

SAMUEL D. EKONG  
**Sur l'analyse algébrique II**

*Publications du Département de Mathématiques de Lyon*, 1988, fascicule 3B  
, p. 77-98

[http://www.numdam.org/item?id=PDML\\_1988\\_\\_3B\\_77\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PDML_1988__3B_77_0)

© Université de Lyon, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# SUR L'ANALYSE ALGÈBRE II

par Samuel D. EKONG

## INTRODUCTION

Cet article est la suite de "Analyse algébrique I" [3]; il constitue un maillon dans le travail que nous consacrons aux méthodes algébriques dans l'étude des équations différentielles. Nous n'aborderons pas ici les  $\mathcal{D}$ -modules ; il s'agit essentiellement de fabriquer des outils relativement simples qui permettent l'exploitation des résultats obtenus dans l'étude des points singuliers réguliers des systèmes d'équations différentielles algébriques.

$$\text{Soit : } \frac{dy}{dz} = A(z)y \text{ (ou } z \frac{dy}{dz} = A(z)y)$$

un système différentiel où  $A(z)$  est une matrice carrée d'ordre  $n$  à coefficients méromorphes au voisinage de  $0$ .

L'étude d'un tel système est équivalente à l'étude d'une équation différentielle linéaire d'ordre  $n$ .

Plusieurs critères permettent de déterminer le "type" de la singularité du système au point  $0$ . Nous avons adopté le point de vue de N. Katz par l'utilisation des connexions linéaires ce qui nous a conduit à retenir comme "mesure" : le rang rationnel de N. Katz l'indice de B. Malgrange et les invariants de R. Gerard et A.H.M. Levelt.

L'utilisation de ces critères exige d'avoir à sa disposition un vecteur cyclique. La construction d'un tel vecteur est donc essentielle. A. Dabèche donne dans [1], un procédé de construction. Nous proposons dans la partie III de cet article une autre méthode inspirée par les travaux de J.P. Ramis.

## I. NOTATIONS ET RAPPELS.

$\mathcal{O}$  désigne soit l'anneau  $\mathbb{C}\{z\}$  des germes de fonctions holomorphes au voisinage de  $0$  soit l'anneau  $\mathbb{C}[[z]]$  des séries formelles en  $z$  à coefficients dans  $\mathbb{C}$  ;  $\mathbb{K}$  est le corps des quotients de  $\mathcal{O}$  et  $\mathfrak{M}$ , l'idéal de la valuation  $v_0$  dont l'anneau est  $\mathcal{O}$ . On a  $\mathfrak{M} = z \mathcal{O}$  ;  $\mathcal{O}$  est un anneau de valuation discrète (voir [8]).

Soit  $\Omega$  le  $\mathcal{O}$ -module des différentielles de  $\mathcal{O}$  et  $d : \mathcal{O} \rightarrow \Omega$ , la dérivation canonique de  $\mathcal{O}$  dans  $\Omega$ .

$\Omega$  est un  $\mathcal{O}$ -module libre de base  $dz$  et  $\Omega = \mathcal{O}dz$ .

Notons  $\text{Der}(\mathcal{O})$  : le  $\mathcal{O}$ -module des dérivations de  $\mathcal{O}$  dans  $\mathcal{O}$ ,  $\Omega^*$  : le dual de  $\Omega$ .

A toute forme linéaire  $\tau$  sur  $\Omega$  est associée une unique dérivation  $\partial_\tau$  de  $\mathcal{O}$  dans  $\mathcal{O}$ , rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \partial_\tau & \\ & \mathcal{O} \longrightarrow & \mathcal{O} \\ & | & \\ d & & \tau \\ & \Omega & \end{array}$$

ci-contre. On a alors  $\tau \circ d = \partial_\tau$ , L'application

$\tau \rightarrow \tau \circ d = \partial_\tau$  est un isomorphisme de  $\mathcal{O}$ -

modules qui permet d'identifier  $\text{Der}(\mathcal{O})$  à  $\Omega^*$ .

La dérivation canonique  $d$  de  $\mathcal{O}$  dans  $\Omega$  se prolonge de manière unique sur  $\mathbb{K}$  en

posant pour tout  $f = p/q \in \mathbb{K}$

$$df = \frac{qdp - pdq}{q^2}.$$

$\Omega_{\mathbb{K}} = \mathbb{K} \otimes_{\mathcal{O}} \Omega$  est le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des différentielles sur  $\mathbb{K}$ ;  $\Omega_{\mathbb{K}}$  s'identifie à  $\mathbb{K}dz$  et  $\dim_{\mathbb{K}}(\Omega_{\mathbb{K}}) = 1$ .

La dérivation canonique  $d$  est alors une dérivation de  $\mathbb{K}$  dans  $\Omega_{\mathbb{K}}$  et comme ci-dessus, on identifie le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $\text{Der}(\mathbb{K})$  au dual  $\Omega_{\mathbb{K}}^*$  de  $\Omega_{\mathbb{K}}$ , au

moyen de l'isomorphisme :  $\tau \rightarrow \partial_\tau = \tau \circ d$ , où  $\tau \in \Omega_{\mathbb{K}}^*$ .

### 1-1 Espaces vectoriels à connexion.

Soit  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n > 0$ .

**Définition.** Une connexion linéaire sur  $V$ , est une application  $\nabla : V \rightarrow \Omega_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} V$ , telle que

i)  $\nabla$  est additive, i.e.,

$$\forall (v, v') \in V^2, \nabla(v+v') = \nabla(v) + \nabla(v')$$

ii)  $\forall f \in \mathbb{K}, \forall v \in V$

$$\nabla f v = f \nabla(v) + df \otimes v. \text{ (identité de Leibniz).}$$

**Définition.** Un espace vectoriel à connexion, est un couple  $(V, \nabla)$ , où  $V$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $> 0$  et  $\nabla$  une connexion linéaire sur  $V$ .

