

J. P. DUFOUR

P. MOLINO

**Chapitre VI Compactification d'actions de \mathbb{R}^n et variables
action-angle avec singularités**

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1988, fascicule 1B
« Séminaire Sud-Rhodanien 1ère partie », , p. 161-183

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1988__1B_161_0

© Université de Lyon, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CHAPITRE VI

Compactification d'actions de \mathbb{R}^n et variables Action-Angle avec singularités

J.P. Dufour et P. Molino

Résumé : On considère une action infinitésimale de \mathbb{R}^n sur une variété V , munie d'un espace vectoriel d'intégrales premières ; on donne une condition suffisante pour que, au voisinage d'une orbite compacte, il existe une action du tore \mathbb{T}^n ayant les mêmes orbites, et commutant avec l'action infinitésimale donnée. Comme corollaire, on retrouve le théorème de H. Eliasson sur l'existence de variables Action-Angle avec singularités pour un système hamiltonien.

I. Introduction.

Dans ce travail, la différentiabilité est entendue, sauf mention expresse du contraire, au sens C^∞ .

On considère une variété différentiable V , et sur cette variété un couple $(\mathfrak{X}, \mathfrak{H})$, où \mathfrak{X} est une algèbre de Lie commutative de dimension n de champs de vecteurs différentiables, et \mathfrak{H} un espace vectoriel de dimension p d'intégrales premières communes à tous ces champs de vecteurs. On verra \mathfrak{X} comme définissant une action infinitésimale de \mathbb{R}^n sur V ; si les éléments de \mathfrak{X} sont complets, alors on peut intégrer cette action infinitésimale pour obtenir une action de \mathbb{R}^n sur V admettant \mathfrak{X} comme algèbre de champs fondamentaux. Pour tout $x \in V$, on notera \mathcal{O}_x l'orbite de x par \mathfrak{X} .

I.1. Ellipticité transverse de $(\mathfrak{X}, \mathfrak{H})$ en un point x_0 .

Soit $x_0 \in V$. On notera \mathfrak{I}_{x_0} l'isotropie de \mathfrak{X} en x_0 , c.à.d.

l'ensemble des champs de \mathcal{X} qui s'annulent en x_0 . On notera \mathcal{X}_{x_0} le sous-espace de $T_{x_0} V$ formé des vecteurs $X(x_0)$ où X parcourt \mathcal{X} ; c'est le tangent à \mathcal{O}_{x_0} en x_0 . On pose :

$$K_{x_0} = \bigcap_{f \in \mathcal{A}} \text{Ker } df_{x_0}$$

et

$$N_{x_0}^T = K_{x_0} / \mathcal{X}_{x_0}.$$

Tout élément X de \mathcal{J}_{x_0} est tel que son linéarisé X'_{x_0} en x_0 laisse invariants K_{x_0} et \mathcal{X}_{x_0} . Il détermine donc un champ de vecteurs linéaire X'_T sur $N_{x_0}^T$, que l'on appellera "linéarisé transverse" de X en x_0 . On notera \mathcal{X}'_T l'algèbre de Lie abélienne formée par ces linéarisés transverses.

De même, si \mathcal{B}_{x_0} est l'ensemble des $f \in \mathcal{A}$ telles que $df_{x_0} = 0$, pour toute $f \in \mathcal{B}_{x_0}$, le jet d'ordre 2 en x_0 de la fonction $f - f(x_0)$ détermine une forme quadratique sur K_{x_0} , dont le noyau contient \mathcal{X}_{x_0} . Par passage au quotient, on obtient une forme quadratique f'_T sur $N_{x_0}^T$.

L'ensemble des formes quadratiques ainsi obtenues sera noté \mathcal{A}'_T .

Définition. Le couple $(\mathcal{X}'_T, \mathcal{A}'_T)$ est le linéarisé transverse de $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ en x_0 . On dira que $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ est transversalement elliptique en x_0 si son linéarisé transverse est tel que :

- (i) $\dim \mathcal{J}_{x_0} = \dim \mathcal{X}'_T$ et $\dim \mathcal{B}_{x_0} = \dim \mathcal{A}'_T$
- (ii) il existe des coordonnées linéaires $(x^1, \dots, x^s, y^1, \dots, y^s)$ sur $N_{x_0}^T$ telles que \mathcal{X}'_T admette pour base les rotations infinitésimales $y^j \frac{\partial}{\partial x^j} - x^j \frac{\partial}{\partial y^j}$, $j = 1, \dots, s$, et que \mathcal{A}'_T admette pour base les fonctions $(x^j)^2 + (y^j)^2$, $j = 1, \dots, s$.

On peut réécrire la condition (ii) en disant que $N_{x_0}^T$ admet une structure d'espace vectoriel symplectique pour laquelle \mathcal{X}'_T est l'algèbre de Lie d'un tore maximal du groupe $SP(N_{x_0})$, \mathcal{A}'_T étant l'algèbre de

Poisson des hamiltonniens correspondants.

On observera également que la condition d'ellipticité transverse impose les relations

$$\dim V = n + p ; \dim \mathcal{O}_{x_0} = n - s ; \text{rang}_{x_0} \mathcal{A} = p - s,$$

où $\text{rang}_{x_0} \mathcal{A}$ est égal à $\dim \{df_{x_0} / f \in \mathcal{A}\}$.

I.2. Le résultat principal.

Théorème. Soit $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ un couple formé d'une algèbre de Lie abélienne de dimension n de champs de vecteurs sur la variété V , et d'un espace vectoriel d'intégrales premières de cette algèbre de Lie. On considère un point $x_0 \in V$ tel que :

(i) l'orbite \mathcal{O}_{x_0} de x_0 par \mathcal{X} est compacte

(ii) $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ est transversalement elliptique en x_0 ;

alors il existe un voisinage U de x_0 , saturé d'orbites de \mathcal{X} , et une action différentiable effective du tore \mathbb{T}^n sur U ayant les mêmes orbites que \mathcal{X} et laissant invariants tous les champs de vecteurs appartenant à \mathcal{X} .

Dans le cas où $s = 0$, on retrouve un résultat élémentaire : l'action infinitésimale de \mathbb{R}^n définie par \mathcal{X} est localement libre au voisinage de \mathcal{O}_{x_0} , qui est nécessairement un tore. L'existence des intégrales premières assure que la feuille \mathcal{O}_{x_0} du feuilletage en orbites est sans holonomie ; par suite, les orbites voisines sont les fibres d'une fibration localement triviale $\pi : U \rightarrow \bar{U} \subset \mathbb{R}^n$ de fibre-type \mathbb{T}^n . Dans U , les champs de \mathcal{X} sont complets et définissent donc une action φ de \mathbb{R}^n . L'isotropie I_x de cette action en un point x de U dépend alors différemment de $\pi(x)$ et définit en chaque point un réseau dans \mathbb{R}^n . Le passage au quotient par ce réseau fournit l'action cherchée de \mathbb{T}^n .

Dans le cas général, la situation est la suivante : pour $x \in \mathcal{O}_{x_0}$,

soient $K_x = \bigcap_{f \in \mathcal{A}} \text{Ker } df_x$ et $N_x^T = K_x / \mathcal{X}_x$. Alors $N_{\mathcal{O}_{x_0}}^T = \bigcup_{x \in \mathcal{O}_{x_0}} N_x^T$ est un fi-

bré vectoriel sur \mathcal{O}_{x_0} de fibre-type \mathbb{R}^{2s} . L'algèbre \mathfrak{X} se relève - via les groupes locaux à un paramètre - en une algèbre abélienne \mathfrak{X}^p d'automorphismes infinitésimaux du fibré principal $B(\mathcal{M}_{\mathcal{O}_{x_0}}^T)$ des repères de $\mathcal{M}_{\mathcal{O}_{x_0}}^T$.

