

M. CONDEVAUX

P. DAZORD

P. MOLINO

Chapitre V Géométrie du moment

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1988, fascicule 1B
« Séminaire Sud-Rhodanien 1ère partie », , p. 131-160

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1988__1B_131_0

© Université de Lyon, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

M. Condevaux, P. Dazord, P. Molino

Introduction

Le but de cet exposé est double : d'une part définir le cadre naturel dans lequel se généralise l'étude du moment d'une action hamiltonienne ; d'autre part donner une démonstration nouvelle, plus directement inspirée par l'intuition géométrique que les démonstrations connues, des théorèmes de convexité du moment d'Atiyah-Guillemin-Sternberg-Kirwan [A] [G-S]₁ [G-S]₂ [K].

L'idée de base de la première partie est la suivante : la dualité symplectique permet à la fois de faire correspondre à un feuilletage symplectiquement complet au sens de P. Libermann [Lib]₁ un feuilletage orthogonal, et d'associer à l'action hamiltonienne d'un groupe de Lie un moment au sens de J.M. Souriau [So]. Une théorie générale du moment, englobant ces deux situations comme cas particuliers, devra rendre compte de la correspondance établie par dualité symplectique entre certains types de feuilletages singuliers de P. Stefan [St] et H.. Süssmann [Su] et certaines Γ -structures de A. Haefliger [H]. C'est ce qui nous amène à introduire la notion de Γ -structure Poissonienne ; une telle structure est le moment généralisé d'un feuilletage de P. Stefan "symplectiquement complet". On montre que les deux cas particuliers évoqués rentrent bien dans ce cadre ; en fait, plus généralement, toute action symplectique d'un groupe de Lie admet en ce sens un moment généralisé. Par un procédé élémentaire de "développement de Darboux", on définit pour une telle action symplectique un moment réduit, à valeurs dans un cylindre muni d'une structure de Poisson affine ; il semble que l'étude de ces différentes notions puisse conduire à quelques problèmes intéressants.

En ce qui concerne les théorèmes de convexité du moment, on traite d'abord le cas des tores à partir de l'idée suivante : la description élémentaire des modèles locaux conduit immédiatement à un résultat de convexité locale ; si \mathbb{T}^k agit de manière hamiltonienne sur (M, σ) , on en déduit facilement que l'espace \hat{M} des composantes connexes des préimages des points par le moment $J : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ a une structure naturelle de variété affine plate à bords et coins affines localement convexe au voisinage du bord. L'appli-

cation factorisée $\hat{J} : \hat{M} \rightarrow \mathbb{R}^k$ étale cette variété sur son image, et la convexité de $J(M)$ résulte de l'existence de géodésiques dans \hat{M} pour la métrique relevée de celle de \mathbb{R}^k .

Dans le cas de l'action hamiltonienne $G \times M \rightarrow M$ d'un groupe de Lie compact, de moment $J : M \rightarrow \underline{\mathfrak{g}}^*$, on considère le sous-espace $\underline{\mathfrak{t}}^*$ de $\underline{\mathfrak{g}}^*$ défini par un tore maximal T , et on note $\underline{\mathfrak{t}}^*_+$ une chambre de Weyl fermée. Soit s l'ensemble des points de $J(M) \cap \underline{\mathfrak{t}}^*_+$ dont l'orbite coadjointe a la plus grande dimension possible. Suivant essentiellement l'idée de V. Guillemin-S. Sternberg [G-S]₂, on considère la sous-variété symplectique $S = J^{-1}(s)$, munie de l'action induite du tore T , et le moment correspondant $J_S : S \rightarrow \underline{\mathfrak{t}}^*$. Comme J_S est propre, la méthode précédente s'applique encore et démontre la convexité de $J_S(S)$. Comme l'adhérence de $J_S(S)$ est $J(M) \cap \underline{\mathfrak{t}}^*_+$, on en déduit le théorème de F. Kirwan [K].

Dans tout ce qui suit, (M, σ) est une variété symplectique connexe de dimension $2n$. La différentiabilité est entendue au sens C^∞ . Pour éviter les confusions, nous dirons qu'une action $G \times M \rightarrow M$ symplectique est fortement hamiltonienne si elle admet un moment Ad^* -équivariant.

Nous remercions J.P. Dufour qui a participé activement à la mise au point de la démonstration des théorèmes de convexité, et tous les membres du "Séminaire Sud-Rhodanien" qui ont suivi avec une bienveillante attention les étapes de notre travail.

I. DUALITE SYMPLECTIQUE ET MOMENT GENERALISE

I.1. Notion de Γ -structure Poissonienne

Soient (T, Δ_T) une variété de Poisson de dimension q , voir A. Lichnerowicz [Lic] et A. Weinstein [W], et Γ_T le pseudogroupe de ses difféomorphismes locaux respectant le tenseur Δ_T ; on notera $\{ , \}_T$ le crochet de Poisson sur $C^\infty(T)$.

Une Γ -structure Poissonienne sur la variété symplectique (M, σ) , modélée sur (T, Δ_T) sera définie par la donnée

(i) d'une famille $(U_i, f_i)_{i \in I}$, où $(U_i)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de M , et où pour tout $i \in I$, $f_i : U_i \rightarrow T$ est un morphisme de Poisson,
(ii) pour tout couple $(i, j) \in I^2$ tel que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, d'un élément $\gamma_{ij} \in \Gamma_T$ tel que $f_i(x) = \gamma_{ij}(f_j(x))$ pour $x \in U_i \cap U_j$, les éléments γ_{ij} étant astreints à la condition de cocycle $\gamma_{ik} = \gamma_{ij} \circ \gamma_{jk}$.

Exemples [1] Soit \mathcal{F} un feuilletage de codimension q sur M ,

symplectiquement complet au sens de P. Libermann. [On appellera ces feuilletages "feuilletages de Libermann". Sur une transversale totale T au feuilletage [c'est-à-dire une sous-variété immergée de dimension q , généralement non connexe, rencontrant transversalement toutes les feuilles], le crochet de Poisson des intégrales premières locales de \mathcal{F} définit un tenseur de Poisson Δ_T . Les applications distinguées locales de M dans T définies par glissement le long des feuilles permettent de considérer le feuilletage comme une Γ -structure Poissonienne régulière [les morphismes locaux f_i étant de rang constant q] modélée sur (T, Δ_T) .

[2] Soient G un groupe de Lie connexe, et $G \times M \rightarrow M$ une action symplectique de ce groupe sur (M, σ) . Pour tout élément X de l'algèbre de Lie \underline{g} de G , on note X_M le champ fondamental correspondant, défini par

$$X_M(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(-tX).x.$$

Soit $\underline{g}' = [\underline{g}, \underline{g}]$ l'algèbre de Lie dérivée. On sait que, si $X \in \underline{g}'$, X_M est globalement hamiltonien, ce qui permet de définir [à translation près] un moment dérivé :

$$(1) \quad J' : M \rightarrow \underline{g}'^*$$

tel que, pour tout $X \in \underline{g}'$, la fonction $x \rightarrow \langle J(x), X \rangle$ admette X_M comme champ hamiltonien.

On considère un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de M tel que les U_i et les $U_i \cap U_j$ soient contractiles. Pour $i \in I$, l'action infinitésimale de G dans U_i admet les moments locaux. On choisit un moment local $J_i : U_i \rightarrow \underline{g}'^*$ de manière que le diagramme suivant commute :

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} U_i & \xrightarrow{J_i} & \underline{\underline{g^*}} \\ \parallel & & \downarrow \pi \\ U_i & \xrightarrow{J'} & \underline{\underline{g'^*}} \end{array}$$

où π est la projection canonique.

Si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, la connexité de cette intersection entraîne qu'il existe $\mu_{i,j} \in \underline{\underline{g^*}}$ tel que $J_i = J_j + \mu_{i,j}$. Si on note $\underline{\underline{g'^{\perp}}}$ l'annulateur de $\underline{\underline{g'}}$ dans $\underline{\underline{g^*}}$, la suite exacte

$$(3) \quad 0 \longrightarrow \underline{\underline{g'^{\perp}}} \longrightarrow \underline{\underline{g^*}} \xrightarrow{\pi'} \underline{\underline{g'^*}} \longrightarrow 0$$

montre que $\mu_{i,j} \in \underline{\underline{g'^{\perp}}}$.

On sait, voir P. Libermann - C. Marle [Lib-M] qu'il existe, pour i donné, une unique structure de Poisson affine Δ_i sur $\underline{\underline{g^*}}$ telle que J_i soit un morphisme de Poisson. Le crochet correspondant sur les fonctions linéaires définies par les éléments de $\underline{\underline{g}}$ est donné par :

$$(4) \quad \{X, Y\}_i = [X, Y] + \Theta_i(X, Y)$$

où Θ_i est un 2-cocycle réel sur $\underline{\underline{g}}$.