Soit  $(V, \nabla)$  un espace vectoriel à connexion et  $\tau \in \Omega_{\mathbb{K}}^*$ ; considérons les applications  $\nabla_{\tau} : V \rightarrow V$  et  $\partial_{\tau} : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ , définies par

$$a) \forall v \in V, \nabla_{\tau}(v) = \langle \nabla(v), \tau \rangle$$

$$b) \forall f \in \mathbb{K}, \partial_{\tau}(f) = \langle df, \tau \rangle$$

ceci signifie que si :  $\nabla(v) = \sum_{i=1}^n \omega_i \otimes v_i$ ,  $\omega_i \in \Omega_{\mathbb{K}}$ ,  $v_i \in V$ ,  $\langle \nabla(v), \tau \rangle = \sum_{i=1}^n \tau(\omega_i) v_i$  et

$$\partial_{\tau} = \tau \circ d.$$

1.1.1 :  $\partial_{\tau}$  est une dérivation sur  $\mathbb{K}$ .

1.1.2 :  $\forall f \in \mathbb{K}, \forall (v, v') \in V^2$ .

$$\nabla_{f\tau}(fv) = f \nabla_{\tau}(v) + \partial_{\tau}(f)v$$

$$\nabla_{\tau}(v) = f \nabla_{\tau}(v).$$

1.1.3 : Si  $k$  désigne le corps des constantes de  $\partial_{\tau}$ , alors  $\nabla_{\tau}$  est  $k$ -linéaire.

1.1.4 : Expression analytique de  $\nabla_{\tau}$ .

Soit  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ , une base de  $V$ ,  $\tau \in \Omega_{\mathbb{K}}^*$ .

$\nabla(e_j) = \sum_{i=1}^n \omega_i \otimes e_i$ ,  $\omega_{ij} \in \mathbb{K}$ ; posons  $\tau(\omega_{ij}) = a_{ij}$  il vient  $\nabla_{\tau}(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$ , soit

$A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$  matrice carrée d'ordre  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$ . Pour tout

$v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$  de  $V$  posons  $\partial_{\tau}(v) = \sum_{i=1}^n \partial_{\tau}(v_i) e_i$ , il vient  $\forall v = \sum_{i=1}^n v_j e_j \in V$ .

$$\begin{aligned}
\nabla_\tau(v) &= \langle \nabla(v), \tau \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n v_j \nabla(e_j) + dv_j \otimes e_j, \tau \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^n v_j \langle \nabla(e_j), \tau \rangle + \sum_{j=1}^n \langle dv_j \otimes e_j, \tau \rangle \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n v_j a_{ij} e_i + \sum_{j=1}^n \partial_\tau(v_j) e_j \\
&= A(v) + \partial_\tau(v).
\end{aligned}$$

On en déduit que :  $\nabla_\tau = A + \partial_\tau$ .

**Définition :**  $A$  est appelée (par abus de langage) la matrice de  $\nabla_\tau$  dans la base  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ ;  $\nabla_Z$  est un opérateur différentiel sur  $V = \mathbb{K}^n$  et  $\nabla_\tau(Y) = \partial_\tau(Y) + AY$ ,  $Y \in V$ , représente un système différentiel.

Par conséquent si  $(V, \nabla)$  est un espace vectoriel à connexion, la donnée de  $\tau \in \Omega_{\mathbb{K}}^*$ , correspond à la donnée d'un opérateur différentiel  $\nabla_\tau$  sur  $V$ ; que devient cet opérateur dans un changement de base ?

### 1.1.5. Action d'un changement de base.

Soient  $(e) = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ , une base de  $V$ ,  $A$  : la matrice de  $\nabla_\tau$  dans cette base,  $(e') = (e'_i)_{1 \leq i \leq n}$  une autre base de  $V$ ,  $P$  la matrice de passage de la base  $(e)$  à la base  $(e')$  on a :  $\nabla_\tau = \partial_\tau + A$  et  $\forall y \in V$ ,  $\nabla_\tau(Y) = \partial_\tau(Y) + AY$ ; posons  $Y=PZ$ , il vient

$$\begin{aligned}
\nabla_\tau(PZ) &= \partial_\tau(PZ) + APZ \\
&= P \partial_\tau(Z) + \partial_\tau(P)Z + APZ, \text{ d'où} \\
P^{-1} \nabla_\tau P(Z) &= \partial_\tau(Z) + P^{-1} \partial_\tau(P)(Z) + P^{-1} AP(Z).
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} P^{-1} \nabla_{\tau} P &= \partial_{\tau} + P^{-1} \partial_{\tau}(P) + P^{-1} AP \\ &= \partial_{\tau} + B, \end{aligned}$$

où  $B = P^{-1} \partial_{\tau}(P) + P^{-1} AP$

Un système différentiel sur  $V = \mathbb{K}^n$ , est une expression de la forme

$$\Phi(Y) = \partial_{\tau}(Y) - AY, \text{ où } \tau \in \Omega_{\mathbb{K}}^*, \partial_{\tau} \in \text{Der}(\mathbb{K}) \text{ et } A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}).$$

**Définition :** Soit  $\tau \in \Omega_{\mathbb{K}}^*$ ,  $\partial_{\tau} \in \text{Der}(\mathbb{K})$  ; deux systèmes différentiels

$$\Phi(Y) = \partial_{\tau}(Y) - AY$$

$\Psi(Y) = \partial_{\tau}(Y) - BY$ , sur  $V = \mathbb{K}^n$ , sont dits semblables (ou  $\mathbb{K}$ -équivalents), s'il existe  $P$  dans  $GL_n(\mathbb{K})$ , telle que :  $B = P^{-1}AP - P^{-1} \partial_{\tau}(P)$ . La relation de similitude, est une relation d'équivalence entre systèmes différentiels.

### 1.1.6. Systèmes différentiels et connexions linéaires.

**Proposition 1 :** A tout système différentiel  $\Phi(Y) = \partial_{\tau}(Y) - AY$ , sur  $V$ , est associée une connexion linéaire sur  $V$ .

