

R. BERGER

Déformations équivalentes avec des spectres différents

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1987, fascicule 4B
, p. 9-24

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1987__4B_9_0

© Université de Lyon, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DEFORMATIONS EQUIVALENTES AVEC DES SPECTRES DIFFERENTS

R. BERGER

Séminaire de Géométrie (12 décembre 1986)

1. Déformations graduées

NOTATIONS : $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , V est un K -espace vectoriel de base $(z_i)_{i \in I}$, A est l'algèbre symétrique de V , A_t est l'algèbre des séries formelles en l'indéterminée t et à coefficients dans A .

Soit $F : A \times A \rightarrow A_t$ une application K -bilinéaire de la forme (1)

$F = \Pi + F_1 t + F_2 t^2 + \dots$ où Π est le produit de A ; On prolonge F à $A_t \times A_t$ par bilinéarité, puissances de t et par continuité relativement à la topologie t -adique. Si le prolongement est associatif, on dit que F est une déformation de A . On démontre alors que $P_F : A \times A \rightarrow A$ défini par

$$P_F(a,b) = F_1(a,b) - F_1(b,a)$$

est un crochet de Poisson sur A , appelé le crochet de Poisson de F .

Soit $\Phi : A \rightarrow A_t$ une application K -linéaire de la forme (2)

$$\Phi = \text{Id} + \Phi_1 t + \Phi_2 t^2 + \dots$$

On prolonge de la même façon Φ à A_t si bien que Φ devient (à cause de Id) un élément de $GL_K(A_t)$. Il est clair que l'ensemble G des Φ forme un sous-groupe $GL_K(A)$ et G agit par transport de structure sur l'ensemble \mathcal{E} des déformations de A . On choisit l'action à droite suivante :

$$F \cdot \Phi = \Phi^{-1} \cdot F \cdot (\Phi \otimes \Phi)$$

Un résultat fondamental de Gerstenhaber est que deux déformations $(G-)$ équivalentes ont même crochet. On a donc une application canonique de \mathcal{G}/G dans l'ensemble \mathcal{P} des crochets de Poisson de A . Les déformations équivalentes à Π sont dites triviales ; leur crochet est nul.

Nous allons rencontrer uniquement des crochets de Poisson d'un type particulier : les crochets de Lie-Poisson qui sont obtenus par prolongement à A de crochets de Lie sur V ; nous noterons \mathfrak{g}_F l'algèbre de Lie sur V obtenue, et $[\cdot, \cdot]_F$ son crochet.

Une déformation F est dite graduée si $F_i(a,b)$ est un polynôme homogène de degré $p+q-i$ pour tout $i \geq 1$, a homogène de degré p et b homogène de degré q . Il est alors évident que P_F est Lie-Poisson. Un élément Φ de G est dit gradué si $\Phi_i(a)$ est homogène de degré $p-i$ pour tout $i \geq 1$ et a homogène de degré p . Les Φ gradués forment un sous-groupe G^{gr} de G qui agit sur l'ensemble \mathcal{G}^{gr} des F gradués. Nous verrons que l'application canonique \mathcal{G}^{gr}/G^{gr} dans l'ensemble des crochets de Lie-Poisson est surjective, mais non injective en général. À côté du crochet de Poisson, un autre invariant sera nécessaire pour décrire \mathcal{G}^{gr}/G^{gr} .

Quand F et Φ sont gradués, $F(a,b)$ et $\Phi(a)$ sont des polynômes en t , si bien que l'on peut faire $t = 1$ dans (1) et (2). On réalise ainsi \mathcal{G}^{gr} (resp. G^{gr}) comme un ensemble de produits associatifs sur A (resp. un sous-groupe de $GL_K(A)$). On notera \star_F le produit sur A déduit de F et A_F l'algèbre correspondante. La structure de A_F , ainsi que la description de \mathcal{G}^{gr}/G^{gr} , va être fournie par la théorie de Sridharan ("Filtered algebras and representations of Lie algebras", Trans. of AMS, 100, n° 3, (1961)) traduite en termes de déformations.

