

P. DAZORD

D. SONDAZ

Chapitre I Variétés de Poisson - Algébroïdes de Lie

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1988, fascicule 1B
« Séminaire Sud-Rhodanien 1ère partie », , p. 1-68

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1988__1B_1_0

© Université de Lyon, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CHAPITRE I

VARIETES DE POISSON - ALGEBROIDES DE LIE

par P. Dazord & D. Sondaz

Une façon d'aborder la théorie des groupoïdes symplectiques développée par différents auteurs, notamment Karasev et Weinstein ([10], [2], [31]) est de considérer que le problème est de construire un analogue du Troisième Théorème de Lie pour des algèbres de Lie de dimension infinie. Cette idée a d'ailleurs inspiré le titre du dernier article de Karasev ([10]). De ce point de vue, la notion de variété de Poisson apparaît comme la généralisation en dimension infinie de la notion de dual d'une algèbre de Lie.

La bonne généralisation géométrique de la notion d'algèbre de Lie est la notion d'algébroïde de Lie de Jean Pradines [21]. Il s'agit donc en premier lieu de comprendre les relations entre algébroïdes de Lie et variétés de Poisson :

A tout algébroïde de Lie E est associé canoniquement une structure de Poisson sur le dual E^* . Inversement à toute variété de Poisson P est associé un algébroïde de Lie sur le cotangent [2]. Cette dernière structure avait été observée par J.L. Koszul [13], Karasev [10] ainsi que Magri et Morosi [16 bis].

Pour la théorie classique des variétés de Poisson on pourra se reporter aux articles originaux de A. Lichnerowicz [15] et A. Weinstein [29] ainsi qu'au livre de P. Libermann et C. Marle [14]. On s'est cependant permis de tirer toutes les conséquences du point de vue apporté ce qui permet de présenter de façon naturelle un certain nombre de résultats. Enfin on a réservé un sort particulier à une catégorie importante de variétés de Poisson, les groupes de Poisson, introduits par Drinfeld [8].

NOTATIONS

Toutes les fonctions et les variétés seront, sauf mention explicite du contraire, de classe \mathcal{C}^∞ .

Si $E \rightarrow M$ est un fibré vectoriel, $\text{Sect}(M,E)$ désignera l'espace vectoriel des sections de classe \mathcal{C}^∞ de ce fibré et $\text{Sect}(M,E)$ désignera le faisceau des germes de sections de classe \mathcal{C}^∞ de ce fibré.

Si A est une partie de M , E_A désignera le fibré image réciproque de E par l'inclusion de A dans M .

Si M est une variété, $\mathfrak{X}^\infty(M)$ (resp. $\underline{\mathfrak{X}}^\infty(M)$) désignera l'ensemble des champs de vecteurs de classe \mathcal{C}^∞ sur M (resp. le faisceau des germes de champs de vecteurs de classe \mathcal{C}^∞ sur M) ; si $p \in \mathbb{N}$, $\Omega_p(M)$ (resp. $\underline{\Omega}_p(M)$) sera l'ensemble des p -formes différentielles de classe \mathcal{C}^∞ sur M (resp. le faisceau des germes de p -formes différentielles de classe \mathcal{C}^∞ sur M) et $Z\Omega_p(M)$ (resp. $\underline{Z}\Omega_p(M)$) l'ensemble des p -formes sur M fermées (resp. le faisceau des germes de p -formes sur M fermées (resp. le faisceau des germes de p -formes fermées sur M) ; enfin $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ (resp. $\underline{\mathcal{C}}^\infty(M, \mathbb{R})$) désignera l'algèbre des fonctions réelles de classe \mathcal{C}^∞ sur M (resp. le faisceau des germes de fonctions réelles de classe \mathcal{C}^∞ sur M). Si \mathfrak{G} est un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\underline{\mathfrak{G}}$, $\Lambda \underline{\mathfrak{G}} = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} \Lambda^p \underline{\mathfrak{G}}$ est muni d'une structure d'algèbre de Lie graduée dont on note $[\dots]$ le crochet : c'est l'unique structure d'algèbre de Lie graduée prolongeant le crochet usuel de $\underline{\mathfrak{G}}$ (cf. [13]).

D'autre part $\bigoplus_{p \in \mathbb{N}} \text{Sect}(G, \Lambda^p TG)$ muni du crochet de Schouten $[\dots]_S$ [22]) (cf. Appendice) est une algèbre de Lie graduée dont l'espace $\mathfrak{S}^*(\Lambda \underline{\mathfrak{G}})$ des sections de $\bigoplus_{p \in \mathbb{N}} \Lambda^p TG$ invariantes à gauche est une sous-algèbre de Lie graduée. L'isomorphisme $\mu \longmapsto \mu^\sharp$ de $\Lambda \underline{\mathfrak{G}}$ sur

$\mathfrak{L}^*(\Lambda \underline{G})$ qui à tout élément de $\Lambda \underline{G}$ associe le tenseur invariant à gauche qu'il définit, est un isomorphisme d'algèbres de Lie graduées. Autrement dit, si μ, v appartiennent à $\Lambda \underline{G}$,

$$[\mu, v]^\ell = [\mu^\ell, v^\ell]_S$$

Dans la suite, on aura également à considérer le crochet de Schouten sur la variété linéaire G que l'on distinguera du précédent en utilisant la notation $[\dots]_S$. La structure d'algèbre de Lie graduée induite par ce crochet sur $\Lambda \underline{G}$ est la structure triviale.

Remarque de notation - Pour alléger les notations, et quand il n'y a pas d'ambiguïté, on notera $[\dots]$ au lieu de $[\dots]_S$ le crochet de Schouten.

A - VARIETES DE POISSON

1 - Définition 1.1 - On dit qu'une \mathcal{C}^∞ -variété P est une variété de Poisson si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est réalisée.

A) $\mathcal{C}^\infty(P, \mathbb{R})$ est muni d'une structure d'algèbre de Lie par une application dite "crochet de Poisson", $\{ \cdot, \cdot \} : (\mathcal{C}^\infty(P, \mathbb{R}))^2 \rightarrow \mathcal{C}^\infty(P, \mathbb{R})$ telle que

$$\{f_1, f_2, g\} = f_1 \{f_2, g\} + \{f_1, g\} f_2, \quad \forall (f_1, f_2, g) \in (\mathcal{C}^\infty(P, \mathbb{R}))^3.$$

B) Il existe $\Lambda \in \text{Sect}(P, \overset{2}{\Lambda} TP)$ tel que $[\Lambda, \Lambda] = 0$. (le crochet de Schouten est défini dans l'appendice).

Ces deux définitions sont reliées par

$$\{f, g\} = i_\Lambda (df \wedge dg) = \Lambda(df, dg).$$

L'application $g \rightarrow \{f, g\}$ est une dérivation de l'algèbre $\mathcal{C}^\infty(P, \mathbb{R})$ donc permet de définir un champ de vecteurs $X_f \in \mathfrak{X}^\infty(P)$ dit "champ hamiltonien de f " :

$$\{f, g\} = \mathfrak{L}_{X_f} g, \quad \forall g \in \mathcal{C}^\infty(P, \mathbb{R}).$$

L'application $f \rightarrow X_f$ est un morphisme d'algèbres de Lie de $(\mathcal{C}^\infty(P, \mathbb{R}), \{.,.\})$ dans $(\mathcal{X}^\infty(P), [.,.])$ dont on notera $\text{Ham}(P)$ l'image.

On a la suite exacte d'algèbres de Lie :

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}^\infty(P, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Ham}(P) \rightarrow 0$$

En termes de crochet de Schouten $X_f = [\Lambda, f]$.

On en déduit que $[X_f, \Lambda] = [[\Lambda, f], \Lambda]$

mais d'après l'identité de Jacobi du crochet de Schouten (Appendice)

$$0 = 2[[\Lambda, f], \Lambda] + [[\Lambda, \Lambda], f] = 2[[\Lambda, f], \Lambda]$$

donc $[X_f, \Lambda] = 0$.

Si l'on désigne par $\text{Aut}_\infty(P, \Lambda)$ la sous-algèbre de Lie des $X \in \mathcal{X}^\infty(P)$ tels que $[X, \Lambda] = 0$, $\text{Ham}(P)$ apparaît donc comme une sous-algèbre de Lie de $\text{Aut}_\infty(P, \Lambda)$.

Donnons quelques écritures locales. Soient $m = \dim P$, (x^1, \dots, x^m) un système de coordonnées locales sur P :

$$\text{On a : } \{f, g\} = \{x^i, x^j\} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j} \quad (1)$$

$$\Lambda = \Lambda^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j} \quad \text{avec } \Lambda^{ij} = \{x^i, x^j\} \quad (2)$$

$$X_f = \{x^i, x^j\} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \quad (3)$$

2 - Le morphisme $\Lambda^\#$ - Le champ de tenseurs Λ permet de définir un morphisme de fibrés vectoriels $\Lambda^\# : T^*P \rightarrow TP$ par

$$\langle \beta, \Lambda^\#(\alpha) \rangle = \Lambda(\alpha, \beta).$$

écriture locale : si (x^1, \dots, x^m) est un système de coordonnées locales sur P , si $\alpha = \alpha_i dx^i$,

$$\Lambda^\#(\alpha) = \Lambda^{ij} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x^j} \quad (1)$$

Si $f \in \mathcal{C}^\infty(P, \mathbb{R})$,

$$X_f = \Lambda^\#(df) \quad (2)$$

On appelle rang de la variété de Poisson P au point $x \in P$ le rang de $\Lambda_x^\#$. Si le rang de P est constant on dit que P est une variété de Poisson régulière. Dans ce cas $\Lambda^\#(T^*P)$ est un sous-fibré de TP .

3 - Morphismes de Poisson - Etant données deux variétés de Poisson

(P_i, Λ_i) , $i=1,2$, on dit que $f \in \mathcal{C}^\infty(P_1, P_2)$ est un morphisme de Poisson si

$$f^* : \mathcal{C}^\infty(P_2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(P_1, \mathbb{R}) \quad (f^*\varphi = \varphi \circ f)$$

est un morphisme d'algèbres de Lie :

$$\forall (\varphi, \psi) \in (\mathcal{C}^\infty(P_2, \mathbb{R}))^2, \quad f^*\{\varphi, \psi\}_2 = \{f^*\varphi, f^*\psi\}_1.$$

Proposition 3.1 - $f \in \mathcal{C}^\infty(P_1, P_2)$ est un morphisme de Poisson si et seulement si $\forall x \in P_1, \forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty(P_2, \mathbb{R})$,

$$T_x f(\Lambda_1^\#(d(\varphi \circ f)(x))) = \Lambda_2^\#(d\varphi)(f(x)) \quad (1)$$

Preuve. Ce résultat provient du fait que, $\forall \psi \in \mathcal{C}^\infty(P_2, \mathbb{R})$,

$$\langle d\psi(f(x)), T_x f(\Lambda_1^\#(d(\varphi \circ f)(x))) \rangle = \{f^*\varphi, f^*\psi\}_1(x)$$

et $\langle d\psi(f(x)), \Lambda_2^\#(d\varphi)(f(x)) \rangle = f^*\{\varphi, \psi\}_2(x)$.

On peut encore caractériser les morphismes de Poisson en disant que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 & \Lambda_2^\# & \\
 & \longrightarrow & \\
 T^*P_2 & \longrightarrow & TP_2 \\
 \downarrow f_* = {}^tTf & & \downarrow Tf \\
 T^*P_1 & \xrightarrow{\Lambda_1^\#} & TP_1
 \end{array}$$

Si $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(P_2, \mathbb{R})$, la formule (1) s'écrit, en termes de champs hamiltoniens :

$$T_x f(X_{f^*\varphi}(x)) = X_\varphi(f(x)) \quad , \quad \forall x \in P \quad (2)$$

On en déduit que, si c est une courbe intégrale de $X_{f^*\varphi}$, $f \circ c$ est une courbe intégrale de X_φ .

4 - Exemples -

a) Variétés symplectiques -

Toute variété symplectique (M, σ) est une variété de Poisson quand on la munit du crochet de Poisson

$$\{f, g\} = \sigma(X_f, X_g)$$

où les champs de vecteurs X_f et X_g sont définis par $i_{X_f} \sigma = -df$,

$$i_{X_g} \sigma = -dg.$$

On a, si α est une 1-forme différentielle sur M , $i_{\Lambda^* \alpha} \sigma = -\alpha$ et Λ^* apparaît comme l'isomorphisme réciproque de $-\sigma^b$, σ^b étant l'isomorphisme de TM sur T^*M défini par $\sigma^b(X) = i_X \sigma$.

Remarquons que, si $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$, le champ X_f défini par $i_{X_f} \sigma = -df$ n'est autre que le champ hamiltonien de f au sens du paragraphe 1 puisque

$$\langle dg, \Lambda^*(df) \rangle = \Lambda(df, dg) = \sigma(X_f, X_g) = -i_{X_g} \sigma(X_f) = \langle dg, X_f \rangle \quad \forall g \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}).$$

Une variété symplectique est donc une variété de Poisson telle que le morphisme Λ^* soit un isomorphisme ; c'est donc une variété de Poisson de rang constant égal à $\dim M$.

b) Variété de Lie-Poisson ou cogèbre de Lie -

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie de dimension finie. On identifie \mathfrak{g} à un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*, \mathbb{R})$ en associant à tout $X \in \mathfrak{g}$ la forme linéaire \tilde{X} sur \mathfrak{g}^* définie par $\tilde{X}(\xi) = \langle \xi, X \rangle$, $\forall \xi \in \mathfrak{g}^*$.

En posant, $\forall (X, Y) \in \mathfrak{g}^2$, $\{\tilde{X}, \tilde{Y}\}(\xi) = \langle \xi, [X, Y] \rangle$ on munit \mathfrak{g}^* d'une structure de variété de Poisson ce qui se vérifie en utilisant le

Lemme 4.1 - Une \mathcal{C}^∞ -variété P munie d'un champ Λ de tenseurs 2 fois contravariants antisymétriques est une variété de Poisson si et seulement s'il existe un atlas $\{(U, (x^i))\}$ de P tel que, si $\{.,.\}$ est défini à l'aide de Λ comme au § 1, on ait

$$\{ \{x^i, \{x^j, x^k\}\} \} = 0 \quad 1 \leq i, j, k \leq m.$$

On a alors, si $(f, g) \in (\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}^*, \mathbb{R}))^2$,

$$\{f, g\}(\xi) = \langle \xi, [df(\xi), dg(\xi)] \rangle, \quad \forall \xi \in \mathfrak{g}^*.$$

Le tenseur de Poisson Λ de \mathfrak{g}^* vérifie $\Lambda(\xi) = -d\xi$, (d différentielle de \mathfrak{g}^*).

DEFINITION 4.1 - La structure canonique du dual d'algèbre de Lie $(\mathfrak{g}^*, -d)$ est appelée selon les auteurs variété de Poisson linéaire variété de Lie-Poisson ou cogèbre de Lie [28]).

c) Généralisation de l'exemple précédent : soient \mathfrak{g} une algèbre de Lie de dimension finie et Θ un 2-cocycle symplectique de \mathfrak{g} ([24]), c'est-à-dire une forme bilinéaire antisymétrique Θ sur \mathfrak{g} telle que $\{ \Theta(X, [Y, Z]) = 0, \forall (X, Y, Z) \in \mathfrak{g}^3$ ou encore un élément $\Theta \in \Lambda^2 \mathfrak{g}$ tel que $d\Theta = 0$). On définit sur \mathfrak{g}^* un 2-tenseur antisymétrique en posant

$$\forall \xi \in \mathfrak{g}^* \quad , \quad \Lambda_{\Theta}(\xi) = d\xi + \Theta$$

et l'on pose $\{ \tilde{X}, \tilde{Y} \}(\xi) = \Lambda_{\Theta}(\xi)(X, Y) = \langle \xi, [X, Y] \rangle + \Theta(X, Y), \quad \forall (X, Y) \in \mathfrak{g}^2$.

On a alors $\{ \{ \tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z} \}(\xi) = d(-d\xi + \Theta)(X, Y, Z) = 0$; Λ_{Θ} munit donc \mathfrak{g}^* d'une structure de Poisson.

On a alors, si $(f, g) \in (\mathcal{C}^{\infty}(\mathfrak{g}^*, \mathbb{R}))^2$,

$$\{f, g\}_{\Theta}(\xi) = \langle \xi, [df(\xi), dg(\xi)] \rangle + \Theta(df(\xi), dg(\xi)) \quad , \quad \forall \xi \in \mathfrak{g}^* .$$

d) Produit de variétés de Poisson -

Soient $(P_i, \Lambda_i), i = 1, 2$, deux variétés de Poisson. On peut munir la variété $P = P_1 \times P_2$ d'une structure de variété de Poisson en posant, $\forall (f, g) \in (\mathcal{C}^{\infty}(P, \mathbb{R}))^2, \forall (x_1, x_2) \in P_1 \times P_2, \{f, g\}(x_1, x_2) = \{f(x_1, \cdot), g(x_1, \cdot)\}_2(x_2) + \{f(\cdot, x_2), g(\cdot, x_2)\}_1(x_1)$.

C'est l'unique structure de Poisson sur $P_1 \times P_2$ faisant des projections $\pi_i : P_1 \times P_2 \rightarrow P_i, i = 1, 2$, des morphismes de Poisson.

e) Variétés de Poisson homogènes ([7]) - Une variété de Poisson homogène est un triplet (P, Λ, Z) où (P, Λ) est une variété de Poisson et où Z est un champ de vecteurs dit "champ d'homothéties" tel que $[Z, \Lambda] = -\Lambda$.

On dit que deux variétés de Poisson homogènes (P_i, Λ, Z) , $i = 1, 2$, sont isomorphes, s'il existe un difféomorphisme de Poisson f de P_1 sur P_2 tel qu'il existe $u \in \mathcal{C}^\infty(P_2, \mathbb{R})$ telle que

$$f_* Z_1 = Z_2 + [\Lambda_2, u].$$

Cette relation entre variétés de Poisson homogènes est une relation d'équivalence.

Une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(P, \mathbb{R})$ est dite homogène de degré $k \in \mathbb{R}$ (relativement à Z) si

$$\mathfrak{L}_Z f = kf.$$

On a alors $[Z, \Lambda^*(df)] = [Z, [\Lambda, f]] = [[Z, \Lambda], f] + [\Lambda, [Z, f]] = [\Lambda, \mathfrak{L}_Z f - f] = (k-1)\Lambda^*(df)$.

Le lemme technique suivant s'avère souvent utile.

LEMME - Si $f_i \in \mathcal{C}^\infty(P, \mathbb{R})$ est homogène de degré k_i , $i = 1, 2$, $\{f_1, f_2\}$ est homogène de degré $k_1 + k_2 - 1$.

