

M. MIZONY

**Algèbres de noyaux sur des espaces symétriques de $SL(2, \mathbb{R})$ et $SL(3, \mathbb{R})$
et fonctions de Jacobi de première et deuxième espèces**

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1987, fascicule 3A
« Algèbres de noyaux sur des espaces symétriques de $SL(2, \mathbb{R})$ et $SL(3, \mathbb{R})$ et fonctions de
Jacobi de première et de deuxième espèces », , p. 1-50

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1987__3A_A1_0

© Université de Lyon, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**ALGÈBRES DE NOYAUX SUR DES ESPACES SYMÉTRIQUES
DE $SL(2, \mathbb{R})$ ET $SL(3, \mathbb{R})$ ET FONCTIONS DE JACOBI
DE PREMIÈRE ET DEUXIÈME ESPÈCES**

par **M. MIZONY**

Résumé : Une interprétation géométrique de la formule du produit pour les fonctions de Jacobi de première et deuxième espèces d'indices complexes quelconques est donnée à partir du groupe de Lorentz $SO_0(1,2)$ et des groupes $SL(3, \mathbb{R})$ et $SU(2,1)$. C'est une généralisation de l'analyse harmonique sphérique qui est ainsi proposée, via l'utilisation d'algèbres de noyaux sur des espaces symétriques.

Introduction. Beaucoup de familles de fonctions spéciales définies sur \mathbb{R} vérifient une formule de produit. C'est le cas par exemple des fonctions de Jacobi (de 1ère et 2ème espèces), des fonctions de Bessel, de Hankel, etc. ...

Soit $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \varphi_\alpha(\lambda, t)$, où $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{C}$ et où α est un multiindice, une telle famille. Cette formule du produit a la forme

$$(0) \quad \varphi_\alpha(\lambda, t_1) \varphi_\alpha(\lambda, t_2) = \int_{\mathbb{R}_+} K_\alpha(t_1, t_2, t) \varphi_\alpha(\lambda, t) \omega_\alpha(t) dt \quad \text{pour } \lambda \in \Lambda,$$

$t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$, où $K_\alpha(t_1, t_2, t)$ est un noyau symétrique en t_1, t_2, t ne dépendant pas de $\lambda \in \Lambda$ et où $\omega_\alpha(t)dt$ est une mesure sur \mathbb{R}_+ .

Cette formule signifie que les fonctions $t \mapsto \varphi_\alpha(\lambda, t)$, pour α fixé, $\lambda \in \Lambda$, sont des caractères d'une algèbre de convolution commutative sur \mathbb{R}_+ , où pour deux bonnes fonctions f_1 et f_2 , le produit $*_\alpha$ est défini pour $t \in \mathbb{R}_+$ par

$$f_1 *_\alpha f_2(t) = \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} K_\alpha(t_1, t_2, t) f_1(t_1) f_2(t_2) \omega_\alpha(t_1) \omega_\alpha(t_2) dt_1 dt_2.$$

Soit, pour α fixé, la transformation intégrale \mathcal{F}_α définie par $\mathcal{F}_\alpha(f)(\lambda) = \int_{\mathbb{R}_+} f(t) \varphi_\alpha(\lambda, t) \omega_\alpha(t) dt$, alors la formule du produit (0) signifie également que le produit de convolution est transformé par \mathcal{F}_α en produit ordinaire sur Λ : $\mathcal{F}_\alpha(f_1 *_\alpha f_2) = \mathcal{F}_\alpha(f_1) \mathcal{F}_\alpha(f_2)$.

Afin de situer notre travail, faisons un rapide bilan sur les fonctions de Jacobi, dans la lignée de la problématique bien illustrée par N.J. Vilenkin [13], qui consiste à interpréter les fonctions spéciales dans le cadre de la théorie des groupes de Lie. Pour les fonctions de Jacobi de 1ère espèce et pour certaines valeurs du multi-indice α , on a en particulier une interprétation en termes de fonctions sphériques sur les groupes de Lie semi-simples non compacts de rang 1. Le point complet est fait par T. Koornwinder [8]. Cette réalisation permet de démontrer simplement la formule du produit et les propriétés de la transformation de Fourier-Jacobi qui est la transformation intégrale associée.

Pour les fonctions de Jacobi de 2ème espèce une interprétation en termes de distributions, en utilisant des espaces pseudo-riemanniens symétriques a été donnée ; cette réalisation ne permet cependant ni d'interpréter, ni de démontrer la formule du produit, ni d'étudier la transformation de Laplace-Jacobi associée.

Les fonctions de Legendre de 2ème espèce (cas particulier des fonctions de Jacobi) ont été interprétées à l'aide d'un semi-groupe ouvert du groupe de Lorentz, et la formule du produit a été ainsi simplement démontrée (cf. M. Mizony [11]). D'autre part, J. Faraut [4], [5], en introduisant la notion d'algèbre de Volterra (algèbre de noyaux sur l'espace homogène ordonné $SO(1, n)/SO(1, n-1)$), met en évidence l'équivalence entre la formule du produit pour les fonctions de Legendre de 2ème espèce d'une part, et le fait que les puissances du noyau de Poisson, dont les fonctions de Legendre de 2ème espèce sont une moyenne, sont des caractères de cette algèbre de Volterra d'autre part.

Dans le travail qui suit, les fonctions de Legendre associées d'indice complexe quelconque, de 1ère et de 2ème espèces, sont présentées comme caractères d'algèbres de noyaux sur les espaces $SO_0(1, 2)/SO(2)$ et $SO_0(1, 2)/SO_0(1, 1)$

et on en déduit que les formules de produits sont équivalentes au fait que les puissances des noyaux de Poisson de 1ère et 2ème espèces sont caractères de ces algèbres (théorème 7). Puis les transformations intégrales fractionnaires de Weyl et de Riemann-Liouville sont complètement interprétées comme transformations d'Abel sur les groupe et semi-groupe de Lorentz (chap. IV).

Enfin en ce qui concerne les fonctions de Jacobi de 2ème espèce, nous montrons que la considération de semi-groupes de Lie ouverts de groupes de Lie semisimples, et de leurs représentations hilbertiennes, permet d'obtenir une interprétation de toutes les fonctions de 2ème espèce comme coefficients généralisés de ces représentations, et une démonstration simple de la formule du produit (théorème 22) qui avait été établie par L. Durand [2] par des méthodes analytiques. Pour cela, nous étudions plus précisément un sous semigroupe ouvert du groupe $SL(3, \mathbb{R})$. Ce semigroupe possède une bonne décomposition de Cartan et d'Iwasawa par rapport à un sous semigroupe ouvert de $GL(2, \mathbb{R})$, et possède aussi des semigroupes du type parabolique qui permettent de conclure (chap. V).

Nous espérons ainsi avoir définitivement établi que l'interprétation géométrique des transformations intégrales du type Laplace passe par l'étude de sous semigroupes de groupes de Lie, comme il en est ainsi pour la transformation de Laplace usuelle définie sur le semigroupe \mathbb{R}_+ .

Plan

- I. Sur les fonctions de Jacobi de première et deuxième espèces
- II. Décompositions des groupe et semi-groupe de Lorentz
- III. Algèbres de noyaux et noyaux de Poisson
- IV. Transformations de Fourier-Jacobi, Laplace-Jacobi, d'Abel, etc...
- V. Un semi-groupe dans $SL(3, \mathbb{R})$
- VI. Autres formules de produit.

I. SUR LES FONCTIONS DE JACOBI.

§ I.0. Définitions.

Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, soit la mesure $\omega_{\alpha, \beta}(t)dt = (\text{sh } t)^{2\alpha+1}(\text{cht})^{2\beta+1}dt$ sur \mathbb{R}_+^* , et soit l'opérateur $\Delta_{\alpha, \beta} = \frac{1}{\omega_{\alpha, \beta}(t)} \frac{d}{dt} \left(\omega_{\alpha, \beta}(t) \frac{d}{dt} \right) = \frac{d^2}{dt^2} + [(2\alpha+1) \text{coth } t + (2\beta+1)\text{th } t] \frac{d}{dt}$, appelé opérateur de Jacobi.

Posons $\rho = \alpha + \beta + 1$; pour $\lambda \in \mathbb{C}$ les fonctions de Jacobi de première et deuxième espèces sont des fonctions propres de l'opérateur $\Delta_{\alpha, \beta}$:

$(\Delta_{\alpha, \beta} + \lambda^2 + \rho^2)f = 0$. Plus précisément, dans les notations de T.H. Koornwinder [8], la fonction de Jacobi de première espèce $\varphi_{\lambda}^{(\alpha, \beta)}(t)$, pour $\alpha \neq -1, -2, \dots$ est la solution telle que $\varphi_{\lambda}^{(\alpha, \beta)}(0) = 1$ et $\frac{d}{dt} \varphi_{\lambda}^{(\alpha, \beta)}(t) \Big|_{t=0} = 0$. Elle s'exprime à l'aide de la fonction hypergéométrique :

$$(1) \quad \varphi_{\lambda}^{(\alpha, \beta)}(t) = {}_2F_1 \left(\frac{\rho+i\lambda}{2}, \frac{\rho-i\lambda}{2}; \alpha+1; -\text{sh}^2 t \right).$$

La fonction de Jacobi de deuxième espèce $\Phi_{\lambda}^{(\alpha, \beta)}(t)$, définie pour $i\lambda \notin \mathbb{N}^*$, est la solution vérifiant la condition asymptotique

$\Phi_{\lambda}^{(\alpha, \beta)}(t) = e^{(i\lambda - \rho)t} (1 + \varepsilon(t))$ avec $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. Cette fonction s'exprime à l'aide de la fonction hypergéométrique :

$$(2) \quad \Phi_{\lambda}^{(\alpha, \beta)}(t) = (2\text{sh } t)^{i\lambda - \rho} {}_2F_1 \left(\frac{\beta - \alpha + 1 - i\lambda}{2}, \frac{\rho - i\lambda}{2}; 1 - i\lambda; \frac{-1}{\text{sh}^2 t} \right).$$

Les fonctions de Jacobi peuvent s'exprimer de différentes manières sous forme intégrale. Nous allons présenter une forme intégrale, qui se prêtera bien à une interprétation géométrique, du type "moyenne d'une puissance d'un noyau de Poisson", aussi bien pour les fonctions de Jacobi de première espèce que pour celles de deuxième espèce.

§ I.1. Pour les fonctions de Jacobi de première espèce.

Soit $t \in \mathbb{R}_+$ et $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$, considérons l'action de \mathbb{R}_+ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie par $t.(\theta, \varphi) = (\theta(t), \varphi(t))$ où $\theta(t)$ et $\varphi(t)$ sont donnés par

$$e^{i\varphi(t)} \cos \theta(t) = \frac{e^{i\varphi} \cos \theta \text{cht} + \text{sht}}{e^{i\varphi} \cos \theta \text{sht} + \text{cht}}.$$

$[0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \pi]$ est un sous-ensemble de \mathbb{R}^2 stable par cette action, dont le

Jacobien est $J_t(\theta, \varphi) = P(t, (\theta, \varphi))^2 \frac{\sin 2\theta}{\sin 2\theta(t)}$ où

$P(t, (\theta, \varphi)) = (\text{ch}^2 t + 2\text{sh}t \text{cht} \cos \theta \cos \varphi + \text{sh}^2 t \cos^2 \theta)^{-1}$; on a également $\sin \theta(t) = \sin \theta \times P(t, (\theta, \varphi))^{1/2}$, $\cos \theta(t) \sin \varphi(t) = P(t, (\theta, \varphi)) \times \cos \theta \sin \varphi$.

Ainsi si, sur $[0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \pi]$, on pose, pour $a, b \in \mathbb{C}$, $d\mu_{a,b}(\theta, \varphi) = (\sin \theta)^{a+1} (\cos \theta)^{b+1} (\sin \varphi)^b d\theta d\varphi$ on a de manière évidente

$$\frac{d\mu_{a,b}(t, (\theta, \varphi))}{d\mu_{a,b}(\theta, \varphi)} = P(t, (\theta, \varphi))^{\left(\frac{a}{2} + b + 2\right)}.$$

Remarque : L'action de \mathbb{R}_+ sur $[0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \pi]$, définie a priori, provient d'une action canonique définie dans le cadre de l'analyse harmonique sphérique sur le couple de Gelfand ($SU(1,2)$, $S(U(1) \times U(2))$).

Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ considérons les opérateurs différentiels suivants :

$\Delta_{\alpha, \beta}$ l'opérateur de Jacobi

$$\Delta_{\alpha, \beta}^1 = \frac{d^2}{d\theta^2} + ((2\alpha - 2\beta - 1)\cotg \theta - (2\beta + 1)\text{tg} \theta) \frac{d}{d\theta}$$

$$\Delta_{\beta}^2 = \frac{d^2}{d\varphi^2} + 2\beta \cotg \varphi \frac{d}{d\varphi}$$

$$\square_{\alpha, \beta} = \Delta_{\alpha, \beta} + \frac{1}{\text{sh}^2 t} \Delta_{\alpha, \beta}^1 + \left(\frac{1}{\text{sh}^2 t \cos^2 \theta} - \frac{1}{\text{ch}^2 t} \right) \Delta_{\beta}^2$$

Lemme. Pour $s \in \mathbb{C}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, en posant $\rho = \alpha + \beta + 1$,

$$\square_{\alpha, \beta} (P(t, (\theta, \varphi)))^{0-s} = 4s(s-\rho)P(t, (\theta, \varphi))^{0-s}$$

La vérification est facile (et fastidieuse).

On en déduit que la fonction de Jacobi de première espèce est moyenne d'une puissance de $P(t, (\theta, \varphi))$:

Proposition 1.

i) Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(\alpha) > \text{Re}(\beta) > -1/2$, pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\text{Im}(\lambda)| < \text{Re}(\rho)$, pour $t \in \mathbb{R}_+$:

$$(3) \varphi_{\lambda}^{(\alpha, \beta)}(t) = \frac{2 \Gamma(\alpha + 1)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha - \beta) \Gamma(\beta + 1/2)} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi} P(t, (\theta, \varphi))^{\frac{\rho - i\lambda}{2}} d\mu_{2(\alpha - \beta - 1), 2\beta}(\theta, \varphi)$$

(C'est la formule 5.28 de [8]).

ii) Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(\alpha) > \operatorname{Re}(\beta) > -1/2$, pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\operatorname{Im}(\lambda)| < \operatorname{Re}(\rho)$, pour $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$, la formule du produit des fonctions de Jacobi de première espèce s'écrit :

$$(4) \quad \varphi_\lambda^{(\alpha, \beta)}(t_1) \varphi_\lambda^{(\alpha, \beta)}(t_2) = \frac{2 \Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha-\beta) \Gamma(\beta+1/2)} \int_0^{\pi/2} \int_0^\pi \varphi_\lambda^{(\alpha, \beta)}(t(t_1, t_2, \theta, \varphi)) d\mu_{2(\alpha-\beta-1), 2\beta}(\theta, \varphi)$$

où $\operatorname{ch}^2(t(t_1, t_2, \theta, \varphi)) = \operatorname{ch}^2 t_1 \operatorname{ch}^2 t_2 + \operatorname{sh}^2 t_1 \operatorname{sh}^2 t_2 \cos^2 \theta + 2 \operatorname{ch} t_1 \operatorname{ch} t_2 \operatorname{sh} t_1 \operatorname{sh} t_2 \cos \theta \cos \varphi$.

Pour la démonstration de ii) voir § 7 T.H. Koornwinder [8] .

Remarque : Cette formule du produit se met facilement sous la forme (0) donnée en introduction (cf. formule 7.11 [8]). Signalons que pour $\beta = 0$ ou 1 , et $\alpha \in \mathbb{N}$, la formule (4) exprime la formule du produit des fonctions sphériques associées aux couples de Gelfand ($SU(1, n)$, $S(U(1) \times U(n))$) ou ($Sp(1, n)$, $Sp(1) \times Sp(n)$). Pour tout α et $\beta \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(\alpha) > \operatorname{Re}(\beta) > -1/2$ nous donnerons une interprétation sur la variété $SU(1, 2)/S(U(1) \times U(2))$.

§ 1.2. Pour les fonctions de Jacobi de deuxième espèce.