Les hypothèses faites impliquent que les orbites de \mathfrak{X}^p sont des tores de dimension n , sous-fibrés principaux de $B(\mathcal{M}_{\mathcal{O}_{x_0}}^T)$ de groupe structural \mathbb{T}^n .

Par intégration des champs de \mathfrak{X}^p , on définit une action φ^p de \mathbb{R}^p comme groupe d'automorphismes de $B(\mathcal{M}_{\mathcal{O}_{x_0}}^T)$. Utilisant les propriétés de l'espace \mathcal{A} d'intégrales premières, on vérifiera :

(i) que les champs de \mathfrak{X} sont encore complets dans un voisinage saturé U de \mathcal{O}_{x_0} (ii) que, pour l'action correspondante φ de \mathbb{R}^p sur U , le réseau Γ_{x_0} d'isotropie de l'action φ^p se prolonge dans U en réseau Γ_x dépendant différentiablement de x , et tel que Γ_x soit contenu dans l'isotropie I_x de l'action φ .

Il ne restera plus alors qu'à passer au quotient par le réseau Γ_x pour obtenir l'action cherchée de \mathbb{T}^n .

I.3. Application aux variables Action-Angle avec singularités.

On considère un système hamiltonien (P, ω, H) , où P est une variété différentiable de dimension $2n$ munie de la forme symplectique ω et du hamiltonien différentiable $H : P \rightarrow \mathbb{R}$.

Définition. Un système de coordonnées Action-Angle avec singularités de rang ℓ , adapté au système, sur un ouvert U de P est un système

$(x^1, y^1, \dots, x^k, y^k, q^1, \dots, q^\ell, \theta^1, \dots, \theta^\ell)$ avec $n = k + \ell$, tel que :

(i) $x \rightarrow (x^1(x), \dots, \theta^\ell(x))$ définisse un difféomorphisme ϕ de U sur $D(0, r_1) \times \dots \times D(0, r_k) \times \Omega \times \mathbb{T}^\ell$, où $D(0, r_i)$ est le disque ouvert de rayon r_i dans \mathbb{R}^2 , Ω un ouvert de \mathbb{R}^ℓ et \mathbb{T}^ℓ le tore de dimension ℓ

(ii) $\omega = \phi^* \omega_0$, où $\omega_0 = \sum_{i=1}^k dx^i \wedge dy^i + \sum_{j=1}^{\ell} dq^j \wedge d\theta^j$.

(iii) $H \circ \phi^{-1}$ n'est fonction que de

$$q^1, \dots, q^\ell, (x^1)^2 + (y^1)^2, \dots, (x^k)^2 + (y^k)^2.$$

Les coordonnées Action-Angle classiques correspondent à $k = 0$. Les sous-variétés $(x^1, y^1) = 0$ définissent les singularités des coordonnées Action-Angle. On peut utiliser les coordonnées polaires classiques (ρ^1, φ^1) sur les disques $D(0, r_1)$; alors, en dehors des singularités, le système $(\frac{1}{2}(\rho^1)^2, \dots, \frac{1}{2}(\rho^k)^2, q^1, \dots, q^\ell, \varphi^1, \dots, \varphi^k, \theta^1, \dots, \theta^\ell)$ forme un système de coordonnées Action-Angle classique. Le passage de ces dernières à $(x^1, y^1, \dots, x^k, y^k, q^1, \dots, q^\ell, \theta^1, \dots, \theta^\ell)$ généralise le passage des "coordonnées de Delaunay" aux "coordonnées de Poincaré" dans le problème des deux corps [A-M].

Le théorème d'Arnold-Liouville [A-M] donne un critère d'existence de coordonnées Action-Angle classiques ; il a été généralisé depuis de plusieurs manières [voir [F-M] et les références qui y figurent, [D-D], [F]], en particulier pour obtenir des coordonnées Action-Angle à singularités : d'abord par Vey [V], dans le cas analytique avec $\ell = 0$, et Rüssmann [R] dans le cas $n = 2$; enfin, récemment, par Eliasson [E].

Utilisant la notion d'ellipticité transverse introduite en I.1, on peut énoncer le théorème d'Eliasson de la manière suivante :

Théorème d'Eliasson. Soit \mathfrak{A} une algèbre de Lie abélienne [pour le crochet de Poisson] de dimension n d'intégrales premières du système hamiltonien (P, ω, H) . On note \mathfrak{A}^* l'algèbre de Lie abélienne des champs hamiltoniens correspondants. Soit $x_0 \in P$ tel que :

- (i) l'orbite F_{x_0} de x_0 par \mathfrak{A}^* est compacte et de dimension ℓ
- (ii) $(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{A})$ est transversalement elliptique en x_0 .

Alors, il existe, sur un voisinage ouvert U de x_0 dans P , un système de coordonnées Action-Angle avec singularités de rang ℓ adapté au système.

Ici, la condition (ii) d'ellipticité transverse se traduit de la façon suivante : la forme ω_{x_0} restreinte à K_{x_0} a pour noyau $\mathfrak{A}_{x_0}^*$ et définit donc une forme symplectique réduite $\omega_{x_0}^T$ sur $N_{x_0}^T$. Si l'on veut, c'est la version infinitésimale du procédé classique de réduction de l'espace des phases par une action hamiltonienne, voir [A-M]. L'isotropie \mathfrak{J}_{x_0} de $\mathfrak{A}_{x_0}^*$ en x_0 opère naturellement dans $(N_{x_0}^T, \omega_{x_0}^T)$ et définit ainsi une sous-algèbre abélienne $\mathfrak{J}_{x_0}^T$ d'isotropie infinitésimale réduite de

$\mathfrak{sp}(N_{x_0}^T, \omega_{x_0}^T)$. La condition (ii) signifie alors que $\mathfrak{J}_{x_0}^T$ est l'algèbre de Lie d'un tore maximal de $\mathfrak{SP}(N_{x_0}^T, \omega_{x_0}^T)$.

Montrons comment le théorème d'Eliasson se déduit de façon élémentaire de notre résultat principal : d'après celui-ci, il existe un voisinage ouvert U de x_0 dans P , saturé d'orbites de \mathfrak{K}^* , et une action différentiable effective

$$\psi : \mathbb{T}^n \times U \rightarrow U$$

qui a les mêmes orbites que \mathfrak{K}^* et respecte les champs appartenant à \mathfrak{K}^* .

L'action ψ étant effective, la réunion U' dans U des orbites de dimension n est un ouvert dense connexe de U [c'est une propriété bien connue des actions de groupes de Lie compacts]. Dans U' , les hypothèses du théorème d'Arnold-Liouville sont satisfaites en chaque point pour le système d'intégrales premières \mathfrak{K} , ce qui permet [au voisinage de chaque point] de construire une action symplectique ψ' de \mathbb{T}^n ayant les mêmes orbites que ψ et commutant avec celle-ci. Ceci implique que l'on passe [localement] de ψ à ψ' par un changement de base du tore à coefficients entiers ; il en résulte que ψ est elle-même symplectique dans U' , donc par continuité dans U tout entier.

