PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

SALAH KABBAJ

Sur une conjecture de Malik et Mott

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1988, fascicule 3B
, p. 13-19
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1988___3B_13_0>

SUR UNE CONJECTURE DE MALIK ET MOTT

Salah KABBAJ

Département de mathématiques, Université Claude Bernard - Lyon I
69622 Villeurbanne Cedex, France.

Les anneaux considérés sont commutatifs, intègres et possèdent un élément unité.

Un anneau A est appelé un S-domaine fort si p et q étant deux idéaux premiers consécutifs dans Spec(A), alors les idéaux étendus p[X] et q[X] sont consécutifs dans Spec(A[X]).

Un anneau est A dit de Jaffard [1] et [2] s'il est de dimension de Krull finie et s'il vérifie l'une des deux propriétés équivalentes :

i) $\dim A = \dim_v A$, (où $\dim_v A$ désigne la dimension valuative de l'anneau A)

ii) $\dim A[X_1,\ldots\ldots,X_n] = n + \dim A$ pour tout $n > 0$.

Soient A un anneau, $n \geq 1$ un entier naturel, $\{X_1,\ldots,X_n\}$ un ensemble fini d'indéterminées sur A et S la partie multiplicative de $A[X_1,\ldots,X_n]$ définie par :

$$S = \{f \in A[X_1,\ldots,X_n] \,/\, c(f) = A\}$$

(si $f = \sum_i a_i X_1^{i_1} X_1^{i_2} \ldots X_n^{i_n}$, $c(f) = \sum_i a_i A$).

Posons $A(X_1,\ldots,X_n) = S^{-1}(A[X_1,\ldots,X_n])$. L'anneau $A(X_1,\ldots,X_n)$ défini ainsi est appelé **l'anneau de Nagata** à n indéterminées et à coefficients dans A.

Dans un long article [5] consacré aux S-domaines forts, MALIK et MOTT se sont posé la question suivante : *Soit* n *un entier naturel* ≥ 1, *a-t-on* $A[X_1,\ldots,X_n]$ *S-domaine fort si et seulement si* $A(X_1,\ldots,X_n)$ *S-domaine fort ?*

Il est clair que si $A[X_1,\ldots,X_n]$ est un S-domaine fort, alors il en est de même pour $A(X_1,\ldots,X_n) = S^{-1}(A[X_1,\ldots,X_n])$. Cependant, nous sommes en mesure d'affirmer que la réciproque est fausse. Cela est illustré par l'exemple suivant.

EXEMPLE 1.1 - Soient k un corps, X et Y deux indéterminées sur k et un entier $n \geq 1$.
Posons :

$$V = k(X) + Yk(X)[Y]_{(Y)}$$

et

$$R = k + Yk(X)[Y]_{(Y)}.$$

Alors :

a). $R(X_1,\ldots,X_n)$ est un S-domaine fort.

b). $R[X_1,\ldots,X_n]$ n'est pas un S-domaine fort où $X_1,\ldots,X_n$ sont des indéterminées sur l'anneau R.

DEMONSTRATION - Soit $M = Yk(X)[Y]_{(Y)}$ l'idéal maximal commun à V et R. L'anneau R est un produit fibré local issu de l'anneau de valuation V ;

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, twoheadrightarrow] \arrow[d, hook] & k \arrow[d, hook] \\ V \arrow[r, twoheadrightarrow] & k(X) \end{tikzcd}$$

il découle donc du théorème (0-3.6) et du théorème (I-3.1.)[4].

$$\dim R = \dim V = 1,$$

et

$$\dim_v R = \dim_v V + \deg tr_k\, k(X) = \dim V + 1 = 2.$$

Il en résulte que $\dim R[X_1] = \dim_v R + 1 = 3$ et par conséquent $ht\, M[X_1] = 2$.

En fait, nous allons établir que ht $M[X_1,\ldots,X_n] = 2$ pour tout entier naturel $n \geq 1$. En effet,

$$\text{ht } M[X_1,\ldots,X_n] + \dim(R[X_1,\ldots,X_n]/M[X_1,\ldots,X_n]) \leq \dim R[X_1,\ldots,X_n],$$

d'où :

$$\text{ht } M[X_1,\ldots,X_n] + n \leq \dim R[X_1][X_2,\ldots,X_n].$$

L'anneau $R[X_1]$ est un anneau de Jaffard puisque $\dim R[X_1] = 1 + \dim_v R = \dim_v R[X_1] = 3$. On en déduit que $\dim R[X_1][X_2,\ldots,X_n] = \dim R[X_1] + n - 1 = n + 2$. Ce qui donne,

$$\text{ht } M[X_1,\ldots,X_n] + n \leq n + 2.$$

Par conséquent, ht $M[X_1,\ldots,X_n] = 2$ pour tout entier naturel $n \geq 1$.