Par prolongement analytique de l'action définie au paragraphe précédent, nous obtenons une action de $t \in \mathbb{R}_+$ sur $(\theta, \varphi) \in \mathbb{C}^2$. Posons $\psi = i\theta$ et $\xi = i\varphi$ alors voici une série de nouvelles formules :

$$t.(\psi, \xi) = (\psi(t), \xi(t)) \quad \text{avec}$$

$$e^{-\xi(t)} \operatorname{ch} \psi(t) = \frac{e^{-\xi} \operatorname{ch} \psi \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t}{e^{-\xi} \operatorname{ch} \psi \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t}; \quad e^{\xi(t)} \operatorname{ch} \psi(t) = \frac{e^{\xi} \operatorname{ch} \psi \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t}{e^{\xi} \operatorname{ch} \psi \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t}.$$

Posons $Q(t, (\psi, \xi)) = P(t, (i\theta, i\varphi)) = (\operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t \operatorname{ch}^2 \psi + 2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t \operatorname{ch} \psi \operatorname{ch} \xi)^{-1}$, et pour $a, b \in \mathbb{C}$, $d\nu_{a, b}(\psi, \xi) = (\operatorname{sh} \psi)^{a+1} (\operatorname{ch} \psi)^{b+1} (\operatorname{sh} \xi)^b d\psi d\xi$. La partie $[0 + \infty[\times [0 + \infty[$ est un sous-ensemble de \mathbb{C}^2 stable par cette action et on a :

$$\frac{d\nu_{a, b} t.(\psi, \xi)}{d\nu_{a, b}(\psi, \xi)} = Q(t, (\psi, \xi))^{\left(\frac{a}{2} + b + 2\right)}.$$

Sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ l'opérateur $\square_{\alpha, \beta}$ devient $\nabla_{\alpha, \beta}$ avec

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha, \beta} = & \Delta_{\alpha, \beta} - \frac{1}{\text{sh}^2 t} \left[\frac{d^2}{d\psi^2} + [(2\alpha - 2\beta - 1)\text{coth } \psi + (2\beta + 1)\text{th } \psi] \frac{d}{d\psi} \right] \\ & + \left(\frac{1}{\text{ch}^2 t} - \frac{1}{\text{sh}^2 t \text{ch}^2 \psi} \right) \left[\frac{d^2}{d\xi^2} + 2\beta \text{coth } \xi \frac{d}{d\xi} \right], \end{aligned}$$

alors pour $s \in \mathbb{C}$ on a pour $\rho = \alpha + \beta + 1$:

$$\nabla_{\alpha, \beta} (Q(t, (\psi, \xi)))^{\rho-s} = 4s(s-\rho)(Q(t, (\psi, \xi)))^{\rho-s}.$$

Proposition 2.

i) Pour $\text{Re}(\alpha) > \text{Re}(\beta) > -1/2$ et $\text{Im}(\lambda) > \text{Re}(\rho)$, alors

$$(5) \quad \Phi_{\alpha, \beta}(\lambda, t) = 2 \int_0^\infty \int_0^\infty Q(t, (\psi, \xi))^{\frac{\rho - i\lambda}{2}} d\nu_{2(\alpha - \beta - 1), 2\beta}(\psi, \xi)$$

est une fonction propre de l'opérateur de Jacobi $\Delta_{\alpha, \beta}$ avec la valeur propre $-(\lambda^2 + \rho^2)$. C'est la fonction de Jacobi de deuxième espèce à un facteur près :

$$\Phi_{\alpha, \beta}(\lambda, t) = \frac{\Gamma(\alpha - \beta) \Gamma(\beta + 1/2) \Gamma\left(\frac{1 - \alpha - \beta - i\lambda}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1 - \alpha + \beta - i\lambda}{2}\right)}{2^{i\lambda + 1 - \rho} \sqrt{\pi} \Gamma(1 - i\lambda)} \Phi_\lambda^{(\alpha, \beta)}(t)$$

ii) Pour $\text{Re}(\alpha) > \text{Re}(\beta) > -1/2$, $\text{Im}(\lambda) > \text{Re}(\rho)$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+^*$ la formule du produit des fonctions de Jacobi de deuxième espèce s'écrit :

$$(6) \quad \Phi_{\alpha, \beta}(\lambda, t_1) \Phi_{\alpha, \beta}(\lambda, t_2) = 2 \int_0^\infty \int_0^\infty \Phi_{\alpha, \beta}(\lambda, t(t_1, t_2, \psi, \xi)) d\nu_{2(\alpha - \beta - 1), 2\beta}(\psi, \xi)$$

où cette fois-ci $\text{ch}^2(t(t_1, t_2, \psi, \xi)) = \text{ch}^2 t_1 \text{ch}^2 t_2 + \text{sh}^2 t_1 \text{sh}^2 t_2 \text{ch}^2 \psi + 2\text{cht}_1 \text{cht}_2 \text{sht}_1 \text{sht}_2 \text{ch } \psi \text{ch } \xi$.

Remarque : Cette formule (6) a été écrite (sous une autre forme) par L. Durand [2]. Nous donnerons au § V des indications pour interpréter géométriquement les formules (5) et (6) à partir d'un semi-groupe ouvert de $SL(3, \mathbb{R})$ et d'un espace homogène associé.

§ 1.3. Cas particulier ($\beta = -1/2$) : les fonctions de Jacobi $\varphi_\alpha(\lambda, t)$ et $\Phi_\alpha(\lambda, t)$.

C'est dans ce cas particulier que nous développerons complètement l'interprétation géométrique qui passe par le groupe $G = SO_0(1, 2)$. Réécrivons dans ce cas les formules (3) à (6).

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(\alpha) \geq -1/2$, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $t \in \mathbb{R}$, $\rho = \alpha + 1/2$. Notons $\varphi_\alpha(\lambda, t) = \varphi_\lambda^{(\alpha, -1/2)}(t)$, alors pour $|\text{Im}(\lambda)| < \text{Re}(\rho)$

$$(7) \quad \varphi_\alpha(\lambda, t) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\rho)} \int_0^\pi P(t, \theta)^{\rho-i\lambda} (\sin \theta)^{2\alpha} d\theta$$

où $P(t, \theta) = (\text{cht} - \text{sht} \cos \theta)^{-1}$ sera noté dans la suite $P(a_t, k_\theta)$ et appelé noyau de Poisson de première espèce.

La formule du produit

$$\varphi_\alpha(\lambda, t_1) \varphi_\alpha(\lambda, t_2) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\rho)} \int_0^\pi \varphi_\alpha(\lambda, t(t_1, t_2, \theta)) (\sin \theta)^{2\alpha} d\theta \quad \text{où}$$

$\text{cht} = \text{cht}_1 \text{cht}_2 + \text{sht}_1 \text{sht}_2 \cos \theta$ peut s'écrire sous la forme suivante, pour $|\text{Im}(\lambda)| < \text{Re}(\rho)$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(\alpha) > -1/2$

$$(8) \quad \varphi_\alpha(\lambda, t_1) \varphi_\alpha(\lambda, t_2) = \int_0^\infty k_\alpha(t_1, t_2, t) \varphi_\alpha(\lambda, t) (\text{sht})^{2\alpha+1} dt$$

$$\text{où } k_\alpha(t_1, t_2, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq |t_1 - t_2| \quad \text{ou } t \geq t_1 + t_2 \\ 2n_\alpha (2 \text{cht} \text{cht}_1 \text{cht}_2 + 1 - \text{ch}^2 t - \text{ch}^2 t_1 - \text{ch}^2 t_2)^{\alpha-1/2} (\text{sht} \text{sht}_1 \text{sht}_2)^{-2\alpha} & \text{ailleurs} \end{cases}$$

et où $n_\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha+1/2)}$ est une constante de normalisation :

$$n_\alpha \int_0^{2\pi} |\sin \theta|^{2\alpha} d\theta = 1.$$

Définissons la fonction de Jacobi de deuxième espèce $\Phi_\alpha(\lambda, t)$ pour $t > 0$, $\text{Re}(\alpha) \geq -1/2$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\text{Im}(\lambda) > \text{Re}(\rho)$ par

$$(9) \quad \Phi_\alpha(\lambda, t) = 2 \int_0^\infty Q(t, \psi)^{\rho-i\lambda} \text{sh} \psi^{2\alpha} d\psi$$

où $Q(t, \psi) = (\text{cht} + \text{sht} \text{ch} \psi)^{-1}$ sera noté dans la suite $Q(a_t, h_\psi)$ et appelé le noyau de Poisson de deuxième espèce.

$$\text{On a } \Phi_\alpha(\lambda, t) = 2^{2\rho} \Gamma(\rho) \times \frac{\Gamma(1/2 - \alpha - i\lambda)}{\Gamma(1 - i\lambda)} \Phi_\lambda^{\alpha, -1/2}(t).$$

La formule du produit $\Phi_\alpha(\lambda, t_1) \Phi_\alpha(\lambda, t_2) = 2 \int_0^\infty \Phi_\alpha(\lambda, t(t_1, t_2, \psi)) \text{sh} \psi^{2\alpha} d\psi$ où

$\text{cht}(t_1, t_2, \psi) = \text{cht}_1 \text{cht}_2 + \text{sht}_1 \text{sht}_2 \text{ch} \psi$ peut s'écrire pour $\text{Re}(\alpha) \geq -1/2$,
 $\text{Im}(\lambda) > \text{Re}(\rho)$ et $t_1, t_2 \in \mathbf{R}_+$

$$(10) \quad \Phi_\alpha(\lambda, t_1) \Phi_\alpha(\lambda, t_2) = \int_0^\infty K_\alpha(t_1, t_2, t) \Phi_\alpha(\lambda, t) (\text{sht})^{2\alpha+1} dt$$

$$\text{où } K_\alpha(t_1, t_2, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq t_1 + t_2 \\ (\text{ch}^2 t + \text{ch}^2 t_1 + \text{ch}^2 t_2 - 2 \text{cht} \text{cht}_1 \text{cht}_2 - 1)^{\alpha-1/2} (\text{sht} \text{sht}_1 \text{sht}_2)^{-2\alpha} & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

II. LE GROUPE ET LE SEMI-GROUPE DE LORENTZ.

Soit $G = SO_0(1,2)$ le groupe de Lorentz agissant canoniquement sur \mathbb{R}^3 , muni de la base canonique $\{e_0, e_1, e_2\}$, en laissant la pseudo-métrique $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2$ invariante.

Soit K , A et H les sous-groupes à un paramètre stabilisateurs respectivement de e_0, e_1 et e_2 .

$$K = \{k_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} / \theta \in [0, 2\pi[\}$$

$$A = \{a_t = \begin{pmatrix} \text{cht} & 0 & \text{sht} \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sht} & 0 & \text{cht} \end{pmatrix} / t \in \mathbb{R}\}, \quad A_+ = \{a_t / t \geq 0\} \quad \text{et} \quad A_+^* = \{a_t / t > 0\}$$

$$H = \{h_\psi = \begin{pmatrix} \text{ch} \psi & \text{sh} \psi & 0 \\ \text{sh} \psi & \text{ch} \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} / \psi \in \mathbf{R}\}.$$

$$\text{Soit } N = \{n_x = \begin{pmatrix} 1 + \frac{x^2}{2} & x & -\frac{x^2}{2} \\ x & 1 & -x \\ \frac{x^2}{2} & x & 1 - \frac{x^2}{2} \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R}\} \quad \text{qui stabilise } e_0 + e_2$$

$$N' = \{n'_x = \begin{pmatrix} 1 + \frac{x^2}{2} & \frac{x^2}{2} & x \\ -\frac{x^2}{2} & 1 - \frac{x^2}{2} & -x \\ x & x & 1 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R}\} \quad \text{qui stabilise } e_0 - e_1$$

notons encore $\bar{N} = \{ {}^t n_x / x \in \mathbb{R} \}$, $\bar{N}' = \{ {}^t n'_x / x \in \mathbb{R} \}$ et $N'_+ = \{ n'_x / x \in \mathbb{R}_+^* \}$.

Définition. Le semi-groupe de Lorentz G_+ est le semi-groupe engendré algébriquement par H et A_+^* dans G .

Décompositions du groupe et du semi-groupe de Lorentz.

Cartan :	$G = KA_+K$	$G_+ = HA_+^*H$ est ouvert dans G .
Iwasawa :	$G = KAN$	$G_+ = HA_+^*N'_+ \subset HAN$ ouvert de G .
Bruhat :	$G = \overline{N}AN$	$G_+ = \overline{N}'_+ A_+^* N'_+$

Remarques :

i) La décomposition du type décomposition de Cartan $G_+ = HA_+^*H$ provient du fait que, pour $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$ et $h_\psi \in H$, on a

$$a_{t_1} h_\psi a_{t_2} = h_1 a_{t(t_1, t_2, \psi)} h_2 \quad \text{où } h_1, h_2 \in H \text{ et } \text{cht} = \text{cht}_1 \text{cht}_2 + \text{sht}_1 \text{sht}_2 \text{ch}\psi.$$

Notons que pour le semi-groupe G_+ , dans les trois décompositions, l'écriture des éléments est unique.

ii) Pour des résultats généraux sur les semi-groupes et semi-algèbres de Lie, voir Hofmann et Hilgert [7]. Notons que l'application exponentielle de l'algèbre de Lie de $SO_0(1,2)$ dans $SO_0(1,2)$ est un difféomorphisme d'un cône convexe sur le semi-groupe de Lorentz. Voir Mizony [11] pour une étude des semi-groupes de Lorentz dans $SO_0(1,n)$ ou des semi-groupes de Poincaré dans $\mathbb{R}^n \rtimes SO_0(1,n-1)$.

iii) Signalons la décomposition du type Cartan $G = KAH$ et celle du type Iwasawa, $HWAN$ où W est le groupe de Weyl, qui est un ouvert partout dense dans G . Voir J. Sekiguchi [12] pour ce type de décomposition.

Considérons maintenant la mesure de Haar dg sur G qui, sur la décomposition de Cartan, s'écrit pour $g = k_{\theta_1} a_t k_{\theta_2}$, $dg = d\theta_1 \text{sht} dt d\theta_2$. Considérons la restriction de la mesure de Haar dg à l'ouvert G_+ ; sur la décomposition $G_+ = HA_+^*H$ on a, pour $g = h_{\psi_1} a_t h_{\psi_2}$, $dg/G_+ = d\psi_1 \text{sht} dt d\psi_2$.

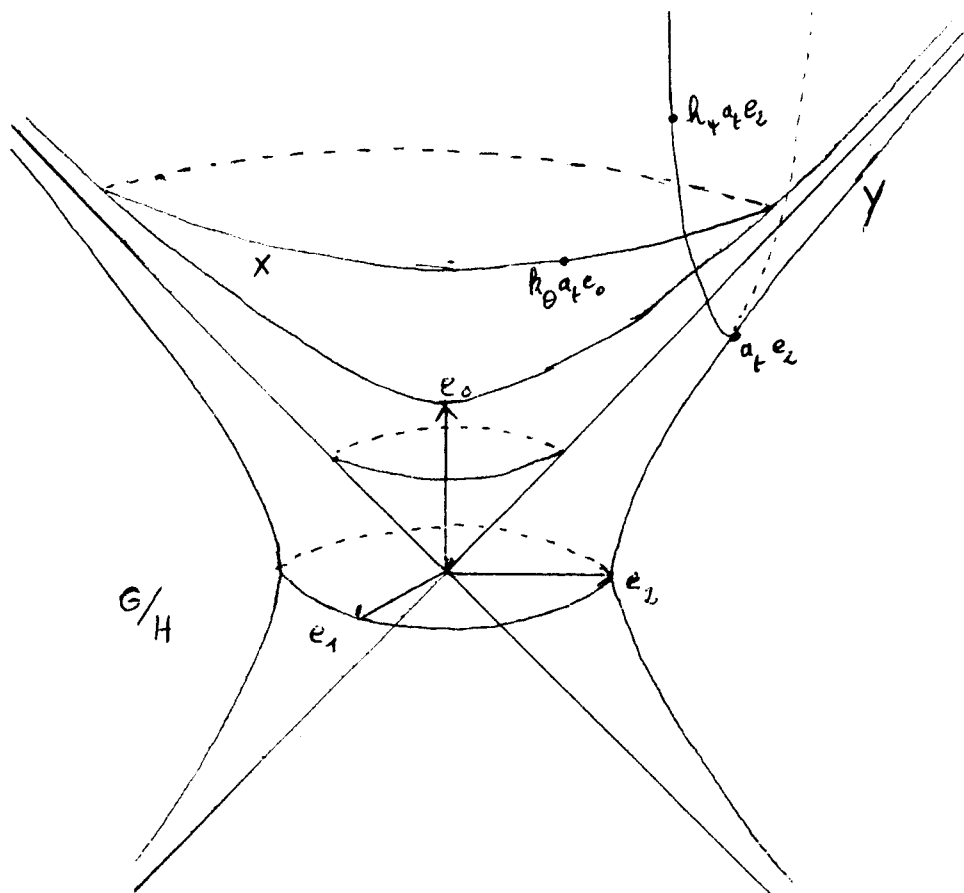
Soit $X = G/K$ qui s'identifie par $gK \mapsto ge_0$ à la nappe supérieure de l'hyperboloïde à deux nappes dans \mathbb{R}^3 : $X = Ge_0 = KA_+e_0$.

Soit $Y = G_+/H$ qui s'identifie par $gH \rightarrow ge_2$ à un ouvert de l'hyperboloïde à une nappe dans \mathbb{R}^3 . $Y = G_+e_2 = HA_+^*e_2$.

Soit Ω le cône du futur dans \mathbb{R}^3 , ou cône des vecteurs du genre temps positif : $\Omega = \{x = (x_0, x_1, x_2) / x_0 > 0 \text{ et } x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 > 0\}$.

Le cône Ω définit un ordre sur \mathbb{R}^3 invariant par G : $x \geq y \iff x-y \in \bar{\Omega}$. Par restriction, nous avons un ordre sur Y . Soit Γ le graphe ouvert de cet ordre : $\Gamma = \{(x,y) \in Y \times Y / y \leq x\}$ et notons $D(x,y) = \{z \in Y / y \leq z \leq x\}$, c'est un compact que nous appellerons l'intervalle $D(x,y)$.

Notons que $G_+ = \{g \in G / ge_2 > e_2\}$. Y est un ouvert de l'espace homogène ordonné G/H associé au semi-groupe de causalité G_+ . Voir J. Faraut [5] pour plus de précisions sur la notion d'espace homogène ordonné.



Paramétrons les espaces homogènes X et Y à partir des décompositions de Cartan : tout $x \in X$, $x \neq e_0$ s'écrit, $x = k_\theta a_t e_0$ de manière unique avec $t > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$.

De même tout $y \in Y$ s'écrit de manière unique $y = h_\psi a_t e_2$, avec $t > 0$ et $\psi \in \mathbb{R}$. (θ, t) et (ψ, t) sont appelées les coordonnées polaires dans X et Y .

