

PIERRE DAZORD

Réalisations isotropes de Libermann Groupoïdes symplectiques

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1988, fascicule 4B
« Travaux du Séminaire Sud-Rhodanien de Géométrie - II », , p. 1-49

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1988__4B_1_0

© Université de Lyon, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

REALISATIONS ISOTROPES DE LIBERMANN
GROUPOIDES SYMPLECTIQUES

REALISATIONS ISOTROPES DE LIBERMANN

LE PROBLEME DES VARIABLES ACTIONS-ANGLES

DANS LE CAS REGULIER

Pierre DAZORD

INTRODUCTION

Dans ce chapitre et pour des raisons qui apparaîtront lors de l'étude des groupoïdes symplectiques, *les variétés symplectiques ne sont pas supposées séparées* : ce sont des variétés C^∞ au sens de Bourbaki [3] et donc localement séparées. Ceci oblige à de nombreuses précautions : on ne peut plus en général définir le flot d'un champ de vecteurs sur une telle variété comme le montre l'exemple suivant : M est la variété non séparée obtenue en identifiant pour $t < 0$ deux exemplaires de \mathbb{R} et X est le champ $\frac{d}{dt}$. Le flot de X à en $t_0 < 0$ n'est pas défini pour $t > t_0$. Par contre sur le voisinage de O constitué par l'image d'un des exemplaires de \mathbb{R} , X a évidemment un flot. On perd donc, pour les champs de vecteurs, les feuilletages, l'unicité des solutions.

Les réalisations isotropes de Libermann (R.I.L. en abrégé) sont des fibrations *d'une variété symplectique (non séparée éventuellement)*

(M, σ) sur une *variété de Poisson* (P, Λ) toujours supposée séparée, qui sont des morphismes de Poisson à fibres isotropes, complètes et séparées. L'intérêt de l'introduction de cette notion est double. D'une part c'est le cadre naturel pour traiter le problème général des variables actions angles dans le cas régulier (cf. [4] [5] [9] [10] [12] [13] pour le cas séparé et [8] pour le cas non séparé). D'autre part les R.I.L. s'introduisent naturellement dans la recherche des obstructions à l'existence de groupoïdes symplectiques d'unités une variété de Poisson donnée [8].

Le premier résultat sur les R.I.L. est le théorème des variables actions angles de V. Arnold [2] qui a été étendu indépendamment au cas isotrope par Nekoroshev [26] et l'auteur [7]. Les R.I.L. ont ensuite été étudiées dans le cas lagrangien par H. Duistermaat [14] qui a introduit les notions de réseau et de classe de Chern. Les R.I.L. régulières sur une variété de Poisson (P, Λ) non triviales sont l'objet de l'article de T. Delzant et l'auteur [10]. Les résultats en ont été étendus par A. Coste et D. Sondaz [4] [5] au cas d'une R.I.L. quelconque d'une variété séparée (M, σ) . Les résultats de ce chapitre ont été annoncés dans [8].

1. DEFINITION DES REALISATIONS ISOTROPES DE LIBERMANN

Soit $f : (M, \sigma) \rightarrow (P, \Lambda)$ une fibration (i.e. une submersion C^∞ surjective) d'une *variété symplectique* (M, σ) , non séparée en général, sur une *variété de Poisson* (P, Λ) qui sera toujours supposée séparée. On suppose que f est un morphisme de Poisson et que les fibres de f sont des sous-variétés (nécessairement fermées puisque P est séparée) connexes et isotropes de (M, σ) .

Si (M, σ) est séparée, f est le moment d'un feuilletage de Libermann \mathcal{U} dont les caractéristiques sont les fibres de f . Il résulte alors du Corollaire 1 du théorème 3.2 du chapitre II (Tome I) que les fibres de f sont des cylindres si elles sont complètes. D'autre part l'espace tangent au feuilletage symplectique \mathcal{A} de P étant l'image par f de l'espace tangent à \mathcal{U} , \mathcal{A} est un feuilletage régulier.

Si (M, σ) n'est pas séparée, on ne peut faire ce raisonnement globalement. Il en subsiste cependant que \mathcal{A} est un feuilletage régulier.

Soit $\omega \in \nu_y^* \mathcal{A}$ une forme conormale au feuilletage régulier \mathcal{A} et ${}^*f^* \omega$ le champ de vecteurs défini en tout point $x \in f^{-1}(y)$ par $({}^*f^* \omega)\sigma = -f^* \omega$. ${}^*f^* \omega$ est un champ de vecteurs tangents à $f^{-1}(y)$.

On suppose dorénavant que pour tout $y \in P$ $f^{-1}(y)$ est une sous-variété séparée de M ; dans ces conditions on peut parler du flot, noté φ_t^ω , de $f^*\omega$ et on fait l'hypothèse que pour tout $\omega \in v_{y^*}^* \mathcal{A}$, $f^*\omega$ est un champ complet. On dira alors que f est à fibres complètes.

(P, Λ) étant régulier, pour tout $y \in P$, la structure d'algèbre de Lie de T^*P induit sur $v_{y^*}^* \mathcal{A}$ une structure d'algèbres abélienne (cf. chap. 8 §9).

f étant un morphisme de Poisson, $\omega \rightarrow f^*\omega$ définit une action infinitésimale de cette algèbre abélienne dans $f^{-1}(y)$. Si tous ces champs sont complets, cette action s'intègre en une action de groupe abélien de $v_{y^*}^* \mathcal{A}$ dans $f^{-1}(y)$:

$$v_{y^*}^* \mathcal{A} \times f^{-1}(y) \rightarrow f^{-1}(y)$$

$$(\omega, x) \rightarrow \varphi(\omega)x = \varphi_1^\omega(x)$$

x désignant le produit fibré on a donc défini une action fibrée

$$v^* \mathcal{A} \times M \rightarrow M$$

$$(\omega, x) \rightarrow \varphi(\omega).x.$$

Ces remarques conduisent à la définition suivante :

DEFINITION 1.1 *Une réalisation isotrope de Libermann (R.I.L. en abrégé) est une fibration f d'une variété symplectique (M, σ) (non nécessairement séparée) sur une variété de Poisson (P, Λ) , régulière et séparée, qui est un morphisme de Poisson à fibres séparées, connexes, isotropes et complètes.*

On dira que la R.I.L. est séparée si M est une variété séparée.

Remarques .

(1) Les conditions imposées à M n'assurent nullement que M est séparée comme le montre l'exemple suivant. $(P, \Lambda) = \mathbb{R}$ muni de la

structure triviale. (M, σ) est la variété quotient de $T^*\mathbb{R} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ avec sa structure canonique, par la relation d'équivalence

$$(x, y) \sim (x', y') \text{ si et seulement si}$$

$$x = x' \text{ et } \begin{cases} x \neq 0 & y - y' \in \mathbb{Z} \\ x = 0 & y = y' \end{cases}$$

(M, σ) n'est pas séparée, $\pi : (M, \sigma) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ projection naturelle est une R.I.L.

(II) Ultérieurement (M, σ) sera un groupoïde. L'exemple des groupoïdes d'holonomie [8] montre qu'un groupoïde n'est en général, pas séparé bien qu'il vérifie des hypothèses de séparation sur les α et β fibres.

2. RESEAU D'UNE R.I.L.

L'action φ définie précédemment est, pour des raisons de dimension, transitive sur chaque fibre de f . $f^{-1}(y)$ étant une variété séparée de même dimension que $v_y^* \mathcal{A}$, $f^{-1}(y)$ est le quotient de $v_y^* \mathcal{A}$ par un sous-groupe \mathcal{R}_y , fermé discret, ce qui montre que, comme dans le cas séparé, les fibres sont des cylindres ou des tores. On note $m(y)$ le rang sur \mathbb{Z} de \mathcal{R}_y et k le rang du fibré $\pi : v^* \mathcal{A} \rightarrow P$. k est la codimension du feuilletage régulier \mathcal{A} et $m(y) \leq k$. On pose $\mathcal{R} = \bigcup_{y \in P} \mathcal{R}_y$ et on munit \mathcal{R} de la topologie induite par $v^* \mathcal{A}$.

Si (Q, F) est une variété feuilletée régulière, on notera $v_p^* F \rightarrow Q$ le fibré sur Q des p -formes ω nulles en restriction aux feuilles. $\omega \in v_p^* F(y)$ si et seulement si $\omega(X_1, \dots, X_p) = 0$ si pour tout i $X_i \in F(y)$. Pour $p = 1$ on écrit $v^* F$. On note $C^\infty(v_p^* F)$ le faisceau des sections de $v_p^* F$ et $Z(v_p^* F)$ le sous-faisceau des p -formes fermées. On introduit la notion suivante :

DEFINITION 2.1. Un réseau \mathcal{R}^Q d'une variété régulièrement feuilletée (Q, F) est une sous-variété (non nécessairement connexe) de v^*F , fibré conormal au feuilletage, telle que

(i) \mathcal{R}^Q est un sous-faisceau de $Z(v^*F)$.

(ii) pour tout $y \in Q$ \mathcal{R}_y^Q est un sous groupe discret fermée de v_y^*F .

(iii) pour toute feuille S de F , $\mathcal{R}_S \rightarrow S$ est saturé pour l'holonomie infinitésimale.

(iv) pour toute sous-variété W de Q telle que \mathcal{R}_W soit de rang constant r , $\mathcal{R}_W \rightarrow W$ est un \mathbb{Z}^r revêtement.

. Si F est identiquement nul, on dit que \mathcal{R}^Q est un réseau de Q .

. On dit que \mathcal{R}^Q est fermé si \mathcal{R}^Q est une sous-variété fermée de v^*F .

. \mathcal{R}^Q est constant si c'est un faisceau constant. \mathcal{R}^Q est exact si \mathcal{R}^Q est constant et constitué de 1-formes fermées (globales) exactes.

. Si \mathcal{R}^Q ne vérifie que les conditions (I) (II) (III) on dit que \mathcal{R}^Q est un pré-réseau.

Remarques.

1/ Si $Q \equiv \mathbb{R}$ et si $F = 0$, \mathcal{R} défini par $\mathcal{R}_t = \mathbb{Z}dt$ si $t \neq 0$ et $\mathcal{R}_0 = 2\mathbb{Z}dt$ est un pré-réseau sans être un réseau.

2/ Si Q est une variété compacte, \mathcal{R}^Q n'est jamais exact.

La condition (III) revient à dire que $\mathcal{R}_S^Q \rightarrow S$ est une réunion de nappes d'holonomie de la connexion de Bott de S et que \mathcal{R}^Q est

réunion de feuilles du feuilletage relevé de F dans v^*F . $\mathcal{R}_S^Q \rightarrow S$ est donc un fibré localement trivial.

PROPOSITION 2.1. *Si \mathcal{R}^Q est un préréseau ,*

(i) *Pour toute feuille S de F $\mathcal{R}_S^Q \rightarrow S$ est un fibré localement trivial en groupes abélien \mathbb{Z}^{m_S} . En particulier le rang de \mathcal{R}^Q est constant le long de S et \mathcal{R}_S^Q est fermé dans v^*S .*

(ii) *L'ensemble des points où le rang de \mathcal{R} est maximal est un ouvert F -saturé de Q .*

(iii) *Si l'espace des feuilles de F est une variété Q_0 est si l'on note $g : Q \rightarrow Q_0$ la projection, \mathcal{R}^Q passe au quotient le long des feuilles de F et définit un réseau \mathcal{R}^{Q_0} de Q_0 , fermé si et seulement si \mathcal{R}^Q est fermé.*

DEMONSTRATION.

Soit $\psi_1(S)$ le groupe d'holonomie infinitésimale de S .

$\psi_1(S)$ est un sous-groupe de $GL(\mathbb{R}, k)$ (k est la codimension de \mathcal{A}).

$\mathcal{R}_S^Q \rightarrow S$ étant une réunion de nappes d'holonomie et chaque fibre de

$\mathcal{R}_S^Q \rightarrow S$ étant un groupe abélien discret fermé, le groupe structural de

$\mathcal{R}_S^Q \rightarrow S$ est un sous-groupe de $\psi_1(S)$ conservant la fibre type \mathbb{Z}^{m_S} .

$\mathcal{R}_S^Q \rightarrow S$ est donc un fibré en groupe \mathbb{Z}^{m_S} , à groupe structural un sous-groupe de $GL(m_S, \mathbb{Z})$, ce qui prouve (i).

L'ensemble des points où le rang de \mathcal{R} est constant est donc un ensemble \mathcal{A} -saturé. Comme le rang est semi-continu inférieurement, l'ensemble des points où ce rang est maximum est un ouvert \mathcal{A} -saturé.

La partie (III) découle de ce que si \mathcal{A} est définie par une submersion, \mathcal{A} est sans holonomie infinitésimale et \mathfrak{R}_S^Q est canoniquement isomorphe à $S \times \mathbb{Z}^{m_S}$.

DEFINITION 2.2. *Un réseau \mathfrak{R}^Q d'une variété feuilletée (Q, F) est régulier si son rang est constant sur Q . On dit qu'il est maximal si son rang constant est égal à la codimension de F .*

Pour tout réseau \mathfrak{R} , il existe donc un ouvert non vide sur lequel il est de rang maximum.

THEOREME 2.1. *Soit $f : (M, \sigma) \rightarrow (P, \Lambda)$ une R.I.L.*

(i) *Le sous-ensemble \mathfrak{R} de $v^*\mathcal{A}$ est un réseau de (P, \mathcal{A}) , fermé si M est séparée.*

(ii) *$v^*\mathcal{A}/\mathfrak{R}$ est muni d'une structure de variété quotient, séparée si M est séparée.*

DEMONSTRATION.

LEMME 1. *Pour tout $y_0 \in P$ et tout $\omega_0 \in \mathfrak{R}_{y_0}$, il existe un voisinage ouvert W de ω_0 dans $v^*\mathcal{A}$, un voisinage U de y_0 dans P et une section locale C^∞, v , de $v^*\mathcal{A}$ de source U telle que $v(U) = \mathfrak{R} \cap W$.*

PREUVE DU LEMME.

f étant une fibration, il existe un voisinage U_0 de y_0 dans P et une section locale de f , $s : U_0 \rightarrow M$ telle que $s(y_0) = \omega_0$. On définit une application de $v^*\mathcal{A}/U_0$ dans $f^{-1}(U_0)$ $\varphi_{\mathcal{A}}$, ainsi : $\varphi_s(\omega) = \varphi(\omega).s(\pi(\omega))$.

On vérifie que φ_s est un difféomorphisme local. On peut donc trouver un voisinage W de ω_0 , un voisinage U de y_0 , $U \subset U_0$, tels que φ_s soit un difféomorphisme de W dans $f^{-1}(U)$ et imposer que $\pi(W) = U$ et que, pour tout $y \in U$, $\pi^{-1}(y) \cap W$ soit connexe.

Si on pose alors $v = (\varphi_s|_{W_0})^{-1} \circ s$, $v(U) = \mathfrak{R} \cap W$. C.Q.F.D.