Proposition 1. Sous les hypothèses précédentes, $\Theta_i = \Theta_j$, quels que soient $i, j \in I$. Si l'on munit $\underline{\underline{g^*}}$ de la structure de Poisson affine $\Delta = \Delta_i$, la famille $(U_i, J_i, \mu_{i,j})$ détermine sur (M, σ) une Γ -structure Poissonienne modelée sur $(\underline{\underline{g^*}}, \Delta)$.

Preuve : Compte tenu de la connexité de M , pour prouver la première assertion il suffit de prouver que $\Theta_i = \Theta_j$, si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$.

Dans ce cas, on sait que $\Theta_i(X, Y) = \Theta_j(X, Y) + \langle \mu_{i,j}, [X, Y] \rangle$, et le résultat se déduit de la proposition $\mu_{i,j} \in \underline{\underline{g'^{\perp}}}$.

Ceci étant, les J_i sont des morphismes de Poisson, et les translations par les $\mu_{i,j}$ des morphismes de Poisson. -/-

[3] Soit \mathfrak{A} une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Poisson $(C^\infty(M), \{ \cdot, \cdot \})$.

Nous supposons que, quelles que soient $f, g \in \mathfrak{A}$, on ait $\{f, g\} = 0$. On note \mathfrak{A}^* l'algèbre de Lie abélienne des champs de vecteurs hamiltoniens X_f associés aux éléments de \mathfrak{A} . On fait alors les hypothèses suivantes :

(i) toutes les orbites de \mathfrak{A}^* sont compactes

(ii) quel que soit $x_0 \in M$, l'action naturelle de \mathfrak{A}^* sur le fibré $B(V_{x_0})$ des repères transverses à l'orbite de x_0 a pour orbites des tores

de dimension $n = \frac{1}{2} \dim M$.

Il est facile de voir, cf [D-M], que ces hypothèses signifient qu'il existe dans un voisinage tubulaire de l'orbite de x_0 des fonctions f_1, \dots, f_n appartenant à \mathfrak{A} , et qui satisfont aux hypothèses du théorème d'Eliasson [E]. Les orbites génériques de \mathfrak{A}^* sont alors nécessairement de dimension n , et il en résulte que dans le voisinage tubulaire considéré f_1, \dots, f_n engendrent fonctionnellement \mathfrak{A} .

Dans un tel voisinage tubulaire V_{x_0} , toutes les fonctions de \mathfrak{A} s'exprimeront donc différentiellement à l'aide des coordonnées d'action fournies par le théorème d'Eliasson. Or une propriété essentielle de ces coordonnées - y compris dans le cas singulier - est qu'elles sont définies de façon canonique, à une transformation affine près de \mathbb{R}^n dont la partie linéaire est une matrice à coefficients entiers.

Notons :

$$F_{x_0} = V_{x_0} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

l'application ayant pour composantes les coordonnées d'action. Si

$V_{x_0} \cap V_{x_1} \neq \emptyset$, il existera donc une unique transformation affine :

$$\gamma_{x_0 x_1} \in GL(n, \mathbb{Z}) \times \mathbb{R}^n$$

telle que $F_{x_0} = \gamma_{x_0 x_1} \circ F_{x_1}$.

La collection $(V_{x_0}, F_{x_0}, \gamma_{x_0 x_1})_{x_0, x_1 \in M}$ définira une Γ -structure Poissonienne sur M qui sera dite associée à l'algèbre de fonctions donnée \mathfrak{A} . Ici, T est \mathbb{R}^n muni de la structure de Poisson triviale. On observera que dans ce cas on peut restreindre Γ_T au pseudogroupe γ_T engendré par le groupe affine $GL(n, \mathbb{Z}) \times \mathbb{R}^n$. On notera également que \mathfrak{A} engendre une algèbre maximale $\hat{\mathfrak{A}}$ ayant les mêmes propriétés, et qui est déterminée par la Γ -structure Poissonienne.

L'étude géométrique globale d'une telle structure - par exemple si M est compacte - est un problème intéressant, qui généralise les

situations étudiées par Duistermatt [Du] et Dazord-Delzant [D-D].

I.2. Feuilletage singulier orthogonal à une Γ -structure Poissonienne

Notons Φ la Γ -structure Poissonienne modelée sur (T, Λ_T) , définie sur (M, σ) par la famille $(U_i, f_i, \gamma_{ij})_{i,j \in I}$. Au besoin en remplaçant le recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ de M par un recouvrement plus fin, on peut supposer que, pour tout $i \in I$, l'image $f_i(U_i)$ est contenue dans le domaine d'une carte locale $\varphi_i : \Omega_i \rightarrow \Omega'_i \subset \mathbb{R}^n$ de T .

Notons alors $f_{i.1}, \dots, f_{i.q}$ les composantes de f_i dans la carte φ_i , et $X_{i.1}, \dots, X_{i.q}$ les champs hamiltoniens respectivement associés à ces fonctions.

Pour $x \in U_i$, soit P_x l'élément de contact engendré par $X_{i.1}(x), \dots, X_{i.q}(x)$. On vérifie alors facilement :

(i) que P_x ne dépend ni de la carte locale φ_i , ni de l'indice i :

Le premier point résulte de ce que, si $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $f = g(f_{i.1}, \dots, f_{i.q})$, alors en tout point x de U_i la différentielle df_x appartient à l'espace engendré par $df_{i.1x}, \dots, df_{i.qx}$, donc $X_f(x) \in P_x$.

Le second point se déduit de même de la condition $f_j = \gamma_{ij} \circ f_i$.

(ii) que le champ d'éléments de contact P [de dimension variable] ainsi défini sur M est différentiable, c.a.d. engendré localement par des champs de vecteurs différentiables ; c'est clair sur la définition..

(iii) que P est en involution, c.a.d. que le crochet de deux champs de vecteurs différentiables locaux $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ tangents à P en chaque point, est encore tangent à P . Il suffit en effet de le vérifier dans le domaine $U_i \cap U_j$ pour tout $i, j \in I$. On se ramène ainsi au cas où $U = U_i$. On observe alors en premier lieu que si $\varphi = f_i^* g$, et si X_φ est le champ hamiltonien associé, le groupe à un paramètre local (ϕ_t) de X_φ au voisinage de x_0 dans U_i laisse invariant le champ d'éléments de contact P : comme en effet f_i est un morphisme de Poisson, ϕ_t est projetable par f_i suivant le flot local (Φ_t) de X_g dans T . On a donc $f_i \circ \phi_t = \Phi_t \circ f_i$. Pour $p = 1, \dots, q$ on a donc $\phi_t^* f_{i.p} = \Phi_t^p \circ f_{i.p}$, où $\Phi_t = (\Phi_t^1, \dots, \Phi_t^q)$. Il en résulte que le

difféomorphisme local ϕ_1 respecte l'anneau des fonctions f_1 -projetables, et par suite [comme il est symplectique] l'algèbre des champs hamiltoniens correspondants, donc le champ d'éléments P engendré par ces hamiltoniens.

On en déduit en particulier que, pour $p = 1, \dots, q$, le crochet de $X_{1..p}$ avec un champ de vecteurs tangent à P dans U_1 est encore tangent à P . Revenons alors à $X, Y \in \mathfrak{X}(U_1)$, tangents à P . On pourra écrire, pour $x_0 \in U_1$ fixé :

$$X = \sum_p g_p X_{1..p} + X'$$

$$Y = \sum_p h_p X_{1..p} + Y'$$

où $X', Y' \in \mathfrak{X}(U_1)$ sont tangents à P et s'annulent en x_0 . Ceci donne $[X', Y'](x_0) = 0$, d'où $[X, Y](x_0) \in P_{x_0}$.

Rappelons qu'un feuilletage de P. Stefan - H. Sussmann [Su] [nous disons simplement "feuilletage singulier"] de M est une partition \mathfrak{F} de M en sous-variétés immergées connexes telle que le module des champs de vecteurs tangents à ces sous-variétés [les "feuilles"] est transitif sur chacune d'elles. On sait [St] qu'un tel feuilletage est caractérisé par la propriété suivante : ses feuilles sont [localement] les orbites d'une algèbre de Lie \mathfrak{L} de champs de vecteurs locaux ayant la propriété que l'exponentielle de l'un de ces champs laisse invariant le champ d'éléments de contact engendré par \mathfrak{L} .

Ici, dans U_1 , on considère l'algèbre de Lie des champs hamiltoniens de la forme X_ψ , où $\psi = f_1^* g$. Ce qui précède montre alors que P est le champ d'éléments tangent à un feuilletage singulier. On a donc prouvé :

Proposition 2 : P est le champ d'éléments de contact tangent aux feuilles d'un feuilletage sigulier [au sens de P. Stefan - H. Sussmann] \mathfrak{F} sur M .

Le feuilletage singulier \mathfrak{F} a la propriété d'être localement défini par les orbites d'une algèbre de Lie de champs hamiltoniens locaux. En fait, on voit que \mathfrak{F} a des propriétés un peu plus précises, les "bases

locales" de l'algèbre de Lie de champs hamiltoniens locaux qui engendrent \mathcal{F} étant astreintes à des relations de cohérence strictes.