Fixons F graduée. Notons u_F l'antisymétrisé de la restriction de F_2 à V . Comme pour a, b dans V , on a (3) $[a,b]_F^\star = [a,b]_F + u_F(a,b)$, on voit que u_F est un 2-cocycle pour la cohomologie de l'algèbre de Lie \mathfrak{g}_F à coefficients dans K . On peut donc considérer l'algèbre enveloppante généralisée de Sridharan $U(\mathfrak{g}_F, u_F)$, ainsi que l'isomorphisme de Poincaré-Birkhoff-Witt généralisé $\omega : A \rightarrow \text{gr}(U(\mathfrak{g}_F, u_F))$ qui identifie l'algèbre graduée associée à $U(\mathfrak{g}_F, u_F)$ avec l'algèbre symétrique A .

DEFINITION : Soit $U(\mathfrak{g}, u)$ une algèbre enveloppante de Sridharan, \mathfrak{g} étant une algèbre de Lie d'ensemble sous-jacent V . Une application K -linéaire

$$\Omega : A \rightarrow U(\mathfrak{g}, u) \quad \text{telle que :}$$

a) Ω conserve les filtrations.

b) $\Omega|_V = \text{Id}_V$

c) $\text{gr}(\Omega) = \omega$

est appelée une correspondance de quantification

Une telle correspondance est forcément bijective (puisque ω l'est).

THEOREME 1 -

(i) Etant donnée une déformation graduée F , il existe une seule correspondance de quantification $\Omega_F : A \rightarrow U(\mathfrak{g}_F, u_F)$ qui soit un morphisme d'algèbres de A_F dans $U(\mathfrak{g}_F, u_F)$.

(ii) Etant donnée une correspondance de quantification $\Omega : A \rightarrow U(\mathfrak{g}, u)$, il existe une seule déformation graduée F telle que $\Omega = \Omega_F$.

EXEMPLES - Soit $U(\mathfrak{g}, u)$ une algèbre de Sridharan fixée.

1) Fixons un ordre total sur I . Les applications

$$\Omega_S : z_{i_1} \times \dots \times z_{i_k} \quad (i_1 \leq \dots \leq i_k) \longmapsto z_{i_k} \dots z_{i_1}$$

$$\Omega_{AS} : z_{i_1} \times \dots \times z_{i_k} \quad (i_1 \leq \dots \leq i_j) \longmapsto z_{i_1} \dots z_{i_k}$$

sont des correspondances de quantification et fournissent les déformations standard et antistandard (elles dépendent de la base (z_i) !).

$$2) \text{ La symétrisation } \Omega_W : z_{i_1} \times \dots \times z_{i_k} \longmapsto \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} z_{\sigma(i_1)} \dots z_{\sigma(i_k)}$$

est une correspondance de quantification, appelée correspondance de Weyl et qui donne la déformation dite de Weyl. C'est la seule déformation graduée en correspondance avec $U(\mathfrak{g}, u)$ qui soit telle que les $*$ -puissances d'éléments de V coïncident avec les puissances ordinaires (elle ne dépend pas de la base (z_i) !).

3) Prenons $I = \{1, \dots, 2m\}$, \mathfrak{g} abélienne et u la forme symplectique. La déformation de Weyl dans ce cas est appelée la déformation de Moyal.

THEOREME 2 - Soient F et F' deux déformations graduées. Elles sont (G^{gr}) --équivalentes si et seulement si $\mathfrak{g}_F = \mathfrak{g}_{F'}$, et $u_F \sim u_{F'}$ (modulo $B^2(\mathfrak{g}_F, K)$). Autrement dit, \mathcal{E}^{gr}/G^{gr} est en bijection avec les couples (\mathfrak{g}, C) où \mathfrak{g} est une algèbre de Lie d'ensemble sous-jacent V et C appartient à $H^2(\mathfrak{g}, K)$.

La classe C est l'autre invariant dont nous avons parlé.

La théorie de Sridharan permet aussi d'avoir une idée de la taille des orbites dans \mathcal{E}^{gr}/G^{gr} . En effet :

THEOREME 3 - Soit F graduée et soit G_F^{gr} le stabilisateur de F dans G^{gr} . L'application $\Phi \rightarrow \Phi|_V$ est un isomorphisme de G_F^{gr} sur le groupe additif $H^1(\mathfrak{g}_F, K) = Z^1(\mathfrak{g}_F, K)$.