Ceci étant, il ne reste plus qu'à appliquer les résultats classiques concernant les formes normales d'actions symplectiques de tores, voir par exemple [A-M-M], pour arriver au résultat.

II. Démonstration du résultat principal.

Comme ci-dessus, la dimension de V sera $n + p$, celle de \mathfrak{X} sera n , celle de \mathfrak{K} sera p , et celle de N_{x_0} sera $2s$. On notera $r = n - s$ la dimension de l'orbite \mathcal{O}_{x_0} , et $r' = p - s$ celle de $d\mathfrak{K}_{x_0} = \{df_{x_0} / f \in \mathfrak{K}\}$.

La démonstration se fera en utilisant une récurrence sur s : on se ramènera par un procédé d'éclatement du cas $\dim \mathfrak{J}_{x_0} = s$ au cas $\dim \mathfrak{J}_{x_0} < s$.

Observons au préalable qu'on ne change rien au problème si l'on remplace \mathfrak{K} par un autre espace \mathfrak{K}_1 de même dimension d'intégrales premières de \mathfrak{X} ayant la propriété d'engendrer fonctionnellement la même al-

gèbre $\hat{\mathcal{F}}$ de fonctions sur V . En particulier, on pourra toujours se ramener au cas où toutes les fonctions de $\hat{\mathcal{F}}$ s'annulent en x_0 .

II.1. Construction de bonnes coordonnées, et intégration des champs de \mathcal{X} au voisinage de Ω_{x_0} .

Lemme 1. Il existe un voisinage ouvert Ω_{x_0} de x_0 , muni de coordonnées

locales $(v, \mu, u) = (v^1, \dots, v^r, \mu^1, \dots, \mu^{r'}, u^1, \dots, u^{2s})$ telles que, en

notant $x = (x^1, \dots, x^s) = (u^1, \dots, u^s)$ et

$y = (y^1, \dots, y^s) = (u^{s+1}, \dots, u^{2s})$, on ait les propriétés suivantes :

(i) les coordonnées de x_0 sont nulles.

(ii) \mathcal{X} admet une base $(V_1, \dots, V_r, W_1, \dots, W_s)$ qui s'écrit en coordonnées locales

$$V_k = \frac{\partial}{\partial v^k} \quad \text{pour } k = 1, \dots, r$$

$$W_i = \sum_{k=1}^r W_i^k(\mu, u) \frac{\partial}{\partial v^k} + \sum_{a=1}^{2s} W_i^{''a}(\mu, u) \frac{\partial}{\partial u^a} \quad \text{pour } i = 1, \dots, s$$

où les W_i s'annulent en x_0 , où $W_i^{''a}(\mu, 0) = 0$, et où le linéarisé en

x_0 de $\sum_{a=1}^{2s} W_i^{''a}(\mu, u) \frac{\partial}{\partial u^a}$ est égal à $y^1 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial}{\partial y^1}$ pour $i = 1, \dots, s$.

(iii) $\hat{\mathcal{F}}$ admet une base $(g_1, \dots, g_r, f_1, \dots, f_s)$ qui s'écrit en coordonnées locales

$$g_k(v, \mu, u) = \mu^{k'} \quad \text{pour } k' = 1, \dots, r'$$

$$f_j(v, \mu, u) = \gamma_j^0(\mu) + (x^j)^2 + (y^j)^2 + \gamma_j^2(\mu)(u) + \|u\|^2 \epsilon_j(\mu, u)$$

pour $j = 1, \dots, s$, où $\gamma_j^2(\mu)$ est une forme quadratique en u , dépendant du paramètre μ , avec $\gamma_j^0(0) = \gamma_j^2(0) = 0$

$$\|u\|^2 = \sum_{a=1}^{2s} |u^a|^2 \quad \text{et} \quad \lim_{u \rightarrow 0} \epsilon_j(\mu, u) = 0$$

(iv) la fonction $f = f_1 + \dots + f_s$ s'écrit en coordonnées locales

$$f(v, \mu, u) = \|u\|^2 + \gamma(\mu), \quad \text{où } \gamma \text{ est une fonction différentiable}$$

nulle pour $\mu = 0$.

Démonstration. On commence par choisir des bases $(V_1, \dots, V_r, W_1, \dots, W_s)$ de \mathcal{X} , et $(g_1, \dots, g_r, f_1, \dots, f_s)$ de \mathcal{A} , telles que $W_1, \dots, W_s, df_1, \dots, df_s$ s'annulent en x_0 . On peut alors choisir des coordonnées (v, μ, u) centrées en x_0 , telles que :

$$V_k = \frac{\partial}{\partial v^k} \text{ pour } k = 1, \dots, r, \text{ et } g_{k'}(v, \mu, u) = \mu^{k'} \text{ pour } k' = 1, \dots, r'.$$

On a alors nécessairement :

$$W_i = \sum_{k=1}^r W_i^k(\mu, u) \frac{\partial}{\partial v^k} + \sum_{a=1}^{2s} W_i^{''a}(\mu, u) \frac{\partial}{\partial u^a} \quad \text{pour } i = 1, \dots, s.$$

Les espaces K_{x_0} et \mathcal{X}_{x_0} s'identifient aux espaces engendrés respectivement par $\left(\frac{\partial}{\partial v^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial v^r}, \frac{\partial}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^{2s}} \right)$ et $\left(\frac{\partial}{\partial v^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial v^r} \right)$; donc $N_{x_0}^T$

s'identifie naturellement à l'espace engendré par $\left(\frac{\partial}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^{2s}} \right)$. Pour

$j = 1, \dots, s$, la forme quadratique sur $N_{x_0}^T$ définie par le jet d'ordre 2

de f_j correspond à $\sum_{a,b=1}^{2s} \frac{\partial^2 f_j}{\partial u^a \partial u^b} (0, \dots, 0) u^a u^b$. De même, le linéarisé

transverse de W_i correspond, pour $i = 1, \dots, s$, au champ

$$\sum_{a,b=1}^{2s} \frac{\partial W_i^{''a}}{\partial u^b} (0, \dots, 0) u^b \frac{\partial}{\partial u^a}. \text{ L'hypothèse d'ellipticité transverse montre}$$

alors que, par un changement linéaire sur les u^a , on peut imposer :

- que le linéarisé en x_0 de $\sum_{a=1}^{2s} W_i^{''a}(\mu, u) \frac{\partial}{\partial u^a}$ s'écrive

$$y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - x^i \frac{\partial}{\partial y^i} + \sum_{\substack{a=1, \dots, 2s \\ k'=1, \dots, r'}} \lambda_{ik}^a \mu^{k'} \frac{\partial}{\partial u^a}, \text{ pour } i = 1, \dots, s,$$

- que $f_j(v, \mu, u) = \gamma_j^0(\mu) + \gamma_j^1(\mu)(u) + (x^1)^2 + (y^1)^2 + \gamma_j^2(\mu)(u) + \|u\|^2 \epsilon_j(\mu, u)$,

pour $j = 1, \dots, s$, où $\gamma_j^1(\mu)$ et $\gamma_j^2(\mu)$ sont des formes respectivement linéaire et quadratique en u , dépendant du paramètre μ , et telles que $\gamma_j^1(0) = 0$ et $\gamma_j^2(0) = 0$.