**Preuve.** Soient  $\tau \in \Omega_{\mathbb{K}, \tau \neq 0}^*$ ,  $\partial_{\tau} \in \text{Der}(\mathbb{K})$ ,  $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in V, \quad \Phi(Y) = \begin{pmatrix} \partial_{\tau}(y_1) \\ \vdots \\ \partial_{\tau}(y_n) \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

La donnée de  $\partial_{\tau} = d \circ \tau$  et  $A = (a_{ij})$  permet de définir la connexion linéaire  $\nabla$  de la manière suivante :

1°) Soit  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  une base de  $V$  ;  $\nabla$  est l'application additive de  $V$  dans  $\Omega_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} V$ , définie par :

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \nabla(e_j) = \sum_{i=1}^n \omega_{ij} \otimes e_i, \text{ où les } \omega_{ij} \text{ sont des éléments de } \Omega_{\mathbb{K}},$$

tels que  $\tau(\omega_{ij}) = a_{ij} \in \mathbb{K}$ ;  $\tau$  n'étant pas nulle,  $\tau_1$  est surjective d'où l'existence des  $\omega_{ij}$ .

2°) On pose  $\forall f \in \mathbb{K}, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$\nabla(fe_i) = f\nabla(e_i) + df \otimes e_i.$$

On vérifie alors aisément que  $\nabla$  est une connexion linéaire sur  $V$ ; cependant cette connexion linéaire n'est pas unique en effet :  $\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \nabla' = \nabla + M$ , est une connexion linéaire sur  $V$ .

**Définition :** Soient  $(V, \nabla)$ , un espace vectoriel à connexion  $\tau \in \Omega_{\mathbb{K}}^*$ ,  $\tau \neq 0$ ; un vecteur  $e$  de  $V$  est dit cyclique pour  $\nabla_{\tau}$ , si la famille,  $(\nabla_{\tau}^i(e))_{0 \leq i \leq n-1}$  est une base de  $V$ .

**Proposition 2 :** Soient  $(V, \nabla)$  un espace vectoriel à connexion,  $\tau \in \Omega_{\mathbb{K}}^*$ ,  $\tau' \neq 0$ , si  $e \in V$  est  $\nabla_{\tau}$ -cyclique alors  $\forall \tau' \in \Omega_{\mathbb{K}}^*$ ,  $\tau' \neq 0$ ,  $e$  est  $\nabla_{\tau'}$ -cyclique.

**Preuve.** Supposons  $e \in V$ ,  $\nabla_{\tau}$ -cyclique alors  $(\nabla_{\tau}^i(e))_{0 \leq i \leq n-1}$ , est une base de  $V$ .

Soit  $\tau' \in \Omega_{\mathbb{K}}^* - \{0\}$ ,  $\dim_{\mathbb{K}}(\Omega_{\mathbb{K}}) = \dim_{\mathbb{K}}(\Omega_{\mathbb{K}}^*) = 1$  il existe donc  $f \in \mathbb{K}$ ,  $f \neq 0$  tel que

$\tau' = f\tau$   $\nabla_{\tau'}(e) = \nabla_{f\tau}(e) = f\nabla_{\tau}(e)$ ; supposons  $\alpha_0 e + \alpha_1 \nabla_{\tau'}(e) = 0$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{K}$ ; il vient

$\alpha_0 e + \alpha_1 f\nabla_{\tau}(e) = 0$ , d'où  $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$ , donc la famille  $\{e, \nabla_{\tau'}(e)\}$  est libre;

supposons que pour  $0 \leq k < n-1$ ,  $(\nabla_{\tau'}^i(e))_{0 \leq i \leq k}$  soit libre et soit

$$\lambda_0 e + \lambda_1 \nabla_{\tau'}(e) + \dots + \lambda_k \nabla_{\tau'}^k(e) + \lambda_{k+1} \nabla_{\tau'}^{k+1}(e) = 0 \text{ une combinaison linéaire}$$

nulle; on a  $\nabla_{\tau'}(e) = f\nabla_{\tau}(e)$ .

$$\nabla_{\tau}^2(e) = \nabla_{\tau}(f\nabla_{\tau}(e)) = f^2\nabla_{\tau}^2(e) + f\partial_{\tau}(f)\nabla_{\tau}(e).$$

Supposons que pour,  $1 \leq k < n-1$

$$\nabla_{\tau}^k(e) = f^k\nabla_{\tau}^k(e) + \alpha_{k;k-1}\nabla_{\tau}^{k-1}(e) + \dots + \alpha_{k,1}\nabla_{\tau}(e) \quad \alpha_{k,i} \in \mathbb{K} ; \text{ alors}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\tau}^{k+1}(e) &= f\nabla_{\tau}[f^k\nabla_{\tau}^k(e) + \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_{k,i}\nabla_{\tau}^i(e)] \\ &= f^{k+1}\nabla_{\tau}^{k+1}(e) + \alpha_{k+1,k}\nabla_{\tau}^k(e) + \dots + \alpha_{k+1,1}\nabla_{\tau}(e). \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\sum_{i=0}^{k+1} \lambda_i \nabla_{\tau}^i(e) = 0 \text{ est équivalent à}$$

$$\lambda_0 e + (\lambda_1\alpha_{1,1} + \lambda_2\alpha_{2,1} + \dots + \lambda_{k+1}\alpha_{k+1,1})\nabla_{\tau}(e) + \dots + \lambda_{k+1}f^{k+1}\nabla_{\tau}^{k+1}(e) = 0$$

$$\text{d'où} \quad \left| \begin{array}{l} \lambda_0 = 0 \\ \lambda_{k+1} = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0, 1 \leq i \leq k \end{array} \right.$$

donc  $(\nabla_{\tau}^i(e))_{0 \leq i \leq k+1}$ , est libre donc  $(\nabla_{\tau}^i(e))_{0 \leq i \leq n-1}$  est une base de  $V$ , par

conséquent,  $e$  est  $\nabla_{\tau}$ -cyclique.

**Définition :** Soit  $\tau \in \Omega_{\mathbb{K}}^*$ ,  $\tau \neq 0$ ; un vecteur  $e$  de  $V$   $\nabla_{\tau}$ -cyclique, est dit cyclique.