On notera que u_F n'intervient pas dans le résultat.

EXEMPLE 1 - Si $\dim V = 1$, toutes les déformations graduées de A sont triviales.

EXEMPLE 2 - Soit \mathfrak{g} semi-simple de dimension finie. Toutes les déformations graduées d'invariant \mathfrak{g} sont équivalentes entre elles et sont en bijection avec G^{gr} .

2. Δ -déformations graduées

Soit $\Delta : A \rightarrow A \otimes A$ l'application diagonale. On identifie $A = K[(z_i)]$ et $A \otimes A = K[(x_i, y_i)]$. Alors

$$\Delta(a(z_i)) = a(x_i + y_i).$$

DEFINITION - Une déformation graduée F de A est une Δ -déformation si F est un morphisme de cogèbres de $(A, \Delta) \otimes (A, \Delta)$ dans (A, Δ) .

L'ensemble des $\Phi : A \rightarrow A$ morphisme de cogèbres forme un sous-groupe G^Δ de G^{gr} qui agit sur l'ensemble \mathcal{E}^Δ des Δ -déformations graduées.

THEOREME 4 - Soit F une Δ -déformation graduée. Si a et b sont sans terme constant, $a \underset{F}{*} b$ est sans terme constant. En particulier, $u_F = 0$.

Les théorème 1,2,3 deviennent dans ce cas :

THEOREME 1' - (i) Pour toute Δ -déformation graduée, $\Omega_F : A \rightarrow U(\mathfrak{g}_F)$ est un morphisme de cogèbres de (A, Δ) dans l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g}_F)$ munie de son co-produit usuel.

(ii) Pour toute correspondance de quantification $\Omega : A \rightarrow U(\mathfrak{g})$ morphisme de cogèbres, la déformation F telle que $\Omega = \Omega_F$ est une Δ -déformation.

EXEMPLE - Fixons une algèbre enveloppante $U_{\mathfrak{g}}$. Les déformations standard, antistandard, de Weyl sont des Δ -déformations.

THEOREME 2' - $\mathcal{E}^{\Delta}/G^{\Delta}$ est en bijection avec l'ensemble des crochets de Lie sur V .

THEOREME 3' - Le groupe G^{Δ} opère librement dans \mathcal{E}^{Δ} .

Les lois de groupes formels vont permettre de donner une description plus détaillée de \mathcal{E}^{Δ} et G^{Δ} .

DEFINITION - Une famille $f(x,y) = (f_i(x,y))_{i \in I}$ de séries formelles à coefficients dans K et en les indéterminées

$$x = (x_i)_{i \in I}, y = (y_i)_{i \in I}$$

telle que

$$f(x,0) = x, \quad f(0,y) = y$$

$$f(f(x,y),z) = f(x,f(y,z))$$

s'appelle une loi de groupe formel sur K^I .

THEOREME 5 - Pour toute Δ -déformation graduée F , il existe une seule loi de groupe formel $f(x,y)$ sur K^I telle que :

$$(4) \quad a \underset{F}{*} b(z) = \exp(z \cdot g(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})). \quad a(x) b(y) \Big|_{x=y=z}$$

où $g(x,y) = f(x,y) - x - y$ (partie non linéaire de f).

Réciproquement, pour toute loi de groupe formel sur K^I ; il existe une seule Δ -déformation graduée vérifiant (4).

Dans la formule (4), \exp est une exponentielle portant sur des multi-indices :

$$\exp(z \ g(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}} \frac{z^\alpha}{\alpha!} g^\alpha(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$$

avec $g^\alpha = \prod_{i \in I} g_i^{\alpha_i}$. La notation $g^\alpha(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ signifie que l'on remplace dans

la série formelle g^α les monômes $x^\beta y^\gamma$ par les opérateurs $\frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} \frac{\partial^\gamma}{\partial y^\gamma}$. Une

conséquence immédiate de (4) est que chaque F_k est un opérateur bidifférentiel à coefficients polynômiaux.