S'inspirant de la terminologie utilisée dans le cas régulier, on dira que \mathcal{F} est un feuilletage singulier symplectiquement complet [ou de Libermann] sur (M, σ) . Ce sera par définition le feuilletage singulier orthogonal à la Γ -structure Poissonienne Φ , et on notera $\mathcal{F} = \Phi^\sigma$.

Exemples. [1] Dans le cas de la Γ -structure Poissonienne Φ définie par un feuilletage symplectiquement complet régulier, Φ^σ est simplement le feuilletage orthogonal. On obtient alors une "paire duale" au sens de A. Weinstein [W].

[2] Dans le cas où Φ est la Γ -structure Poissonienne $(U_1, J_1, \mu_{1,1})$ définie à partir de l'action symplectique $G \times M \rightarrow M$ d'un groupe de Lie connexe, Φ^σ est le feuilletage singulier défini par les orbites de G .

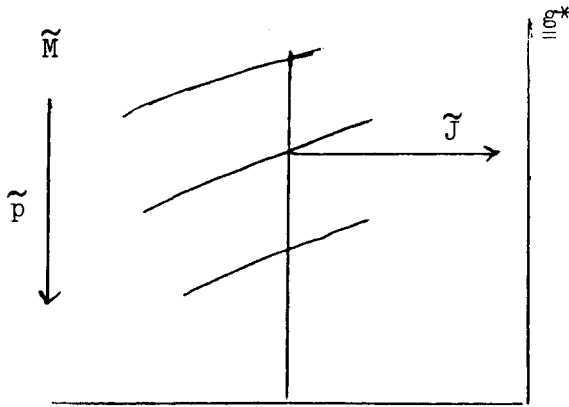
[3] Si \mathcal{H} est une algèbre abélienne de fonctions sur M vérifiant en tout point les hypothèses du théorème d'"action-angles avec singularités", et Φ la Γ -structure Poissonienne associée, alors Φ^σ est le feuilletage singulier défini par les tores, orbites de $\mathcal{H}^\#$.

Compte tenu de ces exemples, si $\mathcal{F} = \Phi^\sigma$, on dira que la Γ -structure Poissonienne Φ est un moment généralisé pour le feuilletage singulier [symplectiquement complet] \mathcal{F} .

I.3. Le moment généralisé d'une action symplectique

On reprend les notations de I.1, exemple [3], $G \times M \rightarrow M$ étant l'action symplectique d'un groupe de Lie connexe.

I.3.1. Développement de Darboux et moment réduit



Pour $X \in \mathfrak{g}$, $i_{X_M} \sigma$ est une 1-forme fermée sur M . On définit alors sur M une 1-forme fermée α_J à valeurs dans \mathfrak{g}^* en posant :

$$(5) \quad \langle \alpha_J, X \rangle = i_{X_M} \sigma \quad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Sur le produit cartésien $M \times \mathfrak{g}^*$, considéré comme \mathfrak{g}^* -fibré principal de base M , α_J est une forme de

connexion sans courbure. Notons \tilde{M}

une nappe d'holonomie de cette connexion, $\tilde{p} : \tilde{M} \rightarrow M$ et $\tilde{J} : \tilde{M} \rightarrow \mathfrak{g}^*$ les projections naturelles. L'action est hamiltonienne si, et seulement si, α_J est sans holonomie.

Le groupe structural \mathcal{H} de la fibration $\tilde{p} : \tilde{M} \rightarrow M$ est le groupe d'holonomie de la connexion α_J . On peut également l'interpréter comme le groupe des périodes de la 1-forme fermée [vectorielle] α_J . Son adhérence dans \mathfrak{g}^* est une sous-groupe fermé

$$(6) \quad \mathcal{H} = k^* \quad \text{de} \quad \mathfrak{g}^*.$$

Le quotient $C = \mathfrak{g}^*/k^*$ est donc un cylindre. L'application $\tilde{J} : \tilde{M} \rightarrow \mathfrak{g}^*$ se factorise en une application $J_r : M \rightarrow C$ rendant commutatif le diagramme

$$(7) \quad \begin{array}{ccc} \tilde{M} & \xrightarrow{\tilde{J}} & \mathfrak{g}^* \\ \tilde{p} \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{J_r} & C \end{array}$$

où $\pi : \mathfrak{g}^* \rightarrow C$ est la projection naturelle.

L'action infinitésimale de \mathfrak{g} sur M se relève en une action infinitésimale sur \tilde{M} . De même, σ se relève en une forme symplectique $\tilde{\sigma} = \tilde{p}^* \sigma$ sur

sur \tilde{M} . Ceci étant, il est clair que l'action infinitésimale relevée de $\underline{\mathfrak{g}}$ sur $(\tilde{M}, \tilde{\sigma})$ est hamiltonienne et admet \tilde{J} comme moment.

Observons également que, si U_1 est un ouvert simplement connexe de M , \tilde{p} admet une section s_1 dans U_1 , et que $J_1 = \tilde{J} \circ s_1$ est un moment local dans U_1 pour l'action de G ; plus généralement, les graphes des moments locaux de l'action sont des sous-variétés de $M \times \underline{\mathfrak{g}}^*$ horizontales pour α_j .

En composant \tilde{J} et la projection naturelle $\pi' : \underline{\mathfrak{g}}^* \rightarrow \underline{\mathfrak{g}}'^*$, on obtient un moment dérivé $\tilde{J}' : \tilde{M} \rightarrow \underline{\mathfrak{g}}'^*$. Le fait que l'action infinitésimale de $\underline{\mathfrak{g}}'$ sur M admette des moments globaux entraîne alors que l'on a un diagramme commutatif :

$$(8) \quad \begin{array}{ccc} \tilde{M} & \xrightarrow{\tilde{J}} & \underline{\mathfrak{g}}^* \\ \tilde{p} \downarrow & \tilde{J}' & \downarrow \pi' \\ M & \xrightarrow{J'} & \underline{\mathfrak{g}}'^* \end{array}$$

où $J' : M \rightarrow \underline{\mathfrak{g}}'^*$ est un moment dérivé. Comme on l'a vu en I.1. [2], J' définit une structure de Poisson Δ sur $\underline{\mathfrak{g}}'^*$; bien entendu, \tilde{J}' définira la même structure de Poisson, pour laquelle \tilde{J} sera un morphisme de Poisson.

Proposition 3. Il existe sur le cylindre C une unique structure de Poisson Δ_C pour laquelle $\pi : (\underline{\mathfrak{g}}^*, \Delta) \rightarrow (C, \Delta_C)$ est un morphisme de Poisson. Si l'on munit C de cette structure, J_r est un morphisme de Poisson.

Preuve : Le diagramme (8) entraîne que l'image α'_j de la connexion α_j par le morphisme de fibrés principaux $M \times \underline{\mathfrak{g}}^* \rightarrow M \times \underline{\mathfrak{g}}'^*$ est sans holonomie. Ou encore que le groupe d'holonomie \mathcal{H} de α_j est contenu dans le noyau de π' , c.a.d. dans l'annulateur $\underline{\mathfrak{g}}'^{\perp}$ de $\underline{\mathfrak{g}}'$. On en déduit :

(9)

$$\underline{k^*} \subset \underline{g'^*}$$

Mais il en résulte que $\underline{k^*}$, en tant que groupe de translations de $\underline{g^*}$, est formé d'automorphismes de la structure de Poisson Λ . Ceci entraîne l'existence de la structure de Poisson cherchée sur C , et la seconde assertion de la proposition résulte alors de la commutativité de (7). -/-

On notera Λ_C le tenseur de Poisson ainsi défini sur le cylindre C . Le morphisme de Poisson $J_r : M \rightarrow C$ sera dit moment réduit de l'action symplectique $G \times M \rightarrow M$.

Remarques : 1. Si l'on remplace \tilde{M} par une autre nappe d'holonomie \tilde{M}_1 de la connexion α_j , ceci ne change pas le cylindre $C = \underline{g^*}/\underline{k^*}$, car l'holonomie \mathcal{H} est la même en tout point de $M \times \underline{g^*}$, le groupe structural étant abélien. Mais le tenseur Λ_C n'est plus le même. En fait, Λ_C ne dépend que du moment dérivé J' obtenu par factorisation à partir de $\tilde{J}' : \tilde{M} \rightarrow \underline{g'^*}$. Bien entendu, toutes les structures de Poisson introduites sur C se déduisent l'une de l'autre par une transformation de C définie à partir d'une translation de $\underline{g^*}$.

2. On a vu que le choix de la nappe \tilde{M} fixe le moment dérivé $J' : M \rightarrow \underline{g'^*}$, donc détermine d'après I.1, [2] une Γ -structure Poissonienne Φ sur (M, σ) , modelée sur $(\underline{g^*}, \Lambda)$. Ceci étant, le pull-back $\tilde{\Phi}$ de cette Γ -structure sur $(\tilde{M}, \tilde{\sigma})$ est la Γ -structure Poissonienne "simple" définie par le morphisme de Poisson global \tilde{J} .