**Théorème (P. Deligne) [2] :** Soit  $(V, \nabla)$  un espace vectoriel à connexion alors  $V$  possède un vecteur cyclique.

L'étude des systèmes différentiels englobe celle des équations différentielles de la forme

$$\frac{d^n y}{dz^n} = a_{n-1}(z) \frac{d^{n-1} y}{dz^{n-1}} + \dots + a_1(z) \frac{dy}{dz} + a_0(z)y$$



en posant  $y_0 = y, y_1 = y'_0, \dots, y_{n-1} = y'_{n-2} = y^{(n-1)}$

$$y_n = y'_{n-1}, Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & \\ \alpha_0 & a_1 & \dots & \dots & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

on a  $\frac{dy}{dz} = AY$ .

Le théorème ci-dessus connu sous la dénomination du lemme du vecteur cyclique conduit au résultat suivant :

**Théorème (P. Deligne) [2] :** Soit  $\partial_\tau = z \frac{d}{dz} \in \text{Der}(\mathbb{K})$ , tout système différentiel  $\partial_\tau(Y) = AY$ , dans  $V$ , se ramène à une équation différentielle linéaire d'ordre  $n$ .

**Preuve.** Soit  $\varepsilon \in V$  un vecteur cyclique,  $(e_i)_{0 \leq i \leq n-1}$  la base de  $V$  dans laquelle la

matrice de  $\nabla_\tau$  est  $A$  ; soit  $P$  la matrice de passage, posons  $Y = PZ, Z = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_{n-1} \end{pmatrix}$

Le système  $\partial_\tau(Y) = AY$  est alors équivalent au système  $\partial_\tau(Z) = BZ$  où  $B = P^{-1}AP - P^{-1} \partial_\tau(P)$  d'où le système

$$\begin{cases} \partial_\tau(z_0) = b_0 z_{n-1} \\ \partial_\tau(z_1) = z_0 + b_1 z_{n-1} \\ \vdots \\ \partial_\tau(z_{n-1}) = z_{n-2} + b_{n-1} z_{n-1} \end{cases}$$

ce système se ramène à une équation différentielle de la forme

$$\partial_{\tau}^n(z_{n-1}) = \beta_{n-1} \partial_{\tau}^{n-1}(z_{n-1}) + \dots + \beta_1 \partial_{\tau}(z_{n-1}) + \beta_0 z_{n-1}.$$

J.P. Ramis donne dans [7], une démonstration qui, dans le cas  $\partial_{\tau} = \frac{d}{dz}$  établit l'équivalence entre système différentiel d'ordre 1 et équation différentielle linéaire d'ordre n. Cette démonstration n'utilise pas le lemme du vecteur cyclique ; c'est cependant en s'inspirant de sa méthode que nous donnons une construction explicite d'un vecteur cyclique.

Soit  $\tau \in \Omega_{\mathbb{K}}^*$ ,  $\tau \neq 0$ , et soit  $e \in V$ , un vecteur cyclique la matrice A de  $\nabla_{\tau}$  dans la base  $(\nabla_{\tau}^i(e))_{0 \leq i \leq n-1}$  a la forme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_0 \\ 1 & 0 & \dots & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & b_{n-1} \end{pmatrix}$$

## II. Points singuliers réguliers.

Soit  $\frac{d^n y}{dz^n} = a_{n-1}(z) \frac{d^{n-1} y}{dz^{n-1}} + \dots + a_1(z) \frac{dy}{dz} + a_0(z)y$  une équation différentielle

linéaire d'ordre  $n \geq 1$ , à coefficients dans  $\mathbb{K} = \mathbb{C}\{\{z\}\}$  : le corps des fonctions méromorphes au voisinage de 0.

Cette équation se ramène au moyen d'un vecteur cyclique à un système différentiel de la forme

$$\frac{dy}{dz} = AY, \quad A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}).$$

**Définition :** On dit que 0 est un point singulier régulier du système différentiel

$\frac{dy}{dz} = AY$ ,  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ , (ou de l'équation différentielle) s'il existe un système fondamentale de solutions à croissance modérée au voisinage de 0.

(une fonction f est dite à croissance modérée au voisinage de 0, s'il existe un entier naturel n tel que  $\lim_{z \rightarrow 0} z^n / f(z) = 0$ ,  $\theta_0 < \text{Arg } z < \theta_1$ ).

**Théorème (L.I. Fuchs) :** Soit  $\frac{d^n y}{dz^n} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(z) \frac{d^i y}{dz^i}$ ,  $a_i(z) \in \mathbb{K}$  une équation

différentielle linéaire d'ordre  $n \geq 1$ ;  $o$  est un point singulier régulier de cette équation si :

$\forall i, 0 \leq i \leq n-1$ ,  $a_i(z)$  a un pôle d'ordre inférieur ou égal à  $n-i$ , ce qui est équivalent à  $v_o(a_i(z)) \geq i-n$  (conditions de Fuchs).

Au moyen d'un vecteur cyclique diverses mesures : le rang rationnel de N. Katz, l'indice de B. Malgrange les invariants de R. Gérard et A.H.M. Levelt, permettent, dans le cas des systèmes différentiels de la forme  $\frac{dy}{dz} = A(z)Y$ ,  $A(z) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$  de préciser la nature du point singulier  $o$ .