\mathfrak{R} est donc une sous-variété de $v^*\mathcal{A}$ et avec cette topologie c'est un sous-faisceau de $C^\infty(v^*\mathcal{A})$.

LEMME 2. *Si $\tilde{\omega}$ est une section locale de $\pi : v^*\mathcal{A} \rightarrow P$,*

$$\varphi(\tilde{\omega})^* \sigma - \sigma = f^* d\tilde{\omega}.$$

PREUVE DU LEMME.

Soit $\varphi_t^{\tilde{\omega}}(x)$ le flot au temps t du champ $*f^*\tilde{\omega}(\pi(x))$.

$$\varphi_1^{\tilde{\omega}}(x) = \varphi(\tilde{\omega}(x)).x.$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\varphi_t^{\tilde{\omega}})^* \sigma &= (\varphi_t^{\tilde{\omega}})^* \mathfrak{L}(*f^*\tilde{\omega}d\pi). \sigma \\ &= -(\varphi_t^{\tilde{\omega}})^* f^* d\tilde{\omega} . = -f^* d\tilde{\omega} \end{aligned}$$

car $f_0 \varphi_t^{\tilde{\omega}} = f$. Le résultat s'en déduit par intégration

$\tilde{\omega}$ est une section de \mathfrak{R} si et seulement si $\varphi(\tilde{\omega})$ est l'identité. Le lemme 2 assure donc que \mathfrak{R} est un sous faisceau de $Z(v^*\mathcal{A})$.

LEMME 3. *Soit S une feuille de \mathcal{A} , $\mathfrak{R}_S \rightarrow S$ est un sous ensemble de v^*S invariant par holonomie infinitésimale.*

PREUVE DU LEMME.

Soit U un ouvert contractile de S et $\omega_0 \in S/U \rightarrow U$ par l'holonomie infinitésimale de la feuille S de \mathcal{A} et valant ω_0 en $\pi(\omega_0) = y_0$. Comme \mathfrak{R} est un faisceau il existe une unique section η de \mathfrak{R} au-dessus d'un

voisinage V de y_0 telle que $\eta(y_0) = \omega_0$. Comme $d\eta = 0$ η est invariante par holonomie infinitésimale et V étant supposé connexe, η et ω coïncident sur V . L'ensemble des points y où $\omega(y) \in \mathfrak{R}$ est donc un ouvert U_1 de U . Soit z un point de la fermeture de U_1 dans U , V_1 un voisinage de z dans S muni d'une section de f , s_1 , et W un voisinage de $\omega(z)$ dans $v^*\mathcal{A}$ tel que φ_{S_1} soit un difféomorphisme de W dans $f^{-1}V_1$. Soit $\varphi_{S_1}^{-1}$ le

difféomorphisme réciproque de $\varphi_{S_1}|_W$. Comme $\omega(y) \in \mathfrak{R}$, pour tout $y \in V_1 \cap U_1$, $\varphi_{S_1}^{-1} \circ s(y) = \omega(y)$; $\varphi_{S_1}^{-1} \circ s$ étant une application C^∞ de

$v^*\mathcal{A}|_{V_1}$ dans lui-même, par passage à la limite

$$\varphi_{S_1}^{-1} \circ s(z) = \omega(z)$$

ce qui assure que $\omega(z) \in \mathfrak{R}$ et donc que $z \in U_1$. U étant connexe, $U_1 \equiv U$, ce qui assure que $\mathfrak{R}_S \rightarrow S$ est invariant par holonomie infinitésimale. \mathfrak{R} est donc un pré-réseau. Pour prouver que \mathfrak{R} est un réseau, il suffit donc de prouver la condition (iv) pour les sous-variétés \mathcal{A} -saturées. On se contente d'explicitier la démonstration pour l'ouvert \mathcal{A} -saturé où le rang \mathfrak{R} est maximum, la démonstration étant analogue dans les autres cas.

LEMME 4 : $\mathfrak{R}_\Omega \rightarrow \Omega$ est un revêtement.

Preuve du lemme 4 :

Soit $y_0 \in \mathfrak{R}_\Omega$, $(\omega_1^0, \dots, \omega_m^0)$ une \mathbb{Z} -base de $\mathfrak{R}(y_0)$. \mathfrak{R} étant un faisceau, il existe un ouvert contractile U de Ω contenant y_0 et m sections η_i de $\mathfrak{R}_U \rightarrow U$ telles que $\eta_i(y_0) = \omega_i^0$. Soit $y_1 \in U$ et $\omega \in \mathfrak{R}_{y_1}$. Comme le rang de \mathfrak{R} sur Ω , m , est maximum, il existe $(m+1)$ entiers $(q_i)_{0 \leq i \leq m}$ tels que $q_0 \omega + \sum_{i=1}^m q_i \eta_i(y_1) = 0$; $q_0 \neq 0$ sinon les $(\omega_i^0)_{1 \leq i \leq m}$ ne seraient pas \mathbb{Z} -indépendants. Soit η la section de $v^*\mathcal{A}$ au-dessus de U définie par

$q \cdot \eta + \sum_1^m q_i \eta_i = 0$. Soit ρ une section locale de \mathcal{R} au voisinage de y_1 telle que $\rho(y_1) = \omega_1$. $q \cdot \rho$ et $q \cdot \eta$ sont deux sections de \mathcal{R} au voisinage de y_1 . L'ensemble des points où $\eta(y) \in \mathcal{R}_y$ est donc un ouvert non vide $U_0 \subset U$.

Soit $z \in U_0$, fermeture de U_0 dans U . Soit s une section de $f : M \rightarrow P$ au voisinage de z , $s : V \rightarrow M$. En se restreignant à un voisinage W de $\eta(z)$ dans $v^* \mathcal{A} \big|_V$, on peut assurer que φ_s (cf. lemme 1) est un difféomorphisme de W dans $f^{-1}(V)$; soit φ_s^{-1} par abus de notation le difféomorphisme réciproque. Pour tout $y \in V \cap U_0$, $\varphi_s^{-1} s(y) = \eta(y)$ puisque $\eta(y) \in \mathcal{R}_y$ si $y \in U_0$. Par passage à la limite (dans $v^* \mathcal{A}$ qui est séparée) on en déduit que $\eta(z) = \varphi_s^{-1} s(z)$, ce qui implique que $\eta(z) \in \mathcal{R}_z$; U_0 est donc égal à U . Ceci montre que \mathcal{R}_U est isomorphe à $U \times \mathbb{Z}^{m_0}$ et achève la démonstration du lemme 4.

La relation d'équivalence définie par \mathcal{R} dans $v^* \mathcal{A}$ ayant pour graphe l'image réciproque de \mathcal{R} par l'application $v^* \mathcal{A} \otimes_p v^* \mathcal{A} \rightarrow v^* \mathcal{A} : (\omega_1, \omega_2) \rightarrow \omega_1 - \omega_2$ qui est une submersion, $v^* \mathcal{A} / \mathcal{R}$ est une variété, qui est séparée si et seulement si \mathcal{R} est fermé ce qui achève la démonstration du théorème 2.1.

REMARQUE .

Le théorème 2.1 a été initialement prouvé dans le cas des fibrations lagrangiennes compactes par Duistermaat [14] étendu ensuite par T. Delzant au cas des R.I.L. à fibres compactes dans [12] (ces R.I.L. sont appelées F.I.S.C. dans [10]) et enfin par A. Coste et D. Sondaz [4] [5] au cas d'une R.I.L. séparée quelconque.

DEFINITION 2.3. *Une R.I.L. est régulière si son réseau est régulier. Toute R.I.L. régulière est séparée.*

La séparation d'une R.I.L. régulière résulte de ce que son réseau \mathfrak{R} est un revêtement de P . Si le réseau $\mathfrak{R} \rightarrow P$ est maximal, pour tout $y \in P$, $v_y^* \mathcal{A} / \mathfrak{R}_y$ est un tore. Inversement si les fibrés de f sont compacts \mathfrak{R} est maximal..

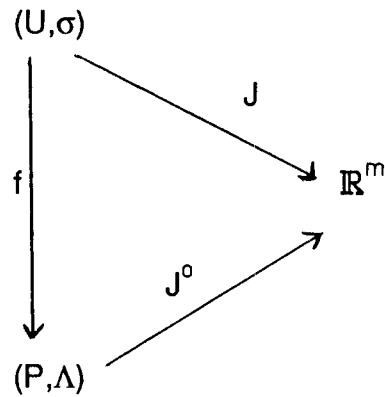
COROLLAIRE 1 . *Une R.I.L. $f : (M, \sigma) \rightarrow (P, \Lambda)$ est à fibres compactes (R.I.L.C. en abrégé) si et seulement si son réseau est maximal.*

Si l'espace des feuilles du feuilletage \mathcal{A} est une variété Q , le réseau \mathfrak{R} est l'image réciproque par la projection $g : P \rightarrow Q$ d'un réseau \mathfrak{R}^Q sur Q . En particulier si f est une R.I.L.C., \mathfrak{R}^Q est un réseau maximal de Q . Q est donc une variété affine. Si l'holonomie de $\mathfrak{R}^Q \rightarrow Q$ est relativement compacte, on peut munir Q d'une métrique riemannienne dont l'holonomie est précisément l'holonomie de \mathfrak{R}^Q . Il en résulte que Q est une variété riemannienne plate. En particulier si Q est complète comme variété affine, Q est le produit d'un espace numérique par un quotient fini de tore [cf. 6 par exemple] .

COROLLAIRE 2. [10] . *Si l'espace des feuilles de (P, Λ) est une variété Q et si $f : (M, \sigma) \rightarrow (P, \Lambda)$ est une R.I.L.C. Q est une variété affine. Si Q est complète et si l'holonomie de $\mathfrak{R}^Q \rightarrow Q$ est relativement compacte, Q est le produit d'un espace numérique par un quotient fini de tore.*

REMARQUE .

Ce corollaire contient une généralisation du théorème période énergie de Gordon [1] [17] : si $T^m \times M \rightarrow M$ est une action hamiltonienne de tore, libre en x_0 , de moment $J : M \rightarrow \mathbb{R}^m$, il existe un voisinage tubulaire de l'orbite de x_0 , T^m -saturé, U sur lequel l'action de T^m est libre. Si P est la variété quotient de U par l'action de T^m , la projection $f : U \rightarrow P$ est une R.I.L.C. et on a le diagramme commutatif suivant :



Soit $Q = J_0(P)$. Le réseau \mathfrak{R} est l'image réciproque par J_0 d'un réseau \mathfrak{R}^Q sur Q . Si $u \in Q$, il en résulte que $\forall y \in J_0^{-1}(u)$ \mathfrak{R}_y est canoniquement isomorphe à \mathfrak{R}_u^Q . Autrement dit $\forall x \in J^{-1}(u)$ variété de niveau, $\mathfrak{R}_{f(x)} = \mathfrak{R}_u^Q$ ce qui traduit le fait que les périodes sont constantes sur les variétés de niveau du moment (cf. § 3).

COROLLAIRE 3. *Si \mathcal{A} est un feuilletage à feuilles denses, toutes les R.I.L. au-dessus de (P, Λ) sont régulières.*

En effet l'ouvert où le réseau est de rang maximum est \mathcal{A} -saturé et donc identique à P .

3. STRUCTURE LOCALE DES R.I.L. THEOREME DES VARIABLES ACTIONS ANGLES.

$v^* \mathcal{A} / \mathfrak{R} \rightarrow P$ étant un fibré en groupes abéliens, l'action φ de $v^* \mathcal{A}$ sur M passe au quotient et définit une action fibrée C^∞ , $\hat{\varphi} : v^* \mathcal{A} / \mathfrak{R} \otimes_P M \rightarrow M$. Si $s : U \rightarrow M$ est une section de f au-dessus de U , $\hat{\varphi}_s : v^* \mathcal{A} / \mathfrak{R} |_U \rightarrow f^{-1}(U)$ définie à partir de $\varphi_s : v^* \mathcal{A} |_U \rightarrow f^{-1}(U)$ par passage au quotient par $\mathfrak{R} |_U$, est un difféomorphisme de $v^* \mathcal{A} / \mathfrak{R} |_U$ sur

$f^{-1}(U)$ compatible avec les fibrations π et f . (où π par abus de notation est la fibration de $v^*\mathcal{A}/\mathcal{R} \rightarrow P$). $v^*\mathcal{A}/\mathcal{R}$ étant séparée si et seulement si \mathcal{R} est fermé, on a prouvé

PROPOSITION 3.1. *Une R.I.L. $f : (M, \sigma) \rightarrow (P, \Lambda)$ est séparée si et seulement si son réseau est fermé.*

Soit $d\lambda$ la forme symplectique canonique de T^*P et i l'inclusion de $v^*\mathcal{A} \rightarrow T^*P$. $i^*d\lambda$ étant invariante par l'action de \mathcal{R} dans $v^*\mathcal{A}$ puisque $\mathcal{R} \subset Z(v^*\mathcal{A})$, définit par passage au quotient une 2-forme fermée β sur $v^*\mathcal{A}/\mathcal{R}$. $C^\infty(v^*\mathcal{A}/\mathcal{R})$ faisceau des sections de $\pi : v^*\mathcal{A}/\mathcal{R} \rightarrow P$ s'identifie au faisceau quotient $C^\infty(v^*\mathcal{A})/\mathcal{R}$. Comme $d\mathcal{R} = 0$, d induit un morphisme $\hat{d}_{\mathcal{R}}$ de $C^\infty(v^*\mathcal{A}/\mathcal{R})$ dans le faisceau des 2-formes fermées sur P . Si ω est une section locale de $v^*\mathcal{A}/\mathcal{R}$ la propriété universelle de la forme de Liouville se traduit par $\omega^*\beta = \hat{d}_{\mathcal{R}}\omega$.

THEOREME 3.1. (Théorème de structure locale) *s étant une section de f au-dessus de U , $\hat{\phi}_s$ est un difféomorphisme symplectique sur $(f^{-1}(U), \sigma)$ de $\gamma^*\mathcal{A}/\mathcal{R}|_U$ muni de la 2-forme symplectique $\pi^*s^*\sigma - \beta$.*

DEMONSTRATION.

Soit ω une section locale de $v^*\mathcal{A}/\mathcal{R}|_U \rightarrow U$. Comme $\rho : v^*\mathcal{A} \rightarrow v^*\mathcal{A}/\mathcal{R}$ est une submersion, on peut en restreignant au besoin la source de ω , construire une section locale $\tilde{\omega}$ de $v^*\mathcal{A} \rightarrow P$ telle que $\rho_*\tilde{\omega} = \omega$ et par construction même $\hat{\phi}(\omega(f(x))) \cdot x = \phi(\tilde{\omega}(f(x))) \cdot x$. Compte tenu du lemme 2 du paragraphe 2

$$\hat{\phi}(\omega)^*\sigma = \sigma - f^*d\tilde{\omega} = \sigma - f^*\hat{d}_{\mathcal{R}}\omega.$$

Enfin de $\hat{\phi}(\omega)_*s = \hat{\phi}_*s$ et $\omega^*\beta = \hat{d}_{\mathcal{R}}\omega$ on déduit que

$\omega^*(\hat{\phi}_*s - \pi^*v^*\sigma + \beta) = 0$ pour toute section locale ω de $v^*\mathcal{A}/\mathcal{R} \rightarrow P$ ce qui achève la démonstration du théorème.