Preuve - $\mathfrak{L}_Z \{f_1, f_2\} = [Z, \{f_1, f_2\}] = [Z, [\Lambda^*(df_1), f_2]]$

$$= -[\Lambda^*(df_1), [f_2, Z]] - [f_2, [Z, \Lambda^*(df_1)]]$$

$$= [\Lambda^*(df_1), \mathfrak{L}_Z f_2] + (k_1 - 1)[\Lambda^*(df_1), f_2] = (k_1 + k_2 - 1)\{f_1, f_2\}.$$

Exemples -

i) Si (P, Λ) est une variété symplectique, (P, Λ, Z) est homogène si et seulement si, σ désignant la forme symplectique de (P, Λ) , $\mathfrak{L}_Z \sigma = \sigma$, autrement dit si et seulement si $\sigma = di_Z \sigma$.

On pose $\lambda = i_Z \sigma$. Si $f : (M_1, \sigma_1, Z_1) \rightarrow (M_2, \sigma_2, Z_2)$ est un isomorphisme, on a $f^* \lambda_2 = \lambda_1 + du_1$ avec $u_1 \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$.

ii) \mathfrak{g}^* muni de sa structure canonique de variété de Poisson est homogène, le champ $Z(\xi)$ étant le champ canonique sur \mathfrak{g}^* ; ceci ne fait que traduire la linéarité de structure de \mathfrak{g}^* .

5 - Groupe de Poisson -

DEFINITION 5.1 ([8]) - Un groupe de Poisson est un groupe de Lie G muni d'une structure de Poisson Λ faisant de la multiplication un morphisme de Poisson de $G \times G$ dans G .

On définit, pour $x \in G$, les 2-tenseurs $L_x \Lambda$ et $R_x \Lambda$ par

$$L_x \Lambda_y = T_y L_x (\Lambda_y)$$

$$R_x \Lambda_y = T_y R_x (\Lambda_y)$$

On a alors $\Lambda_{xy} = L_x \Lambda_y + R_y \Lambda_x$ (1)

on en déduit que, si e est l'élément neutre de G , $\Lambda_e = 0$ et que $x \rightarrow x^{-1}$ est un anti-isomorphisme $((xy^{-1} = y^{-1}x^{-1}))$ de Poisson de (G, Λ) sur $(G^{-1}, -\Lambda)$. On dira que $(G^{-1}, -\Lambda)$ est le groupe de Poisson opposé de (G, Λ) . Si l'on pose

$$\eta(x) = R_{x^{-1}} \Lambda_x = -L_x \Lambda_{x^{-1}}, \quad \forall x \in G,$$

on définit un 1-cocycle de G pour la représentation adjointe, à valeurs dans $\Lambda^2 \mathfrak{G}$, c'est-à-dire que $\eta(xy) = \eta(x) + \text{Ad}(x).\eta(y)$.

Exemples -

i) $(\mathfrak{g}^*, -d)$ est un groupe de Poisson abélien car

$$\Lambda_{\xi+\eta} = \Lambda_{\xi} + \Lambda_{\eta}$$

ii) Groupe de Poisson semi-simple : Si (G, Λ) est un groupe de Poisson semi-simple, il existe $\mu \in \Lambda^2 \mathfrak{G}$ tel que $\eta(x) = \text{Ad}(x)\mu - \mu$.

Alors, si $\mu^{\ell}(x) = L_x \mu$ et $\mu^r(x) = R_x \mu$, on a $\Lambda = \mu^{\ell} - \mu^r$. μ^{ℓ} (resp. μ^r) étant un champ de 2-tenseurs invariant à gauche (resp. à droite), on a, par définition même du crochet sur ΛG , $[\mu^{\ell}, \mu^r] = -[\mu, \mu]^r$. Comme le crochet

d'un champ invariant à gauche et d'un champ invariant à droite est nul, on a

$$0 = [\Lambda, \Lambda]_S = [\mu^\ell - \mu^r, \mu^\ell - \mu^r]_S = [\mu^\ell, \mu^\ell]_S + [\mu^r, \mu^r]_S = [\mu, \mu]^\ell - [\mu, \mu]^r$$

soit, $\forall g \in G$, $Ad(g)[\mu, \mu] = [\mu, \mu]$ (2)

(2) équivaut à dire que μ est une solution de l'équation de Yang-Baxter généralisée ([811]) :

$$\forall X \in \underline{G}, [X, [\mu, \mu]] = 0$$
 (3)

L'équation de Yang-Baxter est

$$[\mu, \mu] = 0$$
 (4)

iii) Inversement, si l'on se donne un groupe de Lie G et une solution $\mu \in \Lambda^2 \underline{G}$ de l'équation de Yang-Baxter généralisée (3) et si l'on pose

$$\Lambda = \mu^\ell - \mu^r$$

(G, Λ) devient un groupe de Poisson (non nécessairement semi-simple).

Remarque - Si μ est une solution de l'équation de Yang-Baxter, (G, μ^ℓ) et (G, μ^r) sont des variétés de Poisson mais pas des groupes de Poisson, sauf si $\mu = 0$.

B - ALGÈBROÏDES DE LIE ET VARIÉTÉS DE POISSON

Commençons par introduire la notion d'algèbroïde de Lie due à Pradines ([21]).

6 - Définition 6.1 - Un algèbroïde de Lie sur une variété M est la donnée d'un fibré vectoriel $p : E \rightarrow M$ tel que :

- i) le faisceau $\widetilde{\text{Sect}}(M, E)$ possède une structure de faisceau d'algèbres de Lie (dont on notera $\{..,\}$ le crochet) ;
- ii) Il existe un morphisme $\rho : E \rightarrow TM$ de fibrés vectoriels au-dessus de M tel que le morphisme induit $\tilde{\rho} : \widetilde{\text{Sect}}(M, E) \rightarrow \mathfrak{X}^\infty(M)$ ($\tilde{\rho}(\omega) = \rho \circ \omega$) soit un morphisme d'algèbres de Lie ;
- iii) pour toute $f \in \mathfrak{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ et tout couple (ω_1, ω_2) de sections de $E \rightarrow M$,

$$\{\omega_1, f\omega_2\} = f\{\omega_1, \omega_2\} + (\mathfrak{L}_{\tilde{\rho}(\omega_1)} f)\omega_2 .$$

(On a donc une structure d'algèbre de Lie locale au sens de Kirillov) sur $\widetilde{\text{Sect}}(M, E)$)

On dit que l'on a un algébroïde de Lie transitif (ou une suite d'Atiyah abstraite) si, $\forall x \in M, \rho(E_x) = T_x M$.

Exemples - Soit $\pi : P(G) \rightarrow M$ un G -fibré principal ayant pour base une variété connexe M .

Soit $E \rightarrow M$ le fibré vectoriel quotient de $T(P(G))$ par l'action à droite de G . Si l'on munit les sections de ce fibré du crochet des champs de vecteurs invariants à droite, le morphisme $\rho : E \rightarrow TM$ induit par $T\pi$ fait de $E \rightarrow M$ un algébroïde de Lie transitif.

Quelques Rappels. Soit M une variété. Supposons que pour tout $x \in M$, nous nous soyons donné un sous-espace vectoriel D_x de $T_x M$ de dimension p_x et que la distribution $x \rightarrow D_x$ soit de classe \mathfrak{C}^∞ . On dit que cette distribution définit un feuilletage de Stefan (ou un feuilletage à singularités) de M ([3], [25]) si pour tout $a \in M$ il existe une unique variété intégrale maximale de D , i.e. s'il existe une variété V_a de dimension p_a et une immersion injective $i_a : V_a \rightarrow M$ telles que $a \in i_a(V_a)$ et pour tout $x \in V_a$ $T_x i_a(T_x V_a) = D_x$ et telles que le couple (i_a, V_a) soit maximal dans l'ensemble des couples ayant ces propriétés. V_a est appelée la feuille passant par a . Un point $a \in M$ est dit régulier s'il existe un voisinage de a sur lequel p_x soit constant et maximum. Il existe un ouvert partout dense

de M sur lequel le feuilletage de Stefan est régulier (i.e. sur lequel la dimension des feuilles est constante).

Le théorème suivant ([3] , [26]) donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une distribution définisse un feuilletage de Stefan.

THEOREME DE FROBENIUS-SUSSMANN - Une distribution D de classe \mathcal{C}^∞ sur une variété M définit un feuilletage de Stefan de M si et seulement s'il existe une sous-algèbre de Lie \mathfrak{g} de $\mathcal{X}^\infty(M)$ telle qu'en tout point $x \in M$, $D(x)$ soit engendrée par les valeurs en x des champs de \mathfrak{g} et telle que, pour tout $\xi \in \mathfrak{g}$ de flot φ_t^ξ et tout $\eta \in \mathfrak{g}$ on ait $(\varphi_t^\xi)_* \eta \in \mathfrak{g}_{0C}$ (faisceau des germes d'éléments de \mathfrak{g}).

On exprime cette dernière condition en disant que la sous-algèbre \mathfrak{g} est complète. Rappelons que $((\varphi_t^\xi)_* \eta)(x) = T\varphi_{-t}^\xi(\eta(\varphi_\tau^\xi(x)))$.

THEOREME 6.1 (Pradines) - Soit $(p : E \rightarrow M, \rho)$ un algébroïde de Lie.

- i) $\rho(E) = \{\rho(E_x) ; x \in E\}$ définit un feuilletage de Stefan de M .
- ii) Soit S une feuille de ce feuilletage. Alors :
 - a) le crochet $\{.,.\}$ de $\widetilde{\text{Sect}}(M, E)$ induit un crochet $\{.,.\}_S$ dans $\widetilde{\text{Sect}}(S, E_S)$;

b) Si $\rho_S = \rho|_{E_S}$, $E_S \xrightarrow{\rho_S} TS$ est un algébroïde

$$\begin{array}{c} | \\ S \end{array}$$

de Lie transitif.

iii) Pour tout $x \in M$, $\ker \rho_x$ est canoniquement muni d'une structure d'algèbre de Lie ($\rho_x = \rho|_{E_x}$).

Si S est une feuille du feuilletage de Stefan, $I_S = \ker \rho_S$ est un fibré localement trivial en algèbres de Lie.

Preuve - Soit r le rang du fibré $E \rightarrow M$. Donnons-nous une trivialisation locale $E_U \rightarrow U$ de ce fibré et une base $\{e_1, \dots, e_r\}$ des sections de ce fibré au-dessus de U .

$\tilde{\rho}(\text{Sect}(U, E_U))$ est le sous-module de type fini de $\mathcal{X}^\infty(M)$ engendré par les $X_i = \tilde{\rho}(e_i)$, $1 \leq i \leq r$.

Soit $\mathfrak{g} = \{\tilde{\rho}(\omega) ; \omega \in \text{Sect}(U, E_U)\}$. Donnons-nous deux éléments X et Y de \mathfrak{g} . A cause de la linéarité nous pourrions nous limiter au cas où Y est l'un des X_i ; donc $Y = \tilde{\rho}(e_i)$ et X s'écrit $X = \tilde{\rho}(\omega)$.

Alors si l'on écrit $\{\omega, e_i\} = \omega_j^i e_j$ (1)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} ((\varphi_t^X)_* Y(x)) &= \frac{d}{dt} ((\varphi_t^X)_* X_i(x)) = (\varphi_t^X)_* [X, X_i](x) = (\varphi_t^X)_* [\tilde{\rho}(\omega), \tilde{\rho}(e_i)](x) \\ &= (\varphi_t^X)_* \tilde{\rho}(\{\omega, e_i\})(x) = \omega_j^i (\varphi_{-t}^X(t, x)) (\varphi_t^X)_* X_j(x). \end{aligned}$$

En posant $a_j^i(t, x) = \omega_j^i(\varphi_{-t}^X(t, x))$, $(\varphi_t^X)_* X_j$, $1 \leq i \leq r$, est solution du système linéaire d'équations différentielles dans \mathbb{R}^{r^2}

$$\frac{d}{dt} ((\varphi_t^X)_* X_i) = a_j^i(t, x) (\varphi_t^X)_* X_j.$$

Si $A_j^i(t, x)$ désignant les coefficients de la matrice $\exp(\int_0^t a_j^i(\tau, x) d\tau)$

on a donc, pour tout (t,x) tel que $\varphi_t^X(x)$ soit défini,

$$(\varphi_t^X)_* X_i(x) = A_i^j(t,x) X_j(x) = \rho(A_i^j(t,x)) \cdot e_j(x)$$

ce qui entraîne que $(\varphi_t^X)_* X_i \in \mathfrak{g}_{\text{loc}}$, $1 \leq i \leq r$, donc que \mathfrak{g} est complète et vérifie les hypothèses du théorème de Frobénius-Sussmann (en fait la démonstration présentée est l'essentiel de la démonstration du théorème de Frobénius-Sussmann avec l'hypothèse supplémentaire que \mathfrak{g} est localement de type fini).

ii) Soit S une feuille du feuilletage de Stefan \mathcal{A} de M défini en i). Soient

$$i_S^* : S \rightarrow M \text{ l'inclusion et } \ker i_S^* = \{\omega \in \widetilde{\text{Sect}}(M,E) ; i_S^* \omega = 0\}.$$

$\ker i_S^*$ est un sous-faisceau et un idéal de $\widetilde{\text{Sect}}(M,E)$. En effet, soient $\omega \in \ker i_S^*$ et $\omega' \in \widetilde{\text{Sect}}(M,E)$. Au voisinage d'un point $x_0 \in S$, donnons-nous une base $\{e_1, \dots, e_r\}$ de l'espace des sections. On a $\omega = u^i e_i$ et

$$\{\omega', \omega\}|_S = ((\tilde{\rho}(\omega')u^i)e_i + u^i \{\omega', e_i\})|_S = 0.$$

car les u^i sont nulles sur S et $\tilde{\rho}(\omega')|_S$ est tangent à S .

Cela permet donc de définir un crochet $\{.,.\}_S$ dans $\widetilde{\text{Sect}}(S,E_S)$.

Passons au quotient par $\ker i_S^*$ (ce qui revient à identifier les sections locales de E ayant même restriction à S) :

$$\widetilde{\text{Sect}}(M,E) / \ker i_S^* \simeq \widetilde{\text{Sect}}(S,E_S).$$

Alors $(E_S, \{.,.\}_S)$ devient un algébroïde de Lie transitif.

iii) Soient $x \in M$ et ω_1, ω_2 des sections de $E \rightarrow M$ telles que $\tilde{\rho}(\omega_i)(x) = 0$, $i=1,2$. Alors $\{\omega_1, \omega_2\}(x)$ ne dépend que des valeurs $\omega_1(x)$ et $\omega_2(x)$. En effet si $u \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$,

$$\{\omega_1, u\omega_2\}(x) = u(x)\{\omega_1, \omega_2\}(x) + (\tilde{\rho}(\omega_1)u)(x)\omega_2(x) = u(x)\{\omega_1, \omega_2\}(x).$$

On peut donc munir $\ker \rho_S$ d'une structure d'algèbre de Lie en posant, si $(\xi, \eta) \in (\ker \rho_x)^2$, $\{\xi, \eta\} = \{\omega_1, \omega_2\}(x)$. où ω_1 et ω_2 sont des sections valant respectivement ξ et η au point x .

On a la suite exacte, où $I_S = \ker \rho_S$:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & I_S & \rightarrow & E_S & \xrightarrow{\rho_S} & TS & \rightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow & & & & \\ & & & & S & & & & \end{array}$$

$E_S \rightarrow S$ est un fibré vectoriel ; on peut prendre une scission $\gamma: TS \rightarrow E_S$ de cette suite et définir une connexion ∇ sur le fibré $I_S \rightarrow S$ par

$$\nabla_X \xi = \{\gamma(X), \xi\} \quad (X \in \mathcal{X}^\infty(S), \xi \in \text{Sect}(S, I_S))$$

On a

$$\begin{aligned} \nabla_X \{\xi_1, \xi_2\} &= \{\gamma(X), \{\xi_1, \xi_2\}\} \\ &= \{\nabla_X \xi_1, \xi_2\} + \{\xi_1, \nabla_X \xi_2\} \end{aligned}$$

∇ est donc une connexion adaptée à la structure à crochet. Plus précisément si $B: \wedge^2 I_S \rightarrow I_S$ est définie par $B(\xi_1, \xi_2) = \{\xi_1, \xi_2\}$ on a $\nabla B = 0$, donc B est invariant par transport parallèle et toutes les structures d'algèbres de Lie sur les $\ker \rho_x$ sont isomorphes. $\ker \rho$ est un fibré localement trivial en algèbres de Lie, autrement dit si on note I_S^0 la fibre-type, qui est une algèbre de Lie, le groupe structural de $I_S \rightarrow S$ est un sous-groupe du groupe des automorphismes de l'algèbre de Lie I_S^0 .

Remarques -

Si $E \rightarrow M$ est un algébroïde de Lie, $\rho(E)$ étant un feuilletage de Stefan, il existe un ouvert dense Ω de M tel que $\rho(E)$ induise sur chaque composante connexe de Ω un feuilletage régulier. ([3])

Définition 6.3 - Un algébroïde de Lie sera dit **régulier** si le feuilletage défini par $\rho(E)$ est régulier. Tout algébroïde de Lie est régulier sur les composantes connexes d'un ouvert dense.

Si E est un algébroïde de Lie régulier, si $\mathcal{A} = \rho(E)$ on a une suite exacte de fibrés

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & E & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{A} \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & M & & \end{array}$$

Il en résulte que, si $\omega_i \in \widetilde{\text{Sect}}(M, I), i = 1, 2,$

$$(\omega_1, \omega_2) \rightarrow \{\omega_1, \omega_2\}$$

est $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ -bilinéaire et donc qu'il existe $B \in I \otimes \wedge^2 I^*$ tel que

$$i_{\omega_1 \wedge \omega_2} B = \{\omega_1, \omega_2\}$$

On a alors une "variation \mathcal{C}^∞ " des structures de fibrés $I_S \rightarrow S$ en algèbre de Lie.

c) On peut calculer la courbure de la connexion utilisée dans la démonstration de iii) : si $(X, Y) \in (\widetilde{\mathcal{X}}^\infty(S))^2$ et $\xi \in \widetilde{\text{Sect}}(S, I_S),$

$$\begin{aligned} R(X, Y)\xi &= \nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_Y \nabla_X \xi - \nabla_{[X, Y]} \xi \\ &= \{\alpha(X), \{\gamma(Y), \xi\}\} - \{\gamma(Y), \{\alpha(X), \xi\}\} - \{\gamma([X, Y]), \xi\} \\ &= \{\{\alpha(X), \gamma(Y)\}, \xi\} - \{\gamma([X, Y]), \xi\} = \{\{\alpha(X), \gamma(Y)\} - \gamma([X, Y]), \xi\}. \end{aligned}$$

Et, par construction, $\{\alpha(X), \gamma(Y)\} - \gamma([X, Y]) = R(X, Y) \in I.$

En particulier, si $I_S \rightarrow S$ est un fibré en algèbres de Lie abéliennes, la connexion ∇ est plate.

7. VARIETE DE POISSON ASSOCIEE A UN ALGEBROIDE DE LIE -

Considérons un algébroïde de Lie dans le cas particulier où M est réduite à un point ; alors $TM = \{O\}$, $\rho = O$ et E est une algèbre de Lie. Les algébroïdes de Lie constituent donc une généralisation des algèbres de Lie.