Dans ces cartes, l'élément de surface est $\frac{1}{2\pi} dx = \frac{1}{2\pi} d\theta \operatorname{sh} t dt$ sur X et $dy = d\psi \operatorname{sh} t dt$ sur Y . La mesure dx est G -invariante et dy est G_+ -invariante.

Soit σ_X la section de X dans G définie par les conditions suivantes $\sigma_X(x)$ est de la forme $k_\theta a_t \in G$, avec $t > 0$ pour $x \neq e_0$, $\sigma_X(e_0) = e$ et $\sigma_X(x)e_0 = x$.

De même soit σ_Y la section de Y dans G_+ définie par : $\sigma_Y(y)$ est de la forme $h_\psi a_t \in G_+$ et $\sigma_Y(y)e_0 = y$. Nous noterons σ l'une de ces deux sections lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(\alpha) \geq -1/2$, considérons les mesures $d_\alpha x$ sur X et $d_\alpha y$ sur Y qui, dans les coordonnées polaires, s'écrivent :

$$d_\alpha x = e_\alpha |\sin \theta|^{2\alpha} \operatorname{sh} t^{2\alpha} dx \quad \text{et} \quad d_\alpha y = e_\alpha |\operatorname{sh} \psi|^{2\alpha} \operatorname{sh} t^{2\alpha} dy \quad \text{avec}$$

$$e_\alpha = 2^{-(\alpha+1/2)} \Gamma(\alpha+1/2)^{-1}.$$

Lemme. Ces mesures sont invariantes par l'action de A_+ .

Remarque. La constante de normalisation e_α a été choisie pour obtenir des écritures simples pour les transformations d'Abel (cf. IV). Nous noterons dans

la suite $b_\alpha = \frac{e_\alpha}{2n_\alpha} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\alpha+1/2} \Gamma(\alpha+1)}$.

III. ALGÈBRES DE NOYAUX SUR X ET Y .

§ III.1. Les algèbres de Volterra sur Y .

Définition 1. Un noyau de Volterra sur Y est une fonction continue de $Y \times Y$ dans \mathbb{C} , nulle en dehors du graphe Γ de l'ordre sur Y .

Soit $\mathcal{V}(Y)$ l'ensemble des noyaux de Volterra ; c'est une algèbre pour le produit de composition des noyaux défini par :

pour $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(Y)$, pour $x, y \in Y$

$$V_1 \circ V_2(x, y) = \int_Y V_1(x, z) V_2(z, y) dz = \int_{D(x, y)} V_1(x, z) V_2(z, y) dz$$

C'est l'algèbre de Volterra de l'espace ordonné Y .

Définition 2. Un noyau de Volterra V est G_+ -invariant si pour tout $x, y \in Y$, pour tout $g \in G_+$, $V(gx, gy) = V(x, y)$. Notons $\mathcal{V}^\#(Y)$ la sous-algèbre de $\mathcal{V}(Y)$ des noyaux G_+ -invariants.

Posons $V(x, e_2) = \lim_{y \rightarrow e_2} V(x, y)$ et $V(e_2, y) = 0 = \lim_{x \rightarrow e_2} V(x, y)$.

Alors on peut identifier un noyau $V \in \mathcal{V}^\#(Y)$ à une fonction f sur $\overline{G_+}$ biinvariante par H (et nulle sur la frontière de G_+ dans G) en posant $f(g) = V(g e_2, e_2)$, ou encore, en remarquant qu'un noyau $V \in \mathcal{V}^\#(Y)$ est parfaitement défini par sa restriction à $A_+ e_2 \times e_2$ dans $\overline{Y \times Y}$, on peut identifier V à une fonction continue f_V sur \mathbb{R}_+ , nulle en zéro, en posant $f_V(t) = V(a_t e_2, e_2)$. Soit $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)$ l'ensemble de ces fonctions continues sur \mathbb{R}_+ , nulles en zéro. Notons $L_Y = L$ cette application bijective de $\mathcal{V}^\#(Y)$ sur $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)$.

Pour $\alpha \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(\alpha) \geq -1/2$ notons $\tilde{\circ}_\alpha$ le produit de composition des noyaux de $\mathcal{V}^\#(Y)$ défini par :

$$(11) \quad V_1 \tilde{\circ}_\alpha V_2(x, y) = \int_{D(x, y)} V_1(x, z) V_2(z, y) d_\alpha (\sigma^{-1}(\sigma^{-1}(y)x) \sigma^{-1}(y)) z$$

En particulier sur $A_+ e_2 \times e_2$ on a

$$V_1 \tilde{\circ}_\alpha V_2(a_t e_2, e_2) = \int_Y V_1(a_t e_2, z) V_2(z, e_2) d_\alpha z$$

D'autre part associons au noyau symétrique $K_\alpha(t_1, t_2, t)$ de la formule (10), le produit de convolution commutatif $\tilde{*}_\alpha$ sur $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)$ défini par

$$(12) \quad f_1 \tilde{*}_\alpha f_2(t) = e_\alpha \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} f_1(t_1) f_2(t_2) K_\alpha(t_1, t_2, t) (sht_1 sht_2)^{2\alpha+1} dt_1 dt_2$$

Proposition 3. $(\mathcal{V}^\#(Y), \delta_\alpha)$ et $(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+), \tilde{*}_\alpha)$ sont deux algèbres commutatives isomorphes par l'application $L : V \mapsto f_V$.

Pour montrer cette proposition, il suffit de vérifier que $f_{V_1 \delta_\alpha V_2} = f_{V_1} \tilde{*}_\alpha f_{V_2}$; la formule (11) a été définie pour cela à partir de la formule (12), en utilisant l'invariance des noyaux par G_+ et celle de $d_\alpha z$ par A_+ . Signalons que la commutativité de l'algèbre de Volterra $(\mathcal{V}^\#(Y), \tilde{\delta}_\alpha)$ découle de la symétrie du noyau K_α , ainsi que l'associativité de ce produit.

Remarque : pour $\alpha = -1/2$ $K_{-1/2}(t_1, t_2, t) = \text{sht}_1 \text{sht}_2 \text{sht}_t \delta_{t_1+t_2}(t)$ et (12) est simplement la convolution ordinaire sur \mathbb{R}_+ liée à la transformation de Laplace. Pour α demi-entier ces algèbres de convolutions et leurs caractères ont déjà été étudiés par J. FARAUT [4] et M. MIZONY [11] par l'intermédiaire des groupes $SO_0(1, n)$.

§ III.2. Les algèbres de noyaux intégrables sur X.

Définition 3. Un noyau mesurable sur X est une fonction mesurable sur $X \times X$ à valeurs dans \mathbb{C} . Deux noyaux presque partout égaux sont identifiés. Soit $\mathcal{V}(X)$ l'espace vectoriel de ces noyaux.

On dit qu'un noyau $V \in \mathcal{V}(X)$ est G-invariant si pour tout $g \in G$, $V(gx, gy) = V(x, y)$ sur $X \times X$. Notons $\mathcal{V}^\#(X)$ cet espace.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(\alpha) \geq -1/2$, un noyau $V \in \mathcal{V}^\#(X)$ est dit α -intégrable si pour tout (ou un) $y \in X$, $x \mapsto V(x, y)$ est d_α -intégrable. Notons $\mathcal{V}_\alpha^\#(X)$ l'espace vectoriel de ces noyaux G-invariants et d_α -intégrables.

Remarque : Un noyau G-invariant sur X est parfaitement déterminé par sa restriction à $A_+ e_0 \times e_0 \subset X \times X$, et si $V \in \mathcal{V}_\alpha^\#(X)$ alors $t \mapsto f_V(t) = V(a_t e_0, e_0) \in L_1(\mathbb{R}_+, b_\alpha \text{sht}^{2\alpha+1} dt)$. Notons L_X cette application, bijective, de $\mathcal{V}_\alpha^\#(X)$ sur $L_1(\mathbb{R}_+, b_\alpha \text{sht}^{2\alpha+1} dt)$.

Pour $\alpha \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(\alpha) \geq -1/2$, notons \circ_α le produit de composition des noyaux de $\mathcal{V}_\alpha^\#(X)$ défini par :

$$(13) \quad V_1 \circ_\alpha V_2(x, y) = \int_X V_1(x, z) V_2(z, y) d_\alpha \sigma^{-1}(\sigma^{-1}(y)x) \sigma^{-1}(y)z$$

en particulier on a $V_1 \circ_\alpha V_2(a_t e_o, e_o) = \int_X V_1(a_t e_o, z) V_2(z, e_o) d_\alpha z$ (du fait que $d_\alpha z$ est A -invariante).

D'autre part, associons au noyau symétrique $k_\alpha(t_1, t_2, t)$ de la formule (8), le produit de convolution commutatif $*_\alpha$ sur $L_1(\mathbb{R}_+, b_\alpha \text{sht}^{2\alpha+1} dt)$ défini par

$$(14) \quad f_1 * f_2(t) = b_\alpha \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} k_\alpha(t_1, t_2, t) f_1(t_1) f_2(t_2) (\text{sht}_1 \text{sht}_2)^{2\alpha+1} dt_1 dt_2$$

Proposition 4. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(\alpha) \geq -1/2$; alors $(V_\alpha^\#(X), o_\alpha)$ et $(L_1(\mathbb{R}_+, b_\alpha \text{sht}^{2\alpha+1} dt), *_\alpha)$ sont deux algèbres de Banach commutatives et isomorphes par l'application $L_X : V \mapsto f_V$.

En effet, il suffit de vérifier que $f_{V_1} *_\alpha f_{V_2} = f_{V_1 \circ_\alpha V_2}$, comme pour la proposition 3, et que pour $\alpha \geq -1/2$, si on pose

$$\|V\|_\alpha = \int_X |V(x, e_o)| d_\alpha x \quad \text{on a} \quad \|V\|_\alpha = \|f_V\|_1.$$

Ceci ne pose aucune difficulté, en utilisant l'invariance des noyaux par G , le seul changement de variable provenant de la décomposition polaire des éléments de X et de la propriété de la décomposition de Cartan : pour $g = a_{t_1} k_\theta a_{t_2}$ alors g s'écrit sous la forme $k_{\theta_1} a_t k_{\theta_2}$.

Remarque : Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq -1/2$, en utilisant une méthode similaire à celle des fonctions sphériques de classe χ_n où χ_n est un caractère de $K = SO(2)$, on obtient une autre algèbre de convolution, isomorphe à $(L_1(\mathbb{R}_+, \text{sht}^{2\alpha+1} dt), *_\alpha)$, qui est l'algèbre \mathcal{D}_α de mesures bornées sur G définie pour $f \in L_1(\mathbb{R}_+, \text{sht}^{2\alpha+1} dt)$, sur la décomposition de Cartan $G = KA_+K$ par

$$d_\alpha f(k_{\theta_1} a_t k_{\theta_2}) = n_\alpha f(t) |\text{sht} \sin \theta_1|^{2\alpha} d\theta_1 \text{sht} dt \delta_e(\theta_2),$$

\mathcal{D}_α étant muni de la convolution ordinaire des mesures sur G , agissant sur les fonctions bi-invariantes par K . De plus pour $\alpha = n$, un entier relatif, cette algèbre s'identifie à la sous-algèbre de $L^1(G)$ formée des fonctions intégrables sur G et de type χ_n (où χ_n est un caractère de K).

Cette voie qui généralise bien l'analyse harmonique sphérique sur $SO_0(1,2)$ ne permet pas une interprétation géométrique sur la nappe supérieure de l'hyperboloïde à deux nappes dans \mathbb{R}^3 . C'est l'étude des fonctions de Jacobi de deuxième espèce et des algèbres de Volterra qui a conduit à proposer une interprétation de l'algèbre $(L_1(\mathbb{R}_+, (\text{sht})^{2\alpha+1} dt), *_{\alpha})$ en termes d'algèbre de noyaux intégrables sur la variété $X = G/K$.

§.III.3. Caractères des algèbres de noyaux : noyaux de Poisson.

Du fait des formules du produit pour les fonctions de Jacobi, formules (8) et (10), nous connaissons des caractères des algèbres $(L_1(\mathbb{R}_+, b_{\alpha} \text{sht}^{2\alpha+1} dt), *_{\alpha})$ et $(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+), \tilde{*}_{\alpha})$; les propositions 5 et 6 préciseront ces caractères. En tenant compte de la caractérisation des applications L_X et L_Y qui identifient ces algèbres à des algèbres de noyaux, il reste à en déduire les caractères ; mais pour cela, nous aurons à définir les noyaux de Poisson de première et deuxième espèces, respectivement sur $G \times K$ (ou $X \times K$) et sur $G_+ \times H$ (ou $Y \times H$).

Proposition 5. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(\alpha) \geq -1/2$; les caractères continus de l'algèbre de Banach commutative $(L_1(\mathbb{R}_+, b_{\alpha} \text{sht}^{2\alpha+1} dt), *_{\alpha})$ sont les applications définies par les fonctions de Jacobi de première espèce $\varphi_{\alpha}(\lambda, t)$ par :

$$f \xrightarrow{\Theta_{\alpha, \lambda}} \mathcal{F}_{\alpha} f(\lambda) = b_{\alpha} \int_{\mathbb{R}_+} f(t) \varphi_{\alpha}(\lambda, t) \text{sht}^{2\alpha+1} dt$$

pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\text{Im}(\lambda)| < \text{Re}(\alpha + 1/2)$.

Voir T. Koornwinder [8], pour une démonstration.

Pour les algèbres $(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+), \tilde{*}_{\alpha})$, donnons un résultat partiel :

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(\alpha) \geq -1/2$, pour $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, posons

$$\mathcal{L}_{\alpha} f(\lambda) = e_{\alpha} \int_0^{\infty} f(t) \Phi_{\alpha}(\lambda, t) \text{sht}^{2\alpha+1} dt, \text{ quand cette intégrale existe. Si}$$

$\mathcal{L}_{\alpha} f(\lambda_0)$ existe, alors pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $\text{Im}(\lambda) > \text{Im}(\lambda_0)$, $\mathcal{L}_{\alpha} f(\lambda)$ existe. Notons $a(f)$ l' α -abcisse de convergence de f :

$$a(f) = \inf \{ \text{Im}(\lambda) / \mathcal{L}_{\alpha} f(\lambda) \text{ existe} \} \quad \text{et pour } a > 0 \text{ notons}$$

$$\mathcal{C}_a(\mathbb{R}_+) = \{ f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+) / a(f) \leq a \}.$$

Proposition 6. $(\mathcal{C}_a(\mathbb{R}_+), \tilde{*}_\alpha)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)$ et pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $\text{Im}(\lambda) \geq a$ l'application

$$f \xrightarrow{\Psi_{\alpha, \lambda}} \mathcal{L}_\alpha f(\lambda) \text{ est un caractère de cette algèbre.}$$

Remarque : La transformation $f \mapsto \mathcal{L}_\alpha f$ est une transformation du type Laplace, qui pour α entier positif possède une interprétation en termes de transformation intégrale associée à un semi-groupe du groupe $SO_0(1, n)$. Nous avons un résultat du même type concernant des sous-algèbres de fonctions indéfiniment dérivables et à croissance lente de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)$, voir MIZONY [10], [11] pour plus de précisions.

Pour définir les noyaux de Poisson, partons des décompositions d'Iwasawa : $G = KAN$ et $G_+ \subset HAN$ ou de manière équivalente $G_+^{-1} \subset Hk_\pi AN$. Utilisons le fait que $GKAN \subset KAN$ et que $G_+^{-1} Hk_\pi AN \subset Hk_\pi AN$.

Posons, pour $g \in KAN$, $g = k(g)a(g)n(g)$

et, pour $g \in Hk_\pi AN$, $g = h(g)k_\pi a(g)n(g)$.

Alors G agit sur K par $g.k = k(g^{-1}k)$ dans KAN

et G_+ agit sur H par $g.h = h(g^{-1}hk_\pi)$ dans $Hk_\pi AN$.

Définition. Le noyau de Poisson de première espèce $P(g, k)$, respectivement de deuxième espèce $Q(g, h)$, est défini sur $G \times K$, respectivement sur $G_+ \times H$ par :

$$(15) \quad P(g, k) = \frac{dg.k}{dk}, \text{ respectivement } Q(g, h) = \frac{dg.h}{dh},$$

où dk et dh sont des mesures de Haar sur K et H .

Du fait de l'invariance à droite par K , respectivement par H , des noyaux de Poisson, ceux-ci sont définis sur $X \times K$, respectivement sur $Y \times H$, en posant :

$$P(x, k) = P(\sigma_X(x), k), \text{ respectivement } Q(y, h) = Q(\sigma_Y(y), h).$$

Propriétés :

- i) pour $g = a_t \in A$ et $k = k_\theta \in K$, $P(a_t, k_\theta) = (\text{cht} - \text{sht} \cos \theta)^{-1}$, pour $g = a_t \in A_+$ et $h = h_\psi \in H$, $Q(a_t, h_\psi) = (\text{cht} + \text{sht} \text{ch} \psi)^{-1}$.