Ce théorème constitue une extension du théorème des variables actions-angles : l'énoncé d'Arnold [2] correspond au cas où P est une variété de Poisson triviale et \mathfrak{R} est maximal, celui de Nekhoroshev ([7] [10] [26]) au cas où $\Lambda \neq 0$, et \mathfrak{R} maximal, celui de A. Coste et D. Sondaz [4] [15] au cas où $\Lambda \neq 0$ et \mathfrak{R} est quelconque mais (M, σ) est séparée.

Pour donner une formulation plus précise dans le cas où \mathfrak{R} est régulier, on introduit la notion de R.I.L. standard de type (q, r, m) . Pour ceci on fait les conventions suivantes : pour tout q , $\mathbb{C}^q = ((z^j)_{1 \leq j \leq q} = z)$ est

muni de la structure standard $\sigma = \sum_{i=1}^q dy^j \wedge dx^i$ où x^j est la partie réelle et y^j

la partie imaginaire de z^j et on note $z = x + iy$,

$x = (x^j)_{1 \leq j \leq q}$, $y = (y^j)_{1 \leq j \leq q}$.

D'autre part on identifie T^*T^m à $\mathbb{R}^m \times \mathbb{T}^m = ((y, \theta))$ et on munit T^*T^m de sa structure cotangente.

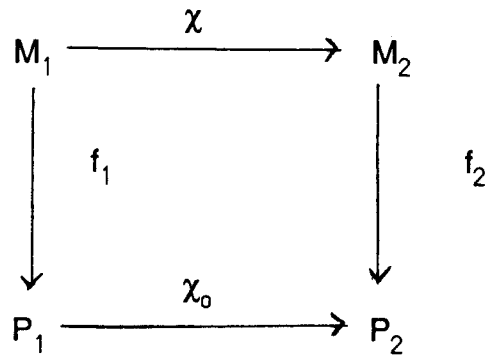
DEFINITION 3.1. *La R.I.L. standard de type (q, r, m) est la projection canonique de $\mathbb{C}^q \times \mathbb{C}^r \times T^*T^m$ sur $\mathbb{C}^q \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^m$:*

$f_0(z_1, z_2, (y, \theta)) = (z_1, x_2, y)$ où $\mathbb{C}^q, \mathbb{C}^r, T^*T^m$ sont munis des structures symplectiques standards.

$\mathbb{C}^q \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^m$ est donc munie de la structure de Poisson dont le feuilletage symplectique a pour feuilles $(\mathbb{C}^q \times \{x_2\} \times \{y\})_{(x_2, y) \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^m}$.

$v^* \mathfrak{A}$ étant identifié à $\mathbb{C}^q \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^m \times (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^m)$, \mathfrak{R}_0 s'identifie au réseau régulier $\mathbb{C}^q \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^m \times (\{0\} \times \mathbb{Z}^m)$.

DEFINITION 3.2. *Deux R.I.L. $f_i : (M_i, \sigma_i) \rightarrow (P_i, \Lambda_i)$ sont isomorphes s'il existe un couple de difféomorphismes de Poisson (χ, χ_0) rendant commutatif le diagramme*



Remarque.

Si \mathfrak{R}_i est le réseau de f_i , $\mathfrak{R}_1 = \chi_0^* \mathfrak{R}_2$.

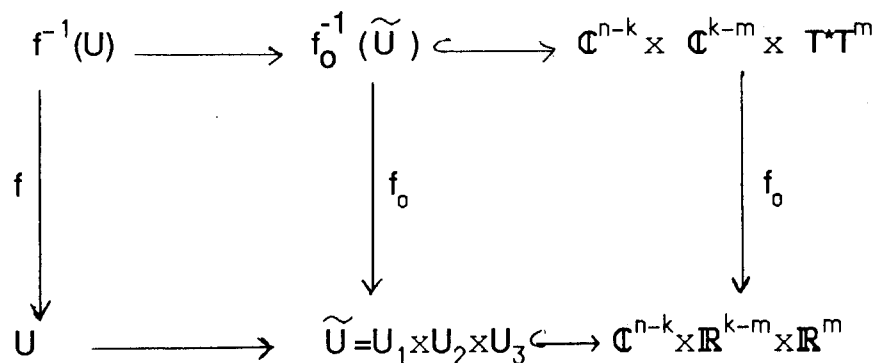
THEOREME 3.2. Soit $f : (M, \sigma) \rightarrow (P, \Lambda)$ une R.I.L. régulière de réseau de rang m . Soit $2n$ (resp. p) la dimension de M (resp. P) et k la codimension de \mathcal{A} .

Pour tout point a_1 de P , il existe une carte χ_0 d'un voisinage ouvert U de a_1 sur un produit de voisinages ouverts de

O respectivement dans $\mathbb{C}^{n-k} \times \mathbb{R}^{k-m} \times \mathbb{R}^m$, $\tilde{U} = U_1 \times U_2 \times U_3$ et

un isomorphisme de R.I.L. (χ, χ_0) de $f^{-1}(U)$ sur $f_0^{-1}(\tilde{U})$ restriction

à \tilde{U} de la R.I.L. standard de type $(n-k, k-m, m)$.



DEMONSTRATION.

\mathfrak{R} étant un faisceau de 1 formes fermées et \mathfrak{R} étant de rang constant, il existe un feuilletage régulier $F_{\mathfrak{R}}$ contenant \mathcal{A} tel que

$v^*F_{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R} \otimes \mathbb{R}$. Pour tout point a_1 de P on peut donc trouver un

voisinage U de a_1 et k fonctions $C^\infty (y_i)_{1 \leq i \leq k}$ de $U \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $v^*\mathcal{A}$ soit engendré par les dy_i et $v^*F_{\mathfrak{R}}|_U$ par les $(dy_{k-n+j})_{1 \leq j \leq m}$. Les

$(dy_{k-n+j})_{1 \leq j \leq m}$ constituent une base de $\mathfrak{R}|_U \rightarrow U$. Un théorème de Lichnérowicz [20] assure alors que l'on peut construire en restreignant

au besoin U , une carte $\chi_0 = U \rightarrow \tilde{U} = U_1 \times U_2 \times U_3 \subset \mathbb{C}^{n-k} \times \mathbb{R}^{k-m} \times \mathbb{R}^m$

qui est un difféomorphisme de Poisson de U sur \tilde{U} muni de la structure induite par la structure de Poisson standard de $\mathbb{C}^{n-k} \times \mathbb{R}^{k-m} \times \mathbb{R}^m$. Les $(2n-k)$ coordonnées construites sur U peuvent au voisinage de tout point

$a_2 \in f^{-1}(a_1)$, être complétées en $2n$ coordonnées canoniques d'un voisinage de a_2 dans M , ce qui permet, en restreignant éventuellement

U , de construire une section de f , $s : U \rightarrow M$ telle que $s^*\sigma$ soit la 2 forme fermée image réciproque par la projection $\mathbb{C}^{n-k} \times \mathbb{R}^{k-m} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}^{n-k}$ de

la 2 forme canonique de \mathbb{C}^{n-k} . L'application du théorème 3.1 à cette section s fournit un isomorphisme $\hat{\phi}_s^{-1}$ de $(f^{-1}(U), \sigma)$ sur $v^*\mathcal{A}/\mathfrak{R}|_U$ muni de

$\pi^*s^*\sigma - \beta$. A l'aide de la base (dy_j) de $v^*\mathcal{A}/\mathfrak{R}|_U$ on obtient un difféomorphisme de $v^*\mathcal{A}/\mathfrak{R}|_U \rightarrow U$ sur $f_0^{-1}(U)$ qui transforme \mathfrak{R} en le

réseau standard de f_0 et $\pi^*s^*\sigma - \beta$ en la 2 forme standard de

$\mathbb{C}^{n-k} \times \mathbb{C}^{k-m} \times T^*T^m$ ce qui achève la démonstration.

REMARQUE.

Si l'on note (θ_i, a_i) les coordonnées canoniques dans T^*T^m identifié à $T^m \times \mathbb{R}^m$, les (θ_i) s'appellent les angles, les (a_i) les actions associées. Si le réseau n'est pas maximal, \mathbb{C}^{k-m} fournit une paire de variables duales supplémentaires. L'existence du réseau \mathfrak{R} explique la

présence du tore T^m . \mathcal{R} est donc "le réseau des périodes" de f . Le fait que \mathcal{R} ne soit pas, en général, de rang constant s'interprétera comme le fait que le mouvement défini par un hamiltonien f^*H , où $H \in C^\infty(P, \mathbb{R})$ perd un certain nombre de pseudo-périodes, certaines variations périodiques de paramètres étant remplacées par des mouvements asymptotiques.

4. CLASSES DE CHERN D'UNE R.I.L.

Soit (U_i) un recouvrement ouvert de P , localement fini, tel que sur chaque U_i il existe une section s_i de f . P étant séparée et donc paracompacte, de tels recouvrements existent, subordonnés à n'importe quel recouvrement ouvert. Pour tout couple (i,j) tel que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ il existe une unique section μ_{ij} de $v^*\mathcal{A}/\mathcal{R}$ au-dessus de $U_{ij} = U_i \cap U_j$ telle que $\hat{\phi}(\mu_{ij}) s_i = s_j$.

Soit $\psi_i = \hat{\phi}_{s_i}^{-1}$ l'isomorphisme de $f^{-1}(U_i)$ sur $v^*\mathcal{A}/\mathcal{R}|_{U_i}$. On a

évidemment $\psi_i \circ \psi_j^{-1}(\omega) = \omega + \mu_{ij}(\pi(\omega))$. (où l'on note $+$ l'addition dans le groupe abélien fibre de $\pi : v^*\mathcal{A}/\mathcal{R} \rightarrow P$). Dans la terminologie de Grothendieck [18] la R.I.L. $f : (M, \sigma) \rightarrow (P, \Lambda)$ est localement isomorphe comme fibré sur P à $v^*\mathcal{A}/\mathcal{R} \rightarrow P$ avec $C^\infty(v^*\mathcal{A}/\mathcal{R})$ faisceau des sections de $v^*\mathcal{A}/\mathcal{R} \rightarrow P$ comme faisceau structural. On peut donc associer à f une 1-classe de cohomologie $\mu \in H^1(P, C^\infty(v^*\mathcal{A}/\mathcal{R}))$.

La suite exacte de fibrés en groupes sur P

$$0 \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow v^*\mathcal{A} \rightarrow v^*\mathcal{A}/\mathcal{R} \rightarrow 0$$

conduit à la suite exacte de faisceaux

$$0 \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow C^\infty(v^*\mathcal{A}) \rightarrow C^\infty(v^*\mathcal{A}/\mathcal{R}) \rightarrow 0$$

Comme $C^\infty(v^*\mathcal{A})$ est mou, le cobord δ est un isomorphisme en degré supérieur ou égal à 1. En particulier

$$\delta : H^1(P, C^\infty(v^*\mathcal{A}/\mathcal{R})) \cong H^2(P, \mathcal{R})$$

Par analogie avec le cas des fibrations lagrangiennes compactes de Duistermaat [14] on pose la définition suivante :

DEFINITION 4.1. $\delta\mu = v$ est la classe de Chern de la R.I.L.

$$f : (M, \sigma) \rightarrow (P, \Lambda).$$

δ étant un isomorphisme, $v = 0$ si et seulement si $f : M \rightarrow P$ est isomorphe à $\pi : v^* \mathcal{A} / \mathcal{R} \rightarrow P$ ce qui est réalisé si et seulement si f possède une section globale.

5. COHOMOLOGIE RELATIVE ET CLASSIFICATION DES R.I.L.

Pour tout $p \geq 1$, on note $v_p^* \mathcal{A}$ le fibré sur P des p -formes ω telles que $\omega \wedge \Lambda^p \mathcal{A} = 0$. ω appartient donc à $v_p^* \mathcal{A}$ si et seulement si ω est nulle sur tout p -vecteur tangent à \mathcal{A} . On note $C^\infty(v_p^* \mathcal{A})$ le faisceau des sections et on écrit $v_1^* \mathcal{A} = v^* \mathcal{A} \cdot d C^\infty(v_p^* \mathcal{A}) \subset C^\infty(v_{pH}^* \mathcal{A})$ et $(C^\infty(v_p^* \mathcal{A}), d)$ est un faisceau différentiel ([9] [10] [30]) ; sa cohomologie $H^*(P, \mathcal{A})$ s'appelle cohomologie relative de (P, \mathcal{A}) [10]. On note $Z(v_p^* \mathcal{A})$ le faisceau des p -cycles.

$$0 \rightarrow Z(v_p^* \mathcal{A}) \rightarrow C^\infty(v_p^* \mathcal{A}) \xrightarrow{d} C^\infty(v_{pH}^* \mathcal{A}) \xrightarrow{d} \dots$$

est une résolution molle du faisceau $Z(v_p^* \mathcal{A})$. Il en résulte que si

$$k \geq 1 \quad p \geq 1, \quad H^k(P, Z(v_p^* \mathcal{A})) = H^{p+k}(P, \mathcal{A}).$$

Cette cohomologie est liée à la cohomologie feuilletée : si $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ désigne le faisceau des germes d'applications distinguées du feuilletage, on a la suite exacte de faisceaux

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{A}} \xrightarrow{d} Z(v^* \mathcal{A}) \rightarrow 0$$

où \mathbb{R} est le faisceau constant de fibre \mathbb{R} . Si on note $H^*_\mathcal{A}(P)$ la cohomologie $H^*(P, \mathcal{O}_\mathcal{A})$ (appelée cohomologie feuilletée),

$$H^h(P, \mathbb{R}) \rightarrow H^h_\mathcal{A}(P) \rightarrow H^{h+1}(P, \mathcal{A}) \rightarrow H^{h+1}(P, \mathbb{R}) \rightarrow \dots$$

est une suite exacte pour $h \geq 0$. On note par abus de notations d le morphisme de $H^h_\mathcal{A}(P) \rightarrow H^{h+1}(P, \mathcal{A}) = H^h(P, Z(v^*\mathcal{A}))$ déduit de

$$d : \mathcal{O}_\mathcal{A} \rightarrow Z(v^*\mathcal{A}).$$

Si (P, Λ) est une variété de Poisson, il existe une section C^∞ , σ de $\Lambda^2 \mathcal{A}^* \rightarrow P$, fournie par la forme symplectique des feuilles. Soit $[\sigma] \in H^2_\mathcal{A}(P)$ la 2 classe de cohomologie feuilletée associée.