Dans notre cas particulier, nous avons :

$R(X_1,\ldots,X_n) = R[X_1,\ldots,X_n]_{M[X_1,\ldots,X_n]}$. Il suffit donc de prouver que $R[X_1,\ldots,X_n]_{M[X_1,\ldots,X_n]}$ est un S-domaine fort.

Soient P et Q deux idéaux premiers de $R[X_1,\ldots,X_n]$ tels que $P \subsetneq Q \subset M[X_1,\ldots,X_n]$ et $\text{ht}(Q/P) = 1$. Deux cas se présentent. Si $P = (0)$, alors ht $Q = 1$. Nécessairement $Q \cap R = (0)$ et il existe un idéal premier Q' de $K[X_1,\ldots,X_n]$, K désigne le corps des fractions de R, tel que $Q' \cap A[X_1,\ldots,X_n] = Q$. $K[X_1,\ldots,X_n]$ étant un S-domaine, nous avons :

$$\text{ht } Q[X_{n+1}] = \text{ht } Q'[X_{n+1}] = 1 = \text{ht } Q' = \text{ht } Q.$$

Si $p \neq (0)$, nécessairement $Q = M[X_1,\ldots,X_n]$ (car ht $M[X_1,\ldots,X_n] = 2$) donc,

$$\text{ht}(Q[X_{n+1}]/P[X_{n+1}]) = \text{ht}(M[X_1,\ldots,X_{n+1}]/P[X_{n+1}]) = 1.$$

Car nous avons aussi ht $M[X_1,\ldots,X_n,X_{n+1}] = 2$. D'où la conclusion.

■

Toutefois, l'anneau R (construit précédemment) n'est pas un S-domaine fort. Ce qui nous conduit à nous poser la question suivante : Existe-t-il un S-domaine fort R tel que l'anneau $R(X_1,\ldots,X_n)$ ne soit pas un S-domaine fort ?

Avant de répondre à cette question, nous allons établir certains résultats mettant en évidence les liaisons existant entre les notions de S-domaine fort et d'anneau de Jaffard pour les anneaux de Nagata.

THEOREME 1.2 - *Soit* A *un anneau de dimension finie. Si* A *et* $A(X_1,\ldots,X_n)$ *sont des S-domaines forts pour tout entier* $n \geq 1$, *alors* A *est un anneau de Jaffard.*

Dans ce qui suit, nous allons identifier l'anneau $A(X_1,\ldots,X_n)$ pour $n = 0$ à l'anneau A. La démonstration du théorème découle du lemme suivant.

LEMME 1.3 - *Soient* A *un anneau de dimension finie et* $n \geq 1$ *un entier naturel. Si* $A(X_1,\ldots,X_k)$ *est un* S*-domaine fort pour tout* $k \in \{0,1,\ldots,n\}$, *alors :*

$$\dim A[X_1,\ldots,X_k] = k + \dim A \quad \textit{pour tout} \quad k \in \{0,1,\ldots,n,n+1\}.$$

DEMONSTRATION - Nous savons que $\dim A(X_1,\ldots,X_k) = \dim A[X_1,\ldots,X_k] - k$ pour tout entier naturel k [9, Proposition 1.21]. Soit $k \in \{0,1,\ldots,n\}$ et supposons que $A(X_1,\ldots,X_k)$ soit un S-domaine fort. Donc,

$$\dim A(X_1) = \dim A[X_1] - 1 = \dim A$$

puisque A est un S-domaine fort.

Nous avons de même :

$$\begin{aligned}\dim A(X_1,\ldots,X_{k+1}) &= \dim A(X_1,\ldots,X_k)(X_{k+1}) \\ &= \dim A(X_1,\ldots,X_k)[X_{k+1}] - 1 \\ &= \dim A(X_1,\ldots,X_k),\end{aligned}$$

puisque l'anneau $A(X_1,\ldots,X_k)$ est un S-domaine fort. Il en résulte que:

$$\begin{aligned}\dim A(X_1,\ldots,X_{k+1}) &= \dim A(X_1,\ldots,X_k) \\ &= \dim A(X_1,\ldots,X_{k-1}) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= \dim A(X_1) \\ &= \dim A\end{aligned}$$

pour tout entier naturel $k \in \{0,1,\dots,n\}$. D'autre part, nous avons :

$$\dim A(X_1,\dots,X_{k+1}) = \dim A[X_1,\dots,X_{k+1}] - (k + 1).$$

Il en découle que $\dim A[X_1,\dots,X_k] = k + \dim A$ pour tout entier naturel $k \in \{0,1,\dots,n+1\}$.