En conséquence, les formules (7) et (9) signifient que les fonctions de Jacobi de première, respectivement de deuxième, espèce, sont moyennes sur K , resp. sur H , d'une puissance du noyau de Poisson $P(a_t, k)$, resp. $Q(a_t, h)$.

ii) Du fait de leur définition, les noyaux de Poisson vérifient une formule de 2-cocycle sur G , resp. G_+ :

$$P(g_1 g_2, k) = P(g_1, k) P(g_2, g_1 \cdot k) \text{ pour } g_1, g_2 \in G, k \in K.$$

$$Q(g_1 g_2, h) = Q(g_1, h) Q(g_2, g_1 \cdot h) \text{ pour } g_1, g_2 \in G_+, h \in H.$$

Ces formules permettent de construire des représentations du groupe G et du semi-groupe G_+ .

iii) Pour $\alpha \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(\alpha) \geq -1/2$, pour $\lambda \in \mathbb{C}$, notons $P_{\alpha, \lambda}$ l'application de $\mathcal{V}_\alpha^\#(X)$ dans \mathbb{C} , définie pour $|\text{Im}(\lambda)| < \text{Re}(\alpha + 1/2)$ par :

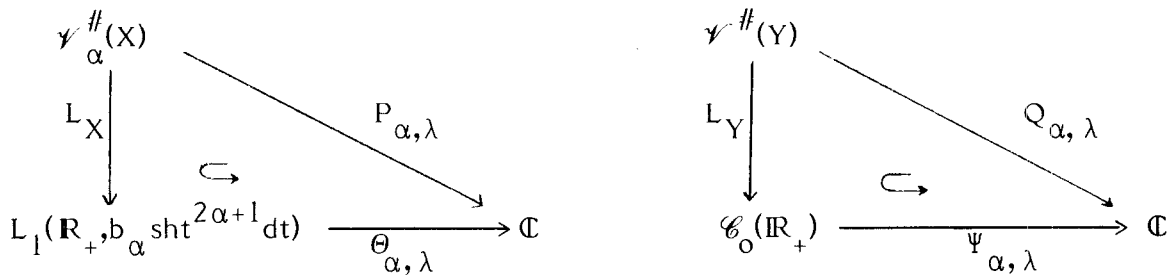
$$V \xrightarrow{P_{\alpha, \lambda}} P_{\alpha, \lambda}(V) = \int_X v(x, e_0) P^{\alpha+1/2-i\lambda}(x, e) d_\alpha x,$$

et notons $Q_{\alpha, \lambda}$ l'application de $\mathcal{V}_\alpha^\#(Y)$ dans \mathbb{C} définie par

$$V \xrightarrow{Q_{\alpha, \lambda}} Q_{\alpha, \lambda}(V) = \int_Y v(y, e_2) Q^{\alpha+1/2-i\lambda}(y, e) d_\alpha y,$$

lorsque cette intégrale existe.

Alors les deux diagrammes suivants sont commutatifs :



Ceci est immédiat en utilisant les décompositions polaires sur les hyperboloïdes X et Y , l'invariance des noyaux V et les formules (7) et (9) sur les

fonctions de Jacobi, pour vérifier que

$$\mathcal{F}_\alpha f_V(\lambda) = P_{\alpha,\lambda}(V) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_\alpha f_V(\lambda) = Q_{\alpha,\lambda}(V).$$

En conséquence des propositions 5 et 6, nous obtenons :

Théorème 7. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(\alpha) \geq -1/2$.

i) Les caractères continus de l'algèbre de Banach $(\mathcal{V}_\alpha^\#(X), \circ_\alpha)$ des noyaux $d_\alpha \times$ -intégrables sur X et invariants par G , sont les applications $P_{\alpha,\lambda}$, pour $|\text{Im}(\lambda)| \leq \text{Re}(\alpha + 1/2)$, définies par les puissances du noyau de Poisson $P(x,e)$.

ii) Pour $a > 0$, notons $\mathcal{V}_{a,\alpha}^\#(Y)$ la sous-algèbre de l'algèbre de Volterra $(\mathcal{V}^\#(Y), \tilde{\circ}_\alpha)$ formée des noyaux V tels que $L_Y(V) \in \mathcal{C}_a(\mathbb{R}_+)$, c'est-à-dire tels que $Q_{\alpha,\lambda}(V)$ existe pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\text{Im}(\lambda) > a$.

Les applications $Q_{\alpha,\lambda}$ pour $\text{Im}(\lambda) > a$ sont des caractères de la sous-algèbre $(\mathcal{V}_{a,\alpha}^\#(Y), \tilde{\circ}_\alpha)$ de l'algèbre de Volterra $\mathcal{V}^\#(Y)$.

§.III.4. Fonctions de Jacobi et coefficients de représentations.

Partons des formules de 2-cocycles vérifiées par les noyaux de Poisson pour construire des représentations de G et de G_+ .

Pour $f \in L_2(K,dk)$, pour $g \in G$, et $\lambda \in \mathbb{R}$, posons $\pi_\lambda(g) f(k) = P(g,k)^{1/2-i\lambda} f(g.k)$; nous obtenons ainsi une famille de représentations unitaires, c'est la série principale de $SO_0(1,2)$.

Pour $f \in L_2(H,dh)$, pour $g \in G_+$, pour $\lambda \in \mathbb{C}$ posons $\tilde{\pi}_\lambda(g)f(h) = Q(g,h)^{1/2-i\lambda} f(g.h)$; nous obtenons ainsi un plan de représentations hilbertiennes du semi-groupe de Lorentz. Notons que $\tilde{\pi}_\lambda$ est isométrique pour $\lambda \in \mathbb{R}$, diminue les normes pour $\text{Im}(\lambda) > 0$ et les augmente pour $\text{Im}(\lambda) < 0$. Notons également que π_λ restreinte au semi-groupe et à un sous-espace de $L_2(K,dk)$ est équivalente à $\tilde{\pi}_\lambda$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. (C.f. Mizony [11]).

Proposition 8. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(\alpha) > -1/2$, pour $k_\theta \in K$ posons $\xi_\alpha(k_\theta) = n_\alpha |\sin \theta|^{2\alpha}$ alors :

i) pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $\text{Im}(\lambda) = \text{Re}(\alpha)$ on a :

$$\varphi_\alpha(\lambda, t) = \langle \pi_{\lambda+i\alpha}(a_t) 1 | \xi_\alpha \rangle \text{ dans } L_2(K, dk)$$

ii) pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :

$$\varphi_\alpha(\lambda, t) = \langle \pi_\lambda(a_t) \xi_\alpha^{1/2} | \xi_\alpha^{1/2} \rangle \text{ dans } L_2(K, dk)$$

c'est-à-dire que les fonctions de Jacobi $\varphi_\alpha(\lambda, .)$ sont des restrictions à A_+ de fonctions de type positif sur $SO_0(1,2)$.

i) est la simple écriture de la formule (7) sous forme de coefficient de représentation. ii) s'obtient aussi à partir de la formule (7) en remarquant que $\xi_\alpha^{1/2}(a_t.k) = P(a_t.k)^\alpha \xi_\alpha^{1/2}(k)$.

Proposition 9. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(\alpha) > -1/2$, soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $\text{Im}(\lambda) > \text{Re}(\alpha) - 1/2$, posons $\xi_\alpha(h_\psi) = |\text{sh } \psi|^{2\alpha}$, alors ξ_α et $\xi_\alpha^{1/2}$ sont des vecteurs distributions de $L_2(H, dh)$, et la fonction de Jacobi $\Phi_\alpha(\lambda, t)$ est la restriction à A_+^* d'un coefficient généralisé des représentations $\tilde{\pi}$:

$$i) \quad \Phi_\alpha(\lambda, t) = \langle \tilde{\pi}_{\lambda+i\alpha}(a_t) 1 | \xi_\alpha \rangle$$

$$ii) \quad \Phi_\alpha(\lambda, t) = \langle \tilde{\pi}_\lambda(a_t) \xi_\alpha^{1/2} | \xi_\alpha^{1/2} \rangle .$$

La démonstration se fait en partant de la formule (9) et en tenant compte des conditions d'existence des intégrales

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha(\lambda, t) &= 2 \int_0^\infty Q(a_t, h_\psi)^{\alpha+1/2-i\lambda} \text{sh } \psi^{2\alpha} d\psi \\ &= \int_H Q(a_t, h_\psi)^{\alpha+1/2-i\lambda} \xi_\alpha(\psi) d\psi = \langle \tilde{\pi}_{\lambda+i\alpha}(a_t) 1 | \xi_\alpha \rangle, \end{aligned}$$

et en remarquant que $\xi_\alpha^{1/2}(a_t.h_\psi) = Q(a_t, h_\psi)^\alpha \xi_\alpha^{1/2}(h_\psi)$

$$\begin{aligned} &= \int_H Q(a_t, h_\psi)^{1/2-i\lambda} \xi_\alpha^{1/2}(a_t.h_\psi) \xi_\alpha^{1/2}(h_\psi) d\psi = \\ &= \langle \tilde{\pi}_\lambda(a_t) \xi_\alpha^{1/2} | \xi_\alpha^{1/2} \rangle \end{aligned}$$

IV. TRANSFORMATIONS DE FOURIER-JACOBI, LAPLACE-JACOBI, d'ABEL, etc...

§ IV.1. Transformations d'Abel des noyaux.

Prenons des coordonnées horisphériques sur les espaces $X = G/K$ et $Y = G_+/H$, en utilisant les décompositions d'Iwasawa $G = NAK$ et $G_+ \subset \bar{N}A_+H$:

pour $x = k_\theta a_t e_o = n_\xi a_\tau e_o \in X$, on a

$$k_\theta a_t e_o = \begin{pmatrix} \text{cht} \\ -\text{sht} \sin \theta \\ \text{sht} \cos \theta \end{pmatrix} = n_\xi a_\tau e_o = \begin{pmatrix} \text{ch } \tau + \frac{\xi^2}{2} e^{-\tau} \\ \xi e^{-\tau} \\ \text{sh } \tau + \frac{\xi^2}{2} e^{-\tau} \end{pmatrix},$$

ainsi $P(k_\theta a_t e_o, e) = P(n_\xi a_\tau e_o, e) = (\text{cht} - \text{sht} \cos \theta)^{-1} = e^\tau$,

et $d_\alpha x = e_\alpha (\text{sht} |\sin \theta|)^{2\alpha} \text{sht} dt d\theta = e_\alpha |\xi|^{2\alpha} e^{-(2\alpha+1)\tau} d\xi d\tau$;

pour $y = h_\psi a_t e_2 = \bar{n}_\xi a_\tau e_2 \in Y$ on a

$$h_\psi a_t e_2 = \begin{pmatrix} \text{sht} \text{ch } \psi \\ \text{sht} \text{sh } \psi \\ \text{cht} \end{pmatrix} = \bar{n}_\xi a_\tau e_2 = \begin{pmatrix} \text{sh } \tau + \frac{\xi^2}{2} e^\tau \\ \xi e^\tau \\ \text{ch } \tau - \frac{\xi^2}{2} e^\tau \end{pmatrix}, \text{ avec } |\xi| < 1 - e^{-\tau},$$

ainsi, $Q(h_\psi a_t e_2, e) = Q(\bar{n}_\xi a_\tau e_2, e) = (\text{cht} + \text{sht} \text{ch } \psi)^{-1} = e^{-\tau}$ et

$d_\alpha y = e_\alpha |\xi e^\tau|^{2\alpha} e^\tau d\tau d\xi$.

Ecrivons, dans ces coordonnées horisphériques, l'expression des caractères $P_{\alpha, \lambda}$ et $Q_{\alpha, \lambda}$ des algèbres de noyaux :

Soit $\mathcal{X}^\#(X)$ l'ensemble des noyaux continus sur $X \times X$, G -invariants et à support compact. $(\mathcal{X}^\#(X), o_\alpha)$ est une sous-algèbre de l'algèbre $(\mathcal{Y}^\#(X), o_\alpha)$. Pour $\alpha \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(\alpha) > -1/2$, $\lambda \in \mathbb{C}$, et $V \in \mathcal{X}^\#(X)$ on a

$$P_{\alpha, \lambda}(V) = e_\alpha \int_{NA} e^{-i\lambda\tau} e^{-(\alpha+1/2)\tau} V(n_\xi a_\tau e_o, e_o) |\xi|^{2\alpha} d\xi d\tau.$$

En remarquant que, pour un noyau G -invariant sur X , on a $V(g e_o, e_o) = V(g^{-1} e_o, e_o)$ et que $n_\xi a_\tau = a_\tau n_{\xi^{-1}} e^{-\tau\xi}$ on obtient :

$$P_{\alpha, \lambda}(V) = \int_{A_+} \cos \lambda\tau e_\alpha e^{-(\alpha+1/2)\tau} \int_N V(n_\xi a_\tau e_o, e_o) |\xi|^{2\alpha} d\xi d\tau.$$

De même, soit $\alpha \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(\alpha) \geq -1/2$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{R}$ et V un noyau de $\mathcal{V}_{a,\alpha}^\#(Y)$:

$$Q_{\alpha,\lambda}(V) = e_\alpha \int_{A_+} e^{i\lambda\tau} e^{(\alpha+1/2)\tau} \int_{|\xi| < 1-e^{-\tau}} V(\bar{n}_\xi a_\tau e_2, e_2) |\xi|^{2\alpha} d\xi d\tau.$$

Définitions :

i) La transformée d'Abel d'un noyau V , d_α -x-intégrable et G -invariant sur X , est la fonction sur \mathbb{R}_+ , obtenue comme moyenne sur un horicycle :

$$(16) \quad W_\alpha V(t) = e_\alpha e^{-(\alpha+1/2)t} \int_N V(n_\xi a_t e_o, e_o) |\xi|^{2\alpha} d\xi$$

ii) La transformée d'Abel d'un noyau V , G_+ -invariant sur Y , est la fonction sur \mathbb{R}_+ , moyenne sur un horicycle :

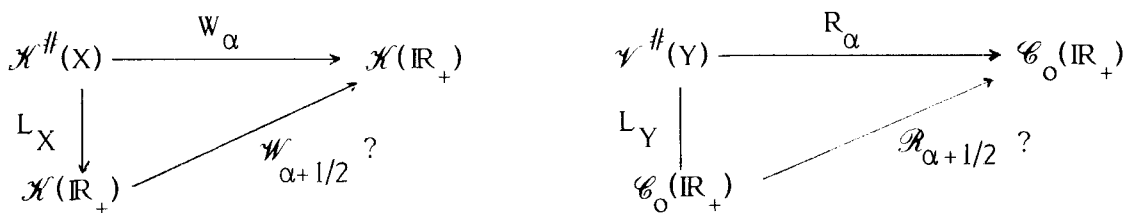
$$(17) \quad R_\alpha V(t) = e_\alpha e^{(\alpha+1/2)t} \int_{|\xi| < 1-e^{-t}} V(\bar{n}_\xi a_t e_2, e_2) |\xi|^{2\alpha} d\xi.$$

Avec ces définitions, on a $P_{\alpha,\lambda}(V) = \mathcal{F}_C \circ W_\alpha V(\lambda)$ où \mathcal{F}_C est la transformation de Fourier en cosinus sur \mathbb{R}_+ (ou par parité de $W_\alpha V$ la transformation de Fourier usuelle) et $Q_{\alpha,\lambda}(V) = \mathcal{L} \circ R_\alpha V(-i\lambda)$ où \mathcal{L} est la transformation de Laplace usuelle ; en conséquence on obtient :

Proposition 10. Les transformations d'Abel W_α et R_α sont des morphismes des algèbres de noyaux $(\mathcal{X}^\#(X), \circ_\alpha)$ et $(\mathcal{V}_{a,\alpha}^\#(Y), \tilde{\circ}_\alpha)$ dans les algèbres de convolutions usuelles sur \mathbb{R}_+ .

§ IV.2. Transformations intégrales fractionnaires.

Par l'intermédiaire des morphismes L_X et L_Y , transportons les transformations d'Abel sur les algèbres de convolutions de fonctions sur \mathbb{R}_+ en fermant les diagrammes :



Par définition, pour $f \in \mathcal{X}(\mathbb{R}_+)$,

$$\mathcal{W}_{\alpha+1/2}(f)(t) = e_{\alpha} e^{-(\alpha+1/2)t} \int_{\mathbb{R}} f(\text{Argch}(\text{cht} + \frac{\xi^2}{2} e^{-t})) |\xi|^{2\alpha} d\xi$$

donc, en posant $\text{chs} = \text{cht} + \frac{\xi^2}{2} e^{-t}$, on obtient :

$$(18) \quad \mathcal{W}_{\alpha+1/2}(f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1/2)} \int_t^{\infty} \frac{f(s) \text{shs} ds}{(\text{chs}-\text{cht})^{1-(\alpha+1/2)}} ; \text{ c'est une}$$

intégrale fractionnaire du type Weyl.

De même pour $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)$,

$$(19) \quad \mathcal{R}_{\alpha+1/2}(f)(t) = e_{\alpha} e^{(\alpha+1/2)t} \int_{t|\xi| < 1-e^{-t}}^{\infty} f(\text{Argch}(\text{cht} - \frac{\xi^2}{2} e^t)) |\xi|^{2\alpha} d\xi,$$

ainsi

$$\mathcal{R}_{\alpha+1/2}(f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1/2)} \int_0^t \frac{f(s) \text{shs} ds}{(\text{cht}-\text{chs})^{1-(\alpha+1/2)}}, \text{ c'est une}$$

intégrale fractionnaire du type Riemann-Liouville. Voir Erdelyi [3], chap. XIII, pour les intégrales de Weyl et de Riemann-Liouville proprement dites ; voir T. Koornwinder [8] et Mizony [10] pour celles ci-dessus définies.