DEFINITION 5.1. [9] [10]. $d[\sigma] = [\mathcal{A}] \in H^3(P, \mathcal{A})$ s'appelle la classe fondamentale de la variété de Poisson régulière (P, Λ) .

Si $\tilde{\sigma}$ est une 2-forme C^∞ sur P telle que pour toute feuille S $i_S^* \tilde{\sigma} = \sigma|_S$ où i_S est l'inclusion de S dans P , $[\mathcal{A}]$ est la classe dans $H^3(P, \mathcal{A})$ de $d\tilde{\sigma}$. En particulier $[\mathcal{A}] = 0$ si et seulement si il existe une extension de σ à P , $\tilde{\sigma}$ qui est fermée. Intuitivement, $[\mathcal{A}]$ étant égale à $d[\tilde{\sigma}]$ mesure la variation de la forme symplectique des feuilles. L'existence d'une R.I.L. de base (P, Λ) va introduire des limitations à cette variation.

On considère la suite exacte de faisceaux

$$0 \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow Z(v^*\mathcal{A}) \rightarrow Z(v^*\mathcal{A}/\mathcal{R}) \rightarrow 0$$

(où par abus de notation on note $Z(v^*\mathcal{A}/\mathcal{R})$ le faisceau quotient $Z(v^*\mathcal{A}/\mathcal{R})$) et la suite exacte en cohomologie associée (de cobord Δ) :

$$(h \geq 0) \quad H^h(P, \mathbb{R}) \rightarrow H^h(P, Z(v^*\mathcal{A})) \rightarrow H^h(P, Z(v^*\mathcal{A}/\mathcal{R})) \xrightarrow{\Delta} H^{h+1}(P, \mathbb{R})$$

$C^\infty(v^*\mathcal{A}/\mathcal{R}_v)$ étant le faisceau quotient de $C^\infty(v^*\mathcal{A})$ par \mathcal{R}_v et le morphisme de faisceaux $d : C^\infty(v^*\mathcal{A}) \rightarrow Z(v^*\mathcal{A})$ étant surjectif, on a par passage au quotient un morphisme surjectif :

$$\hat{d}_{\mathcal{R}_v} : C^\infty(v^*\mathcal{A}/\mathcal{R}_v) \rightarrow Z(v^*\mathcal{A}) .$$

LEMME. Si $h > 0$ et si i est le morphisme $\mathcal{R}_v \rightarrow Z(v^*\mathcal{A})$ le diagramme suivant dans lequel les flèches verticales sont des isomorphismes pour $h \geq 1$ est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & & i^* \\ & & \longrightarrow \\ H^{h+1}(P, \mathcal{R}_v) & \xrightarrow{\quad} & H^{h+1}(P, Z(v^*\mathcal{A})) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^h(P, C^\infty(v^*\mathcal{A}/\mathcal{R}_v)) & \xrightarrow{\quad} & H^h(P, Z(v^*\mathcal{A})) \\ & d_{\mathcal{R}_v}^* & \end{array}$$

PREUVE DU LEMME.

Les preuves étant identiques pour tous les $h \geq 1$, on donne la démonstration pour $h = 1$.

Si $\mu \in H^1(P, Z(v^*\mathcal{A}/\mathcal{R}_v))$ et si μ_{ij} est un 1-cocycle représentant μ , on peut supposer le recouvrement U_i ouvert suffisamment petit pour que l'on puisse associer à μ_{ij} , $\tilde{\mu}_{ij}$, section de $v^*\mathcal{A}$ au-dessus de U_{ij} .

$$(\partial \tilde{\mu})_{ijh} = \tilde{\mu}_{ij} - \tilde{\mu}_{ik} + \tilde{\mu}_{jk} = v_{ijk}$$

est alors un 2-cocycle v de \mathcal{R}_v . Pour calculer l'image de v dans $H^2(P, Z(v^*\mathcal{A}))$ on utilise la résolution

$$0 \rightarrow Z(v^*\mathcal{A}) \rightarrow C^\infty(v^*\mathcal{A}) \xrightarrow{d} C^\infty(v_2^*\mathcal{A}) \xrightarrow{d} C^\infty(v_3^*\mathcal{A}) \rightarrow$$

de $Z(v^*\mathcal{A})$ par des faisceaux mous. Par construction même de i^* , i^*v est l'image dans $H^2(P, Z(v^*\mathcal{A}))$ de la classe de $d\tilde{\mu}_{ij}$.

Mais $d\tilde{\mu}_{ij} = \hat{d}_{\mathfrak{R}} \mu_{ij}$ ce qui achève la démonstration pour $h = 1$.

Pour $h = 0$, $\hat{d}_{\mathfrak{R}} H^0(P, C^\infty(*, \mathcal{A}/\mathfrak{R})) \subset H^0(P, Z(v_2^*, \mathcal{A}))$; or

$H^1(P, Z(v^*, \mathcal{A})) = H^0(P, Z(v_2^*, \mathcal{A})) / d H^0(P, C^\infty(v^*, \mathcal{A}))$ compte tenu de la résolution de $Z(v^*, \mathcal{A})$ utilisée. Le résultat est donc le même que pour $h = 1$ sauf que les flèches verticales ne sont plus des isomorphismes.

Avec les notations précisées, on peut énoncer (cf. [9] [10])

THEOREME 5.1. *On a une suite exacte,*

$$\rightarrow H^h(P, Z(v^*, \mathcal{A}/\mathfrak{R})) \xrightarrow{\Delta} H^{h+1}(P, \mathfrak{R}) \xrightarrow{\hat{d}_{\mathfrak{R}}} H^{h+2}(P, \mathcal{A}) \rightarrow H^{h+1}(P, Z(v^*, \mathcal{A}/\mathfrak{R}))$$

commençant par

$$0 \rightarrow H^0(P, \mathfrak{R}) \rightarrow H^0(P, Z(v^*, \mathcal{A})) \rightarrow H^0(P, Z(v^*, \mathcal{A}/\mathfrak{R})) \rightarrow$$

THEOREME 5.2. *Soit \mathfrak{R} un réseau de (P, Λ) .*

(i) $v \in H^2(P, \mathfrak{R})$ est la classe de Chern d'une R.I.L. de base (P, Λ) de réseau \mathfrak{R} , si et seulement si $\hat{d}_{\mathfrak{R}} v = [\mathcal{A}]$.

(ii) Les R.I.L. de classe v donnée, sont classifiées, à isomorphismes de R.I.L. près, par $H^2(P, \mathcal{A}) / \hat{d}_{\mathfrak{R}} H^1(P, \mathfrak{R})$.

DEMONSTRATION.

1. On suppose que v est la classe de Chern de $f : (M, \sigma) \rightarrow (P, \Lambda)$ de réseau \mathfrak{R} . Soit (U_i) un recouvrement ouvert localement fini de P par des ouverts munis de sections s_i de f . Le 1-cocycle μ_{ij} est défini par

$$s_j(x) = \hat{\phi}(\lambda_{ij}(x)) \cdot s_i(x)$$

or d'après le lemme 2 du paragraphe 2

$$\hat{\phi}(\mu_{ij})^* \sigma = \sigma - \hat{d}_{\mathcal{R}} \mu_{ij}$$

ceci entraîne en notant $s_i^* \sigma = \sigma_i$

$$\sigma_j = \sigma_i - \hat{d}_{\mathcal{R}} \mu_{ij}$$

soit $\tilde{\sigma}$ une extension de la forme symplectique des feuilles de (P, \mathcal{A}) .
Pour tout i , il existe u_i section de $v_2^* \mathcal{A}$ au-dessus de U_i telle que

$$\tilde{\sigma} = \sigma_i + u_i. \text{ Il en résulte que } \hat{d}_{\mathcal{R}} \mu_{ij} = u_j - u_i. \hat{d}_{\mathcal{R}} \mu_{ij} \text{ est un 1-cocycle}$$

de $Z(v_2^* \mathcal{A})$. Sa classe dans $H^1(P, Z(v_2^* \mathcal{A})) = H^3(P, \mathcal{A})$ est la classe de

$du_i = du_j$ [16]. Comme $d\sigma_i = d\sigma_j = 0$ $du_i = d\tilde{\sigma}$. Autrement dit $\hat{d}_{\mathcal{R}}^* v = [\mathcal{A}]$.

Inversement soit $v \in H^2(P, \mathcal{R})$ tel que $\hat{d}_{\mathcal{R}}^* v = [\mathcal{A}]$. Comme $H^2(P, \mathcal{R})$

est isomorphe à $H^1(P, C^\infty(v^* \mathcal{A}(\mathcal{R})))$, il existe à isomorphisme près, un unique fibré $f : M \rightarrow P$ localement isomorphe à $v^* \mathcal{A}/\mathcal{R}$ avec $C^\infty(v^* \mathcal{A}/\mathcal{R})$ comme faisceau structural, de classe μ où $\delta\mu = v$. f est définie par un 1-cocycle μ_{ij} à valeurs dans $C^\infty(v^* \mathcal{A}/\mathcal{R})$ et des cartes

$$\psi_i : f^{-1}(U_i) \rightarrow v^* \mathcal{A}/\mathcal{R}|_{U_i}$$

telles que $\psi_i \circ \psi_j^{-1}(x) = x + \mu_{ij}(\pi(x))$.

On peut, en restreignant au besoin chaque U_i , supposer que U_i est un ouvert distingué du feuilletage \mathcal{A} . On peut alors d'après le théorème de structure locale de variétés de Poisson, choisir sur chaque U_i un

extension fermée σ_i de la forme symplectique des feuilles de $\mathcal{A}|_{U_i}$. Le

même raisonnement que précédemment montre que $[\mathcal{A}]$ est la classe du cocycle $\sigma_i - \sigma_j$. En modifiant éventuellement chaque σ_i par un élément de $Z(v_2^* \mathcal{A})|_{U_i}$, u_i , on peut alors traduire $\hat{d}_{\mathcal{A}} v = [\mathcal{A}]$ par la relation

$$\hat{d}\mu_{ij} = \sigma_i - \sigma_j .$$

Soit Σ_i la 2-forme sur $f^{-1}(U_i)$ définie par $\Sigma_i = -\psi_i^* \beta + f^* \sigma_i$.

Σ_i est trivialement une forme symplectique sur $f^{-1}(U_i)$.

D'autre part, $\Sigma_j - \Sigma_i = f^*(\sigma_j - \sigma_i) - (\psi_j^* \beta - \psi_i^* \beta)$.

Comme $\psi_j^{-1} \psi_i^* \beta = \beta + \pi^* \hat{d}\mu_{ij}$, $\hat{d}_{\mathcal{R}} v = [\mathcal{A}]$ entraîne que sur $f^{-1}(U_i \cap U_j)$

$\Sigma_j = \Sigma_i$. Ainsi M se trouve muni d'une structure symplectique σ et par construction même de Σ_i , $f : (M, \sigma) \rightarrow (P, \Lambda)$ est une R.I.L. de réseau \mathcal{R} .

2. Soit $v \in (\hat{d}_{\mathcal{R}}^*)^{-1} [\mathcal{A}]$. Pour comparer les R.I.L. de classe v ,

il suffit de déterminer les structures de R.I.L. qui peuvent être mises sur un fibré $f : M \rightarrow P$ de classe v donnée. Soit σ et σ' deux telles structures, (U_i, ψ_i) et (U_i, ψ'_i) les cartes à valeurs dans $v^* \mathcal{A} / \mathcal{R}$ de (M, σ) et (M, σ')

au-dessus d'un même recouvrement U_i de P , μ_{ij} et μ'_{ij} les 1-cocycles à valeurs dans $C^\infty(v^* \mathcal{A} / \mathcal{R})$ associés μ_{ij} et μ'_{ij} définissent le même fibré, sont cohomologues. Il existe donc pour chaque i une section

$C^\infty a_i : U_i \rightarrow v^* \mathcal{A} / \mathcal{R}$ telle que

$$(\psi'_i \circ \psi_i^{-1})(\omega) = \omega + a_i(\pi(\omega))$$

$$\mu'_{ij} = a_i + \mu_{ij} - a_j$$

ψ_i et ψ'_i étant par construction associés à une même section $s_i : U_i \rightarrow f$

il résulte de la première partie que si $\sigma_i = s_i^* \sigma$ et $\sigma'_i = s_i^* \sigma'$,

$\hat{d}_{\mathcal{R}} \mu_{ij} = \sigma_i - \sigma_j$ et $\hat{d}_{\mathcal{R}} \mu'_{ij} = \sigma'_i - \sigma'_j$ ce qui implique que

$$\sigma_i - \sigma'_i + \hat{d}_{\mathcal{R}_i} a_i = \sigma_j - \sigma'_j + \hat{d}_{\mathcal{R}_j} a_j .$$

Soit η la section globale de $Z(v^* \mathcal{A})$ dont la restriction η_i à U_i est donnée par $\eta_i = \sigma'_i - \sigma_i - \hat{d}_{\mathcal{R}_i} a_i$. Le théorème de structure locale 3.1 permet d'écrire :

$$\sigma = -\psi_i^* \beta + f^* \sigma_i \quad \sigma' = -\psi_i'^* \beta + f^* \sigma_i'$$

$$\sigma' - \sigma = f^*(\sigma_i' - \sigma_i) - \psi_i^* (-\beta + (\psi_i' \circ \psi_i^{-1})^* \beta)$$

or par construction $(\psi_i' \circ \psi_i^{-1})(\omega) = \omega + a_i(\pi(\omega))$

Donc $\sigma' - \sigma = f^*(\sigma_i' - \sigma_i - \hat{d}_{\mathcal{R}_i} a_i) = f^* \eta$.

Deux R.I.L. $\sigma' - \sigma$ associées à la même fibration $f : M \rightarrow P$ sont telles que $\sigma' - \sigma \in f^* H^0(P, Z(v_2^* \mathcal{A}))$. On a donc une application affine des sections globales de $Z(v_2^* \mathcal{A})$ dans les 2-formes de R.I.L. sur M $\eta \rightarrow \sigma + f^* \eta$

si σ est une forme de R.I.L. fixée.

Si les R.I.L. définies par σ' et σ sont isomorphes et si $\chi : (M, \sigma) \rightarrow (M, \sigma')$ est cet isomorphisme, on peut toujours supposer que $f \circ \chi = f$. Sinon on remplace $f : M \rightarrow P$ par $\chi_0 \circ f$. Dans ces conditions, si (ψ_i') est la famille de cartes de (M, σ') , $(\psi_i = \psi_i' \circ \chi)$ est une famille de cartes de (M, σ) définissant le même cocycle. Si l'on conserve les notations précédentes

$$(\psi_i' \circ \psi_i^{-1})(\omega) = \omega + a_i(\pi(\omega)) \quad \text{et} \quad a_i|_{U_{ij}} = a_j \psi_{ij}$$

Si $a : P \rightarrow v^* \mathcal{A}/\mathcal{R}_i$ est la section globale définie par $(a_i) \quad \eta = \hat{d}_{\mathcal{R}_i} a$.