I.3.2. Moment généralisé et moment réduit

La remarque 2 ci-dessus souligne l'analogie de notre construction avec le "développement de Darboux" d'un feuilletage de Lie, voir [F]. Ceci justifie la terminologie suivante : nous dirons que la Γ -structure Poissonienne simple définie par \tilde{J} sur $(\tilde{M}, \tilde{\sigma})$ est un développement de Darboux de la Γ -structure Poissonienne Φ déterminée sur (M, σ) par l'action symplectique $G \times M \rightarrow M$, et par le choix du moment dérivé $J' : M \rightarrow \underline{g'^*}$.

Ceci étant, le moment réduit $J_r : M \rightarrow C$ apparaît comme la factorisation la plus fine possible du moment généralisé en un morphisme de Poisson global [c.a.d. en une Γ -structure Poissonienne simple].

L'étude géométrique du moment réduit se présente alors comme le cadre naturel d'une éventuelle généralisation pour les propriétés du type "convexité du moment". On observera en particulier que C est une variété plate, et Λ_C une structure de Poisson affine pour cette variété.

Naturellement, si G est un tore, le tenseur Λ_C est nul.

I.3.3. Cas des actions localement fortement hamiltoniennes.

Choisissons un moment dérivé $J' : M \rightarrow \underline{\mathfrak{g}^*}$ pour l'action symplectique $G \times M \rightarrow M$. Quels que soient, $X, Y \in \underline{\mathfrak{g}}$, on notera pour simplifier

$f_{[X,Y]} \in C^0(M)$ la fonction définie par :

$$(10) \quad f_{[X,Y]}(x) = \langle J'(x), [X,Y] \rangle.$$

Posons alors

$$(11) \quad \mu(X,Y)_x = \sigma(X_M(x), Y_M(x)) - f_{[X,Y]}(x) \quad \forall x \in M, X, Y, \in \underline{\mathfrak{g}}.$$

Proposition 4. Si M est connexe, $\mu(X,Y)_x$ est indépendant de x ; la correspondance $(X,Y) \mapsto \mu(X,Y)$ définit alors un 2-cocycle sur $\underline{\mathfrak{g}}$, et la classe de cohomologie correspondante $[\mu] \in H^2(\underline{\mathfrak{g}}, \mathbb{R})$ est l'obstruction à l'existence de moments locaux Ad^* -équivariants.

Preuve : Si U est un ouvert simplement connexe de M , on peut prolonger dans U le moment dérivé J' en un moment local $J_U : U \rightarrow \underline{\mathfrak{g}^*}$. On sait alors, cf. P. Libermann - C. Marle [Lib-M] que $\mu(X,Y)_x = \{f_X(x), f_Y(x)\} - f_{[X,Y]}(x)$ est constant dans U , et que la classe de cohomologie $[\mu]$ est alors l'obstruction à l'existence dans U d'un moment local Ad^* -équivariant. D'où le résultat. - / -

Si $[\mu] = 0$, on dira que l'action $G \times M \rightarrow M$ est localement fortement hamiltonienne. On remarque qu'on aura alors automatiquement des moments

globaux Ad^* -équivariants pour l'action infinitésimale de \mathfrak{g}' sur M .

Ceci étant, si $G \times M \rightarrow M$ est localement fortement hamiltonienne, on pourra choisir le développement de Darboux $\tilde{J} : \tilde{M} \rightarrow \mathfrak{g}^*$ de manière qu'il soit lui-même Ad^* -équivariant. Le moment réduit $J_r : \tilde{M} \rightarrow C$ sera alors équivariant pour l'action de \mathfrak{g} sur C obtenue à partir de l'action coadjointe par la projection $\mathfrak{g}^* \rightarrow C$.

Exemple : Si G est le tore \mathbb{T}^k , on a $\mu(X, Y) = \sigma(X_M(x), Y_M(x))$, et dans ce cas $[\mu] = 0$ si, et seulement si, $\sigma(X_M(x), Y_M(x)) = 0$ quels que soient $x \in M$, $X, Y \in \mathbb{R}^k = \mathfrak{t}^k$.

Ceci entraîne en particulier que le moment réduit $J_r : M \rightarrow C = \mathbb{R}^k / k^*$ est constant sur chaque orbite de l'action.

II. THEOREMES DE CONVEXITE

Dans la suite nous préciserons au fur et à mesure des besoins les hypothèses faites sur la variété symplectique (M, σ) .

II.1. Cas des actions de tore ; Théorème d'Atiyah-Guillemin-Sternberg.

Ici $G = \mathbb{T}^k$. L'action $G \times M \rightarrow M$ est supposée fortement hamiltonienne, de moment $J : M \rightarrow \mathfrak{g}^* = \mathbb{R}^k$. Donc l'image par J d'une orbite est réduite à un point. On suppose l'action effective.

On utilisera une métrique riemannienne g invariante par l'action.

II.1.1. Modèle local de l'action.

Soit $x_0 \in M$; on note $G.x_0$ son orbite et G_{x_0} son groupe d'isotropie. Ce dernier est compact et sa composante connexe de l'élément neutre $G_{x_0}^0$ est

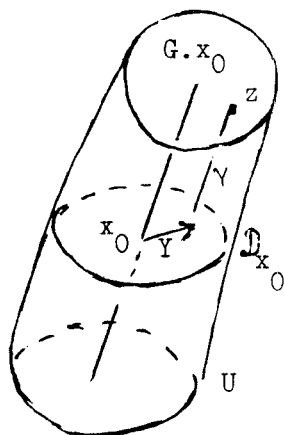
donc un tore de dimension ℓ . On sait qu'un tel sous-groupe est toujours facteur direct. Autrement dit, par un automorphisme de \mathbb{T}^k défini à partir d'une matrice à coefficients entiers, on peut identifier G à $\mathbb{T}^{\ell} \times \mathbb{T}^{\ell'}$ avec $G_{x_0}^0 = \mathbb{T}^{\ell}$. On remarque que cet automorphisme du tore revient en ce qui concerne le moment à composer J avec une matrice entière opérant sur \mathbb{R}^k . Modulo ce changement de base, on s'est donc ramené au cas où $G_{x_0}^0 = \mathbb{T}^{\ell}$. On introduira le groupe fini :

$$(12) \quad \Gamma = G_{x_0} \cap \mathbb{T}^{\ell'}$$

et on paramétrera $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}^{\ell} \times \mathbb{T}^{\ell'}$ par les angles $(\alpha^1, \dots, \alpha^{\ell}, \beta^1, \dots, \beta^{\ell'})$.

□ Cas où G_{x_0} est connexe, c.a.d. $\Gamma = \{e\}$.

L'orbite $G.x_0$ s'identifie à $G/G_{x_0} = \mathbb{T}^{\ell}$.



Soit U un voisinage tubulaire de $G.x_0$, défini comme l'ensemble des points dont la distance à $G.x_0$ est $< \rho$. U est saturé d'orbites. C'est l'image par l'exponentielle dans les directions perpendiculaires à $G.x_0$ du fibré en boules de rayon ρ dans le fibré γ normal à l'orbite.

En particulier, si $\pi = U \rightarrow G.x_0$ est la projection orthogonale, la fibre en x_0 , $D_{x_0} = \pi^{-1}(x_0)$, est

l'image par \exp_{x_0} du disque $D_{x_0}(0, \rho)$ de rayon ρ dans la fibre γ_{x_0} du fibré normal.

Considérons l'application :

$$(13) \quad \phi : \mathbb{T}^{\ell'} \times D_{x_0}(0, \rho) \rightarrow U$$

définie par

$$(14) \quad \phi(\gamma, Y_{x_0}) = \gamma \cdot \exp_{x_0} Y_{x_0}.$$

Cette application est un difféomorphisme, l'application inverse étant obtenue de la façon suivante : si $z \in U$ et $x = \pi(y)$, il existe un unique $\gamma \in \mathbb{T}^{\ell'}$ [dépendant différemment de x , donc de z] tel que $\gamma x_0 = x$. On

aura alors $\gamma^{-1}z \in \mathbb{T}_{x_0}^{\ell}$, d'où $\gamma^{-1}z = \exp_{x_0} Y_{x_0}$, et $\phi^{-1}(z) = (\gamma, Y_{x_0})$.

Observons maintenant que $G_{x_0} = \mathbb{T}^{\ell}$ opère linéairement, via la différentielle en x_0 , sur la fibre γ_{x_0} ; on notera $\rho_{x_0} : \mathbb{T}^{\ell} \rightarrow O(\gamma_{x_0})$ la représentation ainsi obtenue de \mathbb{T}^{ℓ} dans le groupe des rotations de γ_{x_0} . En identifiant par ϕ^{-1} le voisinage U à $\mathbb{T}^{\ell'} \times D_{x_0}(0, \rho)$ muni des coordonnées $(\theta^1, \dots, \theta^{\ell'}, y^1, \dots, y^{2n-\ell'})$, l'action de $G = \mathbb{T}^{\ell} \times \mathbb{T}^{\ell'}$ sur U sera alors donnée par :

$$(15) \quad (\alpha, \beta)(\theta, y) = (\theta + \beta, \rho_{x_0}(\alpha) \cdot y)$$

Comme l'action de G est effective et isométrique, elle est localement effective et ρ_{x_0} est injectif.