Rappelons quelques propriétés élémentaires de ces transformations :

i) Pour une fonction f bien régulière, par exemple de classe \mathcal{C}^{∞} et à support compact dans \mathbb{R}_+^* , les applications $\mu \mapsto \mathcal{W}_{\mu}(f)$ et $\mu \mapsto \mathcal{R}_{\mu}(f)$ sont analytiques sur \mathbb{C} .

ii) Pour μ et $\nu \in \mathbb{C}$, $\mathcal{W}_{\mu+\nu} = \mathcal{W}_{\mu} \circ \mathcal{W}_{\nu}$, $\mathcal{R}_{\mu+\nu} = \mathcal{R}_{\mu} \circ \mathcal{R}_{\nu}$; $\mathcal{W}_0 = \mathcal{R}_0 = \text{id}$,
 $\mathcal{R}_{-1} = -\mathcal{W}_{-1} = \frac{d}{\text{sh}t dt}$.

iii) Soit $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^{∞} et à support compact sur \mathbb{R}_+ . Et pour $\delta > 0$ soit $\mathcal{C}_{\delta}^{\infty}(\mathbb{R}_+)$ l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^{∞} et à support dans $[\delta, +\infty[$.

Pour tout $\mu \in \mathbb{C}$, \mathcal{W}_{μ} est une bijection de $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$

\mathcal{R}_{μ} est une bijection de $\mathcal{C}_{\delta}^{\infty}(\mathbb{R}_+)$ sur $\mathcal{C}_{\delta}^{\infty}(\mathbb{R}_+)$.

iv) \mathcal{R}_μ et \mathcal{W}_μ sont transposées l'une de l'autre : pour deux bonnes fonctions f_1 et f_2

$$\int_0^\infty f_1(t) \mathcal{R}_\mu(f_2)(t) sht \, dt = \int_0^\infty \mathcal{W}_\mu(f_1)(t) f_2(t) sht \, dt.$$

Proposition 11 :

a) Les transformations de Weyl \mathcal{W}_μ et de Riemann-Liouville \mathcal{R}_μ échangent les produits de convolutions entre eux : pour $\alpha, \mu \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(\alpha) \geq -1/2$, $\operatorname{Re}(\alpha - \mu) \geq -1/2$

$$\text{pour } f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+), \text{ alors } \mathcal{W}_\mu(f_1 *_\alpha f_2) = \mathcal{W}_\mu(f_1) *_{\alpha - \mu} \mathcal{W}_\mu(f_2)$$

$$\text{pour } f, g \in \mathcal{C}_\delta^\infty(\mathbb{R}_+), \text{ alors } \mathcal{R}_\mu(f_1 \tilde{*}_\alpha f_2) = \mathcal{R}_\mu(f_1) \tilde{*}_{\alpha - \mu} \mathcal{R}_\mu(f_2).$$

b) Les transformations \mathcal{R}_μ et \mathcal{W}_μ relient les fonctions de Jacobi :

$$b_{\alpha+\mu}(sht)^{2(\alpha+\mu)} \varphi_{\alpha+\mu}(\lambda, t) = \mathcal{R}_\mu(b_\alpha(shts)^{2\alpha} \varphi_\alpha(\lambda, s))(t)$$

$$e_{\alpha+\mu}(sht)^{2(\alpha+\mu)} \Phi_{\alpha+\mu}(\lambda, t) = \mathcal{W}_\mu(e_\alpha(shts)^{2\alpha} \Phi_\alpha(\lambda, s))(t)$$

Preuve. a) est une conséquence directe de la proposition 10, en appliquant la propriété ii) ci-dessus sur les transformations \mathcal{R}_μ et \mathcal{W}_μ .

Par convention $*_{-1/2}$ est la convolution usuelle associée à la transformation de Fourier en cosinus :

$$f_1 *_{-1/2} f_2(t) = \int_0^\infty (f_1(t+s) + f_1(|t-s|)) f_2(s) ds$$

et $\tilde{*}_{-1/2}$ est la convolution usuelle associée à la transformation de Laplace :

$$f_1 \tilde{*}_{-1/2} f_2(t) = \int_0^t f_1(t-s) f_2(s) ds.$$

Pour montrer b) partons du fait que $\mathcal{F}_\alpha(f_V)(\lambda) = \mathcal{F}_c \circ \mathcal{W}_{\alpha+1/2}(f_V)(\lambda)$, c'est-à-dire $b_\alpha \int_{\mathbb{R}_+} f_V(t) \varphi_\alpha(\lambda, t) sht^{2\alpha+1} dt = \int_{\mathbb{R}_+} \mathcal{W}_{\alpha+1/2}(f_V)(t) \cos \lambda t \, dt$, et en appliquant la propriété iv) $\mathcal{F}_\alpha(f_V)(\lambda) = \int_{\mathbb{R}_+} f_V(t) \mathcal{R}_{\alpha+1/2} \left(\frac{\cos \lambda s}{shs} \right) (t) sht \, dt$.

En identifiant les deux formes linéaires sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ on a :

$$(20) \quad b_{\alpha} \varphi_{\alpha}(\lambda, t) \text{sht}^{2\alpha} = \mathcal{R}_{\alpha+1/2}\left(\frac{\cos \lambda s}{\text{sh } s}\right)(t), \text{ formule valable pour } \text{Re}(\alpha) \geq -1/2$$

et $\lambda \in \mathbb{C}$.

Puis par application de la propriété ii) on a le premier résultat. Pour le deuxième résultat partons de $\mathcal{L}_{\alpha}(f_V)(\lambda) = \mathcal{L}(\mathcal{R}_{\alpha+1/2}(f_V))(-i\lambda)$ alors on obtient

$$(21) \quad e_{\alpha} \Phi_{\alpha}(\lambda, t) \text{sht}^{2\alpha} = \mathcal{W}_{\alpha+1/2}\left(\frac{e^{i\lambda s}}{\text{sh } s}\right)(t)$$

valable pour $\text{Re}(\alpha) \geq -1/2$, $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $\text{Im}(\lambda) > \text{Re}(\alpha) - 1/2$.
c.q.f.d.

Comme conséquences de cette proposition voici d'autres relations entre les fonctions de Jacobi qui permettent d'obtenir la formule d'inversion des transformations \mathcal{F}_{α} et \mathcal{L}_{α} à partir des transformations de Fourier et de Laplace ordinaires. Pour cela notons $c_{\alpha}(\lambda)$ pour $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, la fonction de Harish-Chandra définie par $c_{\alpha}(\lambda) = \frac{2^{2\alpha+1} \Gamma(i\lambda)}{\Gamma(\alpha+1/2+i\lambda)}$.

Proposition 12 :

a) Pour $\alpha \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(\alpha) \geq -1/2$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\text{Im}(\lambda)| < \text{Re}(\alpha+1/2)$,

$$(22) \quad \varphi_{\alpha}(\lambda, t) = \frac{2^{-3(\alpha+1/2)} \Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}} c_{\alpha}(\lambda) c_{\alpha}(-\lambda) \mathcal{W}_{-(\alpha+1/2)}(\cos \lambda s)(t),$$

et donc $\frac{c_{\alpha+\mu}(\lambda) c_{\alpha+\mu}(-\lambda)}{\Gamma(\alpha+\mu+1)} \varphi_{\alpha+\mu}(\lambda, t) = 2^{-3\mu} \mathcal{W}_{-\mu}\left(\frac{c_{\alpha}(\lambda) c_{\alpha}(-\lambda)}{\Gamma(\alpha+1)} \varphi_{\alpha}(\lambda, s)\right)(t).$

b) Pour $f \in \mathcal{X}(\mathbb{R}_+)$, par exemple, la formule d'inversion de \mathcal{F}_{α} s'écrit :

$$f(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{2^{3(\alpha+1/2)}}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^{\infty} \mathcal{F}_{\alpha}(f)(\lambda) \varphi_{\alpha}(\lambda, t) (c_{\alpha}(\lambda) c_{\alpha}(-\lambda))^{-1} d\lambda.$$

Preuve. a) Du fait que la formule du produit (formule (8)), de la définition de la convolution (formule (14)) et de la définition de \mathcal{F}_{α} on a pour $f \in \mathcal{X}(\mathbb{R}_+)$

i) $f *_{\alpha} \varphi_{\alpha}(\lambda, s)(t) = \mathcal{F}_{\alpha}(f)(\lambda) \varphi_{\alpha}(\lambda, t)$; de même on a
 $(f * \cos \lambda s)(t) = \mathcal{F}_{\mathbb{C}}(f)(\lambda) \cos \lambda t$; appliquons $\mathcal{W}_{-(\alpha+1/2)}$ à cette dernière formule,

remplaçons f par $\mathcal{W}_{\alpha+1/2}(f)$ et appliquons la proposition 11, a), on a

$$\text{ii) } (f \underset{\alpha}{*} \mathcal{W}_{-(\alpha+1/2)}(\cos \lambda s))(t) = \mathcal{F}_C(\mathcal{W}_{\alpha+1/2}(f))(\lambda) \mathcal{W}_{-(\alpha+1/2)}(\cos \lambda s)(t)$$

En comparant i) et ii) on voit que $\varphi_{\alpha}(\lambda, t)$ et $\mathcal{W}_{-(\alpha+1/2)}(\cos \lambda s)(t)$ sont proportionnelles : $\varphi_{\alpha}(\lambda, t) = k(\lambda, \alpha) \mathcal{W}_{-(\alpha+1/2)}(\cos \lambda s)(t)$. Comme $\varphi_{\alpha}(\lambda, 0) = 1$ on a

$$\text{a) } k(\lambda, \alpha)^{-1} = \mathcal{W}_{-(\alpha+1/2)}(\cos \lambda s)(0) = \frac{2^{3(\alpha+1/2)} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha+1) c_{\alpha}(\lambda) c_{\alpha}(-\lambda)}. \text{ a) est ainsi démontré.}$$

Pour obtenir b) il suffit d'inverser $\mathcal{F}_{\alpha} = \mathcal{F}_C \circ \mathcal{W}_{\alpha+1/2}$, ainsi on a

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \mathcal{F}_{\alpha}(f)(\lambda) \mathcal{W}_{-(\alpha+1/2)}(\cos \lambda s)(t) d\lambda, \text{ et en tenant compte de a) on}$$

a la formule cherchée.

Remarque : Soient f une fonction sur \mathbf{R}_+ et χ_t la fonction caractéristique du segment $[0, t]$; alors on obtient

$$f \underset{\alpha}{*} \Phi_{\alpha}(\lambda, s)(t) = \mathcal{L}_{\alpha}(\chi_t f)(\lambda) \Phi_{\alpha}(\lambda, t).$$

Mais cette formule ne nous permet pas d'obtenir une formule d'inversion de la transformation de Laplace \mathcal{L}_{α} par une méthode similaire à l'obtention de celle de \mathcal{F}_{α} . Aussi nous allons proposer deux formules d'inversion, l'une en inversant $\mathcal{L}_{\alpha} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R}_{\alpha+1/2}$, l'autre en considérant le lien existant entre la transformation de Fourier et la transformation de Laplace.

(23) Posons $\psi_{\alpha}(\lambda, t) = \mathcal{R}_{-(\alpha+1/2)}(e^{i\lambda s})(t)$ et rappelons le lien de linéarité entre les fonctions de Jacobi : pour $\alpha \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(\alpha) \geq -1/2$,

$$(24) \quad \frac{2\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha+1/2)}{\Gamma(\alpha+1)} \varphi_{\alpha}(\lambda, t) = \frac{\Gamma(i\lambda) \Gamma(1-i\lambda)}{\Gamma(1/2+\alpha+i\lambda) \Gamma(1/2-\alpha-i\lambda)} \Phi_{\alpha}(\lambda, t) + \frac{\Gamma(-i\lambda) \Gamma(1+i\lambda)}{\Gamma(1/2+\alpha-i\lambda) \Gamma(1/2-\alpha+i\lambda)} \Phi_{\alpha}(-\lambda, t)$$

Proposition 13 :

a) Pour $f \in \mathcal{C}_a(\mathbf{R}_+)$ et f indéfiniment dérivable alors

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{ic-\infty}^{ic+\infty} \mathcal{L}_{\alpha}(f)(\lambda) \psi_{\alpha}(-\lambda, t) d\lambda \text{ pour tout } c > a.$$

b) Pour $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)$

$$\mathcal{F}_\alpha(f)(\lambda) = \frac{1}{2^{\alpha+3/2} \Gamma(\alpha+1/2)} \left\{ \frac{\Gamma(i\lambda) \Gamma(1-i\lambda)}{\Gamma(1/2+\alpha+i\lambda) \Gamma(1/2+\alpha-i\lambda)} \mathcal{L}_\alpha(f)(\lambda) + \frac{\Gamma(-i\lambda) \Gamma(1+i\lambda)}{\Gamma(1/2+\alpha-i\lambda) \Gamma(1/2-\alpha+i\lambda)} \mathcal{L}_\alpha(f)(-\lambda) \right\}$$

et donc
$$f(t) = \frac{1}{2\pi \Gamma(2\alpha+1)} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}_\alpha(f)(\lambda) \varphi_\alpha(\lambda, t) \frac{-i\lambda \Gamma(\alpha+1/2-i\lambda)}{\Gamma(1/2-\alpha-i\lambda)} d\lambda$$

Remarque : A partir des formules (24) et (22) on a également

$$(25) \quad \Phi_\alpha(\lambda, t) = 2^{\alpha+1/2} \Gamma(\alpha+1/2) \frac{\Gamma(-i\lambda) \Gamma(1/2-\alpha-i\lambda)}{\Gamma(1-i\lambda) \Gamma(\alpha+1/2-i\lambda)} \mathcal{W}_{-(\alpha+1/2)}(e^{i\lambda s})(t).$$

Problème : Quel lien existe-t-il entre les fonctions $\Psi_\alpha(\lambda, t)$ et $\Phi_\alpha(\lambda, t)$?

Terminons ce paragraphe en signalant que cet outil puissant que constitue l'intégration dite fractionnaire, et qui permet d'obtenir très rapidement les propriétés des transformations de Jacobi à partir des propriétés des transformations de Fourier et de Laplace usuelles, peut s'interpréter complètement sur le groupe de Lorentz. Prenons par exemple la propriété iv) \mathcal{R}_μ et \mathcal{W}_μ sont transposées l'une de l'autre :

Soient $f_1 = L_X V_1$ et $f_2 = L_X V_2$ où V_1 et V_2 sont deux noyaux G-invariants et à supports compacts et où f_1 et f_2 sont considérées comme fonctions sur A_+ ou comme fonctions sur G, bi-invariantes par K.

La formule
$$\int_0^\infty f_1(t) \mathcal{R}_{\alpha+1/2}(f_2)(t) sht dt = \int_0^\infty \mathcal{W}_{\alpha+1/2}(f_1)(t) f_2(t) sht dt$$
 s'écrit

$$\int_{A_+} V_1(a_t e_o, e_o) \mathcal{R}_{\alpha+1/2}(L_X V_2)(a_t) sht dt = \int_{A_+} W_\alpha(V_1)(a_t) V_2(a_t e_o, e_o) sht dt,$$

ou encore,

$$\int_G V_1(g e_o, e_o) \mathcal{R}_{\alpha+1/2}(L_X V_2)(g) dg = \int_G W_\alpha(V_1)(g) V_2(g e_o, e_o) dg.$$

Calculons $\mathcal{R}_{\alpha+1/2}(L_X V_2)(a_t)$:

on a
$$\int_{A_+} W_\alpha(V_1)(a_\tau) V_2(a_\tau e_o, e_o) sh \tau d\tau = \frac{1}{2} \int_A W_\alpha(V_1)(a_\tau) V_2(a_\tau e_o, e_o) e^\tau d\tau$$

$$= \frac{e_\alpha}{2} \int_{NA} V_1(n_\xi a_\tau e_o, e_o) |\xi|^{2\alpha} e^{-(\alpha+1/2)\tau} V_2(a_\tau e_o, e_o) e^\tau d\tau d\xi ;$$

pour $g = n_\xi a_\tau k_\theta \in G$, posons $H(g) = t$, et posons $n_\xi a_\tau e_o = k_\theta a_t e_o$

$$= \frac{e_\alpha}{2} \int_{KA_+} V_1(a_t e_o, e_o) e^{(\alpha-1/2)H(k_\theta a_t)} V_2(a_{H(k_\theta a_t)} e_o, e_o) |\sin \theta|^{2\alpha} \text{sht}^{2\alpha+1} d\theta dt,$$

$$\text{ainsi } \mathcal{R}_{\alpha+1/2}(L_X V_2)(a_t) = \frac{e_\alpha}{2} (\text{sht})^{2\alpha} \int_K V_2(a_{H(k_\theta a_t)} e_o, e_o) e^{(\alpha-1/2)H(k_\theta a_t)} |\sin \theta|^{2\alpha} d\theta ;$$

or $e^{H(k_\theta a_t)} = P(a_t, k_\theta)$ est le noyau de Poisson.

Ainsi la transformation de Riemann-Liouville

$$\mathcal{R}_{\alpha+1/2}(f)(t) = b_\alpha \text{sht}^{2\alpha} n_\alpha \int_K f(H(k_\theta a_t)) P(a_t, k_\theta)^{\alpha-1/2} |\sin \theta|^{2\alpha} d\theta \quad \text{s'interprète}$$

à partir du noyau de Poisson associé au groupe de Lorentz.

De même, la transformation de Weyl $\mathcal{W}_{\alpha+1/2}$ s'interprète à l'aide du noyau de Poisson de deuxième espèce associé au semi-groupe de Lorentz. Il suffit de faire un calcul similaire, en utilisant la décomposition du type Iwasawa $G_+ \subset \bar{N}_+ A_+ H$. Pour $g = \bar{n}_\xi a_t h_\psi$, notons $t = A(g)$ alors nous avons :

$$\mathcal{W}_{\alpha+1/2}(f)(t) = e_\alpha \text{sht}^{2\alpha} \int_H f(A(h_\psi a_t)) Q(a_t, h_\psi)^{\alpha-1/2} |\text{sh } \psi|^{2\alpha} d\psi.$$

V. $SL(3, \mathbb{R})$ ET LES FONCTIONS DE JACOBI DE DEUXIEME ESPECE.

§ V.1. Un sous semi-groupe ouvert dans $SL(3, \mathbb{R})$: décompositions de Cartan et d'Iwasawa.