Inversement si $\eta = \hat{d}_{\mathcal{R}_i} a$ et si $\sigma' = \sigma + \hat{d}a$, $\hat{\varphi}$ désignant l'action associée à

$(M, \sigma) \xrightarrow{\hat{\varphi}(-a)} (M, \sigma) \quad \hat{\varphi}(-a)^* \sigma = \sigma + \hat{d}a = \sigma'$, et $\hat{\varphi}(-a)$ est un difféomorphisme de R.I.L compatible avec f .

Autrement dit les R.I.L. associées à $f : M \rightarrow P$ fibration de classe v sont en correspondance biunivoque avec les sections globales de $Z(v_2^* \mathcal{A})$ modulo l'image par $\hat{d}_{\mathcal{R}_v}$ des sections globales de $C^\infty(v^* \mathcal{A}/\mathcal{R}_v)$.

Compte tenu du théorème 5.1 cet espace est isomorphe au noyau de

$$\Delta : H^1(P, Z(v^* \mathcal{A}/\mathcal{R}_v)) \rightarrow H^2(P, \mathcal{R}_v)$$

soit, compte tenu de l'exactitude de la suite, à $H^2(P, \mathcal{A})/\hat{d}H^1(P, \mathcal{R}_v)$ ce qu'il fallait démontrer.

REMARQUE.

La formule $d[\sigma] = [\mathcal{A}] = \hat{d}_{\mathcal{R}_v}^* v$ montre que $[\mathcal{A}] = \hat{d}_{\mathcal{R}_v}^* v$ relie la

variation de la forme symplectique des feuilles à la classe de Chern de la R.I.L. Ceci généralise aux R.I.L. quelconques, un résultat de Duistermaat et Heckmann [15] relatif aux actions localement libres de Tores.

Dans le cas où $[\mathcal{A}] = 0$, soit $\tilde{\omega}$ une (extension) fermée de la forme symplectique des feuilles de (P, Λ) . Le corollaire suivant caractérise complètement les R.I.L. de (P, Λ) à classe de Chern nulles.

COROLLAIRE. *Si $[\mathcal{A}] = 0$ et si ω est une cotension fermée de la forme symplectique des feuilles de (P, Λ) , les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $v = 0$ et il existe une section globale s de $f : M \rightarrow P$ telle que $s^* \sigma = \tilde{\omega}$.

(ii) $v = 0$ et il existe une section globale s de $f : M \rightarrow P$ telle que la classe de $s^* \sigma - \tilde{\omega}$ dans $H^2(P, \mathcal{A})$ appartienne à $\hat{d}H^1(P, \mathcal{R}_v)$.

(iii) $(M, \sigma) \rightarrow (P, \Lambda)$ est symplectiquement isomorphe au fibré $v^* \mathcal{A}/\mathcal{R}_v \rightarrow P$ muni de la 2-forme symplectique $-\beta + \pi^* \tilde{\omega}$.

On retrouve ici un résultat très voisin de celui de Duistermaat [14] qui correspond au cas $\Lambda = 0$ et donc a fortiori $[\mathcal{A}] = 0$.

REMARQUE.

Il découle du théorème 5.2 que l'on ne peut munir $v^*\mathcal{A}$ d'une structure symplectique σ telle que $(v^*\mathcal{A}, \sigma) \rightarrow (P, \Lambda)$ soit une R.I.L. pour la projection π que si $[\mathcal{A}] = 0$. Inversement le corollaire précédent assure que si $[\mathcal{A}] = 0$, et si ω est une extension fermée de la forme symplectique des feuilles, $\sigma = \pi^*\omega - i^*d\lambda$ est une forme symplectique sur $v^*\mathcal{A}$ faisant de $(v^*\mathcal{A}, \sigma) \rightarrow (P, \Lambda)$ une R.I.L. de réseau nul.

6. CAS DES R.I.L. REGULIERES.

Soit $f : (M, \sigma) \rightarrow (P, \Lambda)$ une R.I.L. régulière de rang m inférieur à k codimension du feuilletage symplectique de (P, Λ) . \mathcal{R} étant un réseau régulier, $\mathcal{R} \otimes \mathbb{R}$ est le fibré conormal d'un feuilletage \mathcal{F} sur M . \mathcal{F} contient le feuilletage symplectique \mathcal{A} .

Soit U un ouvert contractile de P muni d'une section s de f . De la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{R} \otimes \mathbb{R} \rightarrow v^*\mathcal{A} \rightarrow v^*\mathcal{A} / \mathcal{R} \otimes \mathbb{R} \rightarrow 0$$

et du théorème 3.1 on déduit l'existence d'un isomorphisme fibré

$$\psi : (v^*\mathcal{A} / \mathcal{R} \otimes \mathbb{R})_U \oplus (\mathcal{R} \otimes \mathbb{R})_U \rightarrow f^{-1}(U).$$

Il en résulte que les orbites de $\mathcal{R} \otimes \mathbb{R}$ pour l'action naturelle de $v^*\mathcal{A}$ dans M définissent une R.I.L.C. $f_1 : (M, \sigma) \rightarrow (P_1, \Lambda_1)$ sur une variété de Poisson (P_1, Λ_1) de dimension $2n-m$; P_1 est un fibré vectoriel sur P associé au faisceau structural mou $C^\infty(v^*\mathcal{A} / \mathcal{R} \otimes \mathbb{R})$. P_1 est donc isomorphe à $v^*\mathcal{A} / \mathcal{R} \otimes \mathbb{R}$. Enfin du théorème 3.2 il résulte que le feuilletage symplectique \mathcal{A}_1 de (P_1, Λ_1) a pour feuilles les fibres conormaux dans les feuilles de \mathcal{F} des feuilletages \mathcal{A} . Autrement dit si F est une feuille de \mathcal{F} , \mathcal{A}_F la restriction à F du feuilletage \mathcal{A} , $v^*\mathcal{A}_F$ est la feuille correspondante de (P_1, Λ_1) . En particulier par construction F est une sous-variété de Poisson de (P, Λ) à réseau nul et $v^*\mathcal{A}_F$ muni de sa structure symplectique de feuille de (P, Λ) est une réalisation symplectique de la variété de Poisson F . Enfin $P_1 = v^*\mathcal{A} / \mathcal{R} \otimes \mathbb{R} \rightarrow P$ est un morphisme de Poisson.

PROPOSITION 6.1. *Si $f : (M, \sigma) \rightarrow (P, \Lambda)$ est une R.I.L. régulière de rang $m \leq k$ ($k = \text{codimension de } \mathcal{A}$), (M, \mathcal{A}) possède une R.I.L.C canoniquement associée à f au-dessus d'une variété de Poisson (P_1, Λ_1) . P_1 est le fibré vectoriel $v^* \mathcal{A} / \mathcal{R} \otimes \mathbb{R}$ où \mathcal{R} est le réseau de f et le feuilletage symplectique de (P_1, Λ_1) , \mathcal{A}_1 a pour feuilles les fibrés conormaux de la restriction aux feuilles F (du feuilletage défini par \mathcal{R}) du feuilletage \mathcal{A} .*

DEFINITION 6.1. *Si $f : (M, \sigma) \rightarrow (P, \Lambda)$ est une R.I.L. de réseau \mathcal{R} régulier l'holonomie d'un revêtement $\mathcal{R} \rightarrow P$ s'appelle la monodromie de f . On la note \mathfrak{M} .*

\mathfrak{M} est un homomorphisme de $\pi_1 P$ dans $GL(m, \mathbb{Z})$

si $f_1 : (M, \sigma) \rightarrow (P, \Lambda)$ est la R.I.L.C associée, et \mathfrak{M}_1 sa monodromie,

$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1$ modulo l'identification de $\pi_1 P_1$ à $\pi_1 P$.

Si $\mathfrak{M} = 0$ le faisceau $\mathcal{R} \rightarrow P$ est constant. Le feuilletage défini par \mathcal{R} est transversalement parallélisable. Ces feuilletages ont été étudiés par P. Molino [23] : s'ils sont transversalement complets, ou bien ce sont des fibrations si les feuilles sont fermées ou bien les adhérences des feuilles forment une fibration.

Si $\mathfrak{M} = 0$ et si $f : (M, \sigma) \rightarrow (P, \Lambda)$ est une R.I.L.C, $v^* \mathcal{A} = \mathcal{R} \otimes \mathbb{R}$ est un fibré trivial et $v^* \mathcal{A} / \mathcal{R}$ est isomorphe à $P \times T^m$. L'action canonique de $v^* \mathcal{A} / \mathcal{R}$ dans M définit alors une action symplectique de T^m dans M dont les orbites sont les fibres de f . En particulier $f : M \rightarrow P$ est une T^m fibration principale.

Inversement si $f : M \rightarrow P$ est une T^m -fibration principale, si l'action de T^m est symplectique et si les fibres sont isotropes, f est une R.I.L.C pour une structure de Poisson canoniquement définie sur P : en effet si u, v sont deux fonctions sur P , et si $g \in T^m$, $\{\pi^* u, \pi^* v\}(gx) = \{\pi^* u, \pi^* v\}(x)$ puisque $\sigma, \pi^* u, \pi^* v$ sont T^m -invariantes. Ceci montre que f est une fibration isotrope symplectiquement complète et donc f est une R.I.L.C.

Compte tenu de la proposition 6.1. on a donc prouvé :

THEOREME 6.1.

(i) Si $f : (M, \sigma) \rightarrow (P, \Lambda)$ est une R.I.L.C, sa monodromie \mathfrak{M} est nulle si et seulement si f est un T^m fibré principal, l'action de T^m étant symplectique et isotrope.

(ii) Si $f : (M, \sigma) \rightarrow (P, \Lambda)$ est une R.I.L. $\mathfrak{M} = 0$ si et seulement si M est un T^m fibré principal sur $v^* \mathcal{A} / \mathfrak{R} \otimes \mathbb{R}$ l'action de T^m étant symplectique et isotrope.

On notera que $\mathfrak{M} = 0$ si P est simplement connexe.

Compte tenu des résultats précédents on se limite aux R.I.L.C.

Soit $f : (M, \sigma) \rightarrow (P, \Lambda)$ une R.I.L.C à monodromie nulle. Soit $(\eta_i)_{1 \leq i \leq m}$ une \mathbb{Z} -base du faisceau constant $\mathfrak{R} \rightarrow P$ fixée une fois pour tout.

On lui associe un isomorphisme de $v^* \mathcal{A} / \mathfrak{R}$ sur $P \times T^m$ $f : M \rightarrow P$ est un T^m fibré principal. Soit θ une T^m connexion sur M . La classe de Chern v de f introduite au paragraphe 4 est la classe de Chern au sens usuel du fibré principal $f : M \rightarrow P$ modulo l'isomorphisme $\mathfrak{R} \simeq \mathbb{Z}^m$ fourni par (η_i) .

Soit \tilde{v} l'image dans $H^2(P, \mathbb{R}^m) = H^2(P, \mathbb{R})^m$ de $v \in H^2((P, \mathbb{Z}^m) = H^2(P, \mathbb{Z})^m$.

\tilde{v} est la classe de la courbure Ω de θ .

Autrement dit $d\theta^i = f^* \Omega^i$ et $[\Omega^i] = \tilde{v}^i \in H^2(P, \mathbb{R})$. Dire que \mathfrak{R} admet (η_i) pour \mathbb{Z} -base signifie que les champs $X_i = (f^* \eta_i)$ sont les champs fondamentaux de la T^m -fibration principale f . Autrement dit $\theta^i(X_j) = \delta_j^i$. Il en résulte que

$\sigma - \sum_1^m f^* \eta_i \wedge \theta^i$ est une 2-forme projetable en une 2-forme ω qui étend la forme symplectique des feuilles de (P, Λ) .

A tout 1-forme $\theta : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ on associe la 2-forme $\tilde{\theta}$ définie par $\tilde{\theta}(X, Y) = \langle \theta(X), f^T(Y) \rangle - \langle \theta(Y), f^T(X) \rangle$ où on identifie $\mathfrak{R} \otimes \mathbb{R}$ à \mathbb{R}^m par l'isomorphisme fourni par la base (η_i) et où $\langle \theta(X), f^T(Y) \rangle$ est l'évaluation de $\theta(X) \in \mathfrak{R} \otimes \mathbb{R}$ sur $f^T(Y) \in TP$.

On a donc prouvé (cf [10])

PROPOSITION 6.2. *Si $f : (M, \sigma) \rightarrow (P, \Lambda)$ est une R.I.L.C sans monodromie, il existe une 2-forme sur P , ω , étendant la forme symplectique des feuilles de (P, Λ) et une connexion θ sur le fibré T^m -principal $f : M \rightarrow P$ telle que*

$$\sigma = f^* \bar{\omega} - \tilde{\theta}$$

Soit Ω la courbure de $\tilde{\theta}$. Il résulte de ce qui précède que $f^* d\tilde{\omega} - d\tilde{\theta} = 0$ soit

$$d\tilde{\omega} = \sum_1^m \eta_i \wedge \Omega^i$$

Si de plus $v = 0$ M est comme T^m -fibré principal isomorphe à $P \times T^m \rightarrow T^m$. Si l'on choisit comme connexion θ la connexion plate donnée par la trivialisatation, $\theta = (\theta^i)$, où les θ^i sont les m formes fondamentales de T^m .

COROLLAIRE 1. $\mathfrak{M}_v = 0 = v$ si et seulement si il existe un difféomorphisme de fibrés principaux

$$\psi : M \rightarrow P \times T^m$$

une extension fermée ω de la forme symplectique des feuilles de \mathcal{A} , m 1-formes (η_i) fermées normales à \mathcal{A} telles que si $(\theta^i)_{1 \leq i \leq m}$ est l'ensemble des m 1-formes fondamentales de T^m

$$\psi^*(\omega + \sum_1^m \eta_i \wedge \theta^i) = \sigma.$$

En particulier si $\pi_1 P = 0$ (ce qui assure $\mathfrak{M}_v = 0$) et si $v = 0$, les 1-formes η_i sont exactes. Dans ce cas on choisit m fonctions $C^\infty a_i : P \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $da_i = \eta_i$. On dit alors usuellement que les (a_i) sont les *actions* et les (θ^i) les *angles*. On a donc prouvé

THEOREME 6.1. [10]. *Soit $f : (M, \sigma) \rightarrow (P, \Lambda)$ une R.I.L.C. Il existe un système (actions-angles) global associé à f si et seulement si $\mathfrak{M} = 0 = \nu$ et si le réseau \mathfrak{R} est constitué de 1-formes fermées. Il en est en particulier ainsi si $\pi_1 P = 0 = \pi_2 P$.*

La deuxième partie du résultat est due à Nekhoroshev [26].

7. OBSTRUCTIONS A L'EXISTENCE DE R.I.L.

Si (P, Λ) admet une R.I.L. il existe sur (P, Λ) un réseau \mathfrak{R} et à isomorphisme près toutes les R.I.L. de réseau \mathfrak{R} sont classifiées par les théorèmes 5.1 et 5.2. La classification des R.I.L. de (P, Λ) est donc subordonnée à la recherche des réseaux \mathfrak{R} sur (P, Λ) aptes à être des réseaux de R.I.L. On va dans certains cas construire une obstruction à l'existence de tels réseaux.