Ceci étant, $f = f_1 + \dots + f_s$ apparaît comme un déploiement de paramètre μ d'une fonction de Morse des variables u^a , de la forme $u \rightarrow \|u\|^2 +$ termes de degré > 2 . La théorie élémentaire du déploiement [qui peut, ici, être retrouvée directement "à la main"] permet d'affirmer qu'il existe un changement de variables $(\mu, u) \rightarrow (\mu, h_\mu(u))$, dont le jet d'ordre 1 en $(0, 0)$ est l'identité, et qui met f sous la forme (iv) ; cf [W].

Dans les nouvelles coordonnées, la fonction $\|u\|^2 = f(v, \mu, u) - \gamma(\mu)$ est une intégrale première locale de \mathfrak{X} . En écrivant en particulier que la dérivée de $\|u\|^2$ suivant W_i est nulle, on vérifie la propriété (ii).

Fixons maintenant j , et écrivons que $W_i \cdot f_j = 0$ pour $i = 1, \dots, s$. On notera $f_j^{(\mu)}$ la fonction f_j , regardée comme fonction de u^1, \dots, u^{2s} , à

paramètre μ , et $W_i^{(\mu)}$ le champ de vecteurs $W_i^{(\mu)} = \sum_{a=1}^{2s} W_i^a(\mu, u) \frac{\partial}{\partial u^a}$, re-

gardé comme champ de vecteurs sur \mathbb{R}^{2s} , à paramètre μ . On remarque que $W_i^{(\mu)}$ est nul à l'origine de \mathbb{R}^{2s} , et on notera $\bar{W}_i^{(\mu)}$ son linéarisé à l'origine. En écrivant que $W_i^{(\mu)} \cdot f_j^{(\mu)} = 0$, donc que la partie principale à l'origine de cette fonction est nulle, il vient

$\langle \gamma_j^1(\mu), \bar{W}_i^{(\mu)} \rangle = 0$. Posant :

$$\gamma_j^1(\mu)(u) = \sum_{a=1}^{2s} \varphi_{j,a}(\mu) u^a \quad \text{et} \quad \bar{W}_i^{(\mu)} = \sum_{a,b=1}^{2s} \eta_{i,b}^a(\mu) u^b \frac{\partial}{\partial u^a},$$

il vient :

$$\sum_{a=1}^{2s} \varphi_{j,a}(\mu) \eta_{i,b}^a(\mu) = 0 \quad \text{pour} \quad i = 1, \dots, s \quad \text{et} \quad b = 1, \dots, 2s.$$

Considérons ceci comme un système linéaire de $2s^2$ équations en les inconnues $\varphi_{j,a}(\mu)$. Pour $\mu = 0$, compte tenu de (ii), ce système est de rang $2s$. Il en sera de même pour μ assez petit, ce qui implique la nullité des fonctions $\varphi_{j,a}(\mu)$. Ainsi, au besoin en restreignant le domaine \mathfrak{U}_0 , on vérifie $\gamma_j^1(\mu) = 0$, ce qui complète le point (iii) -//-

La fonction différentiable $\gamma(\mu^1, \dots, \mu^r)$ qui apparaît au point (iv) du lemme ci-dessus n'est a priori définie qu'au voisinage de

l'origine. On la prolonge arbitrairement en une fonction différentiable sur \mathbb{R}^r , ce qui permet de définir sur V la fonction globale

$$h = f - \gamma(g_1, \dots, g_r)$$

qui est par construction une intégrale première de \mathfrak{X} . L'expression de cette fonction dans les "bonnes coordonnées" (v, μ, u) est

$$h(v, \mu, u) = \|u\|^2.$$

On notera S la partie de V d'équation $h = 0$. C'est automatiquement une réunion d'orbites de \mathfrak{X} .

Lemme 2. On peut restreindre V de manière que :

- (i) S soit une sous-variété plongée V
- (ii) au voisinage de tout point de S il existe des coordonnées locales (v, μ, u) dans lesquelles h s'écrit $\|u\|^2$
- (iii) les champs appartenant à \mathfrak{X} soient complets.

Démonstration. En transportant les coordonnées obtenues au lemme 1 par un difféomorphisme local obtenu en intégrant un champ appartenant à \mathfrak{X} , on peut construire de "bonnes coordonnées" au voisinage d'un point x quelconque de l'orbite \mathcal{O}_x . En restreignant V à un voisinage tubulaire assez petit de \mathcal{O}_x , on peut ainsi assurer le point (ii), qui implique (i).

Observons maintenant que, dans tous les systèmes de "bonnes coordonnées" considérés, la base $(g_1, \dots, g_r, f_1, \dots, f_s)$ de \mathfrak{A} utilisée est la même, et aussi la fonction $h = \|u\|^2$. On peut définir l'application globale $G : V \rightarrow \mathbb{R}^r$ de composantes g_1, \dots, g_r , dont la restriction G_S à S est une submersion. De plus, $G_S^{-1}(0)$ a l'orbite \mathcal{O}_x comme composante connexe. Quitte à restreindre V , on pourra donc supposer que $G_S : S \rightarrow \Omega_S \subset \mathbb{R}^r$ est une fibration triviale, dont \mathcal{O}_x est la fibre au-dessus de l'origine. En restriction à S , les orbites de \mathfrak{X} ont toutes pour dimension r , et sont les fibres de G_S .

Remarquons finalement que la fonction $h + \|G\|^2$ s'écrit dans les bonnes coordonnées :

$$\sum_{i=1}^s [(x^i)^2 + (y^i)^2] + \sum_{k'=1}^{r'} (\mu^{k'})^2.$$

Pour $\epsilon > 0$ assez petit, la condition $h + \|G\|^2 < \epsilon$ définit un voisinage tubulaire de \mathcal{O}_{x_0} , dans lequel les orbites de \mathcal{X} sont tracées sur les tubes compacts d'équation $h + \|G\|^2 = \text{cste}$. En remplaçant V par un tel voisinage tubulaire, on en déduit que les champs de \mathcal{X} sont complets. -//-

II.2. Contrôle de l'isotropie au voisinage de \mathcal{O}_{x_0} .

Utilisant désormais les conclusions du Lemme 2, on peut intégrer les champs de vecteurs de \mathcal{X} de manière à définir une action $\varphi: E \times V \rightarrow V$, où $E \cong \mathbb{R}^n$. On notera $\varphi(\tau, x) = \varphi_\tau(x)$.

Pour $x \in \mathcal{O}_{x_0}$, on note comme en I.3, $K_x = \bigcap_{f \in \mathcal{A}} \text{Ker } df_x$, $N_x^T = K_x / \mathcal{X}_x$;

$\mathcal{N}_{\mathcal{O}_{x_0}}^T = \bigcup_{x \in \mathcal{O}_{x_0}} N_x^T$ est un fibré vectoriel sur \mathcal{O}_{x_0} de fibre-type \mathbb{R}^{2s} ,

et de fibré de repères $B(\mathcal{N}_{\mathcal{O}_{x_0}}^T)$. L'action φ se relève de façon naturelle en une action $\varphi^B: E \times B(\mathcal{N}_{\mathcal{O}_{x_0}}^T) \rightarrow B(\mathcal{N}_{\mathcal{O}_{x_0}}^T)$, par laquelle E agit comme groupe d'automorphismes de ce fibré de repères.