## Rappels sur les résultats de N. Katz B. Malgrange, R. Gérard et A.H.M. Levelt.

### 2.1. Le rang rationnel de N. Katz.

Soient  $(V, \nabla)$ , un espace vectoriel à connexion,  $\partial_\tau = z \frac{d}{dz}$  et  $\nabla_\tau = \partial_\tau - A$ ,  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ . Un réseau  $\Lambda$  de  $V$ , est un  $\mathcal{O}$ -module libre qui engendré  $V$ ; on a alors  $\Lambda = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O} e_i$  où  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ , est une base de  $V$ . N. Katz définit le nombre rationnel  $r$  de la manière suivante :

soit  $\Lambda$ , un réseau de  $V$ , l'application  $v_\Lambda : V \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ , définie par :

$$\forall x \in V, v_\Lambda(x) = \sup \{n \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\} / x \in \mathfrak{M}^n \Lambda\}$$

où  $\mathfrak{M}$  est l'idéal de la valuation  $v_o$  d'anneau  $\mathcal{O}$ , possède les propriétés suivantes :

a/  $\forall (x, y) \in V^2, v_\Lambda(x+y) \geq \inf \{v_\Lambda(x), v_\Lambda(y)\}$

b/  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in V, v_\Lambda(\lambda x) = v_o(\lambda) + v_\Lambda(x)$

c/  $v_\Lambda(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \Lambda$

$$d/v_{\wedge}(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

**Théorème (N. KATZ) :** *Il existe un nombre rationnel  $r \geq 0$  tel que pour tout réseau  $\Lambda$  de  $V$ , et toute base  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  de  $V$ , il existe une constante  $C$  telle que pour tout entier  $i$  de  $\mathbb{N}$  on ait :*

$$| \sup_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \leq i}} \{-v_{\wedge}(\nabla_{\tau}^j(e_k)) - ri\} \leq C$$

On trouvera une démonstration de ce théorème dans [2].

**Définition :**  *$r$  est appelé le rang rationnel de N. Katz.*

**Théorème (P. Deligne) [2] :** *Soient  $(V, \nabla)$  un espace vectoriel à connexion*

$$\tau = \frac{d}{dz} \text{ et } \Theta = z \frac{d}{dz}$$

*soit  $\varepsilon$  un vecteur cyclique de  $V$ , on a :*

$$\nabla_{\Theta}^n(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i(z) \nabla_{\Theta}^i(\varepsilon)$$

$$\nabla_{\tau}^n(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(z) \nabla_{\tau}^i(\varepsilon), \text{ alors}$$

$$r = \sup \left\{ 0, \sup_{0 \leq i \leq n-1} \left( -\frac{v_0(b_i(z))}{n-i} \right) \right\}$$

$$r = \sup \left\{ 0, \sup_{0 \leq i \leq n-1} \left( -\frac{v(a_i(z))}{n-i} \right) - 1 \right\}.$$

**Théorème. (N. Katz) :**  *$0$ , est un point singulier régulier si  $r = 0$ .*

## 2.2. L'indice de B. Malgrange [6].

Soient  $E$  et  $F$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels  $u : E \rightarrow F$ , une application linéaire. On dit que  $u$  est à indice si  $\dim(\text{Ker}(u))$ , et  $\dim(\text{coker}(u))$ , sont finis ; l'indice de  $u$  est alors l'entier

$$\chi(u) = \dim(\text{ker}(u)) - \dim(\text{coker}(u)).$$

Soit  $D = \sum_{i=0}^n a_i(z) \frac{d^i}{dz^i}$ ,  $a_i(z) \in \mathbb{C}\{z\}$ ,  $a_n(z) \neq 0$ .

B. Malgrange démontre dans [6] que

$D : \mathbb{C}[[z]] \rightarrow \mathbb{C}[[z]]$ , et  $D : \mathbb{C}\{z\} \rightarrow \mathbb{C}\{z\}$ , sont à indice, et ont pour indice respectif

$$\chi(D, \mathbb{C}[[z]]) = \sup_{0 \leq i \leq n} \{i - v_0(a_i(z))\}$$

$$\chi(D, \mathbb{C}\{z\}) = n - v_0(a_n(z)).$$

**Définition :**  $i(D) = \chi(D, \mathbb{C}[[z]]) - \chi(D, \mathbb{C}\{z\})$ , est appelé l'indice de B. Malgrange. Cet indice mesure la différence, où "irrégularité" entre résolution formelle et résolution analytique.

**Théorème. (B. Malgrange).**

$$i(D) = \sup_{0 \leq i \leq n} \{v_0(a_n(z) - n - (v_0(a_i(z)) - i))\}.$$

Soit  $\frac{dy}{dz} = A(z)Y$ ,  $A(z) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$  un système différentiel ; ce système se ramène à une équation différentielle au moyen d'un vecteur cyclique ; si l'on pose  $\theta = z \frac{d}{dz}$ , soit  $\epsilon$  un vecteur cyclique de  $V$ , on a :

$$\nabla_{\theta}^n(\epsilon) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i(z) \nabla_{\theta}^i(\epsilon)$$

en posant  $D = \theta^n - \sum_{i=0}^{n-1} b_i(z) \theta^i$ , l'étude du système différentiel ci-dessus est alors équivalente à l'étude de l'équation différentielle :

$$\theta^n(y) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i(z) \theta^i(y).$$

**Théorème. (B. Malgrange).**

$$a/i(D) = \sup_{0 \leq i \leq n-1} (-v_0(b_i(z))).$$

$b/0$ , est un point singulier régulier si  $i(D) = 0$ .

### 2.3 Les invariants de R. Gérard et A.H.M. Levelt. [4].

Soient  $(V, \nabla)$  un espace vectoriel à connexion  $\tau \in \Omega^*$ ,  $\tau \neq 0$ ,  $\nabla_\tau = \partial_\tau - A$ ,  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ . Pour tout réseau  $\Lambda$  de  $V$  et tout  $m \in \mathbb{N}$

2.3.1.  $\mathfrak{F}_\tau^m(\Lambda) = \sum_{i=0}^m \nabla_\tau^i(\Lambda)$ , est un réseau de  $V$ .

2.3.2.  $Q_\tau^m(\Lambda) = \mathfrak{F}_\tau^{m+1}(\Lambda) / \mathfrak{F}_\tau^m(\Lambda)$ , est un  $\mathcal{O}$ -module de longueur finie,

$\nabla_\tau$  induit un épimorphisme  $\nabla_\tau^m$  de  $Q_\tau^m(\Lambda)$  sur  $Q_\tau^{m+1}(\Lambda)$  et  $(Q_\tau^m(\Lambda), \nabla_\tau^m)_{m \geq 0}$  est un système inductif.