Soit $H = S(GL(2, \mathbb{R}) \times GL(1, \mathbb{R})) \simeq GL(2, \mathbb{R})$, sous-groupe de $SL(3, \mathbb{R})$, et soit

$$H_+ = \left\{ h_{a,b,c,d} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & \Delta^{-1} \end{pmatrix} / a,b,c,d \in \mathbb{R}_+^*, \Delta = ad-bc > 0 \right\} ;$$

c'est un sous-semi-groupe ouvert de H .

$$\text{Soit } A = \{ a_t = \begin{pmatrix} \text{cht} & 0 & \text{sht} \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sht} & 0 & \text{cht} \end{pmatrix} / t \in \mathbb{R} \} \text{ et } A_+ = \{ a_t \in A / t > 0 \} .$$

Proposition 14.

i) Pour $a_{t_1}, a_{t_2} \in A_+$ et $h = h_{a,b,c,d} \in H_+$, on a $a_{t_1} h a_{t_2} = h_1 a_t h_2$ où

$h_1, h_2 \in H_+$ et où $a_t \in A_+$ est défini par

$$\text{ch}^2 t = \text{cht}_1^2 \text{ch}^2 t_2 + \text{sh}^2 t_1 \text{sh}^2 t_2 \frac{ad}{\Delta} + \text{sht}_1 \text{sht}_2 \text{cht}_1 \text{cht}_2 \left(a \Delta + \frac{d}{\Delta^2} \right).$$

ii) Le semi-groupe S engendré algébriquement dans G par H_+ et A_+ est ouvert dans G et admet la décomposition de Cartan $S = H_+ A_+ H_+$. De même $\bar{H}_+, \bar{A}_+, \bar{H}_+ \subset \bar{S}$ sont des semi-groupes.

La démonstration de cette proposition ne comporte que de simples vérifications.

Soit M le sous-groupe de \bar{H}_+ centralisateur de A :

$$M = \{ m_\delta = \begin{pmatrix} e^\delta & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2\delta} & 0 \\ 0 & 0 & e^\delta \end{pmatrix} / \delta \in \mathbb{R} \}.$$

$$\text{Soit } L = \{ l_\xi = \begin{pmatrix} e^\xi & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\xi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} / \xi \in \mathbb{R} \} \text{ un autre sous-groupe de } \bar{H}_+,$$

$$\text{et } B_+ = \{ h_\psi = \begin{pmatrix} \text{ch } \psi & \text{sh } \psi & 0 \\ \text{sh } \psi & \text{ch } \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} / \psi \in \mathbb{R}_+^* \} \text{ un sous-semi-groupe de}$$

H_+ . Alors, en utilisant la décomposition de type Cartan du semi-groupe de Lorentz, on a :

$$H_+ = LB_+LM \text{ avec unicité de décomposition.}$$

Remarque : Pour $h = l_\xi h_\psi \in H_+$, pour $t_1, t_2 > 0$ on a $a_{t_1} l_\xi h_\psi a_{t_2} = h_1 a_t h_2 \in S$ avec

$$\text{ch}^2 t = \text{ch}^2 t_1 \text{ch}^2 t_2 + \text{sh}^2 t_1 \text{sh}^2 t_2 \text{ch}^2 \psi + 2 \text{sht}_1 \text{sht}_2 \text{cht}_1 \text{cht}_2 \text{ch } \psi \text{ch } \xi ;$$

c'est la deuxième partie de la formule (6) intervenant dans la formule du

produit des fonctions de Jacobi de deuxième espèce $\Phi_{\alpha, \beta}(\lambda, t)$. En fait le choix de ce semi-groupe ouvert S de $SL(3, \mathbb{R})$ a été fait pour retrouver cette formule, la méthode étant la suivante : Les deux groupes $SL(3, \mathbb{R})$ et $SU(2, 1)$ possèdent la même algèbre de Lie complexifiée $sl(3, \mathbb{C})$. La fonction de Jacobi de première espèce $\varphi_{\lambda}^{(1,0)}(t)$ étant fonction sphérique du couple de Gelfand ($SU(2, 1)$, $S(U(2) \times U(1))$), le passage des fonctions de Jacobi de première espèce à celles de deuxième espèce se faisant formellement en complexifiant certains paramètres, nous pouvons définir un automorphisme de $sl(3, \mathbb{C})$ en complexifiant certains sous-groupes à un paramètre de rotations dans $SU(2, 1)$ sur des sous-groupes à un paramètre de rotations hyperboliques. Ainsi certaines propriétés du semi-groupe S et du couple (S, H_+) se déduisent des propriétés correspondantes du couple de Gelfand ($SU(2, 1)$, $S(U(2) \times U(1))$). Cette méthode est généralisable à $SL(n, \mathbb{R})$ et $SU(n-1, 1)$.

Pour étudier une décomposition du type Iwasawa du semi-groupe S , introduisons le sous-groupe nilpotent N de $SL(3, \mathbb{R})$ isomorphe au groupe d'Heisenberg :

$$N = \left\{ n_{x,y,z} = \begin{pmatrix} 1+z & x & -z \\ y & 1 & -y \\ z & x & 1-z \end{pmatrix} / x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{Soit } N_0 = \left\{ n_u = \begin{pmatrix} 1 & u & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} / u \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{un sous-groupe de } H \text{ qui per-}$$

met d'avoir la décomposition du type Iwasawa de $H_+ : H_+ \subset LB_+ N_0 M$.

Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de \mathbb{R}^3 sur lequel agit le groupe $SL(3, \mathbb{R})$. Nous avons les propriétés évidentes suivantes :

- Les sous-groupes N_0 et N stabilisent le vecteurs $e_1 + e_3$
- Les sous-groupes A et M stabilisent la droite $\mathbb{R}(e_1 + e_3)$
- A normalise N : $a_t n_{x,y,z} = n_{e^t x, e^t y, e^{2t} z} a_t$.
- M et L normalisent N_0 : $m_{\delta} n_u = n_{e^{3\delta} u} m_{\delta}$ et $l_{\xi} n_u = n_{e^{2\xi} u} l_{\xi}$;
- M normalise N : $m_{\delta} n_{x,y,z} = n_{e^{3\delta} x, e^{-3\delta} y, z} m_{\delta}$.

Notons encore $N_0^+ = \{n_u / u \in \mathbb{R}_+^*\}$ et $N_+ = \{n_{x,y,z} \in N / y > 0\}$.

Lemme 15.

- i) $P_+ = N_0^+ M A N_+$ est un sous-semi-groupe de G qui stabilise la droite $\mathbb{R}(e_1 + e_3)$.
- ii) Le semi-groupe $N_0^+ M$ de H_+ vérifie la normalisation suivante par rapport à A : $a_t N_0^+ M \subset N_0^+ M a_t N_+$, et c'est le plus grand sous-semi-groupe de H_+ vérifiant cette normalisation.

Preuve. Du fait que MAN est un sous-groupe de G et que M centralise N_0 , pour montrer que P_+ est un semi-groupe il suffit de vérifier que $N_+ N_0^+ \subset N_0^+ M A N_+$ et $A N_0^+ \subset N_0^+ M A N_+$. Or on a :

$$- n_{x,o,z} n_u = n_u n_{x-zu,o,z} \text{ et pour } uy > -1 \text{ en posant } e^{-2\delta} = 1+uy,$$

$$n_{o,y,o} n_u = n_{e^{2\delta} u} m_{\delta} a_{-\delta} n_{o,e^{2\delta} y, \frac{e^{2\delta}-1}{2}}$$

$$- a_t n_u = n_{e^{-t} u} n_{u s h t, o, o} a_t.$$

De cette dernière égalité on déduit de plus ii) en utilisant la décomposition du type Iwasawa de H_+ : $H_+ = L B_+ N_0^+ M$.

Proposition 16. Décomposition du type Iwasawa du semi-groupe S .

- i) $S \subset H_+ A N$ qui est un ouvert de G , avec unicité de décomposition de ses éléments.
- ii) \bar{S} agit sur $H_+ A N_+$ (et sur $H_+ A N$), plus précisément $S H_+ A N_+ \subset H_+ A N_+$.
- iii) En particulier \bar{S} agit sur $\Gamma = H_+ A N_+ / P_+ \simeq H_+ / N_0^+ M \simeq L B_+$.
- iv) \bar{S} agit aussi sur $H_+ A N / M A N \simeq H_+ / M$ et en particulier A_+ agit sur H_+ / M et donc sur $M \setminus H_+ / M \simeq L B_+$.

Cette proposition se démontre par simple vérification.

Remarque : Soit $l_{\xi} h_{\psi} \in L B_+$ le représentant canonique de $M \setminus H_+ / M$, notons $a_t \cdot l_{\xi} h_{\psi} = l_{\xi(t)} h_{\psi(t)}$ celui de $a_t l_{\xi} h_{\psi}$ dans $M \setminus H_+ A N / M A N \simeq M \setminus H_+ / M$,

alors on a $e^{\pm \xi(t)} \operatorname{ch} \psi(t) = \frac{\operatorname{sht} + \operatorname{cht} \operatorname{ch} \psi e^{\pm \xi}}{\operatorname{cht} + \operatorname{sht} \operatorname{ch} \psi e^{\pm \xi}}$; pour cela il faut considérer le semi-groupe $S_{\pm} = H_{+}^{-1} A_{+} H_{+}^{-1}$ et remarquer que $h_{\psi} \ell_{\xi} = m_{-\frac{2\xi}{3}} \ell_{\xi} h_{\psi} m_{\frac{2\xi}{3}}$.

Ainsi l'action canonique de A_{+} sur $M \setminus H_{+} / M$ est exactement l'action considérée au § 1.2, permettant de définir les fonctions de Jacobi de deuxième espèce $\Phi_{\alpha, \beta}(\lambda, t)$ comme moyenne d'un noyau de Poisson.

§ V.2. Espace homogène S/H_{+} et algèbres de Volterra.

Considérons l'espace homogène $Y = S/H_{+}$, que nous identifierons soit à $MLB_{+} A_{+} \subset S$, en utilisant la décomposition de Cartan de H_{+} , soit à $LB_{+} N_{0}^{+} A_{+} \subset S$, en utilisant la décomposition d'Iwasawa de H_{+} . C'est un ouvert dans l'espace symétrique de rang 1 G/H .

Remarques sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$.

Nous pouvons identifier Y à un cône dans l'algèbre de Lie $\underline{G} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$, des matrices 3×3 de trace nulle sur laquelle le groupe G agit par la représentation adjointe.

Soit σ l'involution dans \underline{G} définie par $\sigma(X) = J \times J$ où $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; alors

$\underline{G} = \underline{\mathfrak{P}} + \underline{\mathfrak{H}}$ où $\underline{\mathfrak{P}} = \{X \in \underline{G} / \sigma(X) = -X\}$ et $\underline{\mathfrak{H}} = \{X \in \underline{G} / \sigma(X) = X\}$ est l'algèbre de Lie du sous-groupe H .

Soit $\underline{H}_{+} = \{X \in \underline{\mathfrak{H}} / \exp(X) \in H_{+}\}$ soit $\underline{S} = \{X \in \underline{G} / \exp X \in S\}$ et soit

$C = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & x' \\ 0 & 0 & x' \\ y & -y' & 0 \end{pmatrix} / x+y > 0, x'+y' > 0, xy > x'y > 0 \right\} \subset \underline{\mathfrak{P}}$. Alors on a :

i) \underline{H}_{+} est un cône convexe difféomorphe à H_{+} par l'application exponentielle et $\underline{S} \subset \underline{\mathfrak{P}} + \underline{H}_{+}$.

ii) L'application exponentielle est un difféomorphisme du cône C sur $\{h A_{+} h^{-1} / h \in H_{+}\}$.

Problème : \underline{S} est-il un cône convexe difféomorphe à S par l'application exponentielle ?

Pour avoir une réalisation de Y à partir de la décomposition d'Iwasawa de S ,

posons $\xi_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$; comme MN stabilise ξ_0 , et $S \subset H_{+} A_{+} N$

on a $Y \xrightarrow{\sim} \text{Ad}(H_+ A_+ N)(\xi_0)$, c'est-à-dire Y s'identifie au cône des matrices 3×3 (x_{ij}) de trace nulle, de rang 1 et telles que $x_{0,2} > 0$, $x_{1,2} > 0$, $x_{2,2} > 1$, $x_{2,0} < 0$ et $x_{2,1} > 0$.

En utilisant la décomposition de Cartan de S et en prenant

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R}) \text{ on obtient une autre réalisation de } Y :$$

$Y \simeq \text{Ad}(S)(X_0)$ qui est le translaté par X_0 du cône $\text{Ad}(H_+ A_+ N)(\xi_0)$.

(cf. W. KOSTERS [9], qui réalise de cette manière les espaces $SL(n, \mathbb{R})/S(GL(1) \times GL(n-1))$).

Ordonnons cet espace Y par $y > y'$ si et seulement si, il existe $g \in S$ tel que $y = y'g$ (c'est-à-dire si $y = g_1 H_+$ et $y' = g_2 H_+$, $g_1 H_+ = g_2 g H_+$).

Définition. Soit $\mathcal{V}^\#(Y)$ l'algèbre de Volterra des noyaux continus sur $\overline{Y \times Y}$, nuls en dehors du graphe de l'ordre et invariants par l'action du semi-groupe S . La structure d'algèbre étant donnée par la composition des noyaux : pour $V_1, V_2 \in \mathcal{V}^\#(Y)$

$$V_1 \circ V_2(y_1, y_2) = \int_{M \setminus Y} V_1(y_1, z) V_2(z, y_2) dz,$$

où la mesure dy sur $M \setminus Y$ est l'image canonique de la restriction à S de la mesure de Haar fixée dg sur G .

Sur la décomposition de type Cartan de S , une mesure de Haar s'écrit : $d(h_1 a_t h_2) = dh_1 sh^3 t cht dt dh_2$ où dh est une mesure de Haar sur H qui, sur la décomposition $MLB_+ H$ de l'ouvert H_+ dans H , s'écrit :

$$d(m_1 l_\xi h_\psi m_2) = dm_1 sh \psi ch \psi d\xi d\psi dm_2 \text{ où } dm \text{ est une mesure de Lebesgue.}$$

Ainsi, sur $M \setminus Y$, $dy = d(l_\xi h_\psi a_t) = sh \psi ch \psi sh^3 t cht d\xi d\psi dt$ et sur

$$\Gamma = M \setminus H_+ / M \text{ la mesure image de } dh \text{ est } d\gamma = d(l_\xi h_\psi) = sh \psi ch \psi d\xi d\psi.$$

Définitions :

i) pour $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ prenons la mesure $d_{\alpha, \beta} y$ sur $M \setminus Y$ définie par

$$d_{\alpha, \beta} y = d_{\alpha, \beta} (l_\xi h_\psi a_t) = |sh \xi ch \psi|^{2\beta} sh \psi^{2(\alpha - \beta - 1)} sh t^{2(\alpha - 1)} cht^{2\beta} dy.$$

ii) Pour V_1 et $V_2 \in \mathcal{V}^{\#}(Y)$ posons comme produit de composition $\tilde{\omega}_{\alpha, \beta}$:

$$V_1 \tilde{\omega}_{\alpha, \beta} V_2(a_t, e) = \int_{M \setminus Y} V_1(a_t, y) V_2(y, e) d_{\alpha, \beta} y$$

qui munit $\mathcal{V}^{\#}(Y)$ d'une structure d'algèbre de composition.

Pour cela il suffit de remarquer que du fait de l'invariance par S des noyaux de Volterra, un noyau est parfaitement déterminé par sa restriction à $A_+ \times \{e\}$ dans $\overline{Y \times Y}$.

Soit L l'application de $\mathcal{V}^{\#}(Y)$ sur $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)$ définie par $L(V)(t) = V(a_t, e)$, alors on a la proposition :

Proposition 17. Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(\alpha) > \text{Re}(\beta) \geq -1/2$, $(\mathcal{V}^{\#}(Y), \tilde{\omega}_{\alpha, \beta})$ est une algèbre commutative isomorphe par L à l'algèbre de convolution $(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+), \tilde{*}_{\alpha, \beta})$

où le produit est défini pour $f_1, f_2 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)$ par

$$f_1 \tilde{*}_{\alpha, \beta} f_2(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty K_{\alpha, \beta}(t_1, t_2, t) f_1(t_1) f_2(t_2) (\text{sht}_1 \text{sht}_2)^{2\alpha+1} (\text{cht}_1 \text{cht}_2)^{2\beta+1} dt_1 dt_2$$

$$\text{avec } K_{\alpha, \beta}(t_1, t_2, t) = 2(\text{sht}_1 \text{sht}_2 \text{sht})^{2\alpha} \int_0^a (\text{ch}^2 t + \text{ch}^2 t_1 + \text{ch}^2 t_2 - 1 - 2\text{cht} \text{cht}_1 \text{cht}_2 \text{ch} \psi)^{\alpha-\beta-1} \times (\text{sh} \psi)^{2\beta} d\psi$$

où $\text{cha} = \frac{\text{ch}^2 t + \text{ch}^2 t_1 + \text{ch}^2 t_2 - 1}{2\text{cht} \text{cht}_1 \text{cht}_2}$; (le noyau $K_{\alpha, \beta}$ étant nul si cha n'existe pas).