Le jet d'ordre 2 de h détermine en tout point x de \mathcal{O}_{x_0} une forme bilinéaire symétrique définie positive sur N_x^T , ce qui munit $\mathcal{N}_{\mathcal{O}_{x_0}}^T$ d'une structure de fibré vectoriel euclidien. Cette structure est invariante par l'action de E . Si donc $O(\mathcal{N}_{\mathcal{O}_{x_0}}^T)$ est le fibré des repères orthonormés correspondant, l'action φ^B laisse invariant ce sous-fibré principal de $B(\mathcal{N}_{\mathcal{O}_{x_0}}^T)$. L'isotropie I_{x_0} de φ en x_0 se relève en un tore maximal dans le groupe orthogonal de $N_{x_0}^T$. Il en résulte que les orbites de φ^B sont des tores de dimension n , c.-à-d. que l'isotropie de φ^B en un point de $O(\mathcal{N}_{\mathcal{O}_{x_0}}^T)$ [elle est d'ailleurs indépendante du point choisi] sera un réseau

Γ_{x_0} de E , contenu dans I_{x_0} .

On dira que Γ_{x_0} est l'isotropie transverse de l'action φ en x_0 .

Le pas essentiel de la démonstration du résultat principal est la proposition suivante :

Proposition 1. Il existe un voisinage ouvert \mathcal{V} de x_0 dans V et, pour tout $\tau_0 \in \Gamma_{x_0}$, une unique application différentiable $\tau : \mathcal{V} \rightarrow E$ vérifiant :

- (i) $\tau(x_0) = \tau_0$
- (ii) pour tout $x \in \mathcal{V}$, $\tau(x)$ appartient à l'isotropie I_x de φ en x .

Montrons comment ce résultat entraîne facilement le théorème : on choisit une base $(\tau_0^1, \dots, \tau_0^n)$ du réseau Γ_{x_0} , et on prolonge pour tout i l'élément τ_0^i en une application différentiable $\tau^i : \mathcal{V} \rightarrow E$ à valeurs dans l'isotropie de φ . On restreint \mathcal{V} pour que les τ^i restent linéairement indépendants, puis on le sature d'orbites [on sait que l'isotropie est constante sur chaque orbite]. Finalement, on obtient l'action $\psi : \mathbb{T}^n \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ cherchée en posant :

$$\psi(t_1, \dots, t_n, x) = \varphi(t_1 \tau^1(x) + \dots + t_n \tau^n(x), x).$$

Reste à démontrer la proposition 1. La fin de ce travail est consacré à cette démonstration, qui se fait par récurrence sur s .

Si $s = 0$, φ est localement libre, et \mathcal{A} est engendré par p fonctions dont les différentielles restent linéairement indépendantes au voisinage de l'orbite \mathcal{O}_{x_0} . La résolution de l'équation $\varphi_{\tau(x)}(x) = x$ en la fonction inconnue $\tau : \mathcal{V} \rightarrow E$ vérifiant $\tau(x_0) = \tau_0$ se fait par simple application du théorème des fonctions implicites, τ ne dépendant en fait que des p variables transverses aux orbites. D'où le résultat.

On supposera dans la suite le résultat démontré dans tous les cas où la dimension de $N_{x_0}^T$ est $< s$. L'idée est d'utiliser un éclatement de V le long de la sous-variété S pour se ramener à cette situation.

II.3. Description générale de la méthode d'éclatement.

Le principe de l'éclatement est de remplacer la sous-variété S par le fibré en espaces projectifs associé au fibré normal à S . En fait, ici,

on utilisera la fonction h pour décrire un "éclatement orienté" qui s'identifie au revêtement d'orientation du précédent.

La fonction h induit une métrique sur le fibré normal N_S^r à S [dont la restriction à \mathcal{O}_{x_0} n'est autre que N^r] ; on note \check{S} le fibré en sphères de rayon 1 pour cette métrique. En tant qu'ensemble, la variété éclatée \check{V} sera

$$\check{V} = (V-S)^- \cup \check{S} \cup (V-S)^+$$

où $(V-S)^-$ et $(V-S)^+$ sont deux copies de $(V-S)$. On construit un atlas sur \check{V} comme suit : au voisinage de tout point de S , on a une carte (U, η) munie de "bonnes coordonnées" (v, μ, u) dans lesquelles $h = \|u\|^2$. On associe à cette carte la "carte cylindrique" $(\check{U}, \check{\eta})$ de \check{V} , où

$$\check{U} = (U-S)^- \cup (U \cap S) \cup (U-S)^+$$

$\check{\eta} : \check{U} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R} \times S^{2s-1}$, S^{2s-1} étant la sphère unité de \mathbb{R}^{2s} , avec :

$$\check{\eta}(x^\pm) = (v, \mu, \pm\|u\|, \frac{u}{\pm\|u\|}) \quad \text{si } \eta(x) = (v, \mu, u), \quad u \neq 0,$$

$$\check{\eta}(Y_x) = (v, \mu, 0, u) \quad \text{si } \eta(x) = (v, \mu, 0) \quad \text{et} \quad Y_x = \sum_a u^a \frac{\partial}{\partial u^a} \Big|_x \text{ mod } T_x S,$$

$$u = (u^1, \dots, u^{2s}) \in S^{2s-1}.$$

On peut également regarder $\check{\eta}$ comme à valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2s}$, ce qui définit sur \check{U} des "coordonnées cylindriques" (v, μ, ρ, \bar{u}) , dans lesquelles l'application d'éclatement $\check{E} : \check{V} \rightarrow V$ s'écrit $(v, \mu, \rho, \bar{u}) \rightarrow (v, \mu, \rho, \bar{u})$.

Tout champ de vecteurs dans V tangent à S se relève de manière unique en un champ de vecteurs sur \check{V} . Par exemple, si X est le champ d'expression locale

$$X = \sum_k X^k(v, \mu, u) \frac{\partial}{\partial v^k} + \sum_{k'} X^{k'}(v, \mu, u) \frac{\partial}{\partial \mu^{k'}} + \sum_a X^{a'}(v, \mu, u) \frac{\partial}{\partial u^a}$$

ayant h comme intégrale première, alors il se relève en \check{X} d'expression locale [aux points où $\rho \neq 0$] :

$$(1) \quad \check{X} = \sum_k X^k(v, \mu, \rho \bar{u}) \frac{\partial}{\partial v^k} + \sum_{k'} X^{k'}(v, \mu, \rho \bar{u}) \frac{\partial}{\partial \mu^{k'}} + \frac{1}{\rho} \sum_a X^{a'}(v, \mu, \rho \bar{u}) \frac{\partial}{\partial \bar{u}^a}$$

De même, tout difféomorphisme Φ de V respectant S se relève de manière unique en un difféomorphisme $\check{\Phi}$ de \check{V} ; si, en particulier, Φ respecte h et a l'expression locale $(v, \mu, u) \rightarrow (V(v, \mu, u), M(v, \mu, u), U(v, \mu, u))$, alors $\check{\Phi}$ a l'expression locale [aux points où $\rho \neq 0$] :

$$(2) \quad \check{\Phi}(v, \mu, \rho, \bar{u}) = (V(v, \mu, \rho \bar{u}), M(v, \mu, \rho \bar{u}), \rho, \frac{1}{\rho} U(v, \mu, \rho \bar{u})).$$

L'action $\varphi : E \times V \rightarrow V$, pour laquelle S est une sous-variété invariante, se relève ainsi en une action $\check{\varphi} : E \times \check{V} \rightarrow \check{V}$ de $E = \mathbb{R}^a$ sur \check{V} .