Le cas où $[\mathcal{A}] = 0$ se traite aisément

PROPOSITION 7.1. *Si (P, Λ) est une variété de Poisson régulière on peut munir $\pi : \nu^* \mathcal{A} \rightarrow P$ fibré normal au feuilletage d'une structure symplectique faisant de π une R.I.L. si et seulement si $[\mathcal{A}] = 0$. Ces R.I.L. sont classifiées par $H^2(P, \mathcal{A})$.*

DEMONSTRATION.

$[\mathcal{A}]$ étant nul, il existe une extension fermée ω de la 2-forme symplectique des feuilles de (P, Λ) . Si λ est la forme de Liouville de T^*P et $i : \nu^* \mathcal{A} \rightarrow T^*P$ l'inclusion, $\pi : \nu^* \mathcal{A} \rightarrow P$ muni de la 2-forme $\pi^* \omega - i^* d\lambda$ est une R.I.L. de P et toutes les R.I.L. construites sur $\nu^* \mathcal{A} \rightarrow P$ sont classifiées par $H^2(P, \mathcal{A})$. Inversement si il existe une R.I.L. sur $\nu^* \mathcal{A} \rightarrow P$, $\mathfrak{R} = 0$ et $\nu = 0$ ce qui entraîne que $[\mathcal{A}] = 0$.

On suppose donc dorénavant que $[\mathcal{A}] \neq 0$.

Si (P, Λ) admet une R.I.L. $(M, \sigma) \rightarrow (P, \Lambda)$, le réseau \mathfrak{R} est tel que si $d_{\mathfrak{R}}^{\wedge^*} \nu = [\mathcal{A}]$ où ν est la classe de Chern de la R.I.L. considérée. \mathfrak{R} sera donc un réseau de R.I.L. d'après le théorème 5.1 si $[\mathcal{A}]$ appartient à

l'image par $\hat{d}_{\mathfrak{R}}$ de $H^2(P, \mathfrak{R})$ ou, ce qui revient au même, au noyau de l'homomorphisme $H^3(P, \mathcal{A}) \rightarrow H^2(P, Z(v^* \mathcal{A} / \mathfrak{R}))$.

L'idée conduisant à la construction d'une obstruction est d'intégrrer $[\mathcal{A}]$ sur les cocycles entiers des feuilles et d'obtenir ainsi un objet que doit nécessairement contenir \mathfrak{R} . L'étude de cet objet fournira l'obstruction cherchée.

Soit J le faisceau des germes de 1-formes normales à \mathcal{A} invariantes par holonomie infinitésimale. Si $d_{\mathcal{A}}$ désigne la différentielle extérieure covariante associée à la connexion de Bott, on a une résolution molle de J

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow J \rightarrow C^\infty(v^* \mathcal{A}) &\xrightarrow{d_{\mathcal{A}}} C^\infty(\mathcal{A}^* \otimes v^* \mathcal{A}) \rightarrow \dots \\ &\rightarrow C^\infty(\Lambda^p \mathcal{A}^* \otimes v^* \mathcal{A}) \xrightarrow{d_{\mathcal{A}}} \dots \end{aligned}$$

Si (P, Λ) admet une R.I.L. (M, σ) de réseau \mathfrak{R}

$$\mathfrak{R} \rightarrow Z(v^* \mathcal{A}) \rightarrow J.$$

On note \mathfrak{R}_S et J_S les restrictions à S feuille de \mathcal{A} de \mathfrak{R} et J respectivement et $J(S)$ le faisceau des germes de sections $v^* S$ invariantes par holonomie infinitésimale $J(S)$ s'obtient à partir de J_S en prenant les jets d'ordre 0 le long de S . Par construction même $\mathfrak{R}_S \rightarrow J(S)$.

Soit r le morphisme en cohomologie déduit de l'inclusion $Z(v^* \mathcal{A}) \rightarrow J$; $r : H^{h+1}(P, \mathcal{A}) \rightarrow H^h(P, J)$ pour $h \geq 0$.

Par restriction à S on en déduit un morphisme

$$r_S : H^{h+1}(P, \mathcal{A}) \rightarrow H^h(P, J_S).$$

En composant avec les jets d'ordre 0 le long de S on construit

$$r(S) : H^{h+1}(P, \mathcal{A}) \rightarrow H^h(P, J(S)).$$

LEMME 1. *Le diagramme suivant est commutatif.*

$$\begin{array}{ccc}
 & \hat{d}_{\mathcal{R}}^* & \\
 & \downarrow & \\
 H^2(P, \mathcal{R}) & \xrightarrow{\quad} & H^3(P, \mathcal{A}) \\
 \downarrow & & \downarrow r(S) \\
 H^2(S, \mathcal{R}_S) & \xrightarrow{\quad} & H^2(S, J(S)) \\
 & j_S^* &
 \end{array}$$

où j_S^* est le morphisme en cohomologie déduit de l'inclusion $\mathcal{R}_S \rightarrow J(S)$.

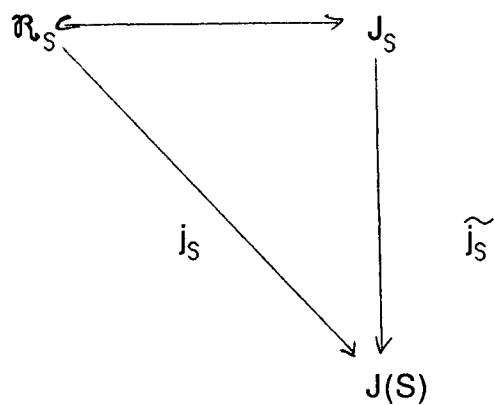
DEMONSTRATION.

$\hat{d}_{\mathcal{R}}^*$ est en fait le morphisme en cohomologie déduit de l'inclusion $\mathcal{R} \rightarrow Z(v^*\mathcal{A})$. On a donc le diagramme commutatif (cf. [16])

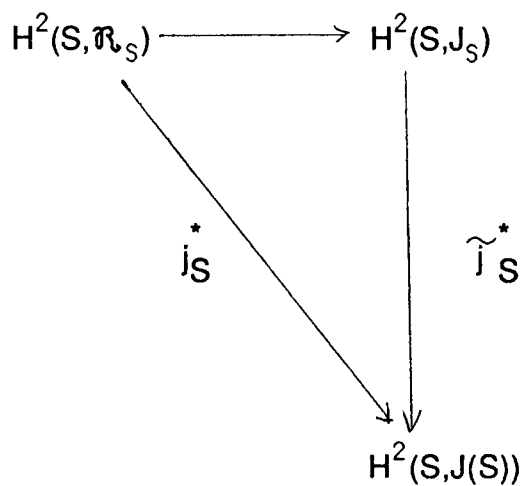
$$(1) \quad \begin{array}{ccccc}
 & & \hat{d}_{\mathcal{R}}^* & & \\
 & & \downarrow & & \\
 H^2(P, \mathcal{R}) & \xrightarrow{\quad} & H^3(P, \mathcal{A}) & \xrightarrow{\quad} & H^2(P, J) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 H^2(S, \mathcal{R}_S) & \xrightarrow{\quad} & H^2(S, Z(v^*\mathcal{A})|_S) & \xrightarrow{\quad} & H^2(S, J_S)
 \end{array}$$

où le morphisme de $H^2(S, \mathcal{R}_S) \rightarrow H^2(S, \mathcal{J}_S)$ est déduit de l'inclusion.

D'autre part si on note \tilde{j}_S le morphisme, jet d'ordre 0, de \mathcal{J}_S sur $J(S)$, \mathcal{R}_S étant un sous fibré de $v^*\mathcal{A}$, en même temps qu'un sous faisceau de $J(S)$, on a les diagrammes commutatifs



(II)



En combinant (I) et (II) on obtient le diagramme commutatif cherché.

Soit v la classe de Chern de $f : (M, \sigma) \rightarrow (P, \Lambda)$ et v_S son image dans $H^2(S, \mathcal{R}_S)$. Du lemme précédent il résulte que pour toute feuille S

$$(*) \quad r(S)[\mathcal{A}] = j_S^* v_S$$

Cette condition va s'exprimer simplement si S est sans holonomie infinitésimale. Dans ce cas \mathcal{R}_S est isomorphe au faisceau constant $S \times \mathbb{Z}^{m_S}$ et $J(S)$ au faisceau constant $S \times \mathbb{R}^k$ ce qu'on peut encore écrire ainsi

$$H^2(P, \mathcal{R}_S) = H^2(P, \mathbb{Z}) \otimes \mathcal{R}_S \quad \text{et} \quad H^2(P, J(S)) = H^2(P, \mathbb{R}) \otimes J(S)$$

en identifiant, comme il est d'usage pour un faisceau constant, \mathcal{R}_S à $H^0(S, \mathcal{R}_S)$, $J(S)$ à $H^0(S, J(S))$.

Le morphisme j_S^* est le produit tensoriel du morphisme canonique de $H^2(P, \mathbb{R})$ par l'inclusion $\mathcal{R}_S \rightarrow J(S)$. Soit c un 2-cycle entier de S . La relation (*) se traduit par $\int_c r(S)[\mathcal{A}] = \langle r(S)[\mathcal{A}], c \rangle = \langle c, j_S^* v_S \rangle \in \mathcal{R}_S$.

On définit alors $\text{Im}_S[\mathcal{A}] = \left\{ \int_c r(s)[\mathcal{A}] \mid c \in H_2(S, \mathbb{Z}) \right\}$

$\text{Im}_S[\mathcal{A}]$ est par construction même un sous faisceau constant de \mathcal{R}_S .

DEFINITION 7.1. *Pour toute variété de Poisson (P, Λ) régulière dont le feuilletage \mathcal{A} est sans holonomie infinitésimale on pose*

$$\text{Im}[\mathcal{A}] = \bigcup_{S \in \mathcal{A}} \text{Im}_S[\mathcal{A}].$$

Toute fibration est un feuilletage sans holonomie et donc sans holonomie infinitésimale. Le feuilletage de Reeb de S^3 fournit un exemple de feuilletage sans holonomie fininitésimale qui n'est pas une fibration.

Si le feuilletage \mathcal{A} est sans holonomie infinitésimale on a mis en évidence une première obstruction :

PROPOSITION 7.2. *Si (P, Λ) a un feuilletage sans holonomie infinitésimale et si (P, Λ) admet une R.I.L. pour tout $x \in P$ $\text{Im}[\mathcal{A}](x)$ est un sous groupe discret fermé de $v_x^* \mathcal{A}$.*

EXEMPLE.

On munit $P = S^2 \times S^2 \times \mathbb{R}^+$ de la structure de Poisson de feuilletage symplectique de feuilles $(S_t = S^2 \times S^2 \times \{t\})_{t>0}$, la structure symplectique de la feuille S_t étant induite par la 2-forme sur P

$$\sigma = t(p_1^* \sigma_0 + \rho p_2^* \sigma_0)$$

où p_i est la i ème projection sur S^2 , σ_0 la forme volume standard de S^2 et ρ un nombre irrationnel. La classe $[\mathcal{A}]$ est la classe de la 3-forme $(p_1^* \sigma_0 + \rho p_2^* \sigma_0) \wedge dt$ et pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $\text{Im}_{S_t}[\mathcal{A}] = \{(n+\rho m)dt / (n,m) \in \mathbb{Z}^2\}$.

ρ étant irrationnel, $\text{Im}_{S_t}[\mathcal{A}]$ est dense dans $v_x^* \mathcal{A}$ pour tout x . Il n'y a donc pas de R.I.L. de cette variété de Poisson

Si ρ est rationnel non nul, l'obstruction fourni par la proposition 7.2 s'évanouit.

En supposant que le feuilletage \mathcal{A} de P est une fibration, ce qui est le cas de l'exemple précédent, on va pouvoir donner des obstructions plus précises.

THEOREME 7.1. *Si le feuilletage symplectique \mathcal{A} de la variété de Poisson régulière (P, Λ) est une fibration localement triviale $g : P \rightarrow Q$ et si (P, Λ) possède une R.I.L. $\text{Im}[\mathcal{A}]$ est un réseau de (P, \mathcal{A}) image réciproque par g d'un réseau \mathcal{R}^Q de Q , constant et exact sur tout ouvert trivialisant g . En particulier $\text{Im}[\mathcal{A}]$ est régulier.*

DEMONSTRATION. IL suffit de prouver le théorème 7.1 dans le cas où \mathcal{A} est une fibration triviale. On suppose donc dorénavant que

$$g : P = S \times Q \rightarrow Q$$

Soit σ une extension de la forme fermée des feuilles de type (2,0) i.e. une application C^∞ de P dans $\Lambda^2 T^*S$. $d\sigma$ est alors de type (2,1). Si l'on note c un 2-cycle entier de S , c_y le 2-cycle $c \times \{y\}$ de S_y et ϕ_c l'application de S dans \mathbb{R} définie par $y \rightarrow \int_{c_y} \sigma_y$.

$$\int_{c_y} r(S_y)[\mathcal{A}] = \int_{c_y} [d\sigma] = d\phi_c(y).$$

Supposons que \mathcal{A} soit une fibration triviale $P = S \times Q \rightarrow Q$. Pour tout $y \in Q$ on note $[\sigma_y]$ la classe dans $H^2(S, \mathbb{R})$ de la 2-forme symplectique de la feuille $S \times \{y\}$.

THEOREME 7.2. *Si \mathcal{A} est une fibration triviale $g : P = S \times Q \rightarrow Q$, (P, Λ) possède une R.I.L. si et seulement si $y \rightarrow [\sigma_y]$ est une submersion de Q un sous-espace affine de dimension finie sur un ouvert σ' de $H^2(S, \mathbb{R})$ dont la direction a une base formée d'éléments de l'image réciproque dans $H^2(S, \mathbb{R})$ de $H^2(S, \mathbb{Z})$.*

DEMONSTRATION.

Partie directe (P, Λ) possède une R.I.L. (M, σ) .

\mathfrak{R}_0^Q étant constant soit ρ le rang constant sur \mathbb{Z} de $\mathfrak{R}_0^Q(y)$, $y \in Q$.

Comme pour tout y $\mathfrak{R}_0^Q(y)$ est un sous-groupe discret fermée de T_y^*Q , le

rang de $\mathfrak{R}_0^Q(y)$ sur \mathbb{Z} est la dimension du \mathbb{R} espace vectoriel

$\mathfrak{R}_0^Q(y) \otimes \mathbb{R}$. Autrement dit ρ est la dimension du \mathbb{R} sous espace vectoriel de T_y^*Q , $\{d\phi_c(y) / c \in H_2(S, \mathbb{R})\}$.