Soit  $Q_\tau^\infty(\Lambda)$  la limite inductive de cette famille.

2.3.3.  $Q_\tau^\infty(\Lambda)$  est de longueur finie soit  $\rho_\tau(\Lambda)$  sa longueur pour  $\partial_\tau = z^r \frac{d}{dz}$ ,

$r \in \mathbb{N}^*$ , Gérard et Levelt prouvent que  $\rho_\tau(\Lambda)$  ne dépend pas de  $\Lambda$  et posent  $\rho_t(\Lambda) = \rho_r$ ,  $r \in \mathbb{N}^*$ .

**Théorème** (R. Gérard et A.H.M. Levelt) : *Il existe  $q \in \mathbb{N}^*$ , tel que  $\rho_q = 0$  soit*

$$\ell = \inf\{q \in \mathbb{N}^* / \rho_q = 0\} \text{ alors } \rho_1 > \rho_2 > \dots > \rho_{\ell-1} > 0.$$

**Définition** : *Les entiers  $(\rho_k)_{1 \leq k \leq \ell-1}$ , sont appelés les invariants de Gérard et Levelt de la connexion  $\nabla$ ,  $\ell$  est appelée l'ordre de la singularité de la connexion  $\nabla$ ,  $\rho_1$  est l'invariant de Fuchs de  $\nabla$ .*

**Théorème** (R. Gérard-A.H.M. Levelt) : *0, est un point singulier régulier si  $\rho_1 = 0$ .*

**THEOREME.** (R. Gérard - A.H.M. Levelt) : Soient  $r \in \mathbb{N}^*$ ,  $\delta_\tau = z^r \frac{d}{dz}$  et  $\varepsilon$  un vecteur cyclique de  $V$ , alors

$$\nabla_\tau^n(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i(z) \nabla_\tau^i(\varepsilon)$$

Si  $v_0 = \sup_{0 \leq i \leq n-1} \{-v_0(b_i(z))\}$ , alors

$$\rho_r = \sup\{0, v_0\}.$$

**Définition :** La connexion  $\nabla$  est dite  $\tau$ -régulière s'il existe une base  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  de  $V$  dans laquelle la matrice  $A$  de  $\nabla_\tau$  appartient  $\mathfrak{M}_n(\mathcal{O})$ .

**Théorème.** (R. Gérard, A.H.M. Levelt) : Soient  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\partial_\tau = z^k \frac{d}{dz}$ , la connexion  $V$  est  $\tau$ -régulière si  $\rho_k = 0$ .

**Théorème .** (R. Gérard - A.H.M. Levelt) : Soient  $r$  le rang rationnel de N. Katz  $i(D)$  l'indice de B. Malgrange, on a

$$1^\circ \quad i(D) = \rho_1$$

$$2^\circ \quad \rho_1/n \leq r \leq \rho_1.$$

La construction d'un vecteur cyclique est par conséquent une démarche fondamentale pour la détermination de la nature du point singulier  $o$  au moyen des critères précédents.

### III. CONSTRUCTION D'UN VECTEUR CYCLIQUE.

Le procédé de construction d'un vecteur cyclique que nous donnons ici, s'inspire de la méthode utilisée par J.P. Ramis dans [7], pour établir l'équivalence entre un système différentiel et une équation différentielle linéaire d'ordre  $n$ .

$\mathbb{K}$ , est le corps  $\mathbb{C}\{\{z\}\}$  : corps des fonctions méromorphes au voisinage de  $o$ , ou le corps  $\mathbb{C}((z))$  : corps des quotients de l'anneau  $\mathbb{C}[[z]]$  des séries formelles en  $z$  à coefficients dans  $\mathbb{C}$  ;  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(V, \nabla)$  est un espace vectoriel à connexion de dimension  $n$ .

Soient  $\tau \in \Omega_{\mathbb{K}}^*$ ;  $\tau \neq 0$ ,  $\partial_\tau = \frac{d}{dz}$ ,  $\nabla_\tau = \partial_\tau - A$  où  $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$

Soit  $\{\lambda_i(z)\}_{1 \leq i \leq n}$ , une famille de polynômes de  $\mathbb{C}[z]$ , telle que :

$$\forall_i, 1 \leq i \leq n, d^\circ \lambda_i(z) \leq n.$$

On construit une matrice  $B = (b_{ij})_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  de la manière suivante

$$(b_{01}, b_{02}, \dots, b_{0n}) = (\lambda_1(z), \lambda_2(z), \dots, \lambda_n(z))$$

$$(b_{i+1,1}, b_{i+1,2}, \dots, b_{i+1,n}) = -\frac{d}{dz}(b_{i1}, \dots, b_{in}) + (b_{i1}, \dots, b_{in})^t A$$

où  ${}^t A$  est la transposée de  $A$ .

$$B_n = \begin{pmatrix} b_{01} & \dots & b_{0n} \\ b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n+1,1} & \dots & b_{n+1,n} \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$B_n = (b_{ij})_{\substack{0 \leq i \leq n-1 \\ 1 \leq j \leq n}}, \quad B_0 = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

pour  $i \geq 0$ , la relation de récurrence

$$(b_{i+1,1}, \dots, b_{i+1,n}) = \left( -\frac{db_{i1}}{dz}, \dots, -\frac{db_{in}}{dz} \right) + (b_{i1}, \dots, b_{in}) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \left( -\frac{db_{i1}}{dz} + \sum_{k=1}^n b_{ik} a_{1k}, \dots, -\frac{db_{in}}{dz} + \sum_{k=1}^n b_{ik} a_{nk} \right)$$



entraîne la relation

$$B_o = -\frac{dB_n}{dz} + B_n {}^t A$$

Si  $B_n$  est inversible alors on a

$$B_o = -\frac{dB_n}{dz} + B_n {}^t A \Leftrightarrow B_o B_n^{-1} = -\frac{dB_n}{dz} B_n^{-1} + B_n {}^t A B_n^{-1}$$

posons  $C = {}^t(B_o B_n^{-1})$ , il vient

$$C = -{}^t B_n^{-1} \frac{d{}^t B_n}{dz} + {}^t B_n^{-1} A {}^t B_n$$

en posant  $P = {}^t B_n$ , on a

$$C = P^{-1} A P - P^{-1} \frac{dP}{dz}$$

Le système différentiel  $\frac{dy}{dz} = AY$ , est alors équivalent au système différentiel  $\frac{dy}{dz} = CY$ .