On a vu que, si \mathfrak{g} était une algèbre de Lie, on pouvait injecter \mathfrak{g} dans $\mathfrak{C}^\infty(\mathfrak{g}^*, \mathbb{R})$ en associant à tout $X \in \mathfrak{g}$ la fonction $\tilde{X} : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\tilde{X}(\xi) = \langle \xi, X \rangle$ et que cela permettait de munir \mathfrak{g}^* d'une structure de variété de Poisson. D'une façon analogue, si E est un algébroïde de Lie, on peut injecter $\text{Sect}(M, E)$ dans le faisceau des fonctions réelles de classe \mathfrak{C}^∞ sur E^* en associant à $X \in \text{Sect}(M, E)$ la fonction $\tilde{X} : E^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\tilde{X}(\xi) = \langle \xi, X \rangle$; d'une manière précise, si $\pi : E^* \rightarrow M$ est la projection canonique, $\tilde{X}(\xi) = \langle \xi, X(\pi(\xi)) \rangle$. Le théorème suivant montre que l'on peut munir E^* d'une structure de variété de Poisson canonique

THEOREME 7.1 - Soit E un algébroïde de Lie. Il existe sur E^* une unique structure de Poisson Λ telle que l'injection $X \in \text{Sect}(M, E) \rightarrow \tilde{X} \in \mathfrak{C}^\infty(E^*, \mathbb{R})$ soit un morphisme d'algèbres de Lie. De plus, si Z est le champ canonique sur E^* , i.e. le champ défini par $Z(\xi) = \frac{d}{dt}(e^t \xi)|_{t=0}$, (E^*, Λ, Z) est une variété de Poisson homogène.

Preuve -

i) Lemme technique - S'il existe une structure de Poisson Λ sur E^* telle que $\text{Sect}(M, E)$ soit une sous-algèbre de Lie de

$\mathfrak{C}^\infty(E^*, \mathbb{R})$, alors

a) $\forall (u, v) \in (\mathfrak{C}^\infty(M, \mathbb{R}))^2, \{\pi^*u, \pi^*v\} = 0$;

b) $\forall u \in \mathfrak{C}^\infty(M, \mathbb{R}), \forall X \in \text{Sect}(M, E), \{\tilde{X}, \pi^*u\} = \pi^*(\tilde{\rho}(X)u)$;

$$c) \{\tilde{X}, \tilde{Y}\} = \{\tilde{X}, \tilde{Y}\}, \forall (X, Y) \in (\text{Sect}(M, E))^2;$$

$$d) [Z, \Lambda] = -\Lambda.$$

Preuve du lemme - Donnons-nous une base $\{e_1, \dots, e_r\}$ des sections de E au-dessus d'un ouvert trivialisant U de M et soit $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r\}$ la base des sections de E^* au-dessus de U duale de la précédente. Soient (x^1, \dots, x^m) des coordonnées locales de M sur U . Posons $\{e_i, e_j\} = A_{ij}^k e_k$.

Soient X et Y des sections de E au-dessus de U $X = X^i e_i$, $Y = Y^j e_j$.

On a

$$\begin{aligned} \{X, Y\} &= X^i Y^j \{e_i, e_j\} + (X^i (\tilde{\rho}(e_i) Y^{jj}) - Y^j (\tilde{\rho}(e_j) X^i)) e_j \\ &= X^i Y^j A_{ij}^k e_k + (\tilde{\rho}(X) Y^j - \tilde{\rho}(Y) X^i) e_j. \end{aligned}$$

Soit ξ une section de E^* au-dessus de U : $\xi = \xi_j \varepsilon^j$

$$\tilde{X}(\xi(x)) = \langle \xi(x), X(x) \rangle = X^i(x) \xi_i(x)$$

$$\text{i.e. } \tilde{X}(\xi) = X^i \xi_i, \quad \tilde{Y}(\xi) = Y^j \xi_j.$$

D'une part

$$\{\tilde{X}, \tilde{Y}\}(\xi) = X^i Y^j A_{ij}^k \xi_k + (\tilde{\rho}(X) Y^j - \tilde{\rho}(Y) X^i) \xi_j. \quad (1)$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \{\tilde{X}, \tilde{Y}\}(\xi) &= i_{\Lambda}(d\tilde{X} \wedge d\tilde{Y})(\xi) \\ &= \xi_i \xi_j i_{\Lambda}(dX^i \wedge dY^j) + \xi_i Y^j i_{\Lambda}(dX^i \wedge d\xi_j) - \xi_i X^j i_{\Lambda}(dY^i \wedge d\xi_j) + X^i Y^j i_{\Lambda}(d\xi_i \wedge d\xi_j) \end{aligned}$$

soit encore, en posant $\Lambda_{ij}(x, \xi) = i_{\Lambda}(d\xi_i \wedge d\xi_j)$, $\Lambda_j^k(x, \xi) = i_{\Lambda}(dx^k \wedge d\xi_j)$,

$$\Lambda^{ij}(x, \xi) = i_{\Lambda}(dX^i \wedge dX^j),$$

$$\{\tilde{X}, \tilde{Y}\}(\xi) = \xi_i \xi_j \frac{\partial X^i}{\partial x^k} \frac{\partial Y^j}{\partial x^\ell} \Lambda^{k\ell} + (\xi_i Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^k} - \xi_i X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^k}) \Lambda_j^k + X^i X^j \Lambda_{ij} \quad (2).$$

Par hypothèse

$$\{\tilde{X}, \tilde{Y}\}(\xi) = \{\tilde{X}, \tilde{Y}\}(\xi) \quad (3)$$

Prenant des X^i et des Y^j constants on en tire que $\Lambda_{ij}(x, \xi) = A_{ij}^k(x) \xi_k$.

Prenant des Y^j constants on déduit d'abord de l'homogénéité de degré 1 par rapport à ξ des deux membres de (2) que $\Lambda_j^k(x, \xi) = A_j^k(x)$, puis on tire de (3) que

$$\tilde{\rho}(X) = -A_i^k X^i \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Enfin le terme $\xi_i \xi_j \frac{\partial X^i}{\partial x^k} \frac{\partial Y^j}{\partial x^\ell} \Lambda^{k\ell}$ devant être homogène de degré 1 par rapport à ξ on a $\Lambda^{k\ell} = 0$.

Si $u \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$, $\pi^*u = u \circ \pi$ s'écrit dans la trivialisatation considérée comme une fonction \tilde{u} ne dépendant que de x .

$$\text{Alors } \{\tilde{X}, \tilde{u}\}(\xi) = i_{\Lambda}((dX^i \xi_i + X^i d\xi_i) \wedge \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x^k} dx^k) = -X^i \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x^k} A_i^k = \tilde{\rho}(X)\tilde{u}.$$

Si $v \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$, on a :

$$\{\tilde{u}, \tilde{v}\}(\xi) = i_{\Lambda}(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x^i} dx^i \wedge \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x^j} dx^j) = 0 \quad (\text{car } \Lambda^{ij} = 0).$$

On a donc montré a), b), c). le d) résulte de ce que $\mathfrak{L}_Z \Lambda + \Lambda = 0$ ce qui se vérifie successivement sur les éléments de la forme $d\tilde{X} \wedge d\tilde{Y}$, $d\tilde{X} \wedge d(\pi^*u)$

et $d(\pi^*u) \wedge d(\pi^*uv)$ en utilisant le fait que $\mathfrak{L}_Z \tilde{X} = \tilde{X}$ et $\mathfrak{L}_Z(\pi^*u) = 0$.

ii) Il résulte du lemme que, s'il existe sur E^* une structure de Poisson, cette structure est nécessairement unique.

iii) L'existence résulte du fait que l'on a une variété de Poisson à partir du moment où l'on s'est donné les crochets de Poisson des coordonnées locales à condition que ces crochets vérifient l'identité de Jacobi. Celle-ci est trivialement vérifiée lorsque les trois termes sont du type π^*u avec $u \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ ou lorsque les trois termes sont du type \tilde{X} avec $X \in \text{Sect}(\underline{M}, E)$ ou lorsque deux termes sont du type π^*u et le troisième du type \tilde{X} . Enfin

$$\{\{\tilde{X}, \{\tilde{Y}, \pi^*u\}\}\} = \pi^*([\tilde{\rho}(X), \tilde{\rho}(Y)] - \tilde{\rho}(\{X, Y\}))u = 0.$$

Remarque - La condition a) entraîne que π est un morphisme de Poisson de E^* sur M munie de la structure triviale.

DEFINITION 7.1 - Une structure de Lie-Poisson sur un fibré vectoriel $\pi : F \rightarrow M$ est la donnée sur F d'une structure de variété de Poisson homogène (F, Λ, Z_F) où Z_F est le champ canonique i.e. le champ défini pour tout $y \in F$ par $Z_F(y) = \frac{d}{dt}(e^t y)|_{t=0}$.

PROPOSITION 7.1 - Soit $E \rightarrow M$ un fibré vectoriel. Si $E^* \rightarrow M$ est muni d'une structure de Lie-Poisson, l'image de $\text{Sect}(\underline{M}, E)$ dans

$\mathcal{C}^\infty(\underline{E}^*, \mathbb{R})$ par l'injection $X \rightarrow \tilde{X}$ est une sous-algèbre de Lie de

$\mathcal{C}^\infty(\underline{E}^*, \mathbb{R})$.

Preuve - On remarque que les fonctions Z -homogènes de degré 1 sont exactement les images des sections de E . Comme les fonctions homogènes de degré 1 sur une variété de Poisson homogène forment une sous-algèbre de Lie (cf. 4.e)), le résultat est prouvé.

Cette proposition montre que la définition 7.1 est équivalente à la définition donnée dans [2].

On va maintenant établir que toute structure de Lie-Poisson sur E^* provient en fait d'une structure d'algèbroïde de Lie sur E , ce qui établira une équivalence de catégories entre algèbroïdes de Lie et variétés de Lie-Poisson prolongeant la dualité algèbres de Lie-variétés de Poisson linéaires.

Compte-tenu de la proposition 7.1 $\widetilde{\text{Sect}}(M, E)$ est muni d'une structure de faisceau d'algèbres de Lie dont on notera $[\cdot, \cdot]$ le crochet. Tout revient donc à construire un morphisme de fibrés sur M , $\rho : E \rightarrow TM$ et à vérifier que le triplet formé par E , ρ et la structure de faisceau d'algèbres de Lie sur $\widetilde{\text{Sect}}(M, E)$ est une structure d'algèbroïde de Lie sur E . Par construction même la structure de variété de Lie-Poisson sur E^* associée à cette structure sera la structure initiale.

LEMME - Si $u \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$, $\mathfrak{L}_Z(\tilde{X}, \pi^*u) = 0$.

Preuve - $\mathfrak{L}_Z \lrcorner (d\tilde{X} \wedge \pi^*du) = - \lrcorner (d\tilde{X} \wedge \pi^*du)$ puisque \tilde{X} est homogène de degré 1 et u de degré 0.

Il résulte de ce lemme que $\{\tilde{X}, \pi^*u\} = \pi^*v$ pour une certaine fonction v sur M et on vérifie que $u \rightarrow v$ est une dérivation de l'algèbre associative $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$. Il existe donc un champ de vecteurs $\tilde{\rho}(X)$ sur M tel que

$$v = \mathfrak{L}_{\tilde{\rho}(X)} u.$$

Si $w \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ $\tilde{w}\tilde{X} = \pi^*w.\tilde{X}$.

Compte tenu du lemme technique $\{\tilde{w}\tilde{X}, \pi^*u\} = \pi^*(w.v)$ autrement dit $\tilde{\rho}(wX) = w\tilde{\rho}(X)$.

Il existe donc un morphisme $\rho : E \rightarrow TM$ tel que $\tilde{\rho}(X) = \rho \circ X$
 E sera muni d'une structure d'algèbroïde de Lie si

$$i) \tilde{\rho}([X, Y]) = [\tilde{\rho}(X), \tilde{\rho}(Y)]$$

$$\text{ii) } [X, wY] = w[X, Y] + (\mathfrak{L}_{\rho(X)} w)Y$$

i) résulte de l'identité de Jacobi appliquée au triplet $X, Y, u \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ et ii) du fait que le crochet de Poisson sur E^* est une dérivation en chacun de ses arguments de la structure associative de $\mathcal{C}^\infty(E^*, \mathbb{R})$.

On a ainsi montré le

THEOREME 7.2 - La catégorie des algébroïdes de Lie (sur M) est équivalente à la catégorie des variétés de Lie-Poisson sur M .

Si M est réduite à un point on retrouve la dualité algèbre de Lie-cogèbre de Lie.

Exemple - Soit \mathcal{F} un feuilletage régulier d'une variété M . A l'algébroïde qu'il définit est associée une structure de Lie-Poisson sur $\mathcal{F}^* \rightarrow M$ dont les feuilles sont les cotangents des feuilles de \mathcal{F} (pour des raisons de dimension) munies de leur structure canonique de cotangent. Cette variété a été considérée par A. Lichnerowicz.

En particulier si \mathcal{F} est le feuilletage grossier $\mathcal{F} = TM$, $(T^*M \rightarrow M, d\lambda)$ est la structure de Lie-Poisson associée.

Remarque : Z désignant le champ fondamental de $\mathcal{F}^* \rightarrow M$, le fait que la structure de Poisson sur \mathcal{F} soit Z -homogène se traduit, Z étant tangent aux feuilles symplectiques, par l'homogénéité de leur structure, i.e. par $i_Z d\lambda_F = \lambda_F$ où λ_F est la forme de Liouville de T^*F , $F \in \mathcal{F}$.

8. ALGEBROÏDE DE LIE D'UNE VARIÉTÉ DE POISSON -

THEOREME 8.1 ([2], [10], [13], [16 bis]) - Soit (P, Λ) une variété de Poisson. Alors T^*P est canoniquement muni d'une structure d'algébroïde de Lie où le morphisme de fibrés vectoriels de T^*P dans TP est égal à Λ^* et où le crochet de deux 1-formes différentielles sur P est donné par

$$\{\omega_1, \omega_2\} = i_{\Lambda^* \omega_1} d\omega_2 - i_{\Lambda^* \omega_2} d\omega_1 + d(i_{\Lambda}(\omega_1 \wedge \omega_2)) \quad (1)$$

d est alors un morphisme de faisceaux d'algèbres de Lie de $\mathcal{C}^\infty(P, \mathbb{R})$ dans $\underline{\Omega}_1(P)$.

Preuve - Il faut vérifier que le crochet défini par (1) satisfait à l'identité de Jacobi. Pour cela nous emploierons une méthode due à Koszul ([13]).
 Considérons l'algèbre graduée $\Omega(P) = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} \Omega_p(P)$ de toutes les formes différentielles sur P.

Nous convenons que, si $p \in \mathbb{Z}$, $p < 0$, $\Omega_p(P) = \{0\}$ afin de pouvoir considérer des endomorphismes de degré négatif.

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\text{End}^k(\Omega(P))$ désignera l'espace vectoriel des endomorphismes de degré k de $\Omega(P)$ et l'on posera

$$\text{End}(\Omega(P)) = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} \text{End}^k(\Omega(P)).$$

Etant donnés deux éléments u et v de $\text{End}(\Omega(P))$ de degrés respectifs p et q nous définirons le crochet $[u,v]$ par

$$[u,v] = uv - (-1)^{pq} vu$$

Koszul introduit alors l'opérateur différentiel de degré -1

$$\Delta = [i_\lambda, d] = i_\lambda d - di_\lambda.$$

Comme $[d, \Delta] = d\Delta + \Delta d = 0$ et $[\Delta, i_\lambda] = \Delta i_\lambda - i_\lambda \Delta = [i_\lambda, \Delta] = 0$

($[i_\lambda, \Delta]$ désignant le crochet de Schouten), on a $\Delta^2 = 0$.

Cet opérateur Δ permet de munir $\Omega(P)$ d'une structure d'algèbre de Lie graduée en posant, si $\omega_i \in \Omega_{p_i}(P)$, $i=1,2$:

$$\{\omega_1, \omega_2\} = (-1)^{p_1} (\Delta(\omega_1 \wedge \omega_2) - (\Delta\omega_1) \wedge \omega_2 - (-1)^{p_1} \omega_1 \wedge (\Delta\omega_2)).$$

Le crochet défini par (1) est le précédent dans le cas où $p_1 = p_2 = 1$.

Il reste à montrer que $\Lambda^* : (T^*P, \{.,.\}) \rightarrow (TP, [.,.])$ est un morphisme d'algèbres de Lie.

Soient $u_i \in \mathcal{C}^\infty(P, \mathbb{R})$, $i=1,2$. On a, $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(P, \mathbb{R})$,

$$[\Lambda^*(du_1), \Lambda^*(du_2)]f = \Lambda^*(du_1)(\Lambda^*(du_2)f) - \Lambda^*(du_2)(\Lambda^*(du_1)f)$$

$$= \{u_1, \{u_2, f\}\} - \{u_2, \{u_1, f\}\} = \{\{u_1, u_2\}, f\} = \Lambda^* (\{du_1, du_2\})f$$

donc
$$\{\Lambda^* (du_1), \Lambda^* (du_2)\} = \Lambda^* (\{du_1, du_2\}).$$

Localement, toute 1-forme différentielle sur P est combinaison linéaire à coefficients dans $\mathfrak{C}^\infty(P, \mathbb{R})$ de 1-formes exactes. Soient donc ω_1 et ω_2 deux 1-formes exactes et $u \in \mathfrak{C}^\infty(P, \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \Lambda^* (\{\omega_1, u\omega_2\}) &= u\Lambda^* (\{\omega_1, \omega_2\}) + (\mathfrak{L}_{\Lambda^* (\omega_1)} u) \Lambda^* (\omega_2) \\ &= u[\Lambda^* (\omega_1), \Lambda^* (\omega_2)] + (\mathfrak{L}_{\Lambda^* (\omega_1)} u) \Lambda^* (\omega_2) = [\Lambda^* (\omega_1), \Lambda^* (u\omega_2)]. \end{aligned}$$

Donc Λ^* est un morphisme d'algèbres de Lie .

PROPOSITION 8.1 ([15]) - Λ est un opérateur de cohomologie sur

$$\text{l'algèbre de Lie graduée } (\text{Sect}(P, \Lambda TP) = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} \text{Sect}(P, \Lambda^p TP), [\dots]).$$

Preuve - Si T est un p-tenseur contravariant antisymétrique, l'identité de Jacobi pour le crochet de Schouten (cf. Appendice) nous donne, compte tenu de

$$[\Lambda, \Lambda] = 0 : (-1)^{3(p+1)} [\Lambda, [\Lambda, T]] - [\Lambda, (-1)^{3(p+1)} [\Lambda, T]] = 0 \text{ soit } [\Lambda, [\Lambda, T]] = 0.$$

On définit donc un opérateur cobord en posant $\partial T = [\Lambda, T]$.

DEFINITION 8.1 - La cohomologie ainsi définie est appelée par Lichnérowicz ([15]) la Λ -cohomologie de P.

L'opérateur $\Lambda^* : \Omega_1(P) \rightarrow \mathfrak{X}^\infty(P)$ se prolonge en un opérateur encore noté Λ^* de $\Omega(P) = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} \Omega_p(P)$ dans $\text{Sect}(P, \Lambda TP)$.