Une fonction différentiable $\check{\chi} : \check{V} \rightarrow \mathbb{R}$ sera dite descendable s'il existe une fonction différentiable $\chi : V \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\check{\chi} = \chi \circ \check{E}$.

Lemme 3. La fonction différentiable $\check{\chi} : \check{V} \rightarrow \mathbb{R}$ est descendable si, et seulement si :

(i) elle est constante sur les préimages des points par \check{E} .

(ii) en coordonnées cylindriques (v, μ, ρ, \bar{u}) , elle admet aux points de \check{S} une série de Taylor en ρ de la forme

$$(*) \quad \chi_0(v, \mu, \bar{u}) + \rho \chi_1(v, \mu, \bar{u}) + \dots + \rho^k \chi_k(v, \mu, \bar{u}) + \dots$$

où les $\chi_k(v, \mu, \bar{u})$ sont, pour v et μ fixés, polynômiales et homogènes de degré k en les variables \bar{u} .

Remarque : les fonctions $\chi_k(v, \mu, \bar{u})$ n'ont pas une expression unique en \bar{u} [compte tenu de $\|\bar{u}\| = 1$]. Toutefois, leur expression polynômiale et homogène de degré k en \bar{u} est bien unique !

Démonstration : - Si $\check{\chi}$ est descendable, on a $\check{\chi}(v, \mu, \rho, \bar{u}) = \chi(v, \mu, \rho \bar{u})$, ce qui entraîne visiblement (i) (ii).

- Réciproquement, si $\check{\chi}$ vérifie (i), elle est "ensemblément" descendable : il existe $\chi : V \rightarrow \mathbb{R}$ unique telle que $\check{\chi} = \chi \circ \check{E}$. De plus, χ est automatiquement différentiable sur $V-S$. Reste donc à vérifier sa différentiabilité aux points de S .

Pour $k \in \mathbb{N}$, posons

$$\chi^k(v, \mu, u) = \chi_0(v, \mu, u) + \chi_1(v, \mu, u) + \dots + \chi_k(v, \mu, u).$$

L'hypothèse (ii) implique :

$$\check{\chi}(v, \mu, \rho, \bar{u}) - \chi^k \circ \check{E}(v, \mu, \rho, \bar{u}) = \rho^k \epsilon(v, \mu, \rho, \bar{u}), \text{ avec } \lim_{\rho \rightarrow 0} \epsilon(v, \mu, \rho, \bar{u}) = 0.$$

On en déduit :

$$\chi(v, \mu, u) - \chi^k(v, \mu, u) = \|u\|^k \bar{\epsilon}(v, \mu, u), \text{ avec } \lim_{u \rightarrow 0} \bar{\epsilon}(v, \mu, u) = 0$$

ce qui démontre l'existence en tout point de S des dérivées partielles successives de χ par rapport aux variables u^a . On peut recommencer l'argument en remplaçant $\check{\chi}$ par l'une quelconque de ses dérivées partielles par rapport aux variables v^k, μ^k ; d'où le résultat. -//-

II.4. Désingularisation de l'action φ .

On notera $\check{\mathcal{X}}$ l'espace vectoriel des champs fondamentaux de l'action relevée $\check{\varphi} : E \times \check{V} \rightarrow \check{V}$. On utilisera la base $(\check{V}_1, \dots, \check{V}_r, \check{W}_1, \dots, \check{W}_s)$ de $\check{\mathcal{X}}$ obtenue en relevant les éléments de la base de \mathcal{X} utilisée au lemme 1.

Reprenons les notations de ce lemme. Pour $k' = 1, \dots, r'$, on posera $\check{g}_{k'} = g_{k'} \circ \check{E}$. Pour $j = 1, \dots, s$, au besoin en restreignant V , on peut définir une nouvelle intégrale première globale de $\check{\mathcal{X}}$ en posant :

$$f'_j = f_j - \gamma_j^0(g_1, \dots, g_r)$$

On posera alors :

$$\check{f}_j = \frac{1}{h} f'_j \circ \check{E}, \text{ pour } j = 1, \dots, s,$$

et on observe que les fonctions ainsi définies se prolongent différentiablement sur \check{S} , de manière à définir des intégrales premières globales de $\check{\mathcal{X}}$.

On notera $\check{\mathcal{H}}$ l'espace d'intégrales premières de $\check{\mathcal{X}}$ de base $(\check{g}_1, \dots, \check{g}_r, \rho, \check{f}_1, \dots, \check{f}_{s-1})$. En fait, on remarque que $\sum_{j=1}^s \check{f}_j = 1$, ce qui

veut dire que \check{f}_s appartient à l'espace engendré par $\check{\mathcal{H}}$ et les constantes.

Lemme 4. Soit $\check{x}_0 \in \check{E}^{-1}(x_0)$; alors :

- (i) l'orbite de \check{x}_0 par $\check{\mathcal{X}}$ est compacte
- (ii) $(\check{\mathcal{X}}, \check{\mathcal{H}})$ est transversalement elliptique en \check{x}_0 .
- (iii) l'isotropie transverse de $\check{\varphi}$ en \check{x}_0 coïncide avec l'isotropie transverse Γ_{x_0} de φ en x_0 .

Démonstration. Notons $\check{S}_{\check{O}_{x_0}} = \check{E}^{-1}(O_{x_0})$. C'est la sous-variété de \check{V}

d'équations $\check{g}_1 = \dots = \check{g}_r = \rho = 0$. Dans la démonstration, il suffit de regarder ce qui se passe sur cette sous-variété, en remplaçant $\check{\mathcal{X}}$ par l'espace des champs de vecteurs induits, et $\check{\mathcal{H}}$ par l'espace des fonctions induites [engendré par les fonctions induites par $\check{f}_1, \dots, \check{f}_{s-1}$].

Rappelons qu'on a noté $O(M_{\check{O}_{x_0}}^T)$ le fibré des repères de $M_{\check{O}_{x_0}}^T$ orthonormés pour la métrique définie par h , φ^B l'action relevée de E dans ce fibré. Observons aussi que $\check{S}_{\check{O}_{x_0}}$ n'est autre que le fibré associé à $O(M_{\check{O}_{x_0}}^T)$ de fibre-type la sphère unité de \mathbb{R}^{2s} , et que $\check{\varphi}$ est l'action déduite de φ^B par passage au fibré associé. Comme on a déjà vu que les orbites de φ^B sont compactes, il en est de même de celles de $\check{\varphi}$, d'où le point (i).

Dans de bonnes coordonnées (v, \bar{u}) sur $\check{S}_{\check{O}_{x_0}}$, les champs de vecteurs de $\check{\mathcal{X}}$ s'écrivent [compte tenu du lemme 1 et de la formule (1)] :

$$\check{V}_k = \frac{\partial}{\partial v^k}, \quad k = 1, \dots, r$$

$$\check{W}_i = \bar{y}^i \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i} - \bar{x}^i \frac{\partial}{\partial \bar{y}^i}, \quad i = 1, \dots, s, \quad \text{avec } \bar{u} = (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^s, \bar{y}^1, \dots, \bar{y}^s),$$

car $W_i^k(0,0) = 0$, et $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho} \sum_a W_i^{a\rho} \frac{\partial}{\partial \bar{u}^a}$ s'exprime à l'aide du

linéarisé de $\sum_a w^{aa}(\mu, u) \frac{\partial}{\partial u^a}$ en $(0,0)$.