Etudions maintenant l'expression de σ dans les coordonnées (θ, y) .

Comme les $\frac{\partial}{\partial \theta^j}$ sont des champs hamiltoniens, $d\left(i \frac{\partial}{\partial \theta^j} \sigma\right) = 0$. De plus les

orbites de $\mathbb{T}^{\ell'}$ sont isotropes, d'où

$$\sigma = \sum_{j,s} \lambda_{j,s}(\theta, y) d\theta^j \wedge dy^s + \sum_{s,t} \mu_{s,t}(\theta, y) dy^s \wedge dy^t.$$

Comme $i \frac{\partial}{\partial \theta^j} \sigma$ est fermée, les $\lambda_{j,s}$ ne dépendent pas de θ ; comme $d\sigma = 0$, les

$\mu_{s,t}$ sont alors affines en θ ; mais comme les θ^j sont angulaires, les $\mu_{s,t}$ ne dépendent pas de θ , d'où

$$(16) \quad \sigma = \sum_{j,s} \lambda_{j,s}(y) d\theta^j \wedge dy^s + \sum_{s,t} \mu_{s,t}(y) dy^s \wedge dy^t.$$

On pose alors

$$(17) \quad \sigma_0 = \sum_{j,s} \lambda_{j,s}(0) d\theta^j \wedge dy^s + \sum_{s,t} \mu_{s,t}(0) dy^s \wedge dy^t.$$

On observe que σ_0 est, comme σ , invariante par G . La forme $\sigma - \sigma_0$, étant fermée et nulle sur $G \cdot x_0$, a une primitive nulle sur $G \cdot x_0$, soit η . En moyennant η sous l'action de G , on peut d'ailleurs supposer cette primi-

tive invariante par G . Par la méthode classique du chemin, on pose $\sigma_t = \sigma_0 + t(\sigma - \sigma_0)$ et on remarque que σ_t est de rang $2n$ sur $G.x_0$ pour tout t ; au besoin en rapetissant U [c.a.d. ρ] on peut supposer que σ_t reste de rang $2n$ dans U pour $t \in [0,1]$.

Soit alors X_t le champ de vecteurs dépendant du temps défini par

$$i_{X_t} \sigma_t = -\eta.$$

Il est nul le long de $G.x_0$ et G -invariant. Son flot φ_t sera encore défini [au besoin en rapetissant U] sur $U \times [0,1]$. On aura alors

$$\frac{d}{dt} \varphi_t^* \sigma_t = \varphi_t^* \left(\mathcal{L}_{X_t} \sigma_t + \frac{d\sigma_t}{dt} \right) = 0$$

d'où $\varphi_1^* \sigma = \sigma_0$. A l'aide de φ_1 on établit donc une transformation canonique G -équivariante qui échange σ et σ_0 . On s'est ainsi ramené au cas où

$$(18) \quad \sigma = \sum_{j,s} \lambda_{j,s} d\theta^j \wedge dy^s + \sum_{s,t} \mu_{s,t} dy^s \wedge dy^t \quad \text{avec } \lambda_{j,s}, \mu_{s,t} \text{ constantes.}$$

Par un changement linéaire sur les y , on se ramène à $\lambda_{j,s} = \delta_s^j$, et les nouvelles coordonnées $y^1, \dots, y^{\ell'}$ sont alors G -invariantes. Mettant σ sous la forme

$$\sigma = \sum_{j=1}^{\ell'} \left[d\theta^j + \sum_{k'} \gamma_{k'}^j dy^{k'} \right] \wedge dy^j + \sum_{s,t > \ell'} \mu_{s,t}' dy^s \wedge dy^t$$

on voit que les deux termes du second membre sont G -invariants; il en est donc de même de chacun des crochets. En changeant l'origine des coordonnées

angulaires, on peut donc se ramener à $\sigma = \sum_{j=1}^{\ell'} d\theta^j \wedge dy^j + \sum_{s,t > \ell'} \mu_{s,t}' dy^s \wedge dy^t$.

Par un changement linéaire sur $y^{\ell'+1}, \dots, y^{2n-\ell'}$, on peut mettre le second terme sous forme canonique; si l'on veut, on appellera $q^1, \dots, q^{n-\ell'}, p^1, \dots, p^{n-\ell'}$ les coordonnées introduites de façon que

$$(19) \quad \sigma = \sum_{j=1}^{\ell'} d\theta^j \wedge dy^j + \sum_{s=1}^{n-\ell'} dq^s \wedge dp^s$$

L'action de G sur U est de la forme suivante :

$$(20) \quad (\alpha, \beta)(\theta, \gamma, (q, p)) = (\theta + \beta, \gamma, \rho(\alpha)(q, p))$$

où $\rho : \mathbb{T}^\ell \rightarrow SP(n-\ell', \mathbb{R})$. Par conjugaison, on peut d'ailleurs supposer que le tore de dimension ℓ image de ρ est contenu dans $\mathbb{T}^{n-\ell'}$. Les générateurs infinitésimaux de l'action de $G_{x_0} = \mathbb{T}^\ell$ seront donc des combinaisons à coefficients entiers

$$(21) \quad \xi_i = \sum_{s=1}^{n-\ell'} n_s^i \left(p^s \frac{\partial}{\partial q^s} - q^s \frac{\partial}{\partial p^s} \right) \quad \text{pour } i = 1, \dots, \ell$$

d'où les composantes correspondantes [à constante additive près] du moment :

$$(22) \quad J^1(\theta, \gamma, (p, q)) = \sum_{s=1}^{n-\ell'} n_s^1 \frac{\|z^s\|^2}{2} \quad \text{avec } z^s = q^s + \sqrt{-1} p^s.$$

Finalement, l'expression du moment dans les coordonnées (θ, γ, z) est [à constantes près] :

$$(23) \quad J(\theta^1, \dots, \theta^{\ell'}, \gamma^1, \dots, \gamma^{\ell'}, z^1, \dots, z^{n-\ell'}) = \\ = \left(\sum_{s=1}^{n-\ell'} n_s^1 \frac{\|z^s\|^2}{2}, \dots, \sum_{s=1}^{n-\ell'} n_s^{\ell'} \frac{\|z^s\|^2}{2}, \gamma^1, \dots, \gamma^{\ell'} \right).$$

On restreindra l'ouvert U à un ouvert de la forme

$$\mathbb{T}^{\ell'} \times D^{\ell'}(0, r) \times D^{2(n-\ell')}(0, r).$$

On rappelle qu'en réalité, pour trouver le moment, on aura à composer l'application (23) et une transformation affine de \mathbb{R}^k , dont la partie linéaire [à coefficients entiers] correspond à l'identification de G_{x_0} avec \mathbb{T}^ℓ , la translation étant la translation dans \mathbb{R}^k de vecteur $\mu = J(x_0)$.

□ Cas où G_{x_0} n'est pas connexe

L'orbite $G.x_0$ s'identifie alors à $\mathbb{T}^{\ell'}/\Gamma$. Comme dans le premier cas, on considère un voisinage tubulaire U de rayon ρ de l'orbite, et on note $\mathbb{D}_{x_0} = \pi^{-1}(x_0)$ la fibre en x_0 de ce voisinage. Notons alors :

$$\tilde{U} = \mathbb{T}^{\ell'} \times \mathbb{D}_{x_0}$$

et définissons l'application

$$(24) \quad \tilde{p} : \tilde{U} \rightarrow U$$

par $\tilde{p}(\gamma, y) = \gamma.y$. Alors \tilde{p} est un revêtement galoisien de groupe Γ . Si $\tilde{p}^*\sigma = \tilde{\sigma}$, $(\tilde{U}, \tilde{\sigma})$ est symplectique, et l'action de G sur U se relève sur \tilde{U} en une action fortement hamiltonienne de moment $\tilde{J} = J \circ \tilde{p}$. On pourra utiliser pour \tilde{J} le modèle précédent, sous la forme (23).

II.1.2. Convexité locale du moment

Lenne de convexité locale : pour tout $x_0 \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x_0 saturé d'orbites, et un cône convexe polytopique fermé

$[\text{CCPF}] C_{\mu}^{x_0}$ dans \mathbb{R}^k , de sommet $\mu = J(x_0)$, tels que :

- (i) $J(U)$ est un voisinage ouvert de μ dans $C_{\mu}^{x_0}$ pour la topologie induite par celle de \mathbb{R}^k
- (ii) $J : U \rightarrow C_{\mu}^{x_0}$ est ouverte
- (iii) Les préimages des points de $J(U)$ par $J : U \rightarrow J(U)$ sont connexes.