LEMME - On a $\Lambda^* (d\omega) = [\Lambda, \Lambda^* (\omega)]$ pour tout $\omega \in \Omega(P)$.

Preuve - Il suffit de vérifier cette formule sur les 1-formes. Soit $\omega = \omega_i dx^i$

$$\Lambda^*(d\omega) = \Lambda^*(d\omega_i \wedge dx^i) = [\Lambda, \omega_i] \wedge [\Lambda, x^i]$$

$$[\Lambda, \Lambda^*(\omega)] = [\Lambda, \omega_i [\Lambda, x^i]] = [\Lambda, \omega_i] \wedge [\Lambda, x^i].$$

THEOREME 8.2 ([13]) - L'opérateur Λ^* est un morphisme d'algèbres de Lie graduées de $(\Omega(P), \{.,.\})$ dans $(\text{Sect}(P, \Lambda TP), \{.,.\})$ induisant un morphisme de la Λ -cohomologie de De Rham de P dans la cohomologie de P .

Preuve - Pour vérifier que Λ^* est un morphisme d'algèbres de Lie graduées, il suffit de montrer que $[\Lambda^*(\omega_1), \Lambda(\omega_2)] = \Lambda^*([\omega_1, \omega_2])$ lorsque ω_1 et ω_2 sont des 1-formes, ce qui résulte du théorème 8.1. Le fait que Λ^* applique la cohomologie de De Rham dans la Λ -cohomologie résulte du lemme.

DEFINITION 8.2 - L'algèbroïde de Lie que le théorème 8.1 permet de définir s'appelle l'algèbroïde de Lie de la variété de Poisson (P, Λ) .

On peut caractériser cet algèbroïde de Lie grâce au théorème suivant.

THEOREME 8.3 - Soit P une variété telle que son fibré cotangent soit muni d'une structure d'algèbroïde de Lie dont on note ρ le morphisme de T^*P dans TP .

Alors T^*P est l'algèbroïde de Lie d'une structure de Poisson Λ sur P telle que $\Lambda^* = \rho$ si et seulement si ρ est antisymétrique (i.e. le 2-

tenseur contravariant Λ défini sur P par $i_\Lambda(\omega_1 \otimes \omega_2) = \omega_2(\tilde{\rho}(\omega_1))$

est antisymétrique) et $Z(T^*P)$ est une sous-algèbre de Lie de $\Omega_1(P)$.

Preuve - Nous noterons $[[.,.]]$ le crochet de T^*P .

Si T^*P est l'algèbroïde de Lie d'une structure de Poisson Λ sur P on a,

$$\forall (f, g) \in (\mathcal{C}^\infty(P, \mathbb{R}))^2 \quad [[df, dg]] = d(i_\Lambda(df \wedge dg)) = d(\{f, g\}) \text{ donc } Z(T^*P) \text{ est une}$$

sous-algèbre de Lie.

Montrons la réciproque : supposons que T^*P soit muni d'une structure d'algèbre de Lie vérifiant les deux hypothèses du théorème.

Soit Λ le 2-tenseur contravariant antisymétrique défini à l'aide de ρ

Posons, pour $\omega_i \in \widetilde{\Omega}_1(P)$, $i = 1, 2$,

$$\{\omega_1, \omega_2\} = i_{\Lambda^* \omega_1} d\omega_2 - i_{\Lambda^* \omega_2} d\omega_1 + d(i_{\Lambda}(\omega_1 \wedge \omega_2))$$

Pour $\omega_i \in \widetilde{\Omega}_1(P)$, $i=1,2$, posons

$$A(\omega_1, \omega_2) = [[\omega_1, \omega_2]] - \{\omega_1, \omega_2\}$$

Si $u \in \mathcal{C}^\infty(P, \mathbb{R})$, comme par construction $\Lambda^* = \rho$, on a

$$A(\omega_1, u \omega_2) = u A(\omega_1, \omega_2)$$

de sorte qu'il existe $T \in \text{Sect}(P, \wedge^2 TP \otimes T^*P)$ tel que

$$A(\omega_1, \omega_2) = (i_{\omega_1} \wedge \omega_2) T.$$

Donnons-nous des coordonnées locales x^1, \dots, x^m sur P et posons

$$T^{ij} = i_{dx^i} \wedge dx^j T$$

T^{ij} est une 1-forme fermée par hypothèse : $d T^{ij} = 0$

Ecrivons que, si $(f, g) \in (\mathcal{C}^\infty(P, \mathbb{R}))^2$,

$$d(i_{df} \wedge dg T) = 0 ;$$

on a
$$d\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j} - \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial g}{\partial x^i}\right) T^{ij}\right) = 0$$

d'où
$$d\left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j} - \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial g}{\partial x^i}\right) \wedge T^{ij} = 0$$

En prenant successivement $f = x^{i_0}$, $g = \frac{(x^{j_0})^2}{2}$, puis $f = \frac{(x^{j_0})^2}{2}$, $g = x^{j_0}$,

$i_0 \neq j_0$, on obtient $dx^{j_0} \wedge T^{i_0 j_0} = 0$ et $dx^{i_0} \wedge T^{i_0 j_0} = 0$

donc $T^{i_0 j_0} = 0$.

Par conséquent $T = 0$ donc $[[\cdot, \cdot]] = \{\cdot, \cdot\}$.

Posons $\forall (f, g) \in (\mathcal{C}^\infty(P, \mathbb{R}))^2$, $\{f, g\} = \Lambda(df \wedge dg)$ et montrons que cela définit une structure de Poisson sur P .

$\{f, g\}$ étant antisymétrique par hypothèse.

$$\{f, g\} = [[\Lambda, f], g]$$

Montrons que $\{\cdot, \cdot\}$ vérifie l'identité de Jacobi. Soient $f_i \in (\mathcal{C}^\infty(P, \mathbb{R}))$, $i=1,2,3$. On a

$$\{\{f_1, f_2\}, f_3\} = [[\Lambda, [[\Lambda, f_1], f_2]], f_3] \quad (1)$$

L'identité de Jacobi du crochet de Schouten permet d'écrire d'une part

$$[[[\Lambda, f_1], f_2], \Lambda] + [[f_2, \Lambda], [\Lambda, f_1]] + [[\Lambda, [\Lambda, f_1]], f_2] = 0 \quad (2)$$

et d'autre part, $[\Lambda, [\Lambda, f_1]] + [\Lambda, [f_1, \Lambda]] + [f_1, [\Lambda, \Lambda]] = 0$ c'est-à-dire, puisque $[\Lambda, f_1] = [f_1, \Lambda]$

$$\text{et } [f_1, [\Lambda, \Lambda]] = -[[\Lambda, \Lambda], f_1], [\Lambda, [\Lambda, f_1]] = \frac{1}{2}[[\Lambda, \Lambda], f_1] \quad (3)$$

Compte tenu de $[[[\Lambda, f_1], f_2], \Lambda] = [\Lambda, [[\Lambda, f_1], f_2]]$, portons (2) dans (1) :

$$\{\{f_1, f_2\}, f_3\} = [[[\Lambda, f_1], [\Lambda, f_2]], f_3] - [[[\Lambda, [\Lambda, f_1]], f_2], f_3] \quad (4)$$

Si $X_i = [\Lambda, f_i]$, $i=1,2$, on a

$$[[X_1, X_2], f_3] = \mathfrak{L}_{[X_1, X_2]} f_3 = X_1(X_2 f_3) - X_2(X_1 f_3)$$

$$\begin{aligned} \text{et } X_1(X_2 f_3) &= \mathfrak{L}_{X_1}(\mathfrak{L}_{[\Lambda, f_2]} f_3) = \mathfrak{L}_{[\Lambda, f_1]}([\Lambda, f_2], f_3) \\ &= [[\Lambda, f_1], [\Lambda, f_2], f_3] = \{f_1, \{f_2, f_3\}\} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{De même } X_2(X_1 f_3) = \{f_2, \{f_1, f_3\}\} \quad (6)$$

Portant (5) et (6) dans (4) on obtient

$$\{\{f_1, f_2\}, f_3\} = -\{\{f_2, f_3\}, f_1\} - \{\{f_3, f_1\}, f_2\} - [[[\Lambda, [\Lambda, f_1]], f_2], f_3]$$

soit, en tenant compte de (3)

$$\begin{aligned} \{\{f_1, f_2\}, f_3\} &= -\frac{1}{2}[[[\Lambda, \Lambda], f_1], f_2], f_3] \\ &= -\frac{1}{2}[\Lambda, \Lambda] df_1 \wedge df_2 \wedge df_3 \end{aligned}$$

Tout revient à montrer que $[\Lambda, \Lambda] df_1 \wedge df_2 \wedge df_3 = 0$.

$$\begin{aligned} \text{On a } d([\Lambda, \Lambda] df_1 \wedge df_2 \wedge df_3) &= \{\{df_1, df_2\}, df_3\} = \{\{[[df_1, df_2]], df_3\}\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donnons-nous des coordonnées locales x^1, \dots, x^m sur P et posons

$$T^{ijk} = [\Lambda, \Lambda] dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k.$$

De $dT^{ijk} = 0$ on déduit que $T^{ijk} = \text{cte}$.

Remplaçons f_1, f_2, f_3 respectivement par $\frac{(x^i)^2}{2}, x^{j_0}, x^{k_0}$;

de $d(T^{i_0 j_0 k_0} x^{i_0}) = 0$ on déduit que $(T^{i_0 j_0 k_0} x^{i_0}) = \text{cte}$,

donc finalement que $T^{i_0 j_0 k_0} = 0$. C.Q.F.D.

DEFINITION 8.3 - Un algébroïde de Lie qui est l'algébroïde de Lie d'une variété de Poisson s'appelle un algébroïde de Lie symplectique.

Ainsi une structure de Poisson sur une variété P apparaît comme la donnée d'une structure particulière d'algébroïde de Lie sur T^*P .

THEOREME 8.4 - Pour tout couple (ω_1, ω_2) de 1-formes différentielles sur P , $d\{\omega_1, \omega_2\} = \{\omega_1, d\omega_2\} - \{\omega_2, d\omega_1\}$, autrement dit d est un 1-cocycle de l'algèbre de Lie des 1-formes sur P à valeurs dans $\Omega_2(P)$.

Preuve - Tout repose sur l'anticommutation de Δ et d et sur le fait que Δ est de degré -1.

$$\begin{aligned} -d\{\omega_1, \omega_2\} &= d(\Delta(\omega_1 \wedge \omega_2) - (\Delta\omega_1) \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \Delta\omega_2) \\ &= \Delta(\omega_1 \wedge d\omega_2) - \Delta\omega_1 \cdot d\omega_2 + \omega_1 \wedge \Delta d\omega_2 - \Delta(\omega_2 \wedge d\omega_1) \\ &\quad - \Delta\omega_2 \cdot d\omega_1 + \omega_2 \cdot \Delta d\omega_1 \end{aligned}$$

soit $-d\{\omega_1, \omega_2\} = -\{\omega_1, d\omega_2\} + \{\omega_2, d\omega_1\}$ C.Q.F.D.

a) Etude de l'algébroïde de Lie d'une variété de Poisson -

D'après le théorème 6.1, $\Lambda^*(T^*P)$ définit un feuilletage de Stefan \mathcal{A} de P .

Soient $S \in \mathcal{A}$ et I_S le noyau de la restriction de Λ^* à $T^*P|_S$.

Comme $\langle \omega_1, \Lambda^* \omega_2 \rangle = -\langle \omega_2, \Lambda^* \omega_1 \rangle$ on a $\omega \in I_S \iff \omega|_S = 0$,

donc $I_S = \nu^*S$ (fibré conormal à S).

On a la suite exacte de fibrés sur S :

$$0 \rightarrow \nu^*S \rightarrow T^*P|_S \xrightarrow{\Lambda^*} TS \rightarrow 0$$

Comme $TS \simeq (T^*P|_S) / v^*S$, on a la suite exacte, où $\Lambda_S^\# = \Lambda^*|_{T^*S}$:

$$0 \rightarrow T^*S \xrightarrow{\Lambda_S^\#} TS \rightarrow 0$$

$\Lambda_S^\#$ est donc un isomorphisme et \mathcal{L} est un feuilletage en feuilles symplectiques.

DEFINITION 8.4 - Ce feuilletage \mathcal{L} sera appelé feuilletage caractéristique de la variété de Poisson (P, Λ) .

Un point $x \in P$ sera dit régulier si le rang de Λ_x est maximum.

La forme symplectique σ_S de S est définie de la manière suivante : si $x \in S$, si $(X, Y) \in (T_x S)^2$ si $(\xi, \eta) \in (T_x^* S)^2$ sont tels que

$$X = \Lambda_S^\#(\xi), Y = \Lambda_S^\#(\eta), \quad \sigma_S(X, Y) = \langle \eta, \Lambda_S^\#(\xi) \rangle.$$

D'après le théorème 6.1, $v^*S \rightarrow S$ est un fibré en algèbres de Lie. Soient $x \in S$ et, pour $i=1, 2$, $\omega_i^0 \in v_x^* S$, $\omega_i \in \text{Sect}(S, T^*P|_S)$ telles que $\omega_i(x) = \omega_i^0$.

D'après ce même théorème :

$$\begin{aligned} \{\omega_1^0, \omega_2^0\} &= \{\omega_1, \omega_2\}(x) = (i_{\Lambda^\# \omega_1} d\omega_2)(x) - (i_{\Lambda^\# \omega_2} d\omega_1)(x) + d(i_{\Lambda}(\omega_1 \wedge \omega_2))(x) \\ &= d(i_{\Lambda}(\omega_1 \wedge \omega_2))(x) \quad (\Lambda^\# \omega_i(x) = \Lambda^\# \omega_i^0 = 0). \end{aligned}$$

Soient $X^0 \in T_x P$ et $X \in \mathcal{X}^\infty(P)$ tel que $X(x) = X^0$.

$$\langle \{\omega_1^0, \omega_2^0\}, X^0 \rangle = \langle d(i_{\Lambda}(\omega_1 \wedge \omega_2))(x), X(x) \rangle = [X, \Lambda](\omega_1 \wedge \omega_2)(x).$$

Cette quantité ne dépend de X que par la seule composante normale $vX \in v_x S$ de X puisqu'elle est nulle sur les vecteurs tangents à S .

Si $Y \in v_x S$, définissons $\Lambda^L(Y) \in \Lambda^2 v_x S$ par

$$\langle \{\omega_1^0, \omega_2^0\}, Y \rangle = i_{\Lambda^L(Y)}(\omega_1^0, \omega_2^0)$$

$v_x S$ est ainsi muni d'un tenseur de Poisson Λ qui fait de $v_x S$ une cogèbre de Lie.

DEFINITION 8.5 ([29]) - Λ^L est le linéarisé transverse de Λ .

On a ainsi montré la

PROPOSITION 8.2 - $v_x S$ est muni d'un tenseur de Poisson Λ^L faisant de $v_x S$ une cogèbre de Lie.

b) Cas d'une variété de Poisson homogène -

PROPOSITION 8.3 ([7]) - Soit (P, Λ, Z) une variété de Poisson homogène. La distribution $\hat{\mathcal{L}}$ engendrée par la distribution symplectique $\mathcal{L} = \mathcal{I}m \Lambda^*$ et par $\mathbb{R}Z$ s'appelle la distribution caractéristique étendue de la variété de Poisson homogène (P, Λ, Z) . Elle est complètement intégrable et elle définit un feuilletage de Stefan de P , appelé feuilletage caractéristique étendu.

Preuve - ([7]) - $\hat{\mathcal{L}}$ est engendrée par $\mathbb{R}Z$ et par les champs de vecteurs hamiltoniens. Soit \mathfrak{g} l'ensemble de ces champs de vecteurs.

Par suite d'une remarque que nous avons faite au § 4 e)

$([Z, \Lambda^*(df)] = [\Lambda, \mathfrak{L}_Z f - f] = \Lambda^*(d(\mathfrak{L}_Z f - f)))$, \mathfrak{g} est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{X}^\infty(P)$. Il reste à prouver qu'elle est complète pour pouvoir appliquer le théorème de Frobénius-Sussmann.

Soient $X = \alpha Z + [\Lambda, f]$ et $Y = \beta Z + [\Lambda, g]$ deux champs de \mathfrak{g} et ϕ_t^X le flot de X .

De $[X, \Lambda] = -\alpha \Lambda$ on tire $(\varphi_t^X)_* Z + [\Lambda, \exp(\alpha t)(\varphi_t^X)_* g]$.

En intégrant $[X, Z] = [\Lambda, f - \mathfrak{L}_Z f]$ on en déduit que $(\varphi_t^X)_* Y$ est de la forme $(\varphi_t^X)_* Y = \beta Z + [\Lambda, u_t]$ où u_t est une fonction de classe \mathcal{C}^∞ .

Donc $(\varphi_t^X)_* Y \in \mathfrak{g}_{\text{loc}}$.

PROPOSITION 8.4 ([7]) - Soit (P, Λ, Z) une variété de Poisson homogène et soit $\hat{\mathcal{A}}$ sa distribution caractéristique étendue.

i) Si \hat{S} est une feuille de dimension paire de $\hat{\mathcal{A}}$, \hat{S} est une feuille de \mathcal{A} et \hat{S} est munie d'une structure symplectique homogène de champ $Z_{\mathcal{A}}$.

ii) Si \hat{S} est une feuille de dimension impaire de $\hat{\mathcal{A}}$, $\mathcal{A}_{\mathcal{A}}$ définit un feuilletage de \hat{S} de codimension 1 en variétés symplectiques. En particulier \hat{S} est une sous-variété de Poisson homogène de rang constant. \hat{S} est une variété canonique au sens de Lichnérowicz ([16]).

Preuve ([7]) - Si \hat{S} est de dimension paire, \hat{S} est une feuille symplectique. Soit $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ sa 2-forme symplectique. Z est tangent à \hat{S} et

$$[Z_{\mathcal{A}}, \Lambda_{\mathcal{A}}] = -\Lambda_{\mathcal{A}}, \text{ donc } \mathfrak{L}_{Z_{\mathcal{A}}} \mathcal{O}_{\mathcal{A}} = \mathcal{O}_{\mathcal{A}}.$$

Si \hat{S} est de dimension impaire, elle est feuilletée en feuilles symplectiques et le flot de $Z_{\mathcal{A}}$ échange ces feuilles par des transformations symplectiques conformes. Si $\hat{\sigma}$ est la 2-forme sur \hat{S} de noyau $\mathbb{R}Z_{\mathcal{A}}$ induisant sur chaque feuille symplectique la 2-forme

symplectique de cette feuille et si $\hat{\omega}$ est la 1-forme sur \hat{S} induisant sur chaque feuille symplectique la 1-forme nulle et qui vérifie $\int_{Z \cap S} \hat{\omega} = 1$ on a

$$d\hat{\omega} = 0 \text{ et } d\hat{\sigma} = \hat{\omega} \wedge \hat{\sigma} .$$

c) Cas d'une variété de Lie-Poisson -

PROPOSITION 8.5 - Si $\pi : E^* \rightarrow M$ est une variété de Lie-Poisson et si \mathcal{F} est le feuilletage canonique de l'algèbroïde $E \rightarrow M$, si S est une feuille symplectique de E^* , $\pi(S)$ est une feuille de \mathcal{F} .