Comme \mathfrak{R}_0^Q est un faisceau, $d\phi_c(y)$ est entièrement déterminée pas sa valeur en un point y_0 de Q , fixé. On peut alors choisir une base c_i de $H_2(S, \mathbb{R})$ constitué de 2-cycles entiers et telle que $(d\phi_{c_i}(y_0))_{1 \leq i \leq \rho}$ soit une base de \mathfrak{R}_0^Q et $d\phi_{c_i}(y_0) = 0$ si $j > \rho$. Soit c_i^* la base duale. Pour tout $c \in H_2(S, \mathbb{R})$

$$\langle c, d\psi \rangle(y) = \langle c, d[\sigma_y] \rangle = d\phi_c(y) = \sum_{i=1}^{\rho} c_i^* d\phi_i(y)$$

où l'on note $\phi_i = \phi_{c_i}$. Ceci s'écrit encore $d\psi(y) = \sum_1^{\rho} c_i^* d\phi_i(y)$

soit
$$\psi(y) = \psi(y_0) + \sum_1^{\rho} c_i^* (\phi_i(y) - \phi_i(y_0))$$

ce qui prouve la partie directe puisque le rang de $d\psi$ est égal au rang sur \mathbb{R} des $d\phi_i$, c'est-à-dire ρ .

Remarques

1 - On n'a nullement supposé S compacte. Si S est compacte la condition de finitude est automatique.

2 - Sous la forme
$$[\sigma_y] = [\sigma_{y_0}] + \sum_1^{\rho} p_i \cdot c_i^*$$

où $p_i(y) = \phi_i(y) - \phi_i(y_0)$, l'obstruction construite peut être présentée ainsi :
Si $(P = S \times Q, \Lambda)$ admet une R.I.L. nécessairement la *forme symplectique des feuilles varie linéairement* pour un système de coordonnées judicieux sur Q .

Réciproque : Par hypothèse il existe ρ formes entières ω_i de S de classe $[\omega_i]$ dans $H^2(S, \mathbb{R})$ et une submersion de Q sur \mathbb{R}^{ρ} $y \rightarrow (p^i(y))_{1 \leq i \leq \rho}$ telles que

$$[\sigma_y] = [\sigma_{y_0}] + \sum_1^{\rho} [\omega_i] p^i(y).$$

Par définition même de $[\mathcal{A}]$, $[\mathcal{A}]$ est la classe dans $H^3(P, \mathcal{A})$ de la 3-forme $\sum_{i=1}^{\rho} \omega_i dp^i \in Z(v_3^*, \mathcal{A})$.

$$\text{On pose } v = \sum_{i=1}^{\rho} [\omega_i] dp^i \quad \mathcal{R}^Q = \bigoplus_{i=1}^{\rho} \mathbb{Z} dp^i$$

et on note \mathcal{R} l'image réciproque de \mathcal{R}^Q sur P . Par construction même \mathcal{R} est un réseau de (P, \mathcal{A}) et $v \in H^2(P, \mathcal{R})$. La réciproque sera prouvée, compte tenu du théorème 5.2, si l'on montre que $\hat{d}_{\mathcal{R}}^* v = [\mathcal{A}]$, ce qui résulte du lemme suivant :

LEMME 1 : Si $v = \sum_{i=1}^{\rho} [\omega_i] dp^i \in H^2(P, \mathcal{R})$, $\hat{d}_{\mathcal{R}}^* v$ est la classe de

$$\sum_{i=1}^{\rho} [\omega_i] dp^i \text{ dans } H^3(P, \mathcal{A}).$$

PREUVE DU LEMME . Soit (U_{α}) un recouvrement de Leray de S pour le faisceau constant \mathbb{R} . On note $U_{\alpha\beta} = U_{\alpha} \cap U_{\beta}$ etc.... $[\omega_i] \in H^2(S, \mathbb{R})$. $[\omega_i]$

est donc la classe dans $H^2(P, \mathbb{R})$ d'un 2-cocycle réel localement constant $(a_{\alpha\beta\gamma}) = a$ obtenu ainsi : U_{α} étant contractile, il existe une 1-forme u_{α}^i sur

U_{α} telle que $du_{\alpha}^i = \omega^i|_{U_{\alpha}} \cdot u_{\beta}^i - u_{\alpha}^i$ est un 1-cocycle de S à valeurs dans le

faisceau des 1-formes fermées sur S . Si $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$ on choisit une application C^{∞} de $U_{\alpha\beta}$ dans \mathbb{R} telle que $df_{\alpha\beta}^i = u_{\beta}^i - u_{\alpha}^i$. a est le cobord

de la 1-cochaîne $f^i = (f_{\alpha\beta}^i)$ de (U_α) à valeurs dans le faisceau des germes d'applications C^∞ de S dans \mathbb{R} . Il est immédiat que $da_{\alpha\beta\gamma} \equiv 0$.

$\hat{d}_{\mathcal{R}}^* : H^2(P, \mathcal{R}) \rightarrow H^3(P, \mathcal{A})$ s'obtient en composant le morphisme de $H^2(P, \mathcal{R})$ dans $H^2(P, Z(v^* \mathcal{A}))$ déduit de l'inclusion et l'isomorphisme de $H^2(P, Z(v^* \mathcal{A}))$ sur $H^3(P, \mathcal{A})$. Ce dernier s'obtient à partir de la résolution molle :

$$0 \longrightarrow Z(v^* \mathcal{A}) \longrightarrow C^\infty(v^* \mathcal{A}) \xrightarrow{d} C^\infty(v_2^* \mathcal{A}) \xrightarrow{d} \dots$$

Pour calculer l'image de $\hat{d}_{\mathcal{R}}^* v$ dans $H^3(P, \mathcal{A})$ on doit donc faire les opérations suivantes : écrire a comme le cobord d'une 1-cochaîne de $C^\infty(v^* \mathcal{A})$; Par construction $a = \partial b$ où $b_{\alpha\beta} = f_{\alpha\beta}^i dp^i$; ensuite prendre l'image par d de la 1-cochaîne ce qui fournit un 1-cocycle $df_{\alpha\beta}^i \wedge dp^i$ de $Z(v_2^* \mathcal{A})$; écrire ensuite a 1-cocycle comme cobord d'une 1-cochaîne de $C^\infty(v_2^* \mathcal{A})$; par construction $b : d\partial c$ où $c_\alpha = u_\alpha^i \wedge dp^i$. La 3-forme cherchée est alors $dc_\alpha = d\partial b$ soit $\omega^i \wedge dp^i$ ce qui achève la démonstration.

Dans [8] le théorème 7.2 est annoncé sous une hypothèse superflue $H^1(S, \mathbb{R}) = 0 = H^3(Q, \mathbb{R})$

REMARQUES.

1) Soit $P = S^2 \times \mathbb{R}^+$ muni de la structure de Poisson dont les feuilles sont $(S^2 \times t)_{t>0}$ munies de la structure symplectique $f \cdot \sigma_0$ où $f : P \rightarrow \mathbb{R}^+$ et σ_0 est la 2-forme canonique de S^2 normalisée.

(i.e. $\int_{S^2} \sigma_0 = 1$). Soit $\bar{f}(t) = \int_{S^2 \times t} f \cdot \sigma_0$. D'après le corollaire 1, P possède une R.I.L. ssi $\bar{f} : \mathbb{R}^+ \rightarrow H^2(S^2, \mathbb{R})$ est soit une submersion, soit une application constante que l'on peut par normalisation supposer égale à 1. Dans ce dernier cas la R.I.L. de réseau $\text{Im}[\mathcal{A}] = 0$ est $S^2 \times T^* \mathbb{R}^+$ avec la structure produit. Si \bar{f} est une submersion, \bar{f} est un difféomorphisme et en prenant $\bar{f}(t)$ comme coordonnées dans \mathbb{R} on obtient une variation linéaire

$$\sigma_t = \sigma_0 \cdot t \quad t > 0$$

et $\text{Im}[\mathcal{A}] = g^*(\mathbb{Z} dt)$. On vérifie alors que $g : (P = S^3 \times \mathbb{R}^+) \rightarrow S^2 \times \mathbb{R}^+$ où g est le produit de la fibration de Hopf par l'identité, est une R.I.L.C si on munit P de la 2-forme $g^*(\sigma_0 t) + dt \wedge \theta_0$ où θ_0 est une connexion sur $S^3 \rightarrow S^2$ de courbure σ_0 . (cf. prop. 6.2)

Par contre si \bar{f} n'est pas du type précédent il n'existe pas de R.I.L. Il en est ainsi en particulier si $f(x,t) = (1+t)^2$. Cet exemple est dû à Alan Weinstein.

2) Si on cherche à résoudre le même problème avec $P = S^2 \times S^1$ le corollaire 1 implique que la seule structure de Poisson sur P admettant $(S^2 \times t)_{t \in S^1}$ comme feuilletage symplectique et possédant une R.I.L. est la structure triviale $\bar{f}(t) = 1$ pour laquelle la R.I.L. est $S^2 \times T^*S^1$ avec la structure symplectique produit.

8. CLASSIFICATION DES GERMES DE R.I.L. REGULIERS AU VOISINAGE D'UNE FEUILLE COMPACTE ET THEOREME DES VARIABLES ACTIONS ANGLES NON COMMUTATIF.

Les remarques qui précèdent relèvent du problème plus général suivant : étant donné une variété symplectique (S, σ_0) classifier les germes de variétés de Poisson réguliers contenant (S, σ_0) comme feuille symplectique et admettant une R.I.L. On va se limiter au cas où S est compacte et simplement connexe ce qui permettra d'obtenir l'extension

non commutative du théorème des variables actions angles d'Arnold [2] visée.

Si S est compacte et simplement connexe, le théorème de stabilité locale de Reeb [29] assure l'existence d'un voisinage \mathcal{A} saturé de S difféomorphe à $S \times Q$ où Q est un ouvert de \mathbb{R}^k (k est la codimension de \mathcal{A}). Autrement dit sous l'hypothèse S compacte et $\pi_1 S = 0$ on peut se limiter à la recherche des structures de Poisson sur $S \times Q$ où Q est un voisinage ouvert contractile de O dans \mathbb{R}^k . D'après le théorème 7.2 de telles variétés de Poisson admettent une R.I.L. si et seulement si l'application ψ de Q dans $H^2(S, \mathbb{R})$ $u \rightarrow [\sigma_u]$ classe de la 2-forme symplectique de $S \times u$, est une submersion sur un ouvert d'un sous-espace affine de $H^2(S, \mathbb{R})$ dont la direction V est telle que le rang de $V \cap H^2(S, \mathbb{Z})$ soit égal à la dimension de V . Soit $(\omega_i)_{1 \leq i \leq k_1}$ k_1 formes entières dont les classes forment une base de V ; alors

$$[\sigma_u] = [\sigma_0] + \sum_1^{k_1} [\omega_i] \psi_i(u).$$

Par un difféomorphisme de Q , conservant l'origine on transforme $S \times Q$ en une nouvelle variété de Poisson, notée $S \times Q$ par abus de notation telle que si (y^i) désignent les k_1 premières coordonnées de Q

$$[\sigma_u] = [\sigma_0] + \sum_1^{k_1} [\omega_i] y^i.$$

Un changement de base dans V se traduit par un changement linéaire de coordonnées dans Q , ce qui induit un difféomorphisme de Poisson de $S \times Q$. Les structures de Poisson sur $S \times Q$ admettant une R.I.L. sont donc classifiées à isomorphismes près pas les sous-espaces vectoriels V de $H^2(S, \mathbb{R})$ tels que la dimension de V soit égale au rang de $V \cap H^2(S, \mathbb{Z})$.

On se propose dorénavant de déterminer les R.I.L. régulières d'une variété de Poisson $(P = S \times Q, \Lambda)$ fixée. A isomorphisme de R.I.L. près, les R.I.L. régulières sont entièrement déterminées par la donnée d'un réseau régulier \mathfrak{R} et de la classe de Chern $v \in H^2(P, \mathfrak{R})$ car ici $H^2(P, \mathcal{A}) \simeq 0$, ce qui assure l'unicité de la R.I.L. de classe de Chern donnée (Théorème 5.2). La nullité de $H^2(P, \mathcal{A})$ résulte du lemme suivant, Q étant ici contractile,

LEMME 1. Si $P = S \times Q$ et si $H^1(S, \mathbb{R}) = 0$ $g : S \times Q \rightarrow Q$ induit un isomorphisme de $H^2(Q, \mathbb{R})$ sur $H^2(P, \mathcal{A})$.

La démonstration est analogue à celle du lemme 1 du paragraphe précédent. (cf. [10]).

Soit \mathcal{R} le réseau d'une R.I.L. régulière. \mathcal{R} est constant et exact et contient $\text{Im}[\mathcal{A}]$. $\mathcal{R}/\text{Im}[\mathcal{A}]$ est égal au produit d'un groupe fini A par un groupe abélien libre $\mathbb{Z}^{\rho-k_1}$ où ρ est le rang de \mathcal{R} . On peut donc trouver deux sous réseaux \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 de \mathcal{R} tels que $\mathcal{R}_1 / \text{Im}[\mathcal{A}] = A$ et $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \oplus \mathcal{R}_2$. Soit Q_2 l'orthogonal de $\mathcal{R}_1 \otimes \mathbb{R}$ et Q_1 un supplémentaire de Q_2 contenu dans l'orthogonal de $\mathcal{R}_2 \otimes \mathbb{R}$.

Si $(y, z) \in Q_1 \times Q_2$ $[\sigma_{(y,z)}] = [\sigma_0] + \sum_1^{k_1} [\omega_i] y^i$. Il résulte alors du lemme de Darboux-Weinstein [32] que P est isomorphe au produit de la variété de Poisson $S \times Q_1$ munie de la structure de Poisson induite par la variété de Poisson triviale Q_2 . Comme $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2$
 $H^2(P, \mathcal{R}) = H^2(S, \mathcal{R}) = H^2(S, \mathcal{R}_1) \times H^2(S, \mathcal{R}_2)$ et $v = (v_1, v_2)$ est telle que

$$\hat{d}_{\mathbb{R}_1}^* v_1 + \hat{d}_{\mathbb{R}_2}^* v_2 = [\omega_i \wedge dy^i].$$

Le lemme 1 du paragraphe 7 assure que $v_2 = 0$. La R.I.L. régulière considérée $M \rightarrow P$ est donc le produit d'une R.I.L.C de $S \times Q_1$ de réseau \mathcal{R}_1 par T^*Q_2 / \mathcal{R}_2 .

Tout revient donc à classer les R.I.L.C de $S \times Q_1$. Soit

$v_s = \sum_1^{k_1} [\omega_i] \wedge dy^i$ et $\pi : E(S) \rightarrow S$ le fibré (unique) de classe de Chern v_s et par abus de notation on note encore $\pi : E(S) \times Q_1 \rightarrow S \times Q_1$.

$E(S) \rightarrow S$ est un T^{k_1} fibré principal. Soit (θ_i) une connexion de courbure $(d\theta^i) = (\omega_i)$.