Preuve : - Supposons d'abord G_{x_0} connexe. On utilise alors le modèle précédent dans l'ouvert $U = \mathbb{T}^{\ell'} \times D^{\ell'}(0, r) \times D^{2(n-\ell')}(0, r)$. L'application moment se factorise dans U en la correspondance

$$(\theta, y, z) \xrightarrow{J_1} (y, |z^1|^2, \dots, |z^{n-\ell'}|^2) \xrightarrow{P} \left(y, \sum_s^{n_1} \frac{|z^s|^2}{2}, \dots, \sum_s^{n_{\ell'}} \frac{|z^s|^2}{2} \right)$$

suivie d'une transformation affine $A_{\mu}^{x_0}$ de \mathbb{R}^k , définie par la translation de vecteur $\mu = J(x_0)$ et une matrice à coefficients entiers.

Soient C_0 l'image par J_1 de $\mathbb{T}^{\ell'} \times \mathbb{R}^{2n-\ell'}$, $C_0^{x_0}$ l'image de C_0 par P , et $C_{\mu}^{x_0}$ l'image de $C_0^{x_0}$ par $A_{\mu}^{x_0}$. Ce sont des cones convexes polytopiques fermés, respectivement dans \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^k . Il est clair que $J(U) \subset C_{\mu}^{x_0}$.

Comme J_1 et P ont visiblement la propriété de "retroconnexité" (iii), il en est de même pour J .

Reste à prouver (ii), qui implique (i). Il est immédiat de voir que $J_1 : \mathbb{T}^{\ell'} \times \mathbb{R}^{2n-\ell'} \rightarrow C_0^{x_0}$ est ouverte. Il faut donc prouver que $P : C_0^{x_0} \rightarrow C_{\mu}^{x_0}$ est ouverte. On commence par le vérifier au sommet de $C_0^{x_0}$ [il suffit d'utiliser la convexité] ; si $m \in C_0^{x_0}$ est un autre point, on observe qu'il existe un voisinage de m dans $C_0^{x_0}$ qui est aussi voisinage de m dans le CCPF de sommet m obtenu en balayant C_0 par des demi-droites issues de m ; d'où le résultat.

- Si maintenant G_{x_0} n'est pas convexe, on applique le lemme à $\tilde{J} = J \circ \tilde{p}$ dans le Γ -revêtement \tilde{U} du voisinage tubulaire U , en utilisant le fait que l'image continue d'une partie connexe est connexe. -/-

On remarquera que le cone convexe $C_{\mu}^{x_0}$ est entièrement déterminé par la donnée d'un voisinage du sommet ; par suite, et compte tenu du lemme, $C_{\mu}^{x_0}$ ne dépend que de la composante connexe de $J^{-1}(\mu)$ à laquelle appartient x_0 .

II.1.3. Cas où $J : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ est propre ; la variété \hat{M} .

Supposons J propre, et notons $K = J(M)$.

On définit une relation d'équivalence dans M en décidant que $x \sim y$ si $J(x) = J(y)$ et si x et y appartiennent à une même composante connexe de $J^{-1}(J(x))$. On munit l'ensemble quotient \hat{M} de la topologie quotient et on

note $\phi : M \rightarrow \hat{M}$ la projection. On a une factorisation

$$(25) \quad \begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{J} & K \subset \mathbb{R}^k \\ \downarrow \phi & \nearrow \hat{J} & \\ \hat{M} & & \end{array}$$

L'application J étant propre, pour tout $\mu \in K$ on a $J^{-1}(\mu)$ compact, donc $\hat{J}^{-1}(\mu)$ fini [compte tenu du lemme de convexité]. Pour $x \in M$ et $J(x) = \mu$, on notera $\hat{x} = \phi(x)$, et comme le CCPF C_μ^x ne dépend, on l'a vu, que de \hat{x} , on le notera $\hat{C}_\mu^{\hat{x}}$.

Lemme : Quel que soit $x_0 \in M$, il existe un voisinage ouvert \hat{V} de \hat{x}_0 dans \hat{M} tel que \hat{J} induise un homéomorphisme de \hat{V} sur un ouvert $\hat{J}(\hat{V})$ de $C_\mu^{\hat{x}_0}$, où $\mu = J(x_0)$. De plus, \hat{M} est un espace séparé.

Preuve : On commence par remarquer que, pour tout $x_0 \in M$, les voisinages modèles de l'orbite $G.x_0$ considérés dans le lemme de convexité locale forment un système fondamental de voisinages de l'orbite.

Comme $\hat{x}_0 \subset M$ est un compact saturé d'orbites, on pourra le recouvrir par un nombre fini de tels ouverts "modèles", soit U_1, \dots, U_N . On pourra d'ailleurs imposer à ces ouverts d'être contenus dans un voisinage arbitraire de \hat{x}_0 . Posons alors

$$\hat{\Omega}_\mu^{\hat{x}_0} = \bigcap_{\hat{x}_0 \cap U_i \cap U_j \neq \emptyset} J(U_i \cap U_j)$$

D'après le lemme de convexité locale, $\hat{\Omega}_\mu^{\hat{x}_0}$ sera un voisinage ouvert de μ

dans $C_\mu^{\hat{x}_0}$. Remplaçant pour tout i l'ouvert U_i par $J^{-1}\left(\hat{\Omega}_\mu^{\hat{x}_0}\right) \cap U_i$ et posant

$\mathcal{V}_0 = \bigcup_{i=1}^N U_i$, on a construit un voisinage ouvert de \hat{x}_0 dans M tel que la préimage par J d'un point de $J(\mathcal{V}_0)$ soit connexe. On peut d'ailleurs imposer à \mathcal{V}_0 d'être arbitrairement petit et [en remplaçant $\Omega_{\mu}^{\hat{x}_0}$ par la trace sur $C_{\mu}^{\hat{x}_0}$ d'une boule de centre μ dans \mathbb{R}^k] à $J(\mathcal{V}_0)$ d'être convexe.

Notons maintenant $\hat{x}_0, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_N$, les points de $\hat{J}^{-1}(\mu)$. Pour $i = 0, \dots, N$, on recouvre le compact \hat{x}_i par un voisinage ouvert \mathcal{V}_i du type précédent, de telle sorte que les \mathcal{V}_i soient disjoints.

Il existe un voisinage ouvert Ω de μ dans \mathbb{R}^k tel que $J^{-1}(\Omega) \subset \mathcal{V}_0 \cup \dots \cup \mathcal{V}_N$, car les $J^{-1}(\Omega)$, où Ω est arbitrairement petit, forment un système fondamental de voisinages de $J^{-1}(\mu)$ [J étant propre].

Remplaçant alors, pour tout i , \mathcal{V}_i par $\mathcal{V}_i \cap J^{-1}(\Omega)$, on obtient des ouverts saturés disjoints contenant respectivement $\hat{x}_0, \dots, \hat{x}_N$. Soient $\hat{\mathcal{V}}_0 = \phi(\mathcal{V}_0), \dots, \hat{\mathcal{V}}_N = \phi(\mathcal{V}_N)$. Par construction, $\hat{\mathcal{V}}_0, \dots, \hat{\mathcal{V}}_N$ sont des voisinages ouverts disjoints respectivement de $\hat{x}_0, \dots, \hat{x}_N$, et $\hat{J} : \hat{\mathcal{V}}_i \rightarrow \Omega \cap C_{\mu}^{\hat{x}_0}$ est un homéomorphisme.

Si maintenant $\hat{y} \in \hat{M}$ est distinct de \hat{x}_0 , montrons que \hat{x}_0 et \hat{y} admettent des voisinages disjoints : si $\hat{J}(\hat{x}_0) \neq \hat{J}(\hat{y})$, c'est évident car \hat{J} est continue. Dans le cas contraire, \hat{y} est l'un des points $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_N$, et on a prouvé l'existence de voisinages disjoints. -/-

On va munir maintenant \hat{M} d'une distance \hat{d} compatible avec sa topologie. Pour cela, nous dirons qu'une courbe continue $\hat{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \hat{M}$ est régulière si $\hat{J} \circ \hat{\gamma}$ est continuellement différentiable par morceaux. On posera alors, pour $\hat{x}, \hat{y} \in \hat{M}$:

$$(26) \quad \hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) = \inf \{ \text{longueur } \hat{J} \circ \hat{\gamma} / \hat{\gamma} \text{ courbe régulière joignant } \hat{x} \text{ à } \hat{y} \}.$$

Comme M est connexe par arcs c.d.p.m., \hat{M} est connexe par courbes régulières, et \hat{d} est bien définie. Montrons que c'est une distance : la symétrie et l'inégalité triangulaire résultent immédiatement de la définition. Si maintenant $\hat{d}(\hat{x}_0, \hat{y}_0) = 0$, comme (26) entraîne

$$\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) \geq \|\hat{J}(\hat{x}) - \hat{J}(\hat{y})\|,$$

on aura $\hat{J}(\hat{x}_0) = \hat{J}(\hat{y}_0) = \mu$. Comme dans le lemme précédent, on considère les points $\hat{x}_0 = \hat{x}, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_N$ de $\hat{J}^{-1}(\mu)$, et on construit des voisinages ouverts

disjoints $\hat{V}_0, \dots, \hat{V}_N$, de ces points pour lesquels $\hat{J} : \hat{V}_1 \rightarrow \Omega \cap C_\mu^{\hat{x}_0}$ est un homéomorphisme. Remplaçant Ω par une boule ouverte $B(\mu, \epsilon)$ plus petite de rayon ϵ et de centre μ , on observe que \hat{J} est isométrique en restriction à \hat{V}_1 . Si alors $\hat{\gamma}$ est une courbe régulière joignant $\hat{x} = \hat{x}_0$ à \hat{y}_0 et pour laquelle la longueur de $\hat{J} \circ \hat{\gamma}$ est inférieure à ϵ , $\hat{\gamma}$ sera entièrement tracé dans \hat{V}_0 d'où $\hat{y}_0 = \hat{x}_0$.