Preuve - Soit Y un champ hamiltonien de E^* :

$$\langle T\pi(Y), du \rangle = \mathfrak{L}_Y \pi^* du = \{g, \pi^* u\} \text{ si } Y = [\Lambda, g] ;$$

$$\begin{aligned} \text{donc, si } g = \pi^* u , & \quad T\pi(Z) = 0 \\ \text{et } , \text{ si } g = \tilde{X} , & \quad T\pi(Z) = \rho(X) \end{aligned}$$

ce qui prouve que $\pi(S)$ est un ouvert d'une feuille $F \in \mathcal{F}$.

En fait $\pi(S) = F$. Pour montrer ceci, on calcule le champ $[\Lambda, \tilde{X}]$ au-dessus d'un ouvert U trivialisant $E \rightarrow M$. Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ ($n = \text{rang de } E$) est une base locale, si $X = X^i e_i$, si $(x^1, \dots, x^a, \dots, x^m)$ sont des coordonnées locales sur M , on a

$$[\Lambda, \tilde{X}] = \Lambda^* \left(\omega_i \frac{\partial X^i}{\partial x^a} dx^a + X^i d\omega_i \right)$$

$$\begin{aligned} \text{soit } [\Lambda, \tilde{X}] &= X^i \Lambda_{ij} \frac{\partial}{\partial \omega^j} + \omega_i \frac{\partial X^i}{\partial x^a} \Lambda_j^a \frac{\partial}{\partial \omega^j} + X^i \Lambda_i^a \frac{\partial}{\partial x^a} \\ &= (X^i \Lambda_{ij}^k \omega_k - \omega_i \frac{\partial X^i}{\partial x^a} \Lambda_j^a) \frac{\partial}{\partial \omega^j} + X^i \Lambda_i^a \frac{\partial}{\partial x^a} . \end{aligned}$$

Le flot de $[\Lambda, \tilde{X}]$ au-dessus de U est donné par le système d'équations

$$\frac{dx^a}{dt} = X^i(x) A_i^a(x) \quad (1)$$

$$\frac{d\omega_j}{dt} = \left(A_{ij}^k X^i - \frac{\partial X^k}{\partial x^a} A_j^a \right) \omega_k \quad (2)$$

(1) ne dépend que de x et représente les équations du flot de X . L'équation (2), une fois l'équation (1) résolue, est une équation linéaire en ω_k de la forme

$$\frac{d\omega_j}{dt} = C_j^k(t) \omega_k$$

dont la solution maximale existe pour toute valeur de t pour laquelle elle est définie. Il en résulte qu'au-dessus de U , le flot de $[\Lambda, \tilde{X}]$ se projette sur le flot de $\tilde{\rho}(X)$ ce qui entraîne que le flot de $[\Lambda, \tilde{X}]$ sur E^* se projette sur le flot de $\tilde{\rho}(X)$ sur M . Tout point $x \in F$ étant accessible par des produits de flots de champs $\tilde{\rho}(X)$ où $X \in \text{Sect}(E, M)$, à partir d'un point $x_0 \in F$, les produits des relevés de ces flots, qui existent d'après la remarque précédente, atteignent un point ω qui se projette sur x . Autrement dit $\pi(S) = F$.

Remarque - $\mathfrak{L}_Z \pi^*u = 0$ et $\mathfrak{L}_Z \tilde{X} = -\tilde{X}$ entraînent que le flot φ_t de Z est un automorphisme du feuilletage caractéristique \mathcal{A} de (E^*, Λ) . En particulier si S_x est la feuille de \mathcal{A} passant par $x \in M$, la restriction de φ_t à M étant l'identité, φ_t est un difféomorphisme de S_x . En fait si F_x est la feuille de \mathfrak{F} passant par x , S_x est l'image par la transposée de

$$\rho_x : E_x \rightarrow TF_x \rightarrow 0$$

de T^*F_x dans E_x^* , Z est l'image du champ canonique de T^*F_x et T^*F_x comme feuille de E^* est munie de sa structure symplectique canonique de cotangent.

9. ALGEBROIDE DE LIE D'UNE VARIETE DE POISSON REGULIERE -

A) L'étude de ce cas particulier est importante car ce cas est générique en ce sens qu'il existe, pour une variété de Poisson quelconque, un ouvert partout dense Ω sur les composantes connexes duquel le feuilletage induit par \mathcal{A} est régulier.

Donnons-nous une variété de Poisson régulière (P, Λ) . La dimension de $\Lambda^*(T_x^*P)$ est indépendante de x et $\mathcal{A} = \Lambda^*(T^*P)$ est par conséquent un sous-fibré de TP .

On a la suite exacte de fibrés sur P :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & v^*\mathcal{A} & \rightarrow & T^*P & \xrightarrow{\Lambda^*} & \mathcal{A} \rightarrow 0 \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & P & & \end{array}$$

Soient ω_1^0, ω_2^0 deux éléments de $v_x^*\mathcal{A}$; comme $v^*\mathcal{A}$ est un sous-fibré

on peut trouver, pour $i=1,2$, $\omega_i \in \text{Sect}(P, v^*\mathcal{A})$ telles que

$$\omega_i(x) = \omega_i^0.$$

$$\text{Alors } \{\omega_1^0, \omega_2^0\} = \{\omega_1, \omega_2\}(x)$$

$$= (i_{\Lambda^*\omega_1} d\omega_2)(x) - (i_{\Lambda^*\omega_2} d\omega_1)(x) + d(i_{\Lambda}(\omega_1 \wedge \omega_2))(x)$$

$$= 0.$$

(Les deux premiers termes sont nuls parce que $\Lambda^* \omega_1(x) = \omega_1^0 \in v_x^* \mathcal{A}$ et le

3ème parce que $y \rightarrow \langle \omega_2(y), (\Lambda^* \omega_1)(y) \rangle$ est nulle au voisinage de x). Par conséquent, pour toute feuille S de \mathcal{A} , $v^*S \rightarrow S$ est un fibré en algèbres de Lie abéliennes, donc (d'après 6, remarque d)) est un fibré plat. Il en résulte que son groupe d'holonomie est discret. De plus, ce groupe n'est autre que le groupe d'holonomie infinitésimale de la feuille S . En effet montrons que la connexion ∇ introduite dans la démonstration du théorème 6.1 n'est autre que la connexion de Bott de S .

Soit $\gamma : TS \rightarrow T^*P|_S$ une scission de la suite exacte

$$0 \rightarrow v^*S \rightarrow T^*P|_S \rightarrow TS \rightarrow 0$$

permettant de définir la connexion ∇ .

Si $X \in \mathcal{X}^\infty(S)$, $\omega \in \text{Sect}(S, v^*S)$, si $\hat{X} \in \mathcal{X}^\infty(P)$

(resp. $\hat{\omega} \in \text{Sect}(P, \ker \Lambda^*)$) est un prolongement de X (resp. de ω), si

$\hat{\gamma} : \mathcal{A} \rightarrow T^*P$ est une scission de la suite exacte

$$0 \rightarrow v^*\mathcal{A} \rightarrow T^*P \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow 0$$

prolongeant γ on a

$$\nabla_S \omega = \{\hat{\gamma}(\hat{X}), \hat{\omega}\}|_S = (\hat{X} d\hat{\omega} - i_{\Lambda^* \hat{\omega}} d(\hat{\gamma}(\hat{X})) + d(i_{\Lambda}(\hat{\omega} \wedge \hat{\gamma}(\hat{X}))))|_S$$

Le 2ème terme est nul parce que $\hat{\omega} \in \ker \Lambda^*$ et le 3ème est nul parce que

$i_{\Lambda}(\hat{\omega} \wedge \hat{\gamma}(\hat{X})) = -i_{\Lambda^* \hat{\omega}} \hat{\gamma}(\hat{X})$ et que $\Lambda^* \hat{\omega}$ est nul.

Donc $\nabla_X \omega = \hat{X} d\hat{\omega}|_S$ C.Q.F.D.

PROPOSITION 9.1 - Si (P, Λ) est une variété de Poisson régulière $v^*S \rightarrow S$ est un fibré plat en algèbres de Lie avec le crochet induit par l'algébroïde. En particulier, si (D, Λ) est un groupe de Poisson et si \mathfrak{g} est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{Z}^*(D)$ telle qu'il existe ξ_0

régulier tel que $\mathfrak{g}(\xi_0) = v_{\xi_0}^* \mathcal{A}$, \mathfrak{g} est abélienne.

Exemple - Si \underline{G}^* est le dual d'une algèbre de Lie \underline{G} muni d'une structure de Poisson affine de 2-cocycle Θ , soit ξ un point de l'ouvert U des éléments réguliers de \underline{G}^* , on a $v_{\xi}^* \mathcal{A} \simeq \underline{G}_{\xi}$ où \underline{G}_{ξ} désigne l'algèbre d'isotropie de ξ pour la représentation affine de G dans \underline{G}^* associée à Θ [24], l'isomorphisme étant donné par l'inclusion de \underline{G}_{ξ} dans $T_{\xi}^* \underline{G}^* = \underline{G}$. Il

en résulte que \underline{G}_{ξ} est abélienne. Dans le cas $\Theta = 0$, ce résultat est dû à M. Duflo et M. Vergne [9] ; cf. [4] pour $\Theta \neq 0$.

B) Classe fondamentale d'une variété de Poisson régulière ([5],[6]) -

Le faisceau $\underline{\text{Sect}}(P, \Lambda T^* \mathcal{A}) = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} \underline{\text{Sect}}(P, \Lambda^p T^* \mathcal{A})$ muni de la différentielle extérieure le long des feuilles de \mathcal{A} , $d_{\mathcal{A}} : \underline{\text{Sect}}(P, \Lambda^p T^* \mathcal{A}) \rightarrow \underline{\text{Sect}}(P, \Lambda^{p+1} T^* \mathcal{A})$ est un faisceau différentiel dont la cohomologie s'appelle la cohomologie feuilletée de P par \mathcal{A} et sera notée $H_{\mathcal{A}}^*(P)$.

Le faisceau $\underline{\Omega}(P, \mathcal{A}) = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} \underline{\Omega}_p(P, \mathcal{A})$ des formes différentielles ω sur P telles que, pour toute feuille $S \in \mathcal{A}$, on ait $i_S^* \omega = 0$ ($i_S : S \rightarrow P$ désigne l'injection canonique) est un faisceau différentiel lorsqu'on le munit de la différentielle extérieure d . Sa cohomologie, notée $H^*(P, \mathcal{A})$ est dite cohomologie de P relative à \mathcal{A} ([27]).

Soit $\omega \in Z(\underline{\text{Sect}}(P, \Lambda^2 T^* \mathcal{A}))$. Considérons une 2-forme quelconque $\hat{\omega}$ sur P prolongeant ω i.e. telle que $i_S^* \hat{\omega} = \omega|_S$ pour toute feuille $S \in \mathcal{A}$.

On a $i_S^* d\hat{\omega} = d(i_S^* \omega) = d_{\mathcal{A}} \omega = 0$. La classe $[d\hat{\omega}] \in H^3(P, \mathcal{A})$ est indépendante de la façon dont on prolonge ω : si $\hat{\omega}'$ est un autre prolongement, si $u = \hat{\omega} - \hat{\omega}'$ on a $d\hat{\omega} = d\hat{\omega}' + du$ et $i_S^* u = i_S^* \hat{\omega} - i_S^* \hat{\omega}' = 0$ donc $[d\hat{\omega}] = [d\hat{\omega}']$.

On définit ainsi un homomorphisme de $H_{\mathcal{A}}^2(P)$ dans $H^3(P, \mathcal{A})$ qui à $[\omega]_{\mathcal{A}}$ associe $[d\hat{\omega}]$.

Sur chaque feuille $S \in \mathcal{A}$ nous avons une 2-forme symplectique σ_S définie à l'aide de $\Lambda_S^\#$ ($X \rightarrow i_X \sigma_S$ est l'isomorphisme réciproque de $\Lambda_S^\# : T^*S \rightarrow TS$). Les formes σ_S permettent de définir un élément $\sigma \in Z(\text{Sect}(P, \Lambda T^*\mathcal{A}))$ donc une classe $[\sigma]_{\mathcal{A}} \in H_{\mathcal{A}}^2(P)$. La classe $[d\hat{\sigma}] \in H^3(P, \mathcal{A})$ image de $[\sigma]_{\mathcal{A}}$ par l'homomorphisme précédent sera notée $[\mathcal{A}]$.

DEFINITION ([5],[6]) - $[\mathcal{A}]$ est appelée classe fondamentale de la variété de Poisson régulière (P, Λ) .

10 - CAS DES GROUPES DE POISSON -

Soit (G, Λ) un groupe de Poisson dont nous noterons η le cocycle ($\eta(x) = R_{x^{-1}} \Lambda_x$). Nous désignerons par $\mathfrak{Z}(G)$ (resp. $\mathfrak{R}(G)$) l'ensemble des champs de vecteurs sur G invariants à gauche (resp. à droite) et par $\mathfrak{Z}^*(G)$ (resp. $\mathfrak{R}^*(G)$) l'ensemble des 1-formes différentielles sur G invariantes à gauche (resp. à droite). Nous noterons $[..]$ le crochet de \underline{G} , $\{.. \}_G$ le crochet de Poisson de G et celui de T^*G comme algèbre de Lie de (G, Λ) et, pour éviter les confusions, $[..]_S$ le crochet de Schouten des champs de tenseurs antisymétriques. Comme $\Lambda_e = 0$, \underline{G}^* est munie

d'un crochet de Lie et \underline{G} d'une structure de Lie-Poisson duale de 2-tenseur Λ^L .

On a
$$\begin{aligned} \Lambda^L(X) &= [\hat{X}, \Lambda](e) \quad (\text{où } \hat{X} \in \mathfrak{Z}(G) \text{ est tel que } \hat{X}(e) = X) \\ &= \frac{d}{dt} R_{\exp(-tX)} \Lambda_{\exp tX} \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \eta(\exp tX) \Big|_{t=0} \\ &= \langle d\eta(e), X \rangle. \end{aligned}$$

En dérivant deux fois on obtient la formule

$$\Lambda^L([X, Y]) = [X, \Lambda^L(Y)] - [Y, \Lambda^L(X)] \quad (3)$$

Λ^L est donc un 1-cocycle de \underline{G} à valeurs dans ${}^2_{\Lambda} \underline{G}$.

DEFINITION 10.1 ([24]) - Une bigèbre de Lie est une algèbre de Lie \mathfrak{g} munie d'un 1-cocycle $\eta : \mathfrak{g} \rightarrow {}^2_{\Lambda} \mathfrak{g}$ tel que $[\eta, \eta]_S = 0$.

Nous venons donc de montrer la

PROPOSITION 10.1 - Si (G, Λ) est un groupe de Poisson, $(\underline{G}, [\dots], \Lambda^L)$ est une bigèbre de Lie.

LEMME 10.1 - Soit G un groupe de Lie. Soit Λ un champ de 2-tenseurs contravariants antisymétriques sur G (non nécessairement de Poisson). Définissons une application linéaire antisymétrique de $\underline{\Omega}_1(G) \times \underline{\Omega}_1(G)$ dans $\underline{\Omega}_1(G)$ par

$$\{\omega_1, \omega_2\}_G = i_{\Lambda^* \omega_2} d\omega_1 - i_{\Lambda^* \omega_1} d\omega_2 + d(i_{\Lambda}(\omega_1 \wedge \omega_2))$$

Alors $\omega_i \in \mathfrak{Z}^*(G)$, $i=1,2$, si $X \in \mathfrak{Z}(G)$ et $Y \in \mathfrak{R}(G)$,

$$i_X \mathfrak{Z}_Y \{\omega_1, \omega_2\}_G = [X, [Y, \Lambda]_S]_S (\omega_1 \wedge \omega_2).$$

Preuve - $\{\omega_1, \omega_2\}_G = i_{\Lambda^* \omega_1} d\omega_2 - i_{\Lambda^* \omega_2} d\omega_1 + d(i_{\Lambda}(\omega_1 \wedge \omega_2))$

$$\mathfrak{L}_Y \{\omega_1, \omega_2\}_G = i_{[Y, \Lambda^* \omega_1]_S} d\omega_2 - i_{[Y, \Lambda^* \omega_2]_S} d\omega_1 + d i_{[Y, \Lambda]_S} (\omega_1 \wedge \omega_2).$$

$$\text{De } i_{\Lambda} (\omega_1 \wedge \omega_2) = i_{\Lambda^* \omega_1} \omega_2 \text{ on tire } i_{[Y, \Lambda]_S} (\omega_1 \wedge \omega_2) = i_{[Y, \Lambda^* \omega_1]_S} \omega_2.$$

Alors

$$\begin{aligned} i_X \mathfrak{L}_Y \{\omega_1, \omega_2\}_G &= - \mathfrak{L}_X(\omega_2 ([Y, \Lambda^* \omega_1]_S)) + \mathfrak{L}_X(\omega_1 ([Y, \Lambda^* \omega_2]_S)) \\ &+ \omega_2 ([[\Lambda^* \omega_1, Y]_S, X]_S) - \omega_1 ([[\Lambda^* \omega_2, Y]_S, X]_S) + \mathfrak{L}_X(\omega_2 ([Y, \Lambda^* \omega_1]_S)) \\ &= (\mathfrak{L}_X \omega_1) ([Y, \Lambda^* \omega_2]_S) + \omega_1 ([X, [Y, \Lambda^* \omega_2]_S]_S) + \omega_2 ([X, [Y, \Lambda^* \omega_1]_S]_S) \\ &\quad - \omega_1 ([X, [Y, \Lambda^* \omega_2]_S]_S). \end{aligned}$$

$$[X, [Y, \Lambda^* \omega_1]_S]_S = [X, i_{\omega_1} [Y, \Lambda]_S]_S = i_{\mathfrak{L}_X \omega_1} [Y, \Lambda]_S + i_{\omega_1} [X, [Y, \Lambda]_S]_S.$$

Donc

$$\begin{aligned} i_X \mathfrak{L}_Y \{\omega_1, \omega_2\}_G &= (\mathfrak{L}_X \omega_1) ([Y, \Lambda^* \omega_2]_S) - i_{[Y, \Lambda]_S} \omega_2 \wedge \mathfrak{L}_X \omega_1 \\ &\quad + i_{\omega_2} i_{\omega_1} [X, [Y, \Lambda]_S]_S \\ &= i_{\omega_1} \wedge i_{\omega_2} [X, [Y, \Lambda]_S]_S = i_{[X, [Y, \Lambda]_S]_S} \omega_1 \wedge \omega_2. \quad \text{C.Q.F.D.} \end{aligned}$$

THEOREME 10.1 - Soit (G, Λ) un groupe de Poisson. Alors

$$\text{i) } \forall X \in \mathfrak{L}(G), \forall Y \in \mathfrak{R}(G), [Y, [X, \Lambda]_S]_S = 0;$$

$$\text{ii) } \mathfrak{L}^*(G) \text{ est une sous-algèbre de Lie de } \Omega_1(G)$$

Preuve -

i) Il suffit de montrer que $[X, \Lambda]_S$ est invariant à gauche.