■

La réciproque du théorème est généralement fausse. Cela est illustré dans [3] par un exemple d'anneau A S-domaine fort tel que $\dim_v A \neq \dim A$ (A n'est donc pas de Jaffard). Néanmoins, la réciproque peut être vraie dans certains cas particuliers.

PROPOSITION 1.4 - *Etant donné un anneau* A *local de dimension* ≤ 2. *Soit* n *un entier naturel* ≥ 1. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i). $A(X_1,\dots,X_k)$ *est un* S-*domaine fort pour tout* $k \in \{0,1,\dots,n\}$.

ii). $\dim A[X_1,\dots,X_k] = k + \dim A$ *pour tout* $k \in \{0,1,\dots,n+1\}$.

DEMONSTRATION.

i) $\Rightarrow$ ii). Théorème 1.2 ou lemme 1.3.

ii) $\Rightarrow$ i). Soit $k \in \{0,\dots,n\}$. D'une part,

$$\begin{aligned}\dim A(X_1,\dots,X_k)[Y] &= \dim A(X_1,\dots,X_k)(Y) + 1\\ &= \dim A(X_1,\dots,X_k,Y) + 1\\ &= \dim [X_1,\dots,X_k,Y] - (k + 1) + 1\\ &= \dim A + 1 \quad \text{(par hypothèse).}\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\dim A(X_1,\dots,X_k) &= \dim A[X_1,\dots,X_k] - k\\ &= \dim A \quad \text{(par hypothèse).}\end{aligned}$$

Il en résulte que $\dim A(X_1,\dots,X_k)[Y] = \dim A(X_1,\dots,X_k) + 1$. Par conséquent, l'anneau $A(X_1,\dots,X_k)$ est un S-domaine fort car il est local, caténaire ($\dim A(X_1,\dots,X_k) = \dim A \leq 2$) et vérifiant la condition ii) de la proposition 0.9[4].

■

Ainsi, nous somme en mesure de répondre à la question précédente.

Nous reprenons une construction de [3] illustrant un exemple de S-domaine fort R tel que R[X] n'est pas un S-domaine fort.

Soient k un corps et X, Y, Z des indéterminées sur k. Posons :

$$V = k(X,Y) + Zk(X,Y)[Z]_{(Z)} = k(X,Y) + M_1.$$

Soit $\varphi : V \longrightarrow V/M_1 \simeq k(X,Y)$ la surjection canonique et soit V' l'anneau de valuation associé à la valuation $v : k(X,Y) \longrightarrow \mathbb{Z}[\pi]$, où $v(X) = \pi$ et $v(Y) = 1$.

L'anneau $\varphi^{-1}(V')$ est un anneau de valuation de la forme $k + M_2$ où M_2 est son idéal maximal. Posons :

$$V_1 = \varphi^{-1}(V') = k + M_2 \ \text{ et } \ W = k(X,Y) + (Z+1)k(X,Y)[Z]_{(Z+1)}.$$

Alors, $T = V_1 \cap W$ est un anneau de Prüfer semi-local d'idéaux maximaux M et N.

EXEMPLE 1.5 - Posons $R = k + M \cap N$. Sous les notations précédentes un tel anneau vérifie les conditions suivantes :

a). R est un S-domaine fort.

b). R(X) n'est pas un S-domaine fort.

c). R[X] n'est pas un S-domaine fort.

DEMONSTRATION - Pour a) et c) voir [3].

b). R est local et dim R = 2 [3]. Supposons que R(X) soit un S-domaine fort. Il découle de la proposition 1.4 que

$$\dim R[X] = \dim R + 1$$

et

$$\dim R[X,Y] = \dim R + 2 = 4.$$

Ce qui est contradictoire avec,

$$\dim R[X,Y] = \dim_v R + 2 = 3 + 2 = 5$$

(il est établi dans [3] que $\dim_v R = 3$).

BIBLIOGRAPHIE

[1] **D.F. ANDERSON - A. BOUVIER - D.E. DOBBS - M. FONTANA - S. KABBAJ.**
On Jaffard domains.
Expositiones Mathematicae. Bibliograph. Institut & F.A. Brock. AG 6(1988)145-175.

[2] **A. BOUVIER - S. KABBAJ.**
Examples of Jaffard domains.
Journal of pure and applied algebra 54 (1988) 155-165.

[3] **J.W. BREWER - P.R. MONTGOMERY - E.A. RUTTER- W.J.HEINZER.**
Krull dimension of polynomial rings.
Springer Lecture Notes Math. 311 (1972), 26-45.

[4] **S. KABBAJ.**
Spectres et théories de la dimension dans les anneaux de polynômes à coefficients dans un produit fibré.
Thèse de doctorat. Université Claude Bernard - Lyon I (1988).

[5] **S. MALIK - J.L. MOTT.**
Strong S-domains.
J. Pure Appl. Algebra 28 (1983), 249-264.