EXEMPLE FONDAMENTAL - Fixons \mathfrak{g} et F la déformation de Weyl d'invariants \mathfrak{g} et $u = 0$. Alors la loi de groupe formel associée à F est celle de CAMPBELL-HAUSDORFF (C.H.). Dans le cas où $\dim V$ est finie, C.H. est obtenue comme suit. On identifie \mathfrak{g} à K^n ($n = \dim V$) grâce à la base (z_i) si bien que l'application exponentielle $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ (G groupe de Lie d'algèbre de Lie \mathfrak{g}) permet de définir

$$f(x,y) = \exp^{-1}(\exp(x) \exp(y))$$

pour $x = (x_i)$ et $y = (y_i)$ suffisamment petits ; $f(x,y)$ est la loi de C.H. C'est dans ce cas-là (avec $K = \mathbb{C}$) qu'a été d'abord démontré la formule (4) par Abellanas et Martinez-Alonso.

Passons à la description de G^Δ . Une famille $\varphi(x) = (\varphi_i(x))_{i \in I}$ de séries formelles à coefficients dans K , en les indéterminées $x = (x_i)_{i \in I}$, et sans terme constant, s'appelle un morphisme de loi de groupes formels. Notons $\varphi'(0)$ la matrice $(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(0))_{i \in I}$. Si $\varphi'(0)$ est inversible, alors φ est inversible et

$\varphi^{-1}(f(\varphi(x), \varphi(y)))$ est une loi de groupe formel sur K^I , notée $f.\varphi$.

THEOREME 6 - Pour tout Φ dans G^Δ , il existe un seul morphisme de lois de groupes formels φ sur K^I vérifiant $\varphi'(0) = \text{Id}$ et tel que :

$$(5) \quad \Phi(a)(z) = \exp(z \psi(\frac{\partial}{\partial z})).a(z)$$

où $\psi(z) = \varphi(z) - z$ (partie non linéaire de φ).

Réciproquement, pour tout morphisme de lois de groupes formels φ sur K^I vérifiant $\varphi'(0) = \text{Id}$, il existe un seul Φ dans G^Δ tel que (5) soit valide.

Il est clair que l'égalité $F' = F \cdot \Phi$ se traduit par $f' = f \cdot \varphi$.

REMARQUE - D'après le théorème 3', l'orbite d'un élément F donné de \mathcal{G}^Δ est en bijection avec G^Δ . On vient de voir que G^Δ est en bijection avec l'ensemble de toutes les familles $(\varphi_i(x))_{i \in I}$ de séries formelles qui s'écrivent :

$\varphi_i(x) = x_i +$ (termes de degré ≥ 2). Cela montre "l'énormité" de l'orbite de F .

Dans cette orbite, seules quelques déformations (telles Weyl, standard, anti-standard ; nous verrons d'autres exemples plus loin) sont intéressantes du point de vue physique.

EXEMPLES 1 - Soit l'algèbre de Heisenberg \mathfrak{g} de base q, p, ν . Son crochet vérifie entre autres $[q, p] = \nu$. Posons $z_1 = q, z_2 = p, z_3 = \nu$. Soient g^W, g^S, g^{AS} les parties non linéaires des lois de groupes formels associées à Weyl, standard et antistandard. Alors :

$$g_j^W = g_j^S = g_j^{AS} = 0 \quad \text{pour } j = 1, 2,$$

$$g_3^W = \frac{1}{2} (x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

$$g_S^S = x_1 y_2$$

$$g_3^{AS} = -x_2 y_1.$$

D'autre part, le changement de base $(q, p, \nu) \rightarrow (q + ip, q - ip, \nu)$ transforme S et AS en les déformations normale N et antinormale AN . On trouve

$$g_j^N = g_j^{AN} = 0 \quad \text{pour } j = 1, 2,$$

$$g_3^N = -\frac{i}{4} (x_1 + x_2) (y_1 - y_2)$$

$$g_3^{AN} = \frac{i}{4} (x_1 - x_2) (y_1 + y_2)$$

La formule (4) donne donc :

$$a \underset{W}{*} b(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{v^n}{2^n n!} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{\partial^n a}{\partial q^{n-k} \partial p^k} \frac{\partial^n b}{\partial q^k \partial p^{n-k}} \right)$$

$$a \underset{S}{*} b(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{v^n}{n!} \frac{\partial^n a}{\partial q^n} \frac{\partial^n b}{\partial p^n}$$

$$a \underset{N}{*} b(z) = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{-iv}{4} \right)^n \frac{1}{n!} \left(\sum_{k_1 + \dots + k_4 = n} (-1)^{k_3 + k_4} \binom{n}{k_1 \dots k_4} \frac{\partial^n a}{\partial q^{k_1 + k_3} \partial p^{k_2 + k_4}} \frac{\partial^n b}{\partial q^{k_1 + k_2} \partial p^{k_3 + k_4}} \right)$$