Si $x \in G$,

$$\begin{aligned} [X, \Lambda]_S(x) &= \frac{d}{dt} R_{\exp(-tX)} \Lambda_x \exp tX \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} (\Lambda_S + L_x \eta(\exp tX)) \Big|_{t=0} \\ &= L_x \Lambda^L(X) = L_x [X, \Lambda]_S(e) \end{aligned}$$

ii) Soient $\omega_i \in \mathfrak{Z}^*(G)$, $i=1,2$. Soit $Y \in \mathfrak{R}(G)$. On a alors, pour tout $X \in \mathfrak{Z}(G)$,

$$i_X \mathfrak{Z}_Y \{ \omega_1, \omega_2 \}_G = [X, [Y, \Lambda]_S]_S (\omega_1 \wedge \omega_2) = 0$$

donc

$$\mathfrak{Z}_Y \{ \omega_1, \omega_2 \}_G = 0 \text{ et } \{ \omega_1, \omega_2 \}_G \in \mathfrak{Z}^*(G).$$

PROPOSITION 10.2 - Si (G, Λ) est un groupe de Poisson, $(\mathfrak{Z}^*(G), \{ \dots \}_G, -d)$ est une bigèbre de Lie.

Preuve - Le résultat provient du fait que $-d$ est un 1-cocycle de $\mathfrak{Z}^*(G)$ à valeurs dans $\wedge^2 \mathfrak{Z}^*(G)$ (théorème 8.4).

COROLLAIRE - $(\underline{G}^*, \{ \dots \}, -d)$ est une bigèbre de Lie.

En effet $\mathfrak{Z}^*(G)$ et \underline{G}^* sont isomorphes comme espaces vectoriels. Ils le sont aussi comme algèbres de Lie car si, pour $i=1,2$, $\omega_i^0 \in \underline{G}^*$, si $\omega_i \in \mathfrak{Z}^*(G)$ est telle que $\omega_i(e) = \omega_i^0$, on a pour tout $X \in \underline{G}$,

$$\langle \{ \omega_1, \omega_2 \}_G(e), X \rangle = i_{\Lambda^L(X)} (\omega_1^0 \wedge \omega_2^0)$$

et par définition même, $i_{\Lambda^L(X)} (\omega_1^0 \wedge \omega_2^0) = \langle \{ \omega_1^0, \omega_2^0 \}, X \rangle$.

DEFINITION 10.2 - Soit $(\mathfrak{g}, \{.,.\}, \eta^L)$ une bigèbre de Lie. La bigèbre

$(\mathfrak{g}^*, \{.,.\}, -d)$ est dite duale de $(\mathfrak{g}, \{.,.\}, \eta^L)$. Son crochet est défini par

$$\langle \{\alpha, \beta\}, X \rangle = i_{\eta^L(X)}(\alpha \wedge \beta)$$

Un morphisme (resp. isomorphisme) de bigèbres de Lie est un morphisme (resp. isomorphisme) d'algèbres de Lie dont le transposé est un morphisme (resp. isomorphisme) d'algèbres de Lie.

$(\mathfrak{g}^*, \{.,.\}, -d)$ a pour bigèbre duale $(\mathfrak{g}, \{.,.\}, \eta^L)$. En effet

$$\langle \alpha, [X, Y] \rangle = -d\alpha(X \wedge Y).$$

Plus généralement, deux bigèbres de Lie sont dites en dualité si l'une est isomorphe à la bigèbre de Lie duale de l'autre.

On a donc montré le

THEOREME 10.2 - Si (G, Λ) est un groupe de Poisson, $(G, \{.,.\}, \Lambda^L)$ et $(\mathfrak{G}^*, \{.,.\}, -d)$ sont des bigèbres de Lie en dualité.

THEOREME 10.3 - Soit G un groupe de Lie muni d'un champ Λ de 2-tenseurs contravariants antisymétriques. Posons,

$$\forall (\omega_1, \omega_2) \in (\widetilde{\Omega}_1(G))^2,$$

$$\{\omega_1, \omega_2\} = i_{\Lambda^* \omega_1} d\omega_2 - i_{\Lambda^* \omega_2} d\omega_1 + d(i_{\Lambda}(\omega_1 \wedge \omega_2))$$

(G, Λ) est un groupe de Poisson si et seulement si $\Lambda_e = 0$ et si $(\mathfrak{Z}^*(G), \{.,.\})$ est une algèbre de Lie.

Preuve - La condition nécessaire résulte de 5 et du théorème 10.1.

Réciproquement, si pour $i=1,2$, $\omega_i \in \mathfrak{Z}^*(G)$, on a $\mathfrak{Z}_Y\{\omega_1, \omega_2\} = 0$, pour tout $Y \in \mathfrak{R}(G)$, donc pour tout $X \in \mathfrak{Z}(G)$, $i_{[X, [Y, \Lambda]]}(\omega_1 \wedge \omega_2) = i_X \mathfrak{Z}_Y\{\omega_1, \omega_2\} = 0$. Il en résulte que $[X, [Y, \Lambda]] = 0$ d'où, d'après l'identité de Jacobi et puisque $[X, Y] = 0$,

$$[Y, [X, \Lambda]] = 0$$

ce qui prouve que le 2-tenseur $[X, \Lambda]$ est invariant à gauche.

Posons $\Lambda^L(X) = [X, \Lambda](e)$ pour tout $X \in \underline{G}$.

Comme $\mathfrak{Z}^*(G)$ est muni d'une structure d'algèbre de Lie, on peut transporter sur \underline{G}^* cette structure en définissant le crochet de deux éléments ω_1^0 et ω_2^0 de \underline{G}^* par

$$\langle \{\omega_1^0, \omega_2^0\}, X \rangle = \langle \{\omega_1, \omega_2\}(e), X \rangle = (j_{[X, \Lambda]}(\omega_1 \wedge \omega_2))(e),$$

pour tout $X \in \underline{G}$ où ω_1 et ω_2 sont des éléments de $\mathfrak{Z}^*(G)$ valant respectivement ω_1^0 et ω_2^0 en e , ce qui assure que

$$[\Lambda^L, \Lambda^L]_S = 0 \quad (1)$$

Si $X \in \underline{G}$ nous noterons X^ℓ le champ de vecteurs sur G invariant à gauche associé à X .

Si X_1 et X_2 sont des éléments de \underline{G} on a

$$([\Lambda^L, X_1^\ell], X_2^\ell) - ([X_2^\ell, \Lambda^L], X_1^\ell) + ([\Lambda^L, X_1^\ell], X_2^\ell) = 0$$

d'où $\Lambda^L([X_1, X_2]) = [X_1, \Lambda^L(X_2)] - [X_2, \Lambda^L(X_1)]$

donc Λ^L est un 1-cocycle de \underline{G} à valeurs dans $\Lambda^2 \underline{G}$.

Ainsi $(\underline{G}, [\cdot, \cdot], \Lambda^L)$ est une bigèbre de Lie.

Pour tout $X \in \underline{G}$, on a, d'après l'identité de Jacobi,

$$[[\Lambda, \Lambda], X^\ell] + 2[[\Lambda, X^\ell], \Lambda] = 0$$

donc

$$[X^\rho, [\Lambda, \Lambda]] = 2 [[\Lambda, X^\rho], \Lambda]$$

par conséquent, $[X^\rho, \Lambda]$ étant invariant à gauche, $[X^\rho, [\Lambda, \Lambda]]$ l'est également ce qui entraîne que, si $x \in G$

$$[X^\rho, [\Lambda, \Lambda]](x) = L_x [X^\rho, [\Lambda, \Lambda]](e) = L_x [\Lambda, \Lambda]^\perp(X)$$

$$\text{d'où} \quad [X^\rho, [\Lambda, \Lambda]](e) = [\Lambda, \Lambda]^\perp(X) \quad (2)$$

$$\text{Montrons que} \quad [\Lambda, \Lambda]^\perp = [\Lambda^\perp, \Lambda^\perp] \quad (3)$$

Soient pour $i=1,2,3$, $\omega_i \in \mathfrak{X}^*(G)$, $\omega_i^0 = \omega_i(e)$.

Par définition

$$\oint \{\omega_1, \{\omega_2, \omega_3\}\}(e) = \oint \{\omega_1^0, \{\omega_2^0, \omega_3^0\}\} \quad (4)$$

De $\Lambda_e = 0$ on déduit que

$$\oint \{\omega_1, \{\omega_2, \omega_3\}\}(e) = d(i_\Lambda(\omega_1 \wedge d(i_\Lambda(\omega_2 \wedge \omega_3))))(e)$$

Or ([18])

$$i_{[\Lambda, \Lambda]}(\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3) = i_\Lambda i_\Lambda d((\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3)) + 2i_\Lambda di_\Lambda(\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3)$$

$$\text{et } i_\Lambda(\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3) = \oint i_\Lambda(\omega_1 \wedge \omega_2) \cdot \omega_3.$$

Il en résulte que

$$\oint \{\omega_1, \{\omega_2, \omega_3\}\}(e) = \frac{1}{2} d i_{[\Lambda, \Lambda]}(\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3) \quad (5)$$

De même, en calculant sur la variété \underline{G} avec les formes invariantes à gauche, i.e. constantes, ω_i^0 :

$$\oint \{\omega_1^0, \{\omega_2^0, \omega_3^0\}\} = \frac{1}{2} d i_{[\Lambda^\perp, \Lambda^\perp]}(\omega_1^0 \wedge \omega_2^0 \wedge \omega_3^0) \quad (6)$$

On a, pour tout $X \in \underline{G}$, d'après (4)

$$i_X \int \{\omega_1, \{\omega_2, \omega_3\}\}(e) = i_X \int \{\omega_1^0, \{\omega_2^0, \omega_3^0\}\}$$

donc, d'après (5) et (6) $[\Lambda, \Lambda]^L(X) = [\Lambda^L, \Lambda^L](X)$ ce qui prouve la formule (3).

Il résulte alors de (1) que $[\Lambda, \Lambda]^L = 0$.

D'après (2) $[X^L, [\Lambda, \Lambda]] = 0$, pour tout $X \in G$, donc $[\Lambda, \Lambda]$ est invariant à droite.

Par conséquent $[\Lambda, \Lambda](x) = R_x[\Lambda, \Lambda](e)$ pour tout $x \in G$.

Mais $\Lambda_e = 0$ donc $[\Lambda, \Lambda](e) = 0$ et donc $[\Lambda, \Lambda] = 0$. C.Q.F.D.

THEOREME 10.4 - Soit $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot], \eta^L)$ une bigèbre de Lie. Il existe un unique groupe de Poisson (G, Λ) connexe et simplement connexe de bigèbre de Lie \mathfrak{g} .

Preuve - Soit G l'unique groupe de Lie connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie \mathfrak{g} . Le 1-cocycle $\eta^L : \mathfrak{g} \rightarrow \overset{2}{\Lambda} \mathfrak{g}$ s'intègre en un 1-cocycle $\eta : G \rightarrow \overset{2}{\Lambda} \mathfrak{g}$.

Définissons un 2-tenseur contravariant antisymétrique Λ par

$$\Lambda_x = R_x \eta_x$$

De la formule $\eta(xy) = \eta(x) + \text{Ad}(x)\eta(y)$ il résulte que

$$\Lambda_{xy} = L_x \Lambda_y + R_y \Lambda_x.$$

donc que $\Lambda_e = 0$.

Définissons une application bilinéaire antisymétrique $\{\cdot, \cdot\}$:

$(\Omega_1(G))^2 \rightarrow (\Omega_1(G))$ par la formule du théorème 10.3 D'après ce

théorème il suffit de montrer que $(\mathfrak{Z}^*(G), \{\cdot, \cdot\})$ est une algèbre de Lie. Soient $\omega_i \in \mathfrak{Z}^*(G)$, $i = 1, 2$. Si $X \in \mathfrak{Z}(G)$ et $Y \in \mathfrak{R}(G)$ la démonstration du i) du théorème 10.1 montre que $[X, [Y, \Lambda]_S]_S = 0$ (dans ce théorème Λ et η sont reliés par la même formule que dans le cas présent). Le lemme 10.1

montre alors que $\{\omega_1, \omega_2\} \in \mathfrak{Z}^*(G)$. Par ailleurs $\mathfrak{Z}^*(G)$ est isomorphe à \mathfrak{g}^* en tant qu'espace vectoriel ; quant au crochet de \mathfrak{g}^* il est défini de la manière suivante : si pour $i=1,2$, $\omega_i^0 \in \mathfrak{g}^*$, si $\omega_i \in \mathfrak{Z}^*(G)$ est telle que

$$\omega_i(e) = \omega_i^0,$$

$$\langle \{\omega_1^0, \omega_2^0\}, X \rangle = \int_{\eta^L(X)} (\omega_1^0 \wedge \omega_2^0)$$

$$= \langle \{\omega_1, \omega_2\}(e), X \rangle \text{ pour tout } X \in \mathfrak{g}$$

donc $\mathfrak{Z}^*(G)$ est une algèbre de Lie (isomorphe à \mathfrak{g}^*).

COROLLAIRE - Deux bigèbres de Lie $(\mathfrak{g}_i, [\cdot, \cdot]_i, \eta_i^L), i = 1, 2$, sont en dualité si et seulement si, G_1 désignant l'unique groupe de Poisson connexe et simplement connexe de bigèbre $(\mathfrak{g}_1, [\cdot, \cdot]_1, \eta_1^L)$, $(\mathfrak{g}_2, [\cdot, \cdot]_2, \eta_2^L)$ s'identifie à la sous-algèbre $\mathfrak{Z}^*(G_1)$ de $\Omega_1(G)$ munie du cocycle -d.

DEFINITION 10.2 - Deux groupes de Poisson sont dits en dualité si leurs bigèbres de Lie le sont.

Exemple - Le dual du groupe de Poisson abélien $(\underline{G}^*, \text{can})$ est (G, O) où G est l'unique groupe de Lie connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie \underline{G} muni de la structure de Poisson triviale.

Si (D, Λ_D) est un groupe de Poisson et si (G, Λ_G) désigne l'unique groupe de Poisson connexe et simplement mconnexe dual de (D, Λ_D) le théorème 10.3 va entraîner l'existence d'une action locale de G dans D dont les orbites sont les feuilles symplectiques de (D, Λ_D) . En effet, pour tout $\omega^0 \in \underline{G}$ identifié à un élément de \underline{D}^* et donc à une forme invariante à gauche sur D notée ω , l'ensemble des champs $\Lambda_D^\# \omega$ constitue une sous-algèbre de dimension finie de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur D , transitive sur les feuilles symplectiques de D . Si S est une feuille compacte du feuilletage caractéristique de (D, Λ_D) , $\Lambda^\# \omega|_S$ est complet et S est un espace homogène de D .

DEFINITION 10.3 - (D, Λ_D) est dit complet si, pour tout $\omega \in \mathfrak{X}^*(D)$, le flot de $\Lambda_D^\# \omega$ est complet.

On a donc prouvé la

PROPOSITION 10.1 - Si (D, Λ_D) est un groupe de Poisson complet, les feuilles du feuilletage caractéristique de D sont les orbites de l'action naturelle du groupe dual (G, Λ_G) sur D .

Exemples de groupes de Poisson complets -

L'équation différentielle du flot de $\Lambda_D^\# \omega$ est

$$g^{-1} \frac{d}{dt} g = \dot{\rho}_\omega (Ad(g^{-1})\eta(g)) \quad (1)$$

- a)
- i) tout groupe de Poisson compact est complet.
 - ii) Tout groupe de Poisson dont les feuilles du feuilletage caractéristique sont compactes est complet.
 - iii) Tout groupe de Poisson abélien est complet ; ce sera en particulier le cas du dual \mathfrak{g}^* d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} .

b) Si l'algèbre de Lie \underline{D} de D est compacte, si μ est une solution de l'équation de Yang-Baxter généralisée; si $\eta(g) = Ad(g)\mu - \mu$, l'équation (1) s'écrit :

$$g^{-1} \frac{dg}{dt} = \dot{\rho}_\omega (\mu - Ad(g^{-1})\mu)$$

Le groupe $Ad(D)$ étant un groupe d'isométries de $(\underline{D}, -K)$ où K est la forme de Killing, $g^{-1} \frac{dg}{dt}$ est borné, donc D est complet.

En particulier, on a la

PROPOSITION 10.2 - Si \underline{D} est semi-simple compacte, (D, Λ_D) est complet.

PROPOSITION 10.3 - Si (D, Λ_D) est un groupe de Poisson, si $\gamma \in D$ est un point régulier et si \underline{G}_γ désigne l'algèbre d'isotropie de l'action infinitésimale du groupe dual G dans D , \underline{G}_γ est abélienne .

Preuve - \underline{G}_γ est isomorphe comme algèbre de Lie à $v_\gamma^* \mathfrak{g}$ muni de sa structure canonique d'algèbre de Lie abélienne.

Ce résultat constitue l'extension au cas des groupes de Poisson du théorème de M. Duflo et M. Vergne ([9]) déjà cité au § 9.

C - STRUCTURE DE POISSON INDUITE. SOUS VARIETES COSYMPLECTIQUES. SOUS VARIETES COISOTROPES.

11. Structure de Poisson Induite -

Soit (P, Λ) une variété de Poisson dont on désignera par \mathfrak{A} le feuilletage symplectique.

Soit N une sous-variété immergée de P . On peut définir un "orthogonal de Poisson" de N par

$$TN^\Lambda = \Lambda^*(v^*N)$$

c'est une généralisation de l'orthogonal symplectique mais, en général,

$$(TN^\Lambda)^\Lambda \neq TN \quad ((TN^\Lambda)^\Lambda = TN \cap \mathfrak{A})$$

On a cependant $((TN^\Lambda)^\Lambda)^\Lambda = TN$.

Supposons qu'il existe une projection (de classe \mathfrak{C}^∞) $\chi : TP|_N \rightarrow TN$.

$$\begin{array}{ccc}
 & \Lambda_N^\# & \\
 & \longrightarrow & \\
 T^*N & \xrightarrow{\quad} & TN \\
 \downarrow \chi^* = \iota^* \chi & & \downarrow \chi \\
 T^*P|_N & \xrightarrow{\quad} & TP|_N \\
 & \Lambda^* &
 \end{array}$$

On peut définir un tenseur $\Lambda_N \in \text{Sect}(N, \Lambda^2 TN)$ par

$$\Lambda_N(\alpha, \beta) = \langle \beta, \Lambda_N^\#(\alpha) \rangle$$

On a alors le

THEOREME 11.1 ([29]) - Soit N une sous-variété immergée d'une variété de Poisson (P, Λ) . Supposons qu'il existe une projection $\chi : TP|_N \rightarrow TN$ telle que $TN^\Lambda \subset \ker \chi$. Alors (N, Λ_N) est une variété de Poisson et cette structure de Poisson est indépendante de la projection χ telle que $TN^\Lambda \subset \ker \chi$.