**Théorème (J.P. Ramis) [7] :** *La fonction  $z \rightarrow \det(B_n(z))$  de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  n'est pas identiquement nulle au voisinage de 0.*

**Preuve.** Soient  $\Gamma$  un disque ouvert de centre 0, et  $\Gamma_o = \Gamma - \{0\}$  le disque ouvert pointé dans lequel tous les coefficients  $a_{ij}(z)$  de  $A(z)$  sont définis.

**Lemme (J.P. Ramis) [7] :** *Soit  $z_o \in \Gamma_o$  et soit  $L = (\ell_{ij}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$  une matrice scalaire arbitraire fixée il existe une famille  $\Lambda(z) = (\lambda_1(z), \dots, \lambda_n(z))$  de polynômes de  $\mathbb{C}[z]$ , telle que :*

**a/**  $\forall i, 1 \leq i \leq n$ , le degré de  $\lambda_i(z)$  est inférieur ou égal à  $n$ .

**b/**  $B_n(z_o) = L$ .

Les  $\lambda_i(z)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , sont déterminés de manière unique par ces conditions.

**Preuve du lemme .** Soit  $L = (\ell_{ij}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$  ; pour tout  $i, 0 \leq i \leq n$  posons  $\ell_i = (\ell_{i1}, \dots, \ell_{in})$  et  $\Lambda = (\lambda_1(z), \dots, \lambda_n(z))$ .

La matrice  $B(z)$  a alors la forme suivante :

$$B(z) = \begin{pmatrix} \Lambda(z) \\ - \frac{d\Lambda(z)}{dz} + \Lambda \Phi_{20}(z) \\ \frac{d^2\Lambda(z)}{dz^2} + \frac{d\Lambda(z)}{dz} \Phi_{31}(z) + \Lambda(z) \Phi_{30}(z) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ (-1)^n \frac{d^n \Lambda(z)}{dz^n} + \frac{d^{n-1} \Lambda(z)}{dz^{n-1}} \Phi_{n+1, n-1}(z) + \dots + \Lambda(z) \Phi_{n+1, 0}(z) \end{pmatrix}$$

où les  $\Phi_{ij}(z)$  ne dépendent que des coefficients  $a_{ij}(z)$  de la matrice  $A(z)$ .

Les conditions a/ et b/ du lemme sont équivalentes à l'existence d'une famille de polynômes  $\Lambda(z) = (\lambda_1(z), \dots, \lambda_n(z))$  de  $\mathbb{C}(z)$  telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda(z_0) = (\ell_{11}, \dots, \ell_{1n}) \\ - \frac{d\Lambda}{dz}(z_0) + \Lambda(z_0) \Phi_{20}(z_0) = (\ell_{21}, \dots, \ell_{2n}) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1} \Lambda}{dz^{n-1}}(z_0) + \dots + \Lambda(z_0) \Phi_{n,0}(z_0) = (\ell_{n1}, \dots, \ell_{nn}) \end{array} \right.$$

soit

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda(z_0) = \ell_1 \\ \frac{d\Lambda}{dz}(z_0) = -\ell_2 + \ell_1 \Phi_{20}(z_0) \\ \frac{d^{n-1}\Lambda}{dz^n}(z_0) = (-1)^{n-1}(\ell_n + \dots - \ell_1 \Phi_{n,0}(z_0)) \end{array} \right.$$

Pour tout  $i$  de  $\{1, \dots, n\}$  posons  $\lambda_i(z) = \sum_{h=0}^{n-1} \alpha_{ih} z^h$  on a alors  $n$  systèmes de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_i(z_0) = \ell_{1i} \\ \frac{d\lambda_i}{dz}(z_0) = -\ell_{2i} + \ell_{1i} \varphi_2(a_{ij}(z_0)) \\ \frac{d^{n-1}\lambda_i}{dz^n}(z_0) = (-1)^{n-1} \ell_{ni} + \dots + \ell_{1i} \varphi_n(a_{ij}(z_0)) \end{array} \right.$$

d'où le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{i0} + \alpha_{i1}z_0 + \dots + \alpha_{i,n-1}z_0^{n-1} = \ell_{1i} = \mu_{1i} \\ \alpha_{i1} + 2\alpha_{i2}z_0 + \dots + (n-1)\alpha_{i,n-1}z_0^{n-2} = \mu_{2i} \\ \dots \\ (n-1)!\alpha_{i,n-1}z_0 = \mu_{n-1,i} \\ (n-1)!\alpha_{i,n-1} = \mu_{ni} \end{array} \right.$$

Les  $(\alpha_{ih})_{0 \leq h \leq n-1}$ , sont les inconnues du système. Le déterminant de ce système n'étant pas nul, on a un système de Cramer d'où l'unicité de  $\lambda_i(z)$ ,  $1 \leq i \leq n$  et par conséquent celle de  $\Lambda(z)$ .

Pour achever la démonstration du théorème il suffit de prendre  $L = (\ell_{ij}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$  dans  $GL_n(\mathbb{C})$ ;  $B_n(z_0) = L$ , implique la régularité de  $B_n(z_0)$ ; par conséquent  $z \rightarrow \det(B_n(z))$ , n'est pas identiquement nulle dans  $\Gamma_0$ ; la continuité de cette fonction entraîne alors qu'il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $z_0$ , contenu dans  $\Gamma_0$ , tel que pour tout  $z$  de  $U$ ,  $\det(B_n(z)) \neq 0$ .