Si on se limite dans ces formules à des polynômes en p et q et si on considère v comme un paramètre, on obtient des déformations (formelles, avec t = v) de K[q,p] qui sont Moyai, standard, normale usuelles. On pourra bien sûr substituer à v un élément de K (par exemple iℵ).

EXEMPLES 2 - Fixons ℱ une algèbre de Lie de dimension finie et G un groupe de Lie d'algèbre de Lie ℱ. Toute carte en l'élément neutre de G fournit une loi de groupe formel et donc une déformation. Par exemple, la carte en 1 du groupe multiplicatif K^x définie par $z \mapsto z^{-1}$ fournit la loi de groupe formel multiplicative :

$$f(x,y) = x + y + xy .$$

La déformation F associée est définie sur K z par :

$$(6) \quad a \underset{F}{*} b(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} \frac{\partial^n a}{\partial z^n} \frac{\partial^n b}{\partial z^n} .$$

Dans le cas des groupes classiques, on peut aussi utiliser la transformation de Cayley. Par exemple, dans le cas de $GL(1, K) = K^\times$, on obtient la loi

$$(7) \quad f(x, y) = \frac{x + y}{1 + xy} .$$

D'où :

$$a \underset{\mathbb{F}}{*} b(z) = ab + z [-(\partial_a^2 \partial_b + \partial_a \partial_b^2) + (\partial_a^3 \partial_b^2 + \partial_a^2 \partial_b^3) - \dots] \\ + \frac{z^2}{2} [(\partial_a^4 \partial_b^2 + 2\partial_a^3 \partial_b^3 + \partial_a^2 \partial_b^4) - \dots] + \dots$$

Dans le cas où G est algébrique, des déformations algébriques peuvent être définies. Supposons que G soit un sous-groupe de $GL(n, K)$. Le produit de $GL(n, K)$ définit par dualité un coproduit sur l'algèbre des fonctions régulières sur $GL(n, K)$, donc aussi sur G . On en déduit un coproduit sur l'algèbre obtenue à partir de la précédente par localisation et complétion en l'élément neutre. Cette dernière s'identifie à une algèbre de séries formelles dès que l'on choisit des paramètres uniformisants en l'élément neutre. Cette identification faite, le coproduit devient une loi de groupe formel.

Par exemple, pour $G = SO(2)$ et pour un choix "simple" du paramètre uniformisant, on obtient

$$(8) \quad f(x, y) = x \sqrt{1-y^2} + y \sqrt{1-x^2} .$$

D'où :

$$a \underset{\mathbb{F}}{*} b(z) = ab + z [-\frac{1}{2} (\partial_a^2 \partial_b + \partial_a \partial_b^2) - \frac{1}{8} (\partial_a^4 \partial_b + \partial_a \partial_b^4) + \dots] \\ + \frac{z^2}{2} [\frac{1}{4} (\partial_a^4 \partial_b^2 + 2\partial_a^3 \partial_b^3 + \partial_a^2 \partial_b^4) + \dots] + \dots$$

3. Calcul de spectres au sens des déformations. (cf. Bayen et al. , Deformation theory and quantization, Ann. of Physics III, 1978).

Soient \mathfrak{g} une algèbre de Lie complexe de dimension n et ρ une représentation de \mathfrak{g} dans un espace de Hilbert E formée d'opérateurs auto-adjoints non nécessairement bornés. On prolonge naturellement ρ à $U\mathfrak{g}$. Soit $\Omega : S\mathfrak{g} \longrightarrow U\mathfrak{g}$ une correspondance de quantification de déformation associée F . Nous noterons $H \longmapsto \hat{H}$ l'application $\rho.\Omega$. Elle transforme $\frac{*}{F}$ (resp. $[,]_F^*$) en la composée (resp. le crochet) des opérateurs.