Preuve - Le résultat à montrer étant de nature locale on peut supposer que N est une sous-variété plongée. Soit $i : N \rightarrow P$ l'injection canonique. On utilise le théorème du voisinage tubulaire : il existe un fibré vectoriel $\pi : E \rightarrow N$, un voisinage ouvert U de la section nulle de E , un voisinage ouvert V de N dans P et un difféomorphisme de U sur V envoyant la section nulle de E sur N tels que $T\pi = \chi$.

On définit alors un crochet $\{.,.\}_N$ sur $\mathcal{C}^\infty(N, \mathbb{R})$ par

$$\{f, g\}_N = i^* \Lambda(\chi^*(df) \wedge \chi^*(dg))$$

i.e.
$$\{f, g\}_N = i^* \{\pi^* f, \pi^* g\}.$$

Il reste à prouver que le crochet ainsi défini vérifie l'identité de Jacobi :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\{f,g\}_N, h)_N &= \mathcal{L}(i^*\{\pi^*i^*\{\pi^*f, \pi^*g\}, \pi^*h\}) \\ &= \mathcal{L}(i^*(\{\pi^*i^*\{\pi^*f, \pi^*g\}, \pi^*h\} - \{\{\pi^*f, \pi^*g\}, \pi^*h\})) . \end{aligned}$$

(On a rajouté 0 au membre de droite).

La fonction $\pi^*i^*\{\pi^*f, \pi^*g\} - \{\pi^*f, \pi^*g\}$ est nulle sur N, donc sa différentielle est un élément de v^*N .

Mais on a $T\pi = \chi$ et, par hypothèse, $\Lambda^*(v^*N) \subset \ker \chi$, donc $T\pi(\Lambda^*(v^*N)) = \{0\}$.

Il en résulte que $\mathcal{L}(\{f,g\}_N, h)_N = 0$.

Enfin on vérifie que si χ_1 et χ_2 sont telles que $TN^\Lambda \subset \ker \chi_1 \cap \ker \chi_2$, les crochets définis à l'aide de χ_1 et χ_2 coïncident.

DEFINITION 11.1 ([29]) - Sous les hypothèses du théorème précédent, la structure de Poisson définie sur N est dite "structure de Poisson induite sur N".

APPLICATIONS -

1 - Si (P, Λ) est une variété symplectique (P, σ) , $TN^\Lambda \subset \ker \chi$ entraîne $TN^\Lambda \cap TN = \{0\}$. N possède une structure symplectique si et seulement si $(N, i^*\sigma)$ est une variété symplectique. On dit dans ce cas que N est une sous-variété symplectique.

2 - Si $\Lambda^*v^*N = 0$, les hypothèses du théorème sont trivialement vérifiées. $\Lambda^*v^*N = 0$ équivaut à, $\forall x \in N, T_x N \supset \mathcal{A}_x$. Dans ce cas $i : N \rightarrow P$ est un morphisme de Poisson.

3 - Soit $\Lambda_v^\# = v \circ \Lambda^*|_{v^*N}$ si $\ker \Lambda_v = 0$, Λ^*v^*N est un supplémentaire de TN et les hypothèses du théorème précédent sont vérifiées.

DEFINITION 11.2 ([32]) - On dit qu'une sous-variété $N \rightarrow P$ est cosymplectique si $\Lambda_v : v^*N \rightarrow vN$ est un isomorphisme.

Une sous-variété cosymplectique est toujours de codimension paire.

COROLLAIRE 1 - Si $i : N \rightarrow P$ est une sous-variété immergée N est muni d'une structure de Poisson induite dans les deux cas suivants

i) Pour tout $x \in N$ $T_x N \supset \mathcal{A}_x$ et dans ce cas $i : N \rightarrow P$ est un morphisme de Poisson

ii) N est cosymplectique.

COROLLAIRE 2 - Si $\Lambda^* \nu^* N \subset \text{Ker } \chi, \Lambda_N^\# \circ i^* = \chi \circ \Lambda^* T^*P|_N$. En

particulier le feuilletage symplectique \mathcal{A}_N de N est la trace sur N du feuilletage symplectique de (P, Λ)

$$\mathcal{A}_N = \mathcal{A} \cap TN$$

DEMONSTRATION - Ceci résulte de ce que pour tout $\omega \in T^*P|_N$

$(\chi^* \circ i^* - \text{Id})(\omega) \in \nu^* N$. Ceci permet d'écrire

$$(\Lambda_N^\# \circ i^* - \chi \circ \Lambda^*)(\omega) = \chi \circ \Lambda^* (\chi^* \circ i^* - \text{Id})(\omega) = 0.$$

C.Q.F.D.

12. RIGIDITE DES SOUS VARIETES COSYMPLECTIQUES -

DEFINITION 12.1 - Une isotopie hamiltonienne d'une variété de

Poisson (P, Λ) est une application $C^\infty \psi : [0, 1] \times P \rightarrow P$,
 $(t, x) \rightarrow \psi_t(x)$ telle que

1) il existe une application $C^\infty [0, 1] \times P \rightarrow \mathbb{R} \leftarrow (t, x) \rightarrow K_t(x)$.

2) $\frac{d}{dt} \psi_t(x) = [\Lambda, H_t] \circ \psi_t$.

Autrement dit $t \rightarrow \psi_t(x)$ est solution de l'équation différentielle dépendant du temps $\frac{dx}{dt} = [\Lambda, H_t](x)$, définie sur $[0, 1]$. Ce dernier point

entraîne en particulier que $x \rightarrow \psi_t(x)$ est, pour tout $t \in [0,1]$, un difféomorphisme de Poisson.

On a de façon évidente la notion de germe d'isotopie hamiltonienne en un point.

THEOREME DE RIGIDITE COSYMPLECTIQUE 12.1 ([32]) -

Soit N_t , $t \in [0,1]$, une famille C^∞ de sous-variétés cosymplectiques ayant un point x_0 en commun. Alors il existe un germe d'isotopie hamiltonienne en x_0 , ψ_t , tel que pour tout $t \in [0,1]$ l'image par ψ_t du germe de N_0 soit contenu dans N_t .

Démonstration - Soit $j : [0,1] \times N_0 \rightarrow P$ une isotopie définissant N_t et telle que $j(t, x_0) = j_t(x_0) = x_0$. Soit ξ_t le champ de vecteurs C^∞ le long de N_t défini par

$$\xi_t(j_t(x)) = \frac{d}{dt} j_t(x)$$

Soit v_t la projection de $TP|_{N_t}$ sur $v_t N_t$ fibré normal de N_t . Comme N_t est cosymplectique, il existe une unique forme ω_t appartenant à v^*N_t et telle que

$$\Lambda_{v_t}^\# \omega_t(j_t(x)) = v_t \xi_t(j_t(x)).$$

D'après le lemme de Poincaré-Weinstein ([33]), il existe une application C^∞ à support dans un voisinage tubulaire de N_t , H_t , telle que $dH_t(j_t(x)) = \omega_t(j_t(x))$. Supposons $H : [0,1] \times P \rightarrow P$ C^∞ . On pose $X_t = [\Lambda, H_t]$ et on note ψ_t la solution maximale de $\frac{dx}{dt} = X_t(x)$ issue de x pour tout $t = 0$. Comme $j_t(x_0) \equiv x_0$, $\xi_t(j_t(x_0)) = 0$ et donc $X_t(x_0) \equiv 0$. Il en résulte que $t \rightarrow \psi_t(x)$ est définie sur $[0,1]$ à condition de se limiter aux x appartenant à un voisinage U de x_0 . ψ_t sera l'isotopie hamiltonienne cherchée si l'on prouve qu'à condition de restreindre N_0 à un voisinage de x_0 , $\psi_t(N_0) \subset N_t$. Ce point ainsi que la preuve que l'on peut choisir H

C^∞ va résulter d'un examen en coordonnées locales. Il suffit en fait, par compacité de $[0,1]$, de prouver le résultat pour t assez petit.

A condition de remplacer éventuellement j_t par $j_t \circ \rho_t$ où $x \rightarrow \rho_t(x)$ est une isotopie de difféomorphismes de N_0 , on peut après choix d'une carte locale en x_0 , supposer que $P = V \times N_0$ où V (resp. N_0) est un voisinage ouvert de O dans \mathbb{R}^q (resp. dans \mathbb{R}^p), et que $j_t(x) = (u_t(x), x)$ où $u \in C^\infty([0,1] \times N_0, \mathbb{R})$.

En notant $y_i(x_j)$ les coordonnées dans \mathbb{R}^q (resp. \mathbb{R}^p)

$$\omega_t(u_t(x), x) = \omega_{i,t}(u_t(x), x) d(y^i - u_t^i(x)).$$

Soit ρ une application C^∞ de $[0,1] \times N_0 \rightarrow N_0$ telle que $\rho(t, u_t(x), x) = 1$ et que le support de ρ_t soit contenu dans un voisinage tubulaire ouvert de N_t .

$$H(t, x, y) = \omega_{i,t}(u_t(x), x) (y^i - u_t^i(x)) \rho(t, x, y)$$

est le hamiltonien C^∞ cherché.

Dans ces coordonnées $\xi_t(u_t(x), x) = (\frac{\partial u_t}{\partial t}(x), 0)$.

Dans ces conditions,

$$X_t(j_t(x)) = X_t(u_t(x), x) = (\frac{\partial u_t}{\partial t}, 0) + (Du_t(A_t(x)), A_t(x))$$

car $v_t(X_t - \xi_t)N_t = 0$. On pose $Y_t(x) = (Du_t(A_t(x)), A_t(x))$

Soit $t \rightarrow x_t(x)$ la solution de $\frac{dx}{dt} = A_t(x)$ issue pour $t=0$ de x et $z_t = (u_t(x_t(x)), x_t(x))$. $z_t(N_0)$ est contenu dans N_t par construction.

$$\text{Or } \frac{dz_t}{dt} = Y_t(x_t(x)) + (\frac{\partial u_t}{\partial t}(x_t(x)), 0).$$

Soit
$$\frac{dz_t}{dt} = X_t \circ z_t(x).$$

Autrement dit $x \in N_0$, $z_t(x) = \psi_t(0, x)$ ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE 1 - Si S est une feuille symplectique et $(N_t, t \in [0, 1])$ une famille C^∞ de sous-variétés cosymplectiques rencontrant S , il existe ψ_t germe d'isotopie hamiltonienne le long de S telle que $\psi_t(N_0) = N_t$.

DEMONSTRATION - Par composition des isotopies hamiltoniennes il suffit de démontrer le corollaire pour t assez petit. Si $j_t : N_0 \rightarrow P$ désigne l'isotopie définissant N_t , on peut toujours supposer que si $x_0 \in N_t \cap S$ $j_t(x_0) \in N_t \cap S$ puisque les N_t rencontrent S .

On peut d'autre part choisir $2p$ hamiltoniens (h_i) tels que si ϕ_{t_i} est le flot de $[\Lambda, h_i]$, $(t_1, \dots, t_{2p}) \rightarrow \phi_{t_{2p}} \circ \dots \circ \phi_{t_1}(x_0)$ soit une carte de S en x_0 pour $|t_i|$ assez petit. Il existe alors $2p$ fonctions $t_i(t)$ telles que

$$\prod_{i=1}^{2p} \phi_{t_i}(t)(x_0) = j_t(x_0).$$

On pose
$$\chi_t(x) = \prod_{i=1}^{2p} \phi_{t_i}(t)(x)$$

ce qui a un sens sur un voisinage de x_0 . χ_t est une isotopie hamiltonienne et $\chi_t^{-1} \circ j_t$ vérifie les hypothèses du théorème. Si ψ_t est l'isotopie hamiltonienne relevant j_t , $\chi_t \circ \psi_t$ est l'isotopie cherchée.

Il résulte du corollaire 1 que si N_0 et N_1 sont deux sous-variétés rencontrant la même feuille S respectivement en x_0 et x_1 et si

$$T_{x_i} N \oplus T_{x_i} S = T_{x_i} P \quad (i=1,2)$$

les germes de structures induites sur

N_0 et N_1 sont isomorphes.

DEFINITION 12.2 - La classe d'équivalence de ces germes de structures de Poisson induites s'appelle germes de structure de Poisson transverse le long de S .

Remarque - L'hypothèse que la famille N_t rencontre la feuille S est essentielle. Par exemple si $(P, \Lambda) = \mathfrak{so}(3)^*$ avec sa structure canonique, si N_0 est la boule unité et $N_t = N_0 + 2t \vec{i}$ où $|\vec{i}| = 1$, il n'y a pas d'isotopie hamiltonienne envoyant 0 sur $2 \vec{i}$ puisque le germe en $2 \vec{i}$ de N_1 est une variété régulière.

Si l'on fait l'hypothèse que toutes les sous-variétés N_t sont compactes, ce qui n'est pas le cas du contre exemple précédent, il n'est plus nécessaire a priori d'imposer que toutes les sous-variétés N_t rencontrent une même feuille (ce qui sera vrai a posteriori).

COROLLAIRE ([32]) - Si N_t est une famille C^∞ de sous-variétés cosymplectiques **compactes connexes** d'une variété de Poisson (P, Λ) , il existe une isotopie hamiltonienne de P , ψ_t telle que $\psi_t(N_0) \cong N_t$.

DEMONSTRATION - On construit comme précédemment le champ $X_t = [\Lambda, H_t]$. Comme les sous-variétés N_t sont compactes, on peut imposer à H_t d'avoir un support compact dans un voisinage tubulaire de N_t . Les champs X_t sont donc complets. $x \rightarrow \psi_t(x)$ est alors une famille C^∞ de difféomorphisme de Poisson de (P, Λ) tels que $\psi_t(N_0) = N_t$, ce qui achève la démonstration.

CAS DES VARIETES DE POISSON HOMOGENE -

Soit $N \rightarrow (P, \Lambda, Z)$ une sous-variété de P cosymplectique. Soit Z_N la projection de Z sur TN le long de $\Lambda^* \nu^* N$ (qui est un supplémentaire de TN !). Comme Λ_γ est un isomorphisme, il existe une 1-forme $\omega \in \nu^* N$

telle que $Z|_N - Z_N = \Lambda^* \omega$. D'après le lemme de Poincaré-Weinstein [33] il existe une fonction u définie au voisinage de N nulle sur N et telle que $\omega = du|_N$ et $Z|_N + [\Lambda, u]$. Compte tenu de la définition d'un isomorphisme de variétés de Poisson homogènes $(P, \Lambda, Z' = Z - [\Lambda, u])$ est isomorphe à (P, Λ, Z) . D'autre part $Z'|_N \in TN$. Comme $\Lambda_N = \chi \circ \Lambda \circ i$ si χ est la projection de $TP|_N$ sur TN ,

$$[Z_N, \Lambda_N] = \chi_* [Z, \Lambda] \circ i = -\Lambda_N.$$

Ainsi toute sous-variété cosymplectique est en fait une variété de Poisson homogène. On peut démontrer ([32]) un théorème analogue de rigidité : la classe d'isomorphisme des germes de structures de Poisson homogènes induites sur les sous-variétés N le long de S telles que $T_x N \oplus T_x S = T_x P$ ne dépend que de S et s'appelle germe de structure de Poisson homogène transverse.

13 - Caractéristiques d'une sous-variété . Sous-variétés coisotropes.

Soit N une sous-variété, éventuellement immergée, de (P, Λ) et $i : N \rightarrow P$ l'inclusion.

L'application i^* envoie surjectivement le faisceau $i^{-1}(\widetilde{\Omega}_1(P))$ sur le faisceau $\widetilde{\Omega}_1(N)$, de sorte que l'on a la suite exacte de faisceaux sur N :

$$0 \rightarrow \ker i^* \rightarrow i^{-1}(\widetilde{\Omega}_1(P)) \xrightarrow{i^*} \widetilde{\Omega}_1(N) \rightarrow 0 \quad (1)$$

Soient $\Omega_N = \{\omega \in \ker i^* \text{ et } \Lambda^* \omega \in TN\}$

$$\Omega_N^0 = \{\omega \in i^{-1}(\widetilde{\Omega}_1(P)) \mid \forall x \in N, \omega(x) = 0\} \quad (\text{donc } \Omega_N^0 \subset \Omega_N)$$

PROPOSITION 13.1 -

- a) Ω_N est un faisceau d'algèbres de Lie sur N .
- b) Ω_N^0 est un faisceau d'idéaux de Ω_N .

Preuve -

a) Soient $\omega_i \in \Omega_N$, $i=1,2$.

$$i^*\{\omega_1, \omega_2\} = i^*(i_{\Lambda^* \omega_1} d\omega_2 - i_{\Lambda^* \omega_2} d\omega_1 + d(i_{\Lambda}(\omega_1 \wedge \omega_2)))$$

$$i^* i_{\Lambda^* \omega_1} d\omega_2 = i_{i_* \Lambda^* \omega_1} i^* d\omega_2 = i_{i_* \Lambda^* \omega_1} di^* \omega_2 = 0$$

De même $i^* i_{\Lambda^* \omega_2} d\omega_1 = 0$.

Comme $i^* \omega_2 = 0$ et $\Lambda^* \omega_1 \in TN$, $i_{\Lambda}(\omega_1 \wedge \omega_2)$ est nulle sur N , donc

$$i^* d(i_{\Lambda}(\omega_1 \wedge \omega_2)) = 0 \text{ et } i^*\{\omega_1, \omega_2\} = 0. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

b) Soient $\omega_1 \in \Omega_N$, $\omega_2 \in \Omega_N^0$: il faut montrer que si $X \in TP|_N$, $\{\omega_1, \omega_2\}(X) = 0$.

On a $d\omega_1(\Lambda^* \omega_2, X) = 0$, donc

$$\{\omega_1, \omega_2\}(X) = i_{\Lambda^* \omega_1} d\omega_2(X) - d(i_{\Lambda^* \omega_1} \omega_2)(X)$$

$$= \mathfrak{L}_{\Lambda^* \omega_1} \omega_2(X)$$

$$= 0 \text{ parce que } \Lambda^* \omega_1 \in TN \text{ et } \omega_2|_N = 0, \text{ C.Q.F.D.}$$

Restons toujours sous les mêmes hypothèses et soit

$$v_{\Lambda}^* N = \{\omega \in v^* N; \Lambda^* \omega \in TN\}, \text{ Sect}(N, v_{\Lambda}^* N)$$

le sous faisceau du faisceau des sections de v^*N constitué des germes de sections à valeurs dans v_Λ^*N .

$\widetilde{\text{Sect}}(N, v_\Lambda^*N)$ est le faisceau quotient de Ω_N par Ω_N^0 . C'est donc un faisceau d'algèbres de Lie sur N .

Soit $Z\Omega_N$ (resp. $Z\Omega_N^0$) le sous-faisceau de Ω_N (resp. Ω_N^0) constitué d'images réciproques de 1-formes fermées.

Lemme - $\widetilde{\text{Sect}}(N, v_\Lambda^*N) = Z\Omega_N / Z\Omega_N^0$.

Preuve du lemme - Tout ceci revient à montrer que l'application canonique $Z\Omega_N \rightarrow \widetilde{\text{Sect}}(N, v_\Lambda^*N)$ est surjective ce qui résulte immédiatement du lemme de Poincaré-Weinstein ([33]).