$(E(S) \times Q_1, \pi^* \sigma_0 + d(y^i \theta_i))$ est (cf. 6.2) l'unique R.I.L.C de classe v_s . On l'appelle R.I.L.C standard de rang k_1

Si $A = \mathfrak{R}_1 / \text{Im}[\mathcal{A}_1]$ A est un groupe fini et s'identifie donc à un sous groupe de T^p . Il en résulte que $(E(S)/A) \times Q_1$ est muni d'une structure symplectique qui en fait l'unique R.I.L.C de réseau \mathfrak{R}_1 et de classe v_1 . On a donc prouvé (cf. [10]).

THEOREME 8.1. *Soit $P = S \times Q$ où S est compacte simplement connexe et Q un ouvert contractile de \mathbb{R}^k . On suppose $P = S \times Q$ munie d'une structure de Poisson admettant une R.I.L. et dont le réseau $\text{Im}[\mathcal{A}]$ est de rang k_1 . Toute R.I.L. de P régulière est isomorphe au produit de la R.I.L.C standard de rang k_1 par le cotangent d'un ouvert numérique Q_2 quotienté par un réseau constant exact de Q_2 .*

REMARQUE.

Si b_2 désigne le deuxième nombre de Betti de S , $k_1 \leq b_2$.

Si $k_1 = b_2$ $\psi : Q \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z})$ est une submersion et donc $[\sigma_0] = \sum_1^{k_1} a_i [\omega_i]$.

Une translation sur les coordonnées (y^i) permet alors d'écrire

$$[\sigma_y] = \sum_1^{k_1} [\omega_i] \cdot y^i.$$

Si $M \rightarrow P_1$ est une R.I.L.C régulière de $P_1 = S \times Q_1$, si (θ_i) est une T^{k_1} connexion de courbure (ω_i) , M est une variété symplectique de 2-forme $\pi^* \omega_i \cdot y_i + dy^i \wedge \theta_i = d(y^i \theta_i)$. M est une variété symplectique exacte.

Les résultats précédents prennent une forme remarquable si S est une orbite régulière d'un groupe semi-simple compact G_1 de rang k_1 . S est nécessairement simplement connexe et $b_2(S) = k_1$. Si l'un s'intéresse aux variétés de Poisson contenant S et de rang k_1 (i.e. $\text{Im}[\mathcal{A}]$ de rang k_1) on est dans la situation de la remarque précédente.

La proposition suivante est une des nombreuses façons d'exprimer le théorème de Kirillov-Kostant-Souriau [30] pour les orbites régulières de la représentation coadjointe.

PROPOSITION 8.1. Soit G_1 un groupe de Lie semi-simple compact de

rang k_1 \mathcal{U}_1 l'ouvert des points réguliers de G_1^* , C^* le dual d'une chambre de Weyl C de G contenue dans l'algèbre \mathfrak{T} d'un tore maximal [cf. 27].

Soit θ la forme de Maurer-Cartan de G . Si on munit la fibration $f :$

$G \times C^* \rightarrow \mathcal{U}$ $f(g, \xi) = -\text{ad}_g^* \xi$ de la structure symplectique de

2-forme $\sigma = -d \langle \xi, \theta \rangle$ f est le R.I.L.C standard de rang k_1 . De plus f est le moment de l'action hamiltonienne à gauche naturelle de G dans $G \times C^*$.

DEMONSTRATION.

On utilise une forme quadratique définie positive invariante sur G_1^* ce qui permet d'identifier C^* à un sous-espace de G_1^* et donne un sens à l'expression $\langle \xi, \theta \rangle$ $\xi \in C^*$.

Compte tenu de l'unicité de la R.I.L.C standard de rang k_1 il suffit de prouver que $f : (G \times C^*, \tilde{\sigma}) \rightarrow \mathcal{U}$ est une R.I.L.C. de rang k_1 .

Tout d'abord on prouve que $\tilde{\sigma}$ est une 2-forme de rang maximum. Il suffit pour ceci d'effectuer les calculs aux points $(e, \xi) \in G \times C^*$. Si $\Xi = (X, X_0)$ et $H = (Y_1, Y_0)$ sont deux vecteurs tangents à $G \times C^*$,

$$\sigma(\Xi, H) = -\langle X_0, Y \rangle + \langle Y_0, X \rangle + \langle \xi, [X, Y] \rangle.$$

Compte tenu de ce que si $X \in \mathfrak{T}$ $\text{ad}_X^* \xi = 0$ on vérifie que σ est de rang maximum, que $\text{Ker Tf} = \mathcal{V}^\sigma$ est un feuilletage isotrope d'orthogonal symplectique le feuilletage $(G \times \xi)_{\xi}$. f est donc le moment de l'action à gauche naturelle de G sur $G \times C^*$. Quant à la forme symplectique des feuilles elle s'obtient en calculant $\tilde{\sigma}$ sur les vecteurs $(X, 0)(Y, 0)$

$$\tilde{\sigma}((X,o),(y,o)) = \langle \xi, [X,Y] \rangle$$

c'est donc la forme de Kostant-Kirillov-Souriau [30].

Soit $\xi_0 \in C^*$. On peut écrire

$$\tilde{\sigma} = -d\langle \xi_0, \Theta \rangle + d\langle \xi - \xi_0, \omega \rangle$$

ce qui entraîne

$$[\sigma_\xi] = [\sigma_{\xi_0}] + \langle \xi - \xi_0, [\omega] \rangle$$

où $\omega = (\omega_i)$ les $[\omega_i]$ constituant une base de $H^2(S_{\xi_0}, \mathbb{Z})$, ce qui achève la démonstration.

REMARQUE.

Si G est un groupe compact de centre Z toute orbite de la représentation coadjointe de G est une orbite de la représentation coadjointe de $G_1 = G/Z$. De plus \mathcal{U} ouvert des points réguliers de G^* est une variété de Poisson de rang k_1 le rang de G_1 . Enfin avec les mêmes notations $f: G \times C \rightarrow \mathcal{U}$ est une R.I.L.C. Si $G = G_1 \times Z$ cette R.I.L.C est isomorphe au produit de la R.I.L.C $G_1 \times C_1 \rightarrow \mathcal{U}_1$ par T^*Z munie de la structure canonique.

Rassemblant les résultats précédents on a prouvé

PROPOSITION 8.2. *Soit S une orbite régulière d'un groupe semi-simple compact G_1 de rang k_1 . A toute R.I.L.C. $M \rightarrow P$ d'une variété de Poisson $P = S \times Q$, où Q est un ouvert contractile de \mathbb{R}^k , de rang k_1 ($k_1 \leq k$) est associé un sous-groupe fini A de T^{k_1} tel que, si l'on désigne par G_C le groupe compact $G_1 \times T^{k-k_1}$ d'algèbre de Lie \mathfrak{G} , \mathcal{U} l'ouvert des points réguliers de \mathfrak{G}^* , $M \rightarrow P$ soit isomorphe en tant que R.I.L.C. à*

$$f: G_C/A \times C^* \rightarrow \mathcal{U}$$

$$f(g \text{ mod } A, \xi) = -\text{ad}_g^* \xi$$

munie de la forme symplectique quotient de $-d\langle \xi, \theta \rangle$ sur $G_C \times C^*$.

APPLICATION.

THEOREME 8.2. (Variables actions-angles non commutatives) [10]. Soit $J : M \rightarrow \underline{G}^*$ une R.I.L.C d'une algèbre de Lie compacte \underline{G} . Le feuilletage de Libermann de moment J est le feuilletage de M par une action hamiltonienne localement libre d'un groupe compact G_C d'algèbre de Lie G .

DEMONSTRATION.

$J : M \rightarrow \underline{G}^*$ étant isomorphe à $G_C / A \times X^* \rightarrow C^*$ pour un certain groupe fini A , le théorème est prouvé.

EXEMPLE.

Soit G un groupe non compact d'algèbre de Lie \underline{G} compacte. Supposons que G agisse sur (M, σ) de façon hamiltonienne coïso trope localement librement en x_0 et que l'orbite de $x_0 \in M$ soit compacte. Soit $J : M \rightarrow \underline{G}^*$ le moment de G . Supposons que $J(x_0) \in \mathcal{U}$ ouvert des points réguliers de G . Le feuilletage de M par les orbites de G est régulier au voisinage de x_0 et sans holonomie. En restreignant M à un ouvert G -saturé de l'orbite de x_0 , W ,

$$J : W \rightarrow \underline{G}^*$$

est une R.I.L.C. d'un ouvert saturé de \underline{G}^* contenu dans \mathcal{U} . J est donc une R.I.L.C du type précédent. Le feuilletage de Libermann de moment J est alors le feuilletage des orbites de W par l'action hamiltonienne d'une forme compacte G_C de G .

REMARQUES.

1. Si \underline{G}^* est abélienne, on retrouve le théorème usuel des variables actions-angles d'où le nom de théorème des variables actions angles non commutatif.

2. C.M. Marle [21] et [22] et R. Nicolaï [24] et [25] ont donné pour les actions hamiltoniennes de groupes des modèles locaux au voisinage d'une orbite du groupe ou au voisinage d'une feuille de

$\mathcal{V} + \mathcal{V}^\sigma$ si \mathcal{V} est le feuilletage par les orbites. Les résultats de ce paragraphe ne supposent pas a priori l'existence d'une action de groupe mais seulement d'une R.I.L. de \underline{G}^* . L'exemple d'application du théorème des variables actions angles non commutatives peut s'interpréter en disant que l'on a déformé l'action coïso trope donnée de groupe G en l'action coïso trope d'une forme compacte G_C de G . On retrouve alors dans le cas particulier des actions coïso tropes les modèles locaux de Marle et Nicolaï.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] R. ABRAHAM-J. E. MARSDEN, *Foundations of mechanics*, 2^{ème} ed., Benjamin, Reading, MA. 1978.
- [2] V. ARNOLD, *Les méthodes mathématiques de la mécanique*. Traduction française. MIR. Moscou 1976.
- [3] N. BOURBAKI, *Variétés*. Fascicule de résultats. Chapitre I à VII. Hermann Editeur. Paris.
- [4] A. COSTE et D. SONDAZ, *Sur certaines submersions d'une variété symplectique sur une variété de Poisson*. C.R. Acad. Sc. Paris 302, Série I, n° 16, 1986, 583-585.
- [5] A. COSTE et D. SONDAZ, *Classification de submersion de Poisson isotropes*. Travaux du Séminaire Sud-Rhodanien de Géométrie I (Variétés de Poisson, Géométrie du moment, variables actions-angles). Publ. Dept. Math. Lyon 1988.
- [6] P. DAZORD, *Sur la géométrie des sous-fibrés et feuilletages lagrangiens*. Ann. Sc. E.N.S. (4) 13. (1981) 465-480 et Erratum (4) (18) (1985), p. 685.
- [7] P. DAZORD, *Feuilletages et Mécanique Hamiltonienne*. Publ. Dep. Math. Lyon 1983. 3 et 38.
- [8] P. DAZORD, *Obstruction à un troisième théorème de Lie non linéaire pour certaines variétés de Poisson* C.R. Acad. Sc. Paris. 306, série I, p. 273-278 (1988).
- [9] P. DAZORD et T. DELZANT, *Classe de Chern de certaines fibrations isotropes*. C.R. Acad. Sc. Paris, Série I. Math. 300 (1985) 137-140.
- [10] P. DAZORD et T. DELZANT, *Le problème général des variables actions angles* J. Differential Geometry 26 (1987) 223-251.
- [11] P. DAZORD et G. HECTOR, *Sur l'intégrabilité de certaines variétés de Poisson régulières* (en préparation).

- [12] T. DELZANT, *Sur certaines fibrations des variétés symplectiques*. C.R. Acad. Sc. Paris, Série I, Math. 299 (1984) 883-886.
- [13] T. DELZANT, *Variables actions angles non commutatives et images convexes de l'application moment*. Thèse de doctorat de l'Université Paris VI. 1986.
- [14] J.J. DUISTERMAAT, *On global action angle coordinates*. Comm. Pure. Appl. Math. 33 (1980) 687-706.
- [15] J.J. DUISTERMAAT et G.J. HECKMANN, *On the variation in the cohomology of the reduced phase spaces*. Invent. Math. 69 (1983) 259-268.
- [16] R. GODEMENT, *Théorie des faisceaux*. Hermann, Paris.
- [17] GORDON, *On the relation between period and energy in periodic dynamical systems*. J. Math. Mach. 19. 114.
- [18] A. GROTHENDIECK, *A general theory of fibre bundles with structure sheaf*, 2^{ème} edition University of Kansas, Lansing, Kansas, 1958.
- [19] P. LIBERMANN et C.M. MARLE, *Géométrie symplectique, Base théorique de la Mécanique*. Publ. Math. Univ. Paris VII.
- [20] A. LICHNEROWICZ, *Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées*. J. Differential Geometry 12 (1977) 253-300.
- [21] C.M. MARLE, *Classification des actions hamiltoniennes au voisinage d'une orbite* C.R. Acad. Sc. Paris Ser. I Math. 299 (1984).
- [22] C.M. MARLE, *Classification d'actions hamiltoniennes de groupes de Lie* in "Actions hamiltoniennes de groupes. Troisième théorème de Lie" (P. Dazord, N. Desolneux-Moulis, J.M. Morvan, ed.) Travaux en Cours n° 27. Hermann 1988. Paris.
- [23] P. MOLINO, *Géométrie globale des feuilletages riemanniens*. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A (85) 1982, 45-76.
- [24] R. NICOLAI, *Action libre et hamiltonienne d'un groupe compact dans une variété symplectique*. C.R. Acad. Sc. Paris, Ser. I. Math. 296 (1983), 985-987.
- [25] R. NICOLAI, *Modèle d'action libre et hamiltonienne d'un groupe compact connexe sur une variété symplectique*. Thèse 3^o cycle (1984). Université Paris VI.
- [26] N.N. NEKHOROSHEV, *Action-angle variables and their generalizations*. Trans. Moscow. Math. Soc. 26 (1972), 180-198.

- [27] R. OUZILOU, *Sous-algèbres de Cartan in Travaux Séminaire Sud-Rhodanien de géométrie I. (Variétés de Poisson, Géométrie du moment, Variables actions-angles)*. Publ. Dept. Math. Lyon 1988.
- [28] J. PRADINES, *Théorie de Lie pour les groupoïdes différentiables. Relations entre propriétés locales et globales*. C.R. Acad. Sc. Paris 263 (1966). 907-910.
- [29] G. REEB, *Sur certaines propriétés des variétés feuilletées*. Hermann. Paris 1952.
- [30] J.M. SOURIAU, *Structure des systèmes dynamiques*. Dunod. Paris 1969.
- [31] T. VAISMAN, *Cohomology and differential forms*. Monographs & textbooks in Pure Appl. Math. Marcel Dekker. New-York.
- [32] A. WEINSTEIN, *Symplectic manifolds and their lagrangian submanifolds*. Advances in Math. 6 (1971) 329-346.