La base (z_i) de \mathfrak{g} étant toujours fixée, on peut considérer les éléments de $S\mathfrak{g}$ comme fonctions polynomiales définies sur \mathbb{R}^n et à valeurs complexes (les coefficients étant complexes). Supposons que la déformation F se prolonge à une algèbre \mathcal{F} de fonctions ou distributions définies sur \mathbb{R}^n . De tels prolongements sont possibles dans le cas des Δ -déformations, cas où la formule (4) se révèle très utile.

Nous supposons aussi que l'application $\hat{\cdot}$ se prolonge à \mathcal{F} .

Soit H un élément de \mathcal{F} . Définissons l'exponentielle déformée :

$$(9) \quad u(t) = \text{Exp}(it H) = \sum_{k \in \mathbf{N}} \frac{(it)^k}{k!} H^{*k} .$$

Nous supposons qu'elle a un sens dans \mathcal{F} pour tout réel t . Il lui correspond l'opérateur :

$$(10) \quad \hat{u}(t) = \exp(it \hat{H}) = \sum_{k \in \mathbf{N}} \frac{(it)^k}{k!} \hat{H}^k .$$

On définit ainsi une représentation unitaire \hat{u} de \mathbb{R} dans E . On peut alors considérer la décomposition spectrale de \hat{u} :

$$(11) \quad \hat{u}(t) = \int_{\Lambda} e^{it\lambda} \hat{u}_{\lambda} d\mu(\lambda)$$

à laquelle correspond la décomposition de Fourier de la fonction (ou distribution) $u(t)$:

$$(12) \quad u(t) = \int_{\Lambda} e^{it\lambda} u_{\lambda} d\mu(\lambda).$$

La théorie des déformations ramène donc le calcul du spectre Λ de H qui en termes d'opérateurs se fait grâce à (11), à celui de la décomposition de Fourier usuelle (12). Notons aussi que l'équation de Schrödinger

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = i \hat{H} \hat{u}$$

devient une e.d.p (u est une fonction de t et de z) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i H^*_{\mathbb{F}} u .$$

Dans le cas où la représentation \hat{u} est périodique, la décomposition (11) devient discrète :

$$(11)' \quad \hat{u}(t) = \sum_{\lambda \in \Lambda} e^{it\lambda} \hat{u}_{\lambda} ,$$

et (12) devient une série de Fourier :

$$(12)' \quad u(t) = \sum_{\lambda \in \Lambda} e^{it\lambda} u_{\lambda} .$$

Les propriétés usuelles des projecteurs \hat{u}_{λ} entraînent :

$$(13) \quad u_{\lambda} * u_{\lambda'} = \delta_{\lambda}^{\lambda'} u_{\lambda}$$

$$(14) \quad \sum_{\lambda \in \Lambda} u_{\lambda} = 1$$

$$(15) \quad H^{*k} = \sum_{\lambda \in \Lambda} \lambda^k u_{\lambda}$$

$$(16) \quad H * u_{\lambda} = \lambda u_{\lambda} .$$

La relation (16) montre que la détermination intrinsèque (i.e. sans utiliser de représentations) du spectre discret Λ passe par la recherche des valeurs propres et vecteurs propres de l'opérateur $u \mapsto H^* u$.

La relation (15) a une interprétation probabiliste. En effet, soit $z \in \mathbb{R}^n$ tel que tous les $u_{\lambda}(z)$ soient des réels > 0 . L'égalité (14) signifie que $(u_{\lambda}(z))_{\lambda}$ est une loi discrète de probabilité et (15) signifie que $H^{*k}(z)$ est le moment (non centré)

d'ordre k de cette loi ; en particulier, sa moyenne est $H(z)$. On a bien sûr une interprétation analogue dans le cas continu.