Pour tout $x \in N$, on définit alors $\mathfrak{F}_N(x)$ comme l'ensemble des images par Λ^* des valeurs en x des sections locales de $\widetilde{\text{Sect}}(N, v_\Lambda^*N)$. Si

on note comme il est d'usage $H^0(U, \widetilde{\text{Sect}}(N, v_\Lambda^*N))$, où U est un ouvert de N , l'espace vectoriel des sections au-dessus de U du faisceau $\widetilde{\text{Sect}}(N, v_\Lambda^*N)$,

$$\mathfrak{F}_N(x) = \bigcup_{U \ni x} \Lambda^* H^0(U, \widetilde{\text{Sect}}(N, v_\Lambda^*N))(x)$$

La dimension de $\mathfrak{F}_N(x)$ étant finie, il est clair que pour tout x on peut trouver un voisinage U_x de x dans N tel que

$$\mathfrak{F}_N(x) = \Lambda^* H^0(U_x, \widetilde{\text{Sect}}(N, v_\Lambda^*N))(x)$$

\mathfrak{F}_N est donc une distribution C^∞ au sens de Sussmann. Soit g_N l'image par Λ^* de $H^\circ(N, \widetilde{\text{Sect}}(N, v^*N))$. Un champ de $X \in g_N$ si et seulement si il existe une section globale ω de $\widetilde{\text{Sect}}(N, v^*N)$ telle que $X = \Lambda^* \omega$. Pour tout $x \in N$ on désigne par $g_N(x)$ l'ensemble des valeurs en x des champs de g .

THEOREME 13.1 - g_N est une algèbre de Lie complete engendrant la distribution \mathfrak{F}_N (i.e. $\mathfrak{F}_N(x) \equiv g_N(x)$). Le feuilletage associé s'appelle le feuilletage caractéristique de N .

Démonstration -

1) pour prouver que pour tout $x_0 \in N$ $\mathfrak{F}_N(x_0) \equiv g_N(x_0)$ il suffit de prouver que si $X_0 \in \mathfrak{F}_N(x_0)$, il existe $X \in g_N$ tel que $X(x_0) = X_0$. Comme $X_0 \in \mathfrak{F}_N(x_0)$, il existe un voisinage ouvert U_{x_0} de x_0 dans N et une section ω_0 de $\widetilde{\text{Sect}}(N, v^*N)$ au-dessus de U_{x_0} telle que $\Lambda^* \omega_0(x_0) = X_0$.

Soit χ une fonction C^∞ sur N valant 1 en x_0 et de support contenu dans U_{x_0} . On pose $\omega = \chi \cdot \omega_0$ ω est une section C^∞ de $v^*N \rightarrow N$ et pour tout $x \in N$ $\Lambda^* \omega(x) \in T_x N$ par construction. ω est donc une section globale de $\widetilde{\text{Sect}}(N, v^*N)$.

Soit $X = \Lambda^* \omega$. $X(x_0) = X_0$ ce qui prouve que $\mathfrak{F}_N(x_0) = g_N(x_0)$.

2) On va prouver maintenant que g_N est complète. Soit $X_1 = \Lambda^* \omega_1$ où ω_i ($i = 1, 2$) est une section globale de $\widetilde{\text{Sect}}(N, v^*N)$. On note ϕ_t^1 le flot de X_1 .

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t^1)_* \cdot X_2 = (\varphi_t^1)_* [X_1, X_2] .$$

Notant $\{ \cdot \}$ le crochet dans $\text{Sect}(N, v_\Lambda^* N)$, par construction même,

$$[X_1, X_2] = \Lambda^* \{ \omega_1, \omega_2 \} .$$

Soit $x_0 \in N$ et U un voisinage de x_0 dans N qui est une sous-variété plongée de (P, Λ) . Il suffit de démontrer que g_U est complète. U étant une sous-variété, il existe deux formes fermées $\tilde{\omega}_1$ et $\tilde{\omega}_2$ de P telle que si $i_U = U \rightarrow P$ est l'inclusion

$$\omega_i|_U = i_U^* \tilde{\omega}_i$$

$\tilde{\omega}_1$ étant fermée $\Lambda^* \tilde{\omega}_1$ est un automorphisme infinitésimal de (P, Λ) de

$$\text{flot } \tilde{\varphi}_t^1 \text{ et } (\varphi_t^1)_* \Lambda^* = \Lambda^* (\tilde{\varphi}_{-t}^1)^* .$$

Il en résulte que sur U

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t^1)_* X_2 = \Lambda^* (\tilde{\varphi}_{-t}^1)^* \{ \tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2 \}$$

$$\text{et donc que } (\varphi_t^1)_* X_2 = X_2 + \Lambda^* \int_0^t (\tilde{\varphi}_{-t}^1)^* \{ \tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2 \} . dt .$$

Tout revient donc à prouver que $\omega = \int_0^t (\tilde{\varphi}_{-t}^1)^* \{ \tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2 \} . dt$ est une

section au-dessus de U de $v_\Lambda^* N$. Mais par construction

$$\Lambda^* \omega = \int_0^t (\tilde{\varphi}_{-t}^1)^* [X_1, X_2] dt \in TN \text{ puisque } [X_1, X_2] \in TN \text{ et que } \varphi_t^1 \text{ est le}$$

flot de X_1 . Il suffit donc de vérifier que $i_U^* \omega = 0$ or

$$i_U^* \omega = \int_0^1 i_U^* (\tilde{\varphi}_t^1)^* \{ \tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_1 \} dt.$$

Comme $\tilde{\varphi}_t^1|_N = \varphi_t^1$, $i_U^* \omega = \int_0^1 \tilde{\varphi}_t^1{}^* i_U^* \{ \tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_1 \} dt = 0$ puisque $\{ \tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_1 \} \in \Omega_N$ ce qui achève la démonstration.

Par construction même le feuilletage caractéristique \mathfrak{F}_N est contenu dans $TN \cap TN^\Lambda$. On va donner des conditions suffisantes pour que $\mathfrak{F}_N \equiv TN \cap TN^\Lambda$.

PROPOSITION 13.2 - Si Λ_V est de rang constant, $v_\Lambda^* N \rightarrow N$ est un fibré vectoriel muni d'une structure d'algèbroïde de Lie de feuilletage $\mathfrak{F}_N \equiv TN \cap TN^\Lambda$.

Démonstration - $v_\Lambda^* N \rightarrow N$ muni de la structure de faisceau d'algèbres de Lie de $\text{Sect}(\underline{N}, v_\Lambda^* N)$ est un algèbroïde de Lie puisque Λ_V de rang constant équivaut à $v_\Lambda^* N \rightarrow N$ est un fibré vectoriel. Il reste à vérifier que $\mathfrak{F}_N \equiv TN \cap TN^\Lambda$. Or si $X_0 \in TN \cap TN^\Lambda(x_0)$ il existe $\omega_0 \in v_\Lambda^* N(x_0)$ telle que $\Lambda^* \omega_0 = X_0$. $v_\Lambda^* N \rightarrow N$ étant un fibré vectoriel, il existe une section globale ω de $v_\Lambda^* N \rightarrow N$ prolongeant ω_0 .

Comme $X_0 = \Lambda^* \omega_0 = \Lambda^* \omega(x)$ $X_0 \in \mathfrak{F}_N(x_0)$. C.Q.F.D.

Un cas particulier où $\text{rg } \Lambda_V$ est constant est celui où ce rang est nul. On a alors la

PROPOSITION 13.3 - Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) $\text{rg } \Lambda_V = 0$;
- ii) $TN^\Lambda \subset TN$;
- iii) $\ker i^*$ est un faisceau de sous-algèbres de Lie.
- iv) $\Phi_N = \{u \in \mathcal{C}^\infty(P, \mathbb{R}) \mid i^*u = 0\}$ est un faisceau d'algèbres de Lie sur N.

Démonstration -

(i) et (ii) sont équivalents par définition de Λ_V .

. Comme $\Omega_N = \{\omega \in \ker i^* \mid \Lambda_V \omega = 0\}$ (i) \Rightarrow (iii).

. Supposons (iii) et soit $(u,v) \in (\Phi_N)^2$ $x_0 \in N$ et χ une fonction à support compact sur N valant 1 au voisinage de x_0 . Comme du et dv sont dans Ω_N , $d\{u,v\} \in \Omega_N$ ce qui implique que $\{u,v\}$ est constant sur N. On a de même $\{\chi u, \chi v\}$ constant sur N et donc nul.

Comme $\{u,v\}(x_0) = \{\chi u, \chi v\}(x_0)$, $i^* \{u,v\} = 0$ et donc (iii) \Rightarrow (iv).

Enfin (iv) \Rightarrow (i) résulte de $\Lambda^* d\Phi_N = TN^\Lambda$.

DEFINITION 13.1 - Une sous-variété N de P vérifiant l'une des conditions de la proposition 13.3 sera dite coïso trope.

L'algèbroïde de Lie $v_\Lambda^* N = v^* N \rightarrow N$ sera appelé l'algèbroïde de Lie caractéristique de N.

COROLLAIRE - Si P_1 et P_2 sont deux variétés de Poisson,

$f \in \mathcal{C}^\infty(P_1, P_2)$ est un morphisme de Poisson si et seulement si son graphe est une sous-variété coïso trope de $(-P_2) \times P_1$ ($-P_2$ signifie que l'on munit P_2 de la structure de Poisson opposée à la structure donnée).

Remarque 1 - Si $N \rightarrow P$ est coïso trope, $v^* N$ est comme algèbroïde de Lie (avec $\Lambda^* \downarrow_{v^* N}$) isomorphe à \mathcal{F}_N qui est un feuilletage régulier, avec

sa structure naturelle d'algèbre de Lie. νN est donc canoniquement muni d'une structure de Lie-Poisson isomorphe à la structure de Lie Poisson canonique sur \mathfrak{F}_N^* associé au feuilletage \mathfrak{F}_N . En particulier si $(P, \Lambda) = (M, \sigma)$ est symplectique, et $N \rightarrow M$ est lagrangienne, νN est isomorphe à T^*N . On vérifie aisément que la structure symplectique de νN le long de N est identique à la structure symplectique de M le long de N si l'on choisit un sous-fibré lagrangien de $TM|_N \rightarrow N$ transverse à TN pour représenter νN . Il en résulte que N possède un voisinage tubulaire isomorphe à un voisinage de la section nulle de $T^*N \rightarrow N$ d'après le théorème de Darboux-Weinstein.

Remarque 2 - Les résultats précédents peuvent être considérés comme une généralisation de la théorie géométrique de Cartan des équations aux dérivées partielles du premier ordre, le cas complètement intégrable correspondant aux sous-variétés coïsotropes.

Exemples de sous-variétés coïsootropes -

PROPOSITION 13.4 - Si $\pi : E \rightarrow M$ est muni d'une structure d'algèbre de Lie de morphisme $\rho : E \rightarrow TM$, si (E^*, Λ, Z) est la variété de Lie Poisson associée, pour tout $x_0 \in M$ $E_{x_0}^*$, fibre de E^* en x_0 , est une sous-variété coïso trope dont le feuilletage caractéristique est un feuilletage par plans affines de direction $\rho^* T_{x_0} F$ où F est la feuille de x_0 du feuilletage défini par E .

Démonstration - La première partie résulte de ce que en tout point de $E_{x_0}^*$ le fibré conormal est engendré par les $\pi^* u$ du (x_0) où $u \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ et de ce que $\{\pi^* u, \pi^* v\} = 0$.

D'autre part le feuilletage caractéristique \mathfrak{F} de $E_{x_0}^*$ est engendré au point ξ par $[\Lambda, \pi^* u](\xi)$. Pour tout $X_0 \in E_{x_0}$, si on note X une section locale de E prolongeant X_0 ,

$$\langle X, [\Lambda, \pi^* u] \rangle(\xi) = \{\tilde{X}, \pi^* u\}(\xi) = \pi^*(\mathfrak{L}_\rho(X) \cdot u)$$

soit $[\Lambda, \pi^* u](\xi) = \pi^* \rho^* du(\xi)$

ce qui achève la démonstration.

APPENDICE -

Crochet de Schouten ([22]) - Nous allons donner ici la définition axiomatique du crochet de Schouten due à Koszul ([13]) en l'explicitant sur une variété.

Soit M une variété. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ soit

$$A^p(M) = \widetilde{\text{Sect}}(M, \Lambda^p TM)$$

avec la convention habituelle $A^0(M) = \widetilde{\mathcal{C}}^\infty(M, \mathbb{R})$.

Posons $A(M) = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} A^p(M)$.

Pour pouvoir considérer des opérateurs de degré négatif on convient aussi que $A^p(M) = \{0\}$ si p est un entier < 0 .

Le crochet de Schouten dans $A(M)$ est l'unique application \mathbb{R} -bilinéaire

$$[\cdot, \cdot]_S : A(M) \times A(M) \rightarrow A(M)$$

de degré -1 vérifiant les axiomes suivants où, si $X_i \in A(M)$, $i=1,2,3$, p_i désignera le degré de X_i :

$$i) [X_1, X_2]_S = -(-1)^{(p_1+1)(p_2+1)} [X_2, X_1]_S ;$$

$$ii) [X, f]_S = \mathfrak{L}_X f \quad \text{si } X \in A^1(M) \text{ et } f \in A^0(M) ;$$

iii) $[X_1, X_2]_S$ est le crochet de Lie usuel de X_1 et X_2 si X_1 et X_2 sont des champs de vecteurs ;

$$\text{iv) } [X_1, X_2 \wedge X_3]_S = [X_1, X_2]_S \wedge X_3 + (-1)^{(p_1+1)p_2} X_2 \wedge [X_1, X_3]_S .$$

De ces axiomes on peut déduire l'identité de Jacobi suivante :

$$\oint (-1)^{(p_1+1)(p_3+1)} [X_1, [X_2, X_3]_S]_S = 0$$

Le crochet de Schouten utilisé par Lichnérowicz et le précédent sont reliés par la formule

$$[X_1, X_2]_S^K = (-1)^{p_1+1} [X_1, X_2]_S^L .$$

BIBLIOGRAPHIE -

- [0] ABRAHAM R., MARSDEN J.E., *Foundations of mechanics*, Benjamin Ed. (1978).
- [1] AMINOU R., *Bigèbres de Lie, structures de Poisson et variantes de l'équation de Yang-Baxter*, Pub. IRMA, Lille (1987), Vol. 9, n° III.
- [2] COSTE A., DAZORD P., WEINSTEIN A., *Groupoïdes symplectiques*, Publ. Dep. Math. Université de Lyon 1 2/A (1987).
- [3] DAZORD P., *Feuilletages à singularités*, Indagationes math., vol. 47, fasc. 1 (1985).
- [4] DAZORD P., *Feuilletages et mécanique hamiltonienne*, Publ. Dép. Math. Lyon 1983, 3 et 3/B.
- [5] DAZORD P., DELZANT T., *Classe de Chern de certaines fibrations isotropes*, C.R.A.S., 300, série I, n° 5 (1985).
- [6] DAZORD P. DELZANT T., *Le problème général des variables action-angle*, J. of Diff. geometry, 26 (1987).

- [7] DAZORD P., LICHNEROWICZ A., MARLE C.M., *Structure locale des variétés de Jacobi*, prépublication.
- [8] DRINFEL'D V.G., *Hamiltonian structures on Lie groups*, Soviet Math. Dokl. vol. 27 (1983), n° 1.
- [9] M. DUFLO & M. VERGNE, *Une propriété de la représentation coadjointe d'une algèbre de Lie*, C.R.A.S., 268, série A (1969).
- [10] KARASEV, *Analogues of the objects of Lie group theory for non linear Poisson brackets*, Math. U.S.S.R. Izvestiya vol. 28 (1987) n° 3.
- [11] KOSMANN-SCHWARZBACH Y., *Poisson-Drinfel'd groups*, in *Topics in Solitar theory and exactly solvable non linear equations*. Ablowitz (M). Fuchssteiner (B) and Kruskal (M) Eds. World Scientific. Singapore 1987.
- [12] KOSMANN- SCHWARZBACH Y., *Equations de Yang-Baxter et structures de Poisson*, Journées relativistes de Chambéry, 15 mai 1987.
- [13] KOSZUL J.L., *Crochet de Schouten-Nijenhuis et cohomologie*, S.M.F. Astérisque hors-série. 137 bis (1985).
- [14] LIBERMANN P. et MARLE C.M. *Symplectic geometry and analytical mechanics*, D. Reidel Publishing company, Dordrecht (1988).
- [15] LICHNEROWICZ A., *Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées*, J. diff. geometry, 12 (1977).
- [16] LICHNEROWICZ A., *La géométrie des transformations canoniques*, Bull. Soc. Math. Belgique, 31 (1979).
- [16 bis] MAGRI F. et MOROSI C., *A geometrical characterisation of integrable Hamiltonian systems through the theory of Poisson-Nijenhuis manifolds*. Quaderno S 19/1984. Università di Milano.
- [17] MARLE C.M. , *Poisson manifolds and mechanics*, Colloque sur les problèmes mathématiques rencontrés dans l'étude des phénomènes naturels, Luminy (Marseille) mai 1982.
- [18] OUZILOU R. , *Actions hamiltoniennes sur les variétés de Poisson*, in A. Crumeyrolle et J. Grifone (éditeurs) (1981).

- [19] PRADINES J. , *Théorie de Lie pour les groupoïdes différentiables*, C.R.A.S. Paris 264 A (1967).
- [20] PRADINES J. *Troisième théorème de Lie sur les groupoïdes différentiables*, C.R.A.S. Paris 267 (1968).
- [21] PRADINES J. *Théorie de Lie pour les groupoïdes différentiels. Calcul différentiel dans la catégorie des groupoïdes infinitésimaux*, C.R.A.S. Paris 264 (1967).
- [22] SCHOUTEN, *On the differential operators of first order in tensor calculus*, Convegno intern. geom. diff., Italie (1953), Ed. Cremonese, Rome.
- [23] SEMENOV-TIAN-SHANSKY M.A., *Dressing transformations and Poisson group actions*, Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ. 21 (1985).
- [24] SOURIAU J.M. , *Structure des systèmes dynamiques* Dunod, Paris (1970).
- [25] STEFAN P., *Accessible sets, orbits and foliations with singularities*, Proc. London, Math. Soc. 29 (1974).
- [26] SUSSMANN H.Y. , *Orbits of families of vector fields and integrability of distributions*, Trans. Amer. Math. Soc. 180 (1973).
- [27] VAISMAN, *Cohomology and differential forms*, Marcel Dekker Inc. (1973).
- [28] VERDIER J.L. , *Groupes quantiques*, Sémin. Bourbaki (1986-1987) n° 685.
- [29] WEINSTEIN A., *The local structure of Poisson manifolds*, J. of Diff. geometry, 18 (1983).
- [30] WEINSTEIN A. , *Some remarks on dressing transformations*, Prépublication.
- [31] WEINSTEIN A. , *Coisotropic calculus and Poisson groupoids*, Prépublication.
- [32] WEINSTEIN A. , Communication privée.
- [33] WEINSTEIN A., *Lectures on symplectic manifolds*, C.B.M.S. Regional conferences series in mathematics 29, A.M.S. Providence (1977).