Finalement (\hat{M}, \hat{d}) est un espace métrique localement isométrique [via le moment factorisé \hat{J}], au voisinage d'un point $\hat{x}_0 = \phi(x_0)$, à un voisinage ouvert de $\mu = J(x_0)$ dans le CCPF $C_\mu^{\hat{x}_0}$. On peut si l'on veut considérer ces isométries locales comme des cartes sur \hat{M} . Elles définissent un atlas de variété affine plate à bord et coins affines, les changements de carte locaux étant réduits à l'identité.

II.1.4. Cas où M est compacte : le théorème de convexité d'Atiyah-Guillemin-Sternberg.

Théorème I [Atiyah-Guillemin-Sternberg]. Soit $\mathbb{T}^k \times M \rightarrow M$ une action fortement hamiltonienne de \mathbb{T}^k sur (M, σ) , compacte, connexe, de moment $J : M \rightarrow \mathbb{R}^k$; alors $J(M)$ est un polytope convexe fermé dans \mathbb{R}^k . De plus, les préimages des points par J sont connexes.

Démonstration : Elle se ramène essentiellement à la construction classique des géodésiques dans (\hat{M}, \hat{d}) , qui est compact. On considère deux points arbitraires \hat{x}, \hat{y} de \hat{M} , et on pose $d = \hat{d}(\hat{x}, \hat{y})$.

On considère une suite $\hat{\gamma}_n$ de courbes régulières joignant \hat{x} et \hat{y} ,

telles que $\ell(\hat{J} \circ \hat{\gamma}_n) < d + \frac{1}{n}$. Soit $\hat{\gamma}(\frac{1}{2})$ un point d'accumulation de la suite des milieux de ces courbes. On a

$$\hat{d}(\hat{x}, \hat{\gamma}(\frac{1}{2})) = \hat{d}(\hat{\gamma}(\frac{1}{2}), \hat{y}) = \frac{d}{2}.$$

On recommence le procédé pour obtenir $\hat{\gamma}(\frac{1}{4})$ tel que $\hat{d}(\hat{x}, \hat{\gamma}(\frac{1}{4})) = \hat{d}(\hat{\gamma}(\frac{1}{4}), \hat{\gamma}(\frac{1}{2})) = \frac{d}{4}$, de même pour définir $\hat{\gamma}(\frac{3}{4})$ etc... On obtient finalement,

quels que soient p, m avec $0 \leq p \leq 2^m$, un point $\hat{\gamma}(\frac{p}{2^m})$ avec la propriété que

$$\hat{d}(\hat{\gamma}(\frac{p}{2^m}), \hat{\gamma}(\frac{p'}{2^{m'}})) = d \left| \frac{p}{2^m} - \frac{p'}{2^{m'}} \right|, \text{ en prenant } \hat{\gamma}(1) = y.$$

Ceci étant, l'application $\hat{\gamma}$ est définie et Lipschitzienne sur un ensemble dense de $[0,1]$. Elle se prolonge continuellement en $\hat{\gamma}: [0,1] \rightarrow \hat{M}$ vérifiant $\hat{d}(\hat{\gamma}(t), \hat{\gamma}(t')) = d|t-t'|$ quels que soient t et t' .

Localement [dans le domaine d'une carte affine $\hat{J}: \hat{U} \rightarrow \Omega \subset \mathbb{C}_\mu^{x_0}$], l'image de $\hat{\gamma}$ est une géodésique pour la norme euclidienne, donc est affine. par suite $\hat{J} \circ \hat{\gamma}$ est affine.

Ainsi la géodésique $\hat{\gamma}$ se projette suivant le segment $[\mu, \gamma]$, et \hat{J} est globalement isométrique, donc injective. $\hat{J}(\hat{M})$ est convexe, et, comme on le voit dans le domaine d'une carte, sa frontière est réunion de sous-variétés affines, d'où le théorème. -/-

II.2. Cas des groupes compacts ; théorème de F. Kirwan

Ici G est un groupe de Lie compact et connexe, T un tore maximal. On note \underline{t}^* le sous-espace de \underline{g}^* défini par le dual de l'algèbre de Lie de T , via l'isomorphisme entre \underline{g} et \underline{g}^* défini par un produit scalaire Ad_g -invariant.

Si \underline{t}_+^* est une chambre de Weyl fermée dans \underline{t}^* , son intérieur sera noté $\overset{0}{\underline{t}}_+^*$; ses faces, arêtes etc... seront notés \underline{t}_{+i}^* et leur intérieur $\overset{0}{\underline{t}}_{+i}^*$.

On se propose de démontrer :

Théorème II [Kirwan]. Si (M, σ) est une variété symplectique compacte et

connexe, $G \times M \rightarrow M$ une action fortement hamiltonienne de moment $J : M \rightarrow \underline{\mathfrak{g}}^*$, la trace de $J(M)$ sur $\underline{\mathfrak{t}}^*$ est un polytope convexe fermé. De plus, les préimages des points par J sont connexes.

II.2.1. Restriction du moment à une sous-variété T-invariante.

On note Ω_r l'ouvert dense connexe dans M formé des points où la dimension des orbites est maximale, de sorte que $J : \Omega_r \rightarrow \underline{\mathfrak{g}}^*$ est de rang constant.

Soit d'autre part Ω l'ouvert de M formé des points x tels que l'orbite coadjointe de $\mu = J(x)$ ait la plus grande dimension possible.

Lemme 1. Ω est un ouvert dense connexe de M .

Preuve : On montre que $\Omega \cap \Omega_r$ est dense et connexe.

Pour cela, soit $x \in \Omega_r$ avec $J(x) = \mu$. J est, dans un voisinage \mathcal{V} de x , une submersion sur une sous-variété locale $J(\mathcal{V})$ de $\underline{\mathfrak{g}}^*$ saturée de plaques du feuilletage singulier par les orbites coadjointes. Dans $J(\mathcal{V})$, les orbites régulières [pour l'action coadjointe infinitésimale] forment un ouvert dense connexe de $J(\mathcal{V})$. Par préimage, $\Omega \cap \mathcal{V}$ est dense et connexe dans \mathcal{V} , d'où le lemme. -/-

En vertu de ce lemme, $J(\Omega)$ est contenu dans une strate connexe Σ_i de la stratification de $\underline{\mathfrak{g}}^*$ par la dimension des orbites coadjointes. Donc $\underline{\mathfrak{t}}^* \cap J(\Omega)$ est contenu soit dans $\underline{\mathfrak{t}}^*$, soit dans l'intérieur $\underline{\mathfrak{t}}^*_{+1}$ d'une face [éventuellement dégénérée] de la chambre de Weyl fermée.

On écrira, quitte à supprimer si nécessaire l'indice i ,

$$(26) \quad J(\Omega) \cap \underline{\mathfrak{t}}^* \subset \hat{\underline{\mathfrak{t}}^*}_{+1}$$

On aura donc

$$(27) \quad J(M) \cap \underline{\mathfrak{t}}^* = J(\Omega) \cap \underline{\mathfrak{t}}^*_{+1} \subset \underline{\mathfrak{t}}^*_{+1}.$$

Lemme 2. $S = J^{-1}(\underline{t}_{+1}^{\circ})$ est une sous-variété symplectique de (M, σ) invariante par T . Le moment de l'action fortement hamiltonienne induite $T \times S \rightarrow S$ est la restriction $J_S : S \rightarrow \underline{t}^*$ de J à S .

Preuve : Le lemme de transversalité appliqué à $J : \Omega \rightarrow \Sigma_1$ montre que S est une sous-variété de M .

Soient $x \in S$ et $X_x \in T_x S \cap T_x S^\perp$. Le vecteur X_x sera en particulier orthogonal à $\text{Ker } J_{*x}$, donc tangent à l'orbite $G.x$. Comme $T_x(G.x) \cap T_x S = \text{Ker } J_{*x}$, X_x est vertical. La 1-forme duale s'annule alors sur $T_x(G.x)$ et sur $T_x S$, donc est identiquement nulle.