Une situation remarquable est celle où les H^{*k} sont des polynômes en H et où le produit $*$ de deux fonctions de H est une fonction de H . On obtient ainsi une déformation F_H de l'algèbre de polynômes $\mathbb{C}[H]$ en une indéterminée, déformation qui se prolonge à une algèbre \mathcal{F}_H de fonctions (ou distributions) d'une variable. Quels que soient F et H , toutes ces déformations F_H sont équivalentes (et même triviales) ; cf. l'exemple 1 qui suit le théorème 3. Mais bien sûr, les spectres seront différents ; certains seront continus, d'autres discrets. Le premier exemple de déformations équivalentes à spectres différents a été donné par M. Cahen et S. Gutt (J.G.P., Vol. I, n° 2, 1984) qui avaient d'ailleurs noté que le fait n'est pas surprenant ; il est même plutôt trivial au vu de notre exposé.

Si on se pose le problème de rechercher le spectre d'un opérateur donné L sur E , on a intérêt pour faire un calcul intrinsèque à choisir une correspondance de quantification Ω pour laquelle on soit dans la situation remarquable ci-dessus (H étant tel que $\hat{H} = L$). Evidemment, si H' est tel que $\hat{H}' = L$ pour une autre correspondance Ω' , les spectres de H et de H' sont identiques.

Dans les trois exemples qui suivent, \mathfrak{g} est l'algèbre de Heisenberg de base q, p, v (exemples 1 après le théorème 6). L'application

$$v \rightarrow i \quad (\text{multiplication par } i)$$

$$q \rightarrow x \quad (\text{multiplication par } x)$$

$$p \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial x}$$

définit une représentation ρ de \mathfrak{g} dans $E = L^2(\mathbb{R})$. C'est l'infinitésimale de la représentation de Schrödinger.

EXEMPLE 1 - Il est traité dans l'article collectif cité plus haut. On prend

$$H = \frac{1}{2} (p^2 + q^2) \text{ et pour } \Omega \text{ la correspondance de Weyl, si bien que } \hat{H} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^2 \right).$$

La représentation \hat{u} est alors de période 4π (cf. Guillemin-Sternberg : Symplectic techniques in physics, I, 12). Son spectre est $\Lambda = \left\{ n + \frac{1}{2} ; n \in \mathbb{N} \right\}$.

Si $\lambda = n + \frac{1}{2}$, le projecteur \hat{u}_λ de $L^2(\mathbb{R})$ est :

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k H_k(x) e^{-x^2/2} \longrightarrow \alpha_n H_n(x) e^{-x^2/2} .$$

où H_n est le n-ième polynôme d'Hermite.

Déterminons u_λ , ce qui permettra d'avoir la décomposition en série de Fourier de la distribution périodique $u(t)$.

Ici, la déformation F est la déformation de Weyl. Il est aisé de vérifier que si a et b sont deux fonctions de H , $a * b$ est une fonction de H . En particulier, si v est une fonction de H , on a :

$$(17) \quad H * v = H v + \frac{v}{4} \frac{dv}{dH} + \frac{v^2}{4} H \frac{d^2 v}{dH^2} .$$

La déformation F_H de $\mathbb{C}[H]$ est entièrement définie par la suite des polynômes

$P_n = H^{*n}$ (polynômes en H) :

$$(18) \quad \begin{cases} P_0 = 1 \\ P_{n+1} = H P_n + \frac{v}{4} P'_n + \frac{v^2}{4} H P''_n \end{cases} .$$

C'est une déformation graduée, mais ce n'est pas une Δ -déformation (parce que P_2 a un terme constant non nul). Pour simplifier, nous prendrons $v = i$ dans ce qui suit .

L'équation $H * v = \lambda v$, $\lambda = n + \frac{1}{2}$, est ici

$$H v'' + v' + 4(n + \frac{1}{2} - H)v = 0 .$$

Il est bien connu que la fonction

$$v_\lambda = 2(-1)^n e^{-2H} L_n(4H)$$

(L_n polynôme de Laguerre) en est une solution. Les constantes $2(-1)^n$ sont choisies pour que $\sum v_\lambda = 1$. Il est alors immédiat que le coefficient Q_k de $\frac{(it)^k}{k!}$ dans $\sum e^{it\lambda} v_\lambda$ vérifie la relation de récurrence (18), et donc $Q_k = P_k$. On en déduit que $v_\lambda = u_\lambda$.