Ce noyau peut encore s'écrire en utilisant la représentation intégrale d'Euler de la fonction hypergéométrique lorsque $\text{ch}^2 t + \text{ch}^2 t_1 + \text{ch}^2 t_2 - 1 > 2\text{cht} \text{cht}_1 \text{cht}_2$:

$$K_{\alpha, \beta}(t_1, t_2, t) = (\text{sht} \text{sht}_1 \text{sht}_2)^{-2\alpha} (\text{cht}_1 \text{cht}_2 \text{cht})^{\alpha-\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha-\beta) \Gamma(\beta+1/2)}{\Gamma(\alpha+1/2)} (\text{sha})^{2\alpha-1} {}_2F_1(\alpha+\beta, \alpha-\beta ; \alpha+1/2 ; \frac{1-\text{cha}}{2}).$$

Preuve. Calculons d'abord le noyau $K_{\alpha, \beta}(t_1, t_2, t)$ en partant de la formule (6) du produit des fonctions de Jacobi de deuxième espèce. Considérons ces fonctions comme fonctions sur S , bi-invariantes par H_+ , alors cette formule s'écrit en utilisant la proposition 14 :

$$(26) \quad \Phi_{\alpha, \beta}(\lambda, t_1) \Phi_{\alpha, \beta}(\lambda, t_2) = \int_{LB_+} \Phi_{\alpha, \beta}(\lambda, a_{t_1} \ell_\xi h_\psi a_{t_2}) \text{sh} \psi^{2(\alpha-\beta-1)} | \text{ch} \psi \text{sh} \xi |^{2\beta} \text{sh} \psi \text{ch} \psi d\xi d\psi.$$

Faisons maintenant le changement de variable $(\psi, \xi) \longmapsto (\varphi, t)$ en posant $e^{\pm\varphi} \operatorname{cht} = \operatorname{cht}_1 \operatorname{cht}_2 + \operatorname{sht}_1 \operatorname{sht}_2 \operatorname{ch} \psi e^{\pm\xi}$, alors $\operatorname{sh} \varphi \operatorname{cht} = \operatorname{sht}_1 \operatorname{sht}_2 \operatorname{ch} \psi \operatorname{sh} \xi$, $\operatorname{sh}^2 t_1 \operatorname{sh}^2 t_2 \operatorname{sh}^2 \psi = \operatorname{ch}^2 t + \operatorname{ch}^2 t_1 + \operatorname{ch}^2 t_2 - 1 - 2 \operatorname{cht} \operatorname{cht}_1 \operatorname{cht}_2 \operatorname{ch} \varphi$,

$$\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{sh} \varphi} dt d\varphi = \operatorname{sht}_1 \operatorname{sht}_2 \frac{\operatorname{sh} \psi}{\operatorname{sh} \xi} d\psi d\xi \quad \text{et ainsi}$$

$$\Phi_{\alpha, \beta}(\lambda, t_1) \Phi_{\alpha, \beta}(\lambda, t_2) = \int_0^\infty K_{\alpha, \beta}(t_1, t_2, t) \Phi_{\alpha, \beta}(\lambda, t) \operatorname{cht}^{2\beta+1} \operatorname{sht}^{2\alpha+1} dt, \text{ où le noyau}$$

est défini dans la proposition. Ainsi $(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+), \tilde{*}_{\alpha, \beta})$ est une algèbre commutative, car $K_{\alpha, \beta}$ est symétrique, dont des caractères sont les fonctions de Jacobi $\Phi_{\alpha, \beta}(\lambda, \cdot)$.

Pour montrer le morphisme d'algèbre il suffit de vérifier que

$L(V_1 \tilde{\circ}_{\alpha, \beta} V_2)(t) = L(V_1) \tilde{*}_{\alpha, \beta} L(V_2)(t)$, ce qui se fait par le même changement de variable après avoir utilisé l'invariance des noyaux par S.

Remarque : Pour interpréter géométriquement ces formules, rappelons que la forme de Killing $Q(y_1, y_2)$ sur l'espace symétrique G/H de rang 1, est donnée dans l'algèbre de Lie par la trace du produit $y_1 y_2$. Nous avons donc une métrique riemannienne sur Y définie pour $y_1 = m_{\delta_1} \ell_{\xi_1} h_{\psi_1} a_{t_1} H_+$ et

$y_2 = m_{\delta_2} \ell_{\xi_2} h_{\psi_2} a_{t_2} H_+$ par

$$d(y_1, y_2) = \operatorname{Argch}(\operatorname{Tr}(\operatorname{ad}_{y_1} X_o \operatorname{ad}_{y_2} X_o)^{1/2}) \quad \text{où } X_o = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme $d(m_{\delta} y_1, m_{\delta} y_2) = d(y_1, y_2)$ cette distance passe au quotient $M \setminus Y$ et est S-invariante.

Sur cette variété $M \setminus Y$, la famille de mesures $d_{\alpha, \beta} y$, pour $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(\alpha) \geq \operatorname{Re}(\beta) \geq -1/2$, est A_+ -invariante (seule la mesure pour $\alpha = 1$ et $\beta = 0$ est S-invariante).

Or $\operatorname{ch}^2(d(a_{t_1}, \ell_{\xi} h_{\psi} a_{t_2})) = \operatorname{Tr}(\operatorname{ad}_{a_{t_1}} X_o \operatorname{ad}_{\ell_{\xi} h_{\psi} a_{t_2}} X_o) =$
 $= \operatorname{ch}^2 t_1 \operatorname{ch}^2 t_2 + \operatorname{sh}^2 t_1 \operatorname{sh}^2 t_2 \operatorname{ch}^2 \psi - 2 \operatorname{cht}_1 \operatorname{cht}_2 \operatorname{sht}_1 \operatorname{sht}_2 \operatorname{ch} \psi \operatorname{ch} \xi$; la formule (26) signifie que $\Phi_{\alpha, \beta}(\lambda, t_1) \Phi_{\alpha, \beta}(\lambda, t_2)$ est moyenne, pour la mesure $d_{\alpha, \beta} y$, sur le cercle de $M \setminus Y$ ayant pour centre a_{t_1} et pour rayon la norme du point

a_{t_2} , de la fonction $\Phi_{\alpha, \beta}(\lambda, y)$. Le noyau $K_{\alpha, \beta}(t_1, t_2, t)$ s'interprète en terme de surface dans $M \setminus \bar{Y}$ du triangle de sommets a_{t_1} , a_{t_2} et a_t .

§ V.3. Noyau de Poisson sur $S \times \Gamma$ et $M \setminus Y \times \Gamma$ et représentations de S.

Soit $w = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ l'élément de G qui centralise L et M et normalise

les groupes A et B ; w est un élément du groupe de Weyl de G relativement à H. Alors wH_+AN est un ouvert de G qui est stabilisé par \bar{S}^{-1} (cf. proposition 16). Pour $g \in \bar{S}$ et $\gamma \in \Gamma$, posons $Q(g, \gamma) = \left(\frac{dg \cdot \gamma}{d\gamma}\right)^{1/2}$ où $g \cdot \gamma$ est défini de la manière suivante : soit $\gamma = \ell_\xi h_\psi$, alors $g^{-1} w \ell_\xi h_\psi \in wH_+AN$, donc $g^{-1} w \ell_\xi h_\psi = wh(g)a(g)n(g)$ avec $h(g) \in H_+$, par définition $g \cdot \gamma$ est la classe de $h(g)$ dans $M \setminus H_+/M = \Gamma$, voir le lemme 20 pour le détail.

Alors le noyau de Poisson vérifie une identité de 2-cocycle :

$$Q(g_1 g_2, \gamma) = Q(g_2, g_1 \cdot \gamma) Q(g_1, \gamma) \quad \text{pour } g_1, g_2 \in \bar{S}, \gamma \in \Gamma,$$

et vérifie une propriété d'invariance :

$$Q(mgh, \gamma) = Q(g, \gamma) \quad \text{pour } g \in \bar{S}, m \in M, \gamma \in \Gamma \text{ et } h \in H_+$$

enfin, pour $g = a_t$, $Q(a_t, \ell_\xi h_\psi) = (ch^2 t + sh^2 t ch^2 \psi + 2shtchtch\psi ch\xi)^{-1}$.

Du fait de la propriété d'invariance, ce noyau de Poisson est parfaitement défini sur $M \setminus Y \times \Gamma$.

Proposition 18 :

i) Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(\alpha) \geq \text{Re}(\beta) \geq -1/2$, les formes linéaires

$$V \longmapsto \mathcal{L}_{\alpha, \beta}^{(V)}(\lambda) = \int_{M \setminus Y} V(y, e) Q^{\frac{\alpha + \beta + 1 - i\lambda}{2}}(y, e) d_{\alpha, \beta} y \quad \text{sont caractères de}$$

l'algèbre de Volterra $(\mathcal{V}^\#(Y), \tilde{\sigma}_{\alpha, \beta})$ (au sens du théorème 7, ii)).

ii) Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, l'application $g \mapsto \pi_\lambda(g)$ du semi-groupe S dans $L^2(\Gamma, d\gamma)$ définie pour $f \in L^2(\Gamma, d\gamma)$ par $\pi_\lambda(g)f(\gamma) = Q(g, \gamma)^{1-i\lambda/2} f(g \cdot \gamma)$ est une représentation hilbertienne, qui est isométrique pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

Preuve. i) découle des formules (5) et (6) sur les fonctions de Jacobi en paramétrant $M \setminus Y$ par $LB_+ A_+$.

ii) provient de la formule de 2-cocycle vérifiée par le noyau de Poisson, la seule vérification est la propriété d'isométrie pour λ réel.

Proposition 19. La fonction de Jacobi $\Phi_{\alpha, \beta}(\lambda, t)$ est la restriction au sous semi-groupe à un paramètre A_+ d'un coefficient généralisé de la représentation π_λ : Pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(\alpha) > \text{Re}(\beta) > -1/2$ et $\text{Im}(\lambda) > \text{Re}(\alpha + \beta + 1)$:

$$(27) \quad \Phi_{\alpha, \beta}(\lambda, t) = \int_{\Gamma} Q(a_t, \gamma) \left| 1 - \frac{j\lambda}{2} \xi_{\alpha, \beta}(a_t \cdot \gamma) \xi_{\alpha, \beta}(\gamma) \right| d\gamma$$

$$= \langle \pi_\lambda(a_t) \xi_{\alpha, \beta} \mid \xi_{\alpha, \beta} \rangle, \text{ dans la dualité } L_1, L_\infty \text{ sur } \Gamma,$$

$$\text{où } \xi_{\alpha, \beta}(\gamma) = \xi_{\alpha, \beta}(l_\xi h_\psi) = \text{sh } \psi^{\alpha - \beta - 1} |\text{ch } \psi \text{ sh } \xi|^\beta.$$

Cette proposition résulte du fait que $\xi_{\alpha, \beta}(a_t \cdot \gamma) = Q(a_t, \gamma)^{\frac{\alpha + \beta - 1}{2}} \xi_{\alpha, \beta}(\gamma)$, qui est une conséquence du lemme suivant :

Lemme 20. Décomposition de $a_t \cdot \gamma$ dans wH_+AN , pour $\gamma = l_\xi h_\psi \in M \setminus H_+ / M$.

Posons $a_{-t} w l_\xi h_\psi = w m_{\rho(t)} l_\xi(t) h_\psi(t) m_{r(t)} a_\tau(t) n_{x, y, z}(t)$.

Alors on a :

$$\begin{aligned} e^{-\tau(t)} &= Q(a_t, l_\xi h_\psi)^{1/2} \\ \text{sh } \psi(t) &= \text{sh } \psi Q(a_t, l_\xi h_\psi)^{1/2} \\ \text{ch } \psi(t) \text{ sh } \xi(t) &= \text{ch } \psi \text{ sh } \xi Q(a_t, l_\xi h_\psi) \\ e^{\rho(t)+r(t)} &= (\text{cht} + \text{sht} \text{ ch } \psi e^\xi) Q(a_t, l_\xi h_\psi)^{1/2} \\ e^{3\rho(t)+\xi(t)} &= e^\xi (\text{cht} + \text{sht} \text{ ch } \psi e^\xi) Q(a_t, l_\xi h_\psi)^{1/2} \\ x(t) &= \text{sht} \text{ sh } \psi e^\xi (\text{cht} + \text{sht} \text{ ch } \psi e^{-\xi}) Q(a_t, l_\xi h_\psi) \\ y(t) &= \text{sht} \text{ sh } \psi e^{-\xi} (\text{cht} + \text{sht} \text{ ch } \psi e^\xi) Q(a_t, l_\xi h_\psi) \\ z(t) - \frac{x(t)y(t)}{2} &= \text{sht} \text{ cht} \text{ ch } \psi \text{ sh } \xi Q(a_t, l_\xi h_\psi). \end{aligned}$$

La vérification de ce lemme est simple mais fastidieuse ; ce lemme nous servira dans la suite.

a) Pour $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}, g \in H_+ AN_+$

$$\chi_{\nu, \lambda}(m_{\delta_1} g m_{\delta_2}) = e^{i\nu(\delta_1 + \delta_2)} \chi_{\nu, \lambda}(g),$$

b) Pour $g \in S, m_{\delta_t} a_t n_{x,y,z} \in MAN_+$

$$\chi_{\nu, \lambda}(g m_{\delta_t} a_t n_{x,y,z}) = \chi_{\nu, \lambda}(g) \chi_{\nu, \lambda}(m_{\delta_t} a_t),$$

c) Pour $g_1, g_2 \in S$

$$\int_{M \setminus H_+ / M} \chi_{\nu, \lambda}(g_1 h g_2) dh = \chi_{\nu, \lambda}(g_2) \int_{M \setminus H_+ / M} \chi_{\nu, \lambda}(g_1 h) dh,$$

sous réserve de l'existence des intégrales, qui impose $\text{Im}(\lambda) > |\text{Im}(\nu)|$, comme nous le verrons dans la preuve du théorème suivant. c) s'obtient à partir de b) en utilisant l'invariance de la mesure dh par translation par un élément de LB_+L .

Théorème 22. Posons, pour $\nu, \lambda \in \mathbb{C}, \text{Im}(\lambda) > |\text{Im}(\nu)|$, pour $g \in S$,

$$\Phi_{\nu, \lambda}(g) = \int_{M \setminus H_+ / M} \chi_{\nu, \lambda}(gh) dh, \text{ alors nous avons :}$$

i) $\Phi_{\nu, \lambda}$ est une fonction sur S , bi-invariante par $SL(2, \mathbb{R}_+^*)$, et vérifie la formule du produit :

$$\int_{M \setminus H_+ / M} \Phi_{\nu, \lambda}(g_1 h g_2) dh = \Phi_{\nu, \lambda}(g_1) \Phi_{\nu, \lambda}(g_2)$$

ii) $\Phi_{\nu, \lambda}$ est une fonction de Jacobi de 2ème espèce :

$$\Phi_{\nu, \lambda}(m_{\delta_t} a_t) = (e^{\delta_t h t})^{i\nu} \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2} + i\nu) \Gamma(1 - i\nu)} \Phi_{1, i\nu}(\lambda - 2i, t).$$

Remarque. Ce théorème signifie que nous avons démontré la formule du produit suivante :

$$\Phi_{1, \beta}(\lambda, t_1) \Phi_{1, \beta}(\lambda, t_2) = \frac{\Gamma(\beta + \frac{1}{2}) \Gamma(1 - \beta)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} \Phi_{1, \beta}(\lambda, t(t_1, t_2, \psi, \xi)) \times$$

Autres représentations hilbertiennes, formule du produit :

Dans la théorie des groupes de Lie semi-simples, les représentations unitaires irréductibles s'obtiennent à partir des représentations induites de sous-groupes paraboliques, cf. Warner [14]. En fait la notion de représentation induite se généralise bien aux semi-groupes de Lie que nous considérons, grâce à la décomposition d'Iwasawa. Nous renvoyons à Arzac [1] pour une théorie des représentations induites des groupes, en particulier au chapitre IV, qui, mutatis mutandis, permet de définir des représentations hilbertiennes de S comme représentations induites des caractères des semi-groupes paraboliques MAN_+ et P_+ de $SL(3, \mathbb{R})$.

Lemme 21.

i) Les caractères du semi-groupe MAN_+ sont définis pour tout $(\nu, \lambda) \in \mathbb{C}^2$

$$\text{par } \chi_{\nu, \lambda}(m_\delta a_t n_{x,y,z}) = e^{i\nu\delta + i\lambda t}.$$

ii) Pour $\nu = \lambda$, ces caractères se prolongent en caractères χ_ν du parabolique P_+ par

$$\chi_\nu(n_u m_\delta a_t n_{x,y,z}) = e^{i\nu(\delta+t)}.$$

Preuve. La seule difficulté est de vérifier que pour $\nu \in \mathbb{C}$, χ_ν est un caractère de P_+ , ce qui découle du lemme 15 : pour $n_{u_1} m_{\delta_1} a_{t_1} n_1 \in P_+$

et $n_{u_2} m_{\delta_2} a_{t_2} n_2 \in P_+$, le produit est de la forme $n_u m_{\delta_1 + \delta_2 + \delta} a_{t_1 + t_2} n$

où δ dépend de n_1, δ_1, t_1 et n_{u_2} .

c.q.f.d.