**Remarque.** On a dans U l'identité formelle

$$\Lambda(z) = \Lambda(z_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(z-z_0)^k}{k!} \frac{d^k \Lambda}{dz^k}(z_0)$$

La matrice C.

On part du système différentiel  $\frac{dy}{dz} = A(z)y$  ;  $B(z) = (b_{ij}(z))_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$

$(b_{0,1}, \dots, b_{0,n}) = (\lambda_1(z), \dots, \lambda_n(z))$ ,  $\lambda_i(z) \in \mathbb{C}(z)$  d'°  $\lambda_i(z) \leq n$ .

$$(b_{i+1,1}, \dots, b_{i+1,n}) = -\frac{d}{dz}(b_{i1}, \dots, b_{in}) + (b_{i1}, \dots, b_{in})^t A$$

$$B_n(z) = \begin{pmatrix} b_{01} & \dots & b_{0n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ b_{n+1} & \dots & b_{n-1,n} \end{pmatrix}, \quad B_0(z) = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$C(z) = {}^t(B_0(z) B_n^{-1}(z)), \quad z \in U \text{ comme ci-dessus on a } B_n^{-1}(z) = (\gamma_{ij}(z))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

où  $\gamma_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \Delta_{ji}}{\det(B_n)}$  où  $\Delta_{ji}$  est le mineur du déterminant de  $B_n$  obtenu en supprimant la  $j^{\text{ième}}$  ligne et la  $i^{\text{ième}}$  colonne

$$B_0 B_n^{-1} = (B_{pq})_{\substack{1 \leq p \leq n \\ 1 \leq q \leq n}}, \quad \text{où } B_{pq} = \sum_{k=1}^n b_{pk} \gamma_{kq}$$

$$\text{d'où } B_{pq} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{h+q}}{\det(B_n)} b_{pk} \Delta_{qk}, \text{ soit}$$

$$B_{pq} = \frac{(-1)^q}{\det(B_n)} \sum_{k=1}^n (-1)^k b_{pk} \Delta_{qk}, \text{ d'où}$$

$$B_{p,p+1} = \frac{(-1)^{p+1}}{\det(B_n)} \sum_{k=1}^n (-1)^k b_{pk} \Delta_{p+1,k}$$

or  $\sum_{k=1}^n (-1)^{p+1+k} b_{pk} \Delta_{p+1,k} = \det(B_n)$ , donc pour,  $1 \leq p \leq n-1$ ,  $B_{p,p+1} = 1$

pour  $q \neq p+1$ , on a

$$B_{pq} = \frac{(-1)^q}{\det(B_n)} \sum_{k=1}^n (-1)^k b_{pk} \Delta_{qk}$$

or  $\sum_{k=1}^n (-1)^{k+q} b_{pk} \Delta_{qk} = 0$ , car c'est le développement du déterminant

obtenu à partir de celui de  $B_n$ , en remplaçant les éléments de la  $q^{\text{ième}}$  ligne de ce déterminant par ceux de la  $p+1^{\text{ième}}$  ligne par conséquent pour :

$$\begin{cases} 1 \leq p \leq n-1 \\ 1 \leq q \leq n, q \neq p+1 \end{cases}, \text{ on a : } B_{pq} = 0.$$

Les  $b_{n,k}$ ,  $1 \leq k \leq n$ , sont des éléments de  $B_0$ .

$$B_{nq} = \frac{(-1)^q}{\det(B_n)} \sum_{k=1}^n (-1)^k b_{n,k} \Delta_{qk}$$

les  $\Delta_{qk}$ ,  $1 \leq k \leq n$ ; sont des mineurs du  $\det(B_n)$  de telle sorte que pour,

$1 \leq q \leq n$  on ne peut rien dire a priori sur  $B_{nq}$ ; posons  $B_{nq} = a_{q-1}$ ,  $1 \leq q \leq n$ ; il vient

$$B_0 B_n^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où } c = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & a_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Soient  $\partial_\tau = \frac{d}{dz}$ ,  $(\ell) = (\ell_i)_{0 \leq i \leq n-1}$  la base de  $V$  dans laquelle la matrice de  $\nabla_\tau$

est  $A$ ,  $(\epsilon) = (\epsilon_i)_{0 \leq i \leq n-1}$  la base de  $V$  dans laquelle la matrice du système différentiel équivalent est  $C$ ; on a :

$$1^\circ) (\epsilon) = (\ell) P, \text{ où } P = {}^t B_n$$

2°)  $\epsilon_0$ , est un vecteur cyclique

$$3^\circ) r = \sup_{0 \leq i \leq n-1} \left\{ 0, \sup \left( -\frac{v(a_i(z))}{n-i} \right) - 1 \right\}.$$

## Bibliographie.

- [1] A. DABECHE, *Formes canoniques rationnelles d'un système différentiel à point singulier irrégulier*, Lecture notes in mathematics, Springer-Verlag, 712 (1979).
- [2] P. DELIGNE, *Equations différentielles à points singuliers réguliers*, Lecture notes in mathematics, Springer-Verlag, 163 (1970).
- [3] S. D. EKONG, *Sur l'analyse algébrique I* - Publ. Dept. Math. Lyon (1985) - 6/A.
- [4] R. GERARD et A.H.M. LEVELT, *Invariants mesurant l'irrégularité en un point singulier des systèmes d'équations différentielles linéaires*, Ann. Inst. Fourier - Grenoble, 23, 1 (1973) p. 157-195.
- [5] (voir P. Deligne) N. KATZ, *Equations différentielles à points singuliers réguliers*, Lecture notes in mathematics, Springer-Verlag 163 (1970).
- [6] B. MALGRANGE, *Sur les points singuliers des équations différentielles*. L'enseignement mathématique, T. 20 (1974), p. 147-176.

- [7] J.P. RAMIS, *Théorèmes d'indice Gevrey pour les équations différentielles ordinaires*, Pub. I.R.M.A. 118/P - 69, 1981. Université Louis Pasteur, Strasbourg.
- [8] J.P. SERRE, *Corps locaux*, Hermann (1962).
-