Finalement, on obtient

$$u(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} 2(-1)^n e^{-2H} L_n(4H) e^{it(n + \frac{1}{2})} .$$

REMARQUE - Si on prend pour Ω la correspondance standard ou antistandard avec le même H , on a le même \hat{H} . Mais dans ces cas les puissances H^{*k} ne sont pas des fonctions de H seulement.

Dans les deux exemples suivants, on va faire des calculs intrinsèques, sans utiliser les représentations.

EXEMPLE 2 - On prend $H = qp$ et F est la déformation standard. Il est immédiat que si a et b sont des fonctions de H , $a * b$ est la fonction de H donnée par :

$$(19) \quad a * b = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\nu^k}{k!} H^k \frac{\partial^k a}{\partial H^k} \frac{\partial^k b}{\partial H^k} .$$

Comparant avec (6), on voit que pour $\nu = 1$ (ce que nous supposons désormais) la déformation F_H est la Δ -déformation multiplicative. On a ainsi une interprétation physique de cette déformation multiplicative.

La déformation F_H est déterminée par les polynômes $P_n = H^{*n}$ qui vérifient ici :

$$(20) \quad \begin{cases} P_0 = 1 \\ P_{n+1} = H(P_n + P'_n) . \end{cases}$$

L'équation $H * v = \lambda v$ a pour solutions $v = CH^\lambda e^{-H}$. Les reportant dans $v * v = v$, on constate que forcément λ est un entier naturel et que $C = \frac{1}{\lambda!}$. On vérifie alors l'égalité :

$$(21) \quad u(t) = \sum_{\lambda \in \mathbb{N}} \left(\frac{H^\lambda}{\lambda!} e^{-H} \right) e^{i\lambda t}$$

de la même façon que dans l'exemple 1 : le coefficient Q_n de $\frac{(it)^n}{n!}$ dans le second membre vérifie (20).

Le développement (21) montre que le spectre de H est \mathbf{N} et que, du point de vue probabiliste, $(u_\lambda(H))_\lambda$ est la loi de Poisson de moyenne H. On notera aussi que (21) s'écrit :

$$u(t) = e^{H(e^{it}-1)}$$

EXEMPLE 3 - On prend $H = q$ et pour F la déformation normale. Si a et b sont des fonctions de H, $a * b$ est la fonction de H suivante :

$$(22) \quad a * b = \sum_{k \in \mathbf{N}} \left(-\frac{i\nu}{4}\right)^k \frac{1}{k!} \frac{\partial^k a}{\partial H^k} \cdot \frac{\partial^k b}{\partial H^k} .$$

Pour simplifier, on pose $\nu = 4i$. La déformation F_H est graduée mais n'est pas une Δ -déformation. Elle est déterminée par les $P_n = H^{*n}$ qui satisfont à

$$(23) \quad \begin{cases} P_0 = 1 \\ P_{n+1} = HP_n + P'_n \end{cases} .$$

L'équation $H * v = \lambda v$ a pour solutions $v = C e^{-\frac{H^2}{2} + \lambda H}$. Mais on constate aisément que $v * v = v$ est impossible, donc le spectre de H n'est pas discret.

Choisissons $C = \frac{e^{-\frac{\lambda^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$ de façon que la solution $v_\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\lambda-H)^2}{2}}$

correspondante satisfasse l'intégrale de Gauss :

$$(24) \quad \int_{\mathbf{R}} v_\lambda d\lambda = 1.$$

Dans $\int_{\mathbf{R}} v_\lambda e^{i\lambda t} d\lambda$, le coefficient Q_n de $\frac{(it)^n}{n!}$ vaut $Q_n = \int_{\mathbf{R}} \lambda^n v_\lambda d\lambda$,

et vérifie la relation de récurrence $Q_{n+1} = HQ_n + Q'_n$. La relation (24) assure donc

que $Q_n = P_n$, d'où $v_\lambda = u_\lambda$.

On obtient

$$(25) \quad u(t) = \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\lambda-H)^2}{2}} e^{i\lambda t} d\lambda .$$

Ainsi, le spectre de H est \mathbf{R} et $(u_\lambda(H))_\lambda$ est la loi de Laplace-Gauss de moyenne H et d'écart-type 1. En calculant la transformée de Fourier du second membre de (25)

on trouve :

$$u(t) = e^{-\frac{t^2}{2} + i t H} .$$