De même, les fonctions \check{f}_j s'écrivent :

$$\check{f}_j(v, \bar{u}) = (\bar{x}^j)^2 + (\bar{y}^j)^2, \quad j = 1, \dots, s, \quad \text{car } \gamma_j^2(0) = 0 \quad \text{et } \lim_{\rho \rightarrow 0} \epsilon_j(0, \rho \bar{u}) = 0.$$

Sous cette forme, il est clair que $(\check{\mathcal{X}}, \check{\mathcal{A}})$ est transversalement elliptique en tout point de $\check{S}_{\mathbb{Q}_{x_0}}$, d'où (ii).

Finalement, comme le réseau Γ_{x_0} est l'isotropie de φ^B en tout point de $0(\mathbb{H}_{\mathbb{Q}_{x_0}}^T)$, on obtient par passage au quotient à partir de $\check{\varphi}$ une action effective

$$\tilde{\varphi} : E/\Gamma_{x_0} \times \check{S}_{\mathbb{Q}_{x_0}} \rightarrow \check{S}_{\mathbb{Q}_{x_0}}$$

du tore $\mathbb{T}^n = E/\Gamma_{x_0}$ sur la variété $\check{S}_{\mathbb{Q}_{x_0}}$. L'isotropie transverse d'une telle action est nulle en tout point, ce qui entraîne (iii). -//-

Remarque : en tout point $\check{x}_0 \in E^{-1}(x_0)$, l'orbite de $\check{\mathcal{X}}$ est de dimension $> r$, donc la dimension de l'espace transverse en ce point $N_{x_0}^T$ est $< s$.

II.5. Démonstration de la proposition 1.

Soit $\tau_0 \in \Gamma_{x_0}$.

Le lemme 4, la dernière remarque, et l'hypothèse de récurrence, entraînent que, pour tout $\check{x}_0 \in E^{-1}(x_0)$, il existe un voisinage ouvert \check{U}_{x_0}

de \check{x}_0 dans \check{V} et une unique application différentiable :

$$\check{\tau}_{x_0} : \check{U}_{x_0} \rightarrow E$$

vérifiant :

$$(3) \quad \begin{cases} \check{\tau}_{x_0}(\check{x}_0) = \tau_0 \\ \text{pour tout } \check{x} \in \check{U}_{x_0}, \check{\tau}_{x_0}(\check{x}) \text{ appartient à l'isotropie de } \check{\varphi} \text{ en } \check{x}. \end{cases}$$

Remarquons que l'isotropie transverse en x_0 coïncide avec l'isotropie de $\check{\varphi}$ en presque tout point de $\check{E}^{-1}(x_0)$; donc, en restriction à $\check{U}_{x_0} \cap \check{E}^{-1}(x_0)$, l'application $\check{\tau}_{x_0}$ est constante et égale à τ_0 . L'unicité

locale de $\check{\tau}_{x_0}$ au voisinage de chaque point entraîne alors que les appli-

cations $\check{\tau}_{x_0}$ se recollent en une application différentiable

$$(4) \quad \check{\tau} : \check{U} \rightarrow E,$$

où \check{U} est un voisinage de $\check{U}^{-1}(x_0)$ défini par des inéquations $|\rho| < \epsilon$, $\|\mu\| < \eta'$, $\|\nu\| < \eta$, avec :

$$(5) \quad \begin{cases} \check{\tau}(\check{E}^{-1}(x_0)) = \{\tau_0\} \\ \text{pour tout } \check{x} \in \check{U}, \check{\tau}(\check{x}) \text{ est dans l'isotropie de } \check{\varphi} \text{ en } \check{x}, \end{cases}$$

l'application $\check{\tau}$ étant uniquement déterminée par les conditions (5).

Lemme 5. L'application $\check{\tau}$ est descendable, c.-à-d. qu'il existe $\tau : U \rightarrow E$ différentiable, avec $U = \check{E}(U)$ et $\check{\tau} = \tau \circ \check{E}$.

Démonstration : On utilise [pour les fonctions à valeurs vectorielles] la caractérisation des fonctions "descendables" donnée par le lemme 3.

On commence par remarquer que la fonction $\check{\tau}' : \check{U} \rightarrow E$ définie, dans

les bonnes coordonnées (v, μ, ρ, \bar{u}) , par

$$\check{\tau}'(v, \mu, \rho, \bar{u}) = \check{\tau}(v, \mu, -\rho, -\bar{u})$$

satisfait, elle aussi, aux conditions (5). Par unicité, on a donc $\check{\tau}' = \check{\tau}$. Ceci, et le fait que $\check{\tau}$ est constante sur $\check{E}^{-1}(x_0)$, entraîne que $\check{\tau}$ est "ensemblément descendable", c.-à-d. la condition (i) du lemme 3.

Remarquons aussi que la fonction $\check{\tau}(v, \mu, \rho, \bar{u})$ est, en fait, indépendante de la variable v , car $\check{\tau}(0, \mu, \rho, \bar{u})$ vérifie aussi les conditions (5).

On posera dans la suite $E = \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s$, de sorte que tout élément $\tau \in E$ pourra s'écrire

$$(6) \quad \tau = \tau_0 + (t, t'), \text{ avec } t \in \mathbb{R}^r \text{ et } t' \in \mathbb{R}^s.$$

En particulier, la fonction $\check{\tau}$ s'écrira

$$(7) \quad \check{\tau} = \tau_0 + (\check{t}, \check{t}'), \text{ où } \check{t} : \check{U} \rightarrow \mathbb{R}^r \text{ et } \check{t}' : \check{U} \rightarrow \mathbb{R}^s.$$

Si $\tau = \tau_0 + (t, t')$ est assez voisin de τ_0 , c.-à-d. si (t, t') est assez petit, $\varphi_\tau(x_0)$ sera encore dans U , et on pourra écrire φ_τ dans les bonnes coordonnées, au voisinage de x_0 . D'après le lemme 1, on aura :

$$(8) \quad \varphi_{\tau_0 + (t, t')}(v, \mu, u) = (v + t + \alpha(t', \mu, u), \mu, \beta^{(\mu)}(t', u))$$

où l'écriture $\beta^{(\mu)}(t', u)$ est destinée à faire apparaître μ comme un paramètre. on aura, toujours d'après le lemme 1 :

$$(9) \quad \beta^{(\mu)}(t', 0) = 0$$

et, en posant $W_1^{(\mu)}(\mu) = (W_1^{(\mu)}(\mu, u), \dots, W_1^{2s}(\mu, u))$

$$(10) \quad \frac{\partial^2 \beta^{(\mu)}}{\partial t'^1 \partial u} (0, 0) = \frac{\partial W_1^{(\mu)}}{\partial u} (0).$$