La suite du lemme est évidente. -/-

Finalement, on aura, compte tenu du fait que chaque orbite coadjointe de la strate Σ_1 rencontre $\underline{t}_{+1}^{\circ}$ en un point unique :

$$(28) \quad J_S(S) = J(\Omega) \cap \underline{t}_{+1}^{\circ}$$

II.2.2. Convexité de l'image de J_S

On observe que $J_S : S \rightarrow \underline{t}^*$ est propre. On pourra donc appliquer les résultats II.1.3. Notant (\hat{S}, \hat{d}_S) l'espace des composantes connexes des préimages des points par J_S et $\hat{J}_S : \hat{S} \rightarrow \underline{t}^*$ l'application factorisée, on a vu que \hat{J}_S induit des isométries locales de (\hat{S}, \hat{d}_S) sur des ouverts de CCPF dans \underline{t}^* .

Soit $K_S = J_S(S)$.

Lemme 3. Si $\hat{x}, \hat{y} \in \hat{S}$, avec $\hat{J}(\hat{x}) = \mu$ et $\hat{J}(\hat{y}) = \nu$, alors on a $\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) = \|\mu - \nu\|$ et le segment $[\mu, \nu]$ se relève dans \hat{S} en une courbe régulière joignant \hat{x} à \hat{y} .

Preuve : On sait que \hat{S} est, comme Ω , connexe. On peut joindre \hat{x}

et \hat{y} par une courbe régulière $\hat{\gamma}$. Soit δ la distance de la projection de cette courbe au bord de la face t_{+1}^* .



Enlevant de cette face les points situés à une distance $< \frac{\delta}{2}$ du bord, on obtient un fermé F_δ dont la préimage dans \hat{S} sera compacte [$J^{-1}(F_\delta)$ est elle-même compacte]. Soit

\hat{F}_δ la composante connexe de cette préimage qui contient \hat{x} [et par suite la courbe $\hat{\gamma}$]. Elle est compacte.

Si $\hat{x}_1 \in \hat{F}_\delta$, et $\hat{J}(\hat{x}_1) = \mu_1$ appartient à la frontière de F_δ , soit \hat{V} un voisinage ouvert de \hat{x}_1 dans \hat{S} pour lequel \hat{J}_S induise une carte $\hat{V} \rightarrow C_{\mu_1}^{x_1}$, avec $x_1 \in \hat{x}_1$. On observe que $C_{\mu_1, \delta}^{x_1} = C_{\mu_1}^{x_1} \cap F_\delta$ est encore un CCPF et que \hat{J}_S induit un homéomorphisme de $\hat{V} \cap \hat{F}$ sur $\hat{J}_S(\hat{V}) \cap C_{\mu_1, \delta}^{x_1}$. Il en résulte que \hat{F}_δ a lui-même une structure de variété affine plate à bords et coins affines. La distance \hat{d}_δ sur \hat{F}_δ est donnée par :

$$(29) \quad \hat{d}_\delta(\hat{x}, \hat{y}) = \inf \{ \text{longueur } \hat{J}_S \circ \hat{\gamma} / \hat{\gamma} \text{ courbe régulière dans } \hat{F}_\delta \text{ allant de } \hat{x} \text{ à } \hat{y} \}$$

et, pour cette distance, les cartes locales définies par \hat{J}_S sont des isométries ; bien entendu, \hat{d}_δ coïncide localement avec \hat{d} .

Ceci étant, la démonstration de II.1.4. s'applique sans changement dans $(\hat{F}_\delta, \hat{d}_\delta)$, et donne le résultat. -/-

II.2.3. Fin de la démonstration.

Le lemme 3 entraîne que \hat{J}_S est isométrique [donc injective], et que son image est convexe. En outre, pour $\delta > 0$, $F_\delta \cap \text{Im } \hat{J}_S = \hat{J}_S(\hat{F}_\delta) = K_\delta$ est un polytope convexe compact. Comme

$$J_S(S) = \bigcup_{\delta > 0} K_\delta$$

et

$$J(M) \cap \underline{t^*} = \overline{J_s(S)}$$

on en déduit immédiatement le théorème.

II.2.4. Remarque.

A partir de la démonstration donnée dans le cas des tores.

on peut donner une autre présentation du théorème de F. Kirwan :

composant le moment $J : M \rightarrow \underline{\mathfrak{g}^*}$ avec la projection naturelle $\eta : \underline{\mathfrak{g}^*} \rightarrow \underline{t^*}$ sur la chambre de Weyl fermée considérée comme l'espace des orbites de la coadjointe, on peut faire opérer le tore maximal T sur $(\eta \circ J)^{-1}(\underline{t^*})$, et appliquer le résultat relatif aux tores.

II.3. Problèmes ouverts.

La méthode de démonstration des théorèmes de convexité donnée ci-dessus paraît bien adaptée à l'étude de situations un peu plus générales.

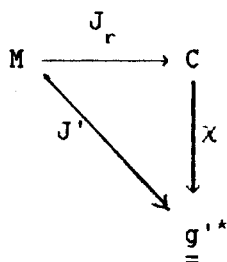
II.3.1. Actions localement fortement hamiltoniennes.

(M, σ) étant compacte et connexe, G compact, on étudiera une action $G \times M \rightarrow M$ localement fortement hamiltonienne, et on s'intéressera à l'image $K = J_r(M)$ du moment réduit défini en I.3.1.

- Si G est un tore, on pourra définir les composantes connexes des préimages des points par les moments locaux. Par analogie avec les feuilletages de Lie, on peut conjecturer que les adhérences de ces composantes connexes sont les préimages des points de C par le moment réduit.

- Dans le cas général, on utilisera le théorème de convexité pour l'image du moment dérivé J' . On a une factorisation naturelle :

(29)



et si T est un tore maximal de G , le sous-espace \underline{t}^* de \underline{g}^* est saturé pour la projection sur C . En fait, C est fibré en cylindres sur \underline{g}'^* , et si \underline{t}'^* est la projection de \underline{t}^* sur \underline{g}'^* , on pourra étudier le moment réduit de l'action de T sur une transversale au-dessus de \underline{t}'^* , ce qui ramène au cas des tores.

II.3.2. Géométrie des systèmes complètement intégrables.

(M, σ) étant toujours compacte et connexe, on reprend la situation décrite en I.1, Exemple [3], de complète intégrabilité généralisée, quand \mathcal{H} est une algèbre d'intégrales premières pour un hamiltonien H .

On définira alors l'espace \hat{M} des orbites de \mathcal{H} et on vérifiera comme ci-dessus qu'il a une structure naturelle de variété affine plate à bords et coins affines localement convexe. Ceci permettrait sans doute de préciser les contraintes topologiques qu'une telle situation impose à la variété M .

BIBLIOGRAPHIE

- [A] M. Atiyah, Convexity and commuting Hamiltonians,
Bull. London Math. Soc., 14 (1982), 1-15.
- [D-D] P. Dazord - T. Delzant, Le problème général des variables
action-angles,
Jour. of Diff. Geometry, 26 (2), (1987), 223-252.
- [D-M] J.P. Dufour - P. Molino, Compactification des actions de \mathbb{R}^n et varia-
bles action-angles à singularités,
Preprint, Montpellier (1987).
- [Du] J.J. Duistermaat, On global action-angle variables,
Comm. on Pure and Applied Math., 33 (1980), 687-706.
- [E] H. Eliasson Hamiltonian systems with Poisson Commuting integrals,
Thèse, Stockholm, (1984).
- [F] E. Fedida, Sur les feuilletages de Lie,
C.R. Ac. Sci., Paris, 272 (1971), 999-1002.
- [G-St]₁ V. Guillemin - S. Sternberg, Convexity properties of the moment
mapping, I,
Invent. Math., 67 (1982), 491-513.
- [G-St]₂ V. Guillemin - S. Sternberg, Convexity properties of the moment
mapping, II,
Invent. Math., 77 (1984), 533-546.
- [H] A. Haeghiger, Structures feuilletées et cohomologie à valeurs dans
un faisceau de groupoïdes,
Comment. Math. Helvet, 32 (1958), 248-329.
- [K] F. Kirwan, Convexity properties of the moment mapping, III,
Invent. Math., 77 (1984), 547-552.

- [Lib]₁ P. Libermann, Sous-variétés et feuilletages symplectiquement réguliers,
in Research Notes in Math. 80, Pitmann (1983).
- [Lib]₂ P. Libermann, Problèmes d'équivalence en géométrie symplectique,
Asterisque, 107-108 (1983), pp. 43-68.
- [Lib-M] P. Libermann - C.M. Marle, Géométrie symplectique, bases de la mécanique,
Publications Math. Université Paris VII (1986).
- [Lic] A. Lichnerowicz, Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées.
Jour. of Dif. Geometry, 12 (1977), 253-300.
- [So] J.M. Souriau, Structure des systèmes dynamiques,
Dunod, Paris (1970)
- [St] P. Stefan, Accessible sets, orbits, and foliations with singularities,
Proc. London Math. Soc., 29 (1974), 699-713.
- [Su] H.J. Sussmann, Orbits of families of vector fields and integrability of distributions,
Trans. Am. Math. Soc., 180 (1973), 171-188.
- [W] A. Weinstein, The local structure of Poisson manifolds,
Journ. of Dif. Geometry, 18 (1983), 523-557.