemples 7-2, et qui représentent le *"cas classique"* des *algèbres* Q-*normales*.

On trouve ainsi les résultats du *"cas classique"* évoqués dans l'Introduction, par des démonstrations qui diffèrent en général des *"démonstrations historiques"* de O. TEICHMÜLLER, de S. EILENBERG et S. Mac LANE, et de G. HOCHSCHILD et J.P. SERRE.

Evidemment, ces nouvelles démonstrations ne sont pas simples, puisqu'elles ne tiennent pas compte des *particularités* du *"cas classique"* qui permettraient de les simplifier et qu'elles héritent de la complexité qu'impose le *cadre général* dans lequel elles sont présentées.

En effet, toutes les propriétés précédentes sont obtenues dans un contexte très général *"non nécessairement abélien"* qui *englobe* en particulier à la fois le *"cas des groupes"* et le *"cas des anneaux"*.

Il pourrait être intéressant d'examiner la *traduction* et *l'interprétation* des propriétés précédentes dans ces deux cas particuliers : le *"cas des groupes"* et le *"cas des anneaux"*.

Cependant, la principale motivation de la *"première étape"* constituée par le présent travail réside dans le fait que les théorèmes obtenus ici se trouvent à la base de la *"seconde étape"* constituée par un travail ultérieur [7], dans lequel on généralise les SUITES EXACTES DE HOCHSCHILD-SERRE dans le cadre de la COHOMOLOGIE NON ABELIENNE DES PSEUDO-MODULES.

REFERENCES

[1] E. ARTIN and J. TATE, *Class Field Theory,* W.A. Benjamin, Inc. New York. Amsterdam, (1967).

[2] R. BAER, *Erweiterung von Gruppen und ihren Isomorphismen*, Math. Zeit., 38, (1934), 375-416.

[3] S.EILENBERG and S. Mac LANE, *Cohomology and Galois Theory.*I. *Normality of Algebras and Teichmuller's Cocycle,* Trans. Amer. Math.Soc., 64, (1948), 1-20.

[4] M. HACQUE, *Cohomologie des anneaux-groupes,* Comm. in Algebra., 18, (1990), 3933-3997.

[5] M.HACQUE, *Produits croisés mixtes : extensions de groupes et extensions d'anneaux,* Comm. in Algebra., 19, (1991), 1993-2049.

[6] M. HACQUE, *Fonctorialité d'une cohomologie non abélienne,* Publ. du Dépt. de Math, Université Claude Bernard LYON I, Nouvelle série (à paraître).

[7] M.HACQUE, *Les suites de Hochschild-Serre en cohomologie non abélienne,* (en préparation).

[8] A. HATTORI, *On fundamental exact sequences,* J. Math. Soc. Japan., 12, (1960), 65-80.

[9] G. HOCHSCHILD, *Local Class Field Theory,* Ann. of Math., 51, (1950), 331-347.

[10] G. HOCHSCHILD and T. NAKAYAMA, *Cohomology in Class Field Theory,* Ann. of Math., 55, (1952), 348-366.

[11] G. HOCHSCHILD and J.P. SERRE, *Cohomology of group extensions,* Trans. Amer. Math. Soc., 74, (1953), 110-134.

[12] Y. KAWADA, *Cohomology of group extensions,* Jour. Fac. Sci. Tokyo., 9, (1963), 417-431.

[13] S. LANG, *Rapport sur la Cohomologie des Groupes,* W.A. Benjamin, Inc. New York. Amsterdam, (1966).

[14] J.P. SERRE, *Cohomologie des extensions de groupes,* C.R.A.S. Paris., 231, (1950), 643-646.

[15] J.P. SERRE, *Corps locaux,* Herman, Paris, (1962).

[16] A. SPEISER, *Zahlentheoretische Sätze aus der Gruppentheorie,* Math. Zeit., 5, (1919), 1-6.

[17] J. TATE, *The higher dimensional cohomology groups of class field theory,* Ann. of Math., 56, (1952), 294-297.

[18] O. TEICHMÜLLER, *Über die sogenannte nichtkommutative Galoissche Theorie und die Relation ...*
Deutsche Mathematik., 5, (1940), 138-149.