En utilisant l'expression (2) du relevé d'un difféomorphisme, on obtient :

$$(11) \quad \check{\varphi}_{\tau_0 + (\check{t}, \check{t}')} (v, \mu, \rho, \bar{u}) = (v + \check{t} + \alpha(\check{t}', \mu, \rho \bar{u}), \mu, \rho, \frac{1}{\rho} \beta^{(\mu)}(\check{t}', \rho \bar{u}))$$

pour $\rho \neq 0$, et la condition (5) s'écrit :

$$(12)_a \quad \check{t} = -\alpha(\check{t}', \mu, \rho \bar{u})$$

$$(12)_b \quad \beta^{(\mu)}(\check{t}', \rho \bar{u}) = \rho \bar{u}.$$

Si \check{t}' est descendable, alors d'après (12)_a il en sera de même de \check{t} , donc de $\check{\tau}$. Reste à prouver que \check{t}' est descendable. Pour cela, on écrit la série de Taylor en ρ de \check{t}' aux points de \check{S} . La propriété (9) implique que cette série n'a pas de terme constant [en presque tous les points de $\check{E}^{-1}(x_0)$ l'isotropie est discrète, donc se prolonge de façon unique sur \check{S} , localement, par $\check{t}' = 0$]. On aura donc :

$$(13) \quad \check{t}' = \rho t'_1(\mu, \bar{u}) + \dots + \rho^k t'_k(\mu, \bar{u}) + \dots$$

En développant en série de Taylor en ρ les deux membres de (12)_b, il vient, compte tenu de (9) :

$$(14) \quad \frac{\partial \beta^{(\mu)}}{\partial u}(0,0)(\rho \bar{u}) + \frac{1}{2} \left[2 \frac{\partial^2 \beta^{(\mu)}}{\partial t' \partial u}(0,0)(\rho t'_1 + \dots, \rho \bar{u}) + \frac{\partial^2 \beta^{(\mu)}}{\partial u^2}((\rho \bar{u})^{(2)}) \right] + \dots + \frac{1}{k!} \left[k \frac{\partial^k \beta^{(\mu)}}{\partial t'^{k-1} \partial u}(0,0)((\rho t'_1 + \dots)^{(k-1)}, \rho \bar{u}) + \dots + \frac{\partial^k \beta^{(\mu)}}{\partial u^k}(0,0)((\rho \bar{u})^{(k)}) \right] + \dots = \rho \bar{u}.$$

Identifiant les termes en ρ , on obtient $\frac{\partial \beta^{(\mu)}}{\partial u}(0,0) = \text{Id}$.

Identifiant les termes en ρ^2 , on obtient :

$$(15) \quad 2 \frac{\partial^2 \beta^{(\mu)}}{\partial t' \partial u}(0,0)(t'_1, \bar{u}) = - \frac{\partial^2 \beta^{(\mu)}}{\partial u^2}(0,0)((\bar{u})^{(2)})$$

et en posant :

$$(16) \quad \begin{cases} \bar{W}_1^{(\mu)} = 2 \sum_{a,b} \frac{\partial W_1^{(a)}}{\partial u^b} (\mu, 0) \bar{u}^b \frac{\partial}{\partial \bar{u}^a} \\ \bar{Z}_2^{(\mu)} = - \sum_{a, b_1, b_2} \frac{\partial^2 \beta^{(\mu)a}}{\partial u^{b_1} \partial u^{b_2}} (0, 0) \bar{u}^{b_1} \bar{u}^{b_2} \frac{\partial}{\partial \bar{u}^a} \end{cases}$$

on peut remplacer (15) par l'équation équivalente

$$(17) \quad \sum_{i=1}^s t'_i(\mu, \bar{u})^i \bar{W}_2^{(\mu)} = \bar{Z}_2^{(\mu)} \quad \text{pour} \quad \|\bar{u}\| = 1.$$

Les deux membres de cette équation sont des champs de vecteurs - dépendant du paramètre μ - sur \mathbb{R}^{2s} tangents à la sphère S_0 d'équation $\|\bar{u}\| = 1$.

Pour $\mu = 0$, on a $\bar{W}_1^{(0)} = \bar{y}^1 \frac{\partial}{\partial \bar{x}^1} - \bar{x}^1 \frac{\partial}{\partial \bar{y}^1}$. Si $\bar{Z}_2^{(0)} = \xi_2(\bar{u})^1 \frac{\partial}{\partial \bar{x}^1} + \zeta_2(\bar{u})^1 \frac{\partial}{\partial \bar{y}^1}$, il vient $\bar{y}^1 t'_1(0, \bar{u})^1 = \xi_2(\bar{u})^1$. Comme $t'_1(0, \bar{u})^1$ est diffé-

rentiable sur S_0 , le polynôme quadratique $\xi_2(\bar{u})^1$ est divisible par \bar{y}^1 , et $t'_1(0, \bar{u})^1$ est un polynôme homogène et de degré 1 en \bar{u} .

Observons maintenant que l'argument reste valable pour μ voisin de 0 : on a utilisé seulement l'expression de $\bar{W}_1^{(0)}$ dans les bonnes coordonnées, c'est-à-dire l'ellipticité transverse sur l'orbite \mathcal{O}_{x_0} . Mais on a encore ellipticité transverse sur les orbites voisines dans S_0 [les orbites de l'action relevée de E dans les repères du fibré normal à S restent, pour μ voisin de 0, des tores de dimension n]. Donc $t'_1(\mu, \bar{u})^1$ est un polynôme homogène de degré 1 en \bar{u} .

Pour achever, on procède par récurrence sur k : si l'on suppose démontré que, pour $i = 1, \dots, k$, les t'_i sont des polynômes homogènes de degré i en \bar{u} , alors l'étude des termes de degré $(k+1)$ dans (14) donne :

$$(18) \quad \sum_{i=1}^s t'_{k+1}(\mu, \bar{u})^i \bar{w}_i^{(\mu)} = \bar{z}_{k+2}^{(\mu)} \quad \text{pour} \quad \|\bar{u}\| = 1,$$

où $\bar{z}_{k+2}^{(\mu)}$ est un champ de vecteurs polynômial homogène de degré $(k+2)$. Le même argument que ci-dessus prouve alors que $t'_{k+1}(\mu, \bar{u})^i$ est polynômial et homogène de degré $(k+1)$ en \bar{u} , ce qui achève la démonstration du lemme -//-

Pour terminer la preuve de la proposition 1 [et, par suite, celle du théorème], il suffit d'observer que la fonction $\tau : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ obtenue est unique, car une telle fonction se relève en $\check{\tau} : \check{\mathbb{U}} \rightarrow E$ vérifiant les conditions (5).

Bibliographie

- [A-M] R. Abraham - J.E. Marsden, Foundations of mechanics (2nd edition), Benjamin-Cummings, Reading, (1978)
- [A-M-M] J. Arms - J.E. Marsden - V. Moncrief, Symetry and bifurcations of momentum mapping, Commun. Math. Phys., 78, (1981), 455-478.
- [D-D] P. Dazord - T. Delzant, Le problème général des variables action-angles, Jour. of Diff. Geometry, 26(2), (1987), 223-252.
- [D] H. Duistermaat, On global action-angle coordinates, Commun on pure and appl. Math., 32, (1980), 687-706.
- [E] H. Eliasson, Hamiltonian systems with Poisson commmuting integrals, Thèse, Stokholm, (11984).
- [F.M] H.Fomenko - A. Mischenko, Generalized Liouville method of integration of hamiltonian systems,

Functional Anal-Appl., 12, (1978), 113-121.

- [F] J.P. Francoise, Calculs explicites d'action-angles,
Seminaire de Mathématiques Supérieures, Montreal, (1985).
- [R] Rüssmann, Über das Verhalten analytischer Hamiltonscher Differential
gleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung, Math. Ann.,
154, (1964), 285-300.
- [V] J. Vey, Sur certains systèmes dynamiques séparables, Am. J. Math., 100,
(1978), 591-614.
- [W] G. Wassermann, Stability of unfoldings,
Lecture Notes Math., 393, (1974), Springer-Verlag.