Avant de définir les représentations induites, établissons la formule du produit à partir des propriétés des caractères $\chi_{\nu, \lambda}$ du parabolique MAN_+ . Prolongeons $\chi_{\nu, \lambda}$ à $H_+ AN_+$ en posant

$$\chi_{\nu, \lambda}(l_{\xi_1} h_\psi l_{\xi_2} m_\delta a_t n_{x,y,z}) = \chi_{\nu, \lambda}(m_\delta a_t).$$

En utilisant le fait que M normalise N_+ , centralise A et le fait que pour $l_{\xi_1} h_\psi l_{\xi_2} \in LB_+ L \simeq SL(2, \mathbb{R}_+^*)$ on a $l_{\xi_1} h_\psi l_{\xi_2} = m_{-2/3} \xi_2 l_{\xi_1 + \xi_2} h_\psi m_{2/3} \xi_2$,

on obtient les propriétés d'invariance suivantes :

$\times (1 + \text{th } t_1 \text{ th } t_2 \text{ ch } \psi e^{\xi})^{\beta} \text{ sh } \psi \text{ ch } \psi d\psi d\xi$ où $\text{ch } t(t_1, t_2, \psi, \xi)$ est donné dans la formule (6).

Cette formule est légèrement différente de la formule (6), démontrée par des méthodes analytiques par L. Durand [2], et elle est similaire à celle démontrée pour les fonctions de Jacobi de 1ère espèce par M. Flensted-Jensen [6] à partir de l'étude des fonctions sphériques sur le recouvrement universel de $SU(n,1)$.

Pour montrer le même type de formule pour $\Phi_{\alpha, \beta}(\lambda, t)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, il faut considérer un sous-semi-groupe ouvert de $SL(n, \mathbb{R})$ ce qui démontre la formule pour $\alpha = n-2$, on a le résultat par prolongement analytique sur α .

Preuve du théorème :

i) est évident en utilisant les propriétés de la fonction $\chi_{\nu, \lambda}$. Montrons ii) :

Par le lemme 20 on obtient rapidement

$$\begin{aligned} \Phi_{\nu, \lambda}(m_{\delta} a_t) &= \int_{M \setminus H_+ / M} \chi_{\nu, \lambda}(m_{\delta} a_t \ell_{\xi} h_{\psi}) d\ell_{\xi} h_{\psi} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} (e^{\delta(\text{ch } t + \text{sh } t \text{ ch } \psi e^{\xi})})^{i\nu} Q(a_t, \ell_{\xi} h_{\psi})^{i(\frac{\nu-\lambda}{2})} \text{sh } \psi \text{ ch } \psi d\psi d\xi \\ &= e^{i\nu \delta} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} (\text{ch } t + \text{sh } t \text{ ch } \psi e^{\xi})^{i(\frac{\lambda+\nu}{2})} (\text{ch } t + \text{sh } t \text{ ch } \psi e^{-\xi})^{i(\frac{\lambda-\nu}{2})} \text{sh } \psi \text{ ch } \psi d\psi d\xi. \end{aligned}$$

Cette intégrale existe pour $\text{Im}(\lambda) > |\text{Im}(\nu)|$.

Calculons maintenant $\Phi_{\nu, \lambda}(a_t)$; en posant $u = \text{th } t \text{ ch } \psi e^{\xi}$, par la formule 2.12 (5) Erdelyi [3], on obtient :

$$\Phi_{\nu, \lambda}(a_t) = \frac{\Gamma(i(\frac{\nu-\lambda}{2})) \Gamma(-i(\frac{\nu+\lambda}{2}))}{\Gamma(-i\lambda)} (\text{ch } t)^{i\lambda} \int_0^{\infty} {}_2F_1(i(\frac{\nu-\lambda}{2}), -i(\frac{\nu+\lambda}{2}); -i\lambda; 1 - \text{th}^2 t \text{ ch}^2 \psi) \text{sh } \psi \text{ ch } \psi d\psi.$$

En posant $z = \text{th}^2 t \text{ ch}^2 \psi - 1$ et en utilisant la formule d'intégration de la fonction hypergéométrique $\frac{d}{dz} {}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{ab}{c} {}_2F_1(a+1, b+1; c+1; z)$,

$$\Phi_{\nu, \lambda}(a_t) = \frac{-1-i\lambda}{1+i\lambda + \frac{\nu^2 - \lambda^2}{4}} \times \frac{\Gamma(i(\frac{\nu-\lambda}{2})) \Gamma(-i(\frac{\nu+\lambda}{2}))}{2 \Gamma(-i\lambda) t h^2 t} (\text{ch } t)^{i\lambda} {}_2F_1(i(\frac{\nu-\lambda}{2})-1, -i(\frac{\nu+\lambda}{2})-1; -1-i\lambda; \frac{1}{\text{ch}^2 t}),$$

ce qui, compte tenu de la formule (2) et de la proposition 2 i), nous donne le résultat.

c.q.f.d.

Définissons maintenant la représentation induite à partir du caractère $\chi_{\nu, \lambda}$ de MAN_+ :

Soit V l'espace vectoriel des fonctions f continues sur $H_+ AN_+$ à valeurs dans \mathbb{C} et qui vérifient les trois propriétés suivantes :

a) $\forall x \in H_+ AN_+, \forall p \in MAN_+ \quad f(xp) = f(x) \chi_{\nu, \lambda}(p)$

b) $\forall x \in H_+ AN_+, \forall m \in M \quad f(mxm^{-1}) = f(x)$

c) f est à support compact modulo M à gauche et MAN_+ à droite.

Ces fonctions sont parfaitement définies sur $\Gamma = M \backslash H_+ AN_+ / MAN_+ = M \backslash H_+ / M$, muni de la mesure image $d\gamma$, car tout $x \in H_+ AN_+$ s'écrit

$$x = m \delta_1 \ell_\xi h_\psi m \delta_2 a_t n_{x,y,z} \quad \text{et donc} \quad \dot{x} = \ell_\xi h_\psi \in \Gamma.$$

Posons, pour f_1 et f_2 dans V

$$\langle f_1 | f_2 \rangle = \int_{M \backslash H_+ / M} f_1(\dot{x}) \overline{f_2(\dot{x})} d\dot{x} = \int_{\Gamma} f_1(\gamma) \overline{f_2(\gamma)} d\gamma, \text{ c'est un produit scalaire}$$

sur V .

Définition. La représentation induite $U_{\nu, \lambda}$ de $\chi_{\nu, \lambda}$ à valeurs dans le complété de V est définie pour $f \in V, g \in S$ et $x \in H_+ AN_+$ par

$$U_{\nu, \lambda}(g)f(x) = Q(g, \dot{x})f(wg^{-1}wx)$$

C'est une représentation hilbertienne du semi-groupe S ; la fonction de Jacobi $\Phi_{\nu, \lambda}(g)$ est un coefficient généralisé de cette représentation. La représentation $U_{0, \lambda}$ est équivalente à la représentation $\pi_{\lambda-2i}$ définie précédemment.

§ V.4. Transformation d'Abel et intégrales fractionnaires.

Nous allons décomposer la transformation de Laplace $\mathcal{L}_{\alpha, \beta}$ définie dans la proposition 18 en une transformation d'Abel suivie de la transformation de Laplace usuelle. Pour cela introduisons le sous-groupe $\bar{N} = \{t_{n_{x,y,z}} / n_{x,y,z} \in \mathbb{N}\}$

du groupe $SL(3, \mathbb{R})$ qui permet d'avoir la décomposition du type Iwasawa $S \subset \bar{N}A_+H_+$. Ecrivons donc un élément $M \ell_{\xi} h_{\psi} a_{\tau} H_+ \in M \backslash Y$ sous la forme $M \bar{n}_{x,y,z} a_{\tau} H_+$. En fait on peut toujours choisir un $m_{\delta} \in M$ tel que

$$m \bar{n}_{x,y,z} a_{\tau} h = m m_{\delta} \bar{n}_{u,u,z} a_{\tau} m_{-\delta} h, \text{ avec } u = \sqrt{xy} > 0.$$

Ainsi on peut identifier $M \backslash Y$ à un ouvert de $N_1 A_+$ où N_1 est le sous-semi-groupe $N_1 = \{ \bar{n}_{u,u,z + \frac{u^2}{2}} / u > 0, z > 0 \}$ de \bar{N} , par l'application

$$M \ell_{\xi} h_{\psi} a_{\tau} H_+ \in M \backslash Y \rightarrow \bar{n}_{u,u,z + \frac{u^2}{2}} a_{\tau} \in N_1 A_+ \text{ précisée dans le}$$

Lemme 23.

$$\begin{aligned} e^{2\tau} &= \text{ch}^2 t + \text{sh}^2 t \text{ch}^2 \psi + 2 \text{sht} \text{cht} \text{ch} \psi \text{ch} \xi \\ e^{\tau} u &= \text{sht} \text{sh} \psi \\ e^{2\tau} z &= \text{sht} \text{cht} \text{ch} \psi \text{sh} \xi \end{aligned}$$

et la mesure dy sur $M \backslash Y$ s'écrit :

$$dy = e^{4\tau} u \, du \, dz \, d\tau = \text{sh} \psi \, \text{ch} \psi \, \text{sh}^3 t \, \text{cht} \, d\xi \, d\psi \, dt$$

qui se démontre sans difficulté.

Soit V un noyau S -invariant sur $M \backslash Y$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a, lorsque l'intégrale à un sens ($\text{Im}(\lambda)$ suffisamment grand)

$$\mathcal{L}_{\alpha, \beta}(V)(\lambda) = \int_{M \backslash Y} V(y, e) Q(y, e)^{\frac{\alpha + \beta + 1 - i\lambda}{2}} d_{\alpha, \beta} y$$

et par le changement de variable défini au lemme ci-dessus :

$$\mathcal{L}_{\alpha, \beta}(V)(\lambda) = \int_{N_1 A_+} V(\bar{n}_{u, u, z + \frac{u^2}{2} a_\tau, e}) e^{(\alpha + \beta + 1 + i\lambda)\tau} u^{2(\alpha - \beta - 1)} z^{2\beta} u \, du \, dz \, d\tau .$$

Ainsi, pour $V \in \mathcal{V}^\#(Y)$, $\tau \in \mathbb{R}_+$, posons la définition suivante de la transformée d'Abel $R_{\alpha, \beta}(V)$ au point τ :

$$(28) \quad R_{\alpha, \beta}(V)(\tau) = e^{(\alpha + \beta + 1)\tau} \int_{N_1} V(\bar{n}_{u, u, z + \frac{u^2}{2} a_\tau, e}) u^{2(\alpha - \beta - 1)} z^{2\beta} u \, du \, dz .$$

Ainsi, $\mathcal{L}_{\alpha, \beta}(V)(\lambda) = \mathcal{L} \circ R_{\alpha, \beta}(V)(-i\lambda)$ et, en conséquence de la proposition 18, nous avons :

Proposition 24. La transformation d'Abel $R_{\alpha, \beta}$ est un morphisme de l'algèbre de composition $(\mathcal{V}^\#(Y), \tilde{\circ}_{\alpha, \beta})$ sur l'algèbre de convolution usuelle sur \mathbb{R}_+ $(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+), \tilde{*}_{-1/2})$, (où $\tilde{*}_{-1/2}$ est rappelée dans la preuve de la proposition 11).

Il reste à interpréter la transformation d'Abel en termes d'intégration fractionnaire en fermant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{V}^\#(Y), \tilde{\circ}_{\alpha, \beta}) & \xrightarrow{R_{\alpha, \beta}} & (\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+), \tilde{*}_{-1/2}) \\ \downarrow L & & \uparrow \mathcal{R}_{\alpha, \beta} ? \\ (\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+), \tilde{*}_{\alpha, \beta}) & & \end{array}$$

Pour cela introduisons les transformations intégrales fractionnaires un peu plus générales suivantes : pour $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$, $\mu \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(\mu) > 0$

$$\begin{aligned} - \text{ pour } f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+) \quad \mathcal{R}_\mu^\sigma(f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^t \frac{f(s) \, d \text{ch } \sigma s}{(\text{ch } \sigma t - \text{ch } \sigma s)^{1-\mu}} , \\ - \text{ pour } f \in \mathcal{X}(\mathbb{R}_+) \quad \mathcal{W}_\mu^\sigma(f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_t^\infty \frac{f(s) \, d \text{ch } \sigma s}{(\text{ch } \sigma s - \text{ch } \sigma t)^{1-\mu}} . \end{aligned}$$

Ce sont les intégrales fractionnaires d'ordre σ de Riemann-Liouville

et de Weyl qui vérifient les mêmes propriétés que celles correspondantes à $\sigma = 1$ qui ont été introduites en IV.2.

Proposition 25. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(\alpha) > \text{Re}(\beta) > -1/2$.

i) La transformation d'Abel est une transformation intégrale fractionnaire :

$$\mathcal{R}_{\alpha, \beta}(L(V)) = R_{\alpha, \beta}(V) = 2^{\alpha+1/2-2\beta-3} \Gamma(\beta+1/2) \Gamma(\alpha-\beta) \mathcal{R}_{\alpha-\beta}^1 \circ \mathcal{R}_{\beta+1/2}^2(L(V))$$

$$\begin{aligned} \text{ii) (29) } \Phi_{\alpha, \beta}(\lambda, t) \text{sht}^{2(\alpha-\beta)} \text{sh} 2t^{2\beta} &= \\ &= 2^{\alpha+1/2-2} \Gamma(\alpha-\beta) \Gamma(\beta+1/2) \mathcal{W}_{\beta+1/2}^2 \left(\frac{1}{\text{chs}} \mathcal{W}_{\alpha-\beta}^1 \left(\frac{e^{i\lambda}}{\text{sh}} \right) (s) \right) (t) \end{aligned}$$

Preuve.

i) En partant de la formule (28) définissant $R_{\alpha, \beta}(V)(\tau)$, appliquons le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} \text{ch}^2 t = (\text{ch} \tau - \frac{u^2}{2} e^\tau + e^\tau z) (\text{ch} \tau - \frac{u^2}{2} e^\tau - e^\tau z) \\ \text{ch} s = \text{ch} \tau - \frac{u^2}{2} e^\tau \end{cases}$$

Ce changement provient du fait que $V(\bar{n}_{u, u, z + \frac{u^2}{2} a_\tau, e}) = V(a_\tau, e) = L(V)(t)$.

Alors on a $u^2 = 2e^{-\tau} (\text{ch} \tau - \text{chs})$, $z^2 = e^{-2\tau} (\text{ch}^2 s - \text{ch}^2 t)$, $\tau > s > t > 0$ et $uz \, du \, dz = e^{-3\tau} \text{sht} \, \text{cht} \, \text{shs} \, dt \, ds$.

$$\text{Ainsi } R_{\alpha, \beta}(V)(\tau) = 2^{\alpha+1/2-(2\beta+1)} \int_{0 < t < s < \tau} L(V)(t) (\text{ch} 2s - \text{ch} 2t)^{\beta-1/2} (\text{ch} \tau - \text{chs})^{\alpha-\beta-1} \text{sht} \, \text{cht} \, dt \, \text{shs} \, ds$$

ce qui nous donne le résultat, par définition des intégrales de Riemann-Liouville.

ii) Pour $V \in \mathcal{V}^\#(Y)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, $\text{Im}(\lambda)$ suffisamment grand on a :

$\mathcal{L}_{\alpha, \beta}(V)(\lambda) = \mathcal{L}(R_{\alpha, \beta}(V))(-i\lambda)$, ce qui, compte-tenu de i), nous donne

$$\begin{aligned} \int_0^\infty L(V)(t) \Phi_{\alpha, \beta}(\lambda, t) \text{sht}^{2\alpha+1} \text{cht}^{2\beta+1} dt &= 2^{\alpha+1/2-2\beta-3} \Gamma(\beta+1/2) \Gamma(\alpha-\beta) \\ &\int_0^\infty \mathcal{R}_{\alpha-\beta}^1 \circ \mathcal{R}_{\beta+1/2}^2(L(V))(t) e^{i\lambda t} dt . \end{aligned}$$

Appliquons, dans la deuxième intégrale, deux fois la formule de transposition entre les intégrales fractionnaires (propriété iv) du § IV. 2) on a :

$$\int_0^\infty L(V)(t) \Phi_{\alpha, \beta}(\lambda, t) \operatorname{sh} t^{2\alpha+1} \operatorname{cht}^{2\beta+1} dt = 2^{\alpha+1/2-2\beta-3} \Gamma(\beta+1/2) \Gamma(\alpha-\beta) \int_0^\infty L(V)(t) \mathcal{W}_{\beta+1/2}^2 \left(\frac{1}{\operatorname{chs}} \mathcal{W}_{\alpha-\beta}^1 \left(\frac{e^{i\lambda}}{\operatorname{sh}} \right) (s) \right) (t) \operatorname{sh} t \operatorname{cht} dt$$

d'où la formule (29), ayant un sens pour $\operatorname{Im}(\lambda) > \operatorname{Re}(\alpha-\beta-1)$ et $\operatorname{Im}(\lambda) > \operatorname{Re}(\alpha-1)$.
c. q. f. d.

Remarque :

i) Cette formule (29) s'obtient également à partir de la formule (5) que l'on écrit

$$\Phi_{\alpha, \beta}(\lambda, t) = \int_{\Gamma} Q(a_t, \gamma) \frac{\alpha + \beta + 1 - i\lambda}{2} \xi_{\alpha, \beta}^2(\gamma) d\gamma$$

en faisant le changement de variable, pour $\gamma = \ell_\xi h_\psi$, $e^{-2\tau} = Q(a_t, \gamma)$ et $\operatorname{chs} = \operatorname{ch} \tau - \frac{e^{-\tau}}{2} \operatorname{sh}^2 t \operatorname{sh}^2 \psi$; ce qui permet d'interpréter l'intégration fractionnaire $\mathcal{W}_{\beta+1/2}^2 \circ \frac{1}{\operatorname{ch}} \mathcal{W}_{\alpha-\beta}^1 \left(\frac{f}{\operatorname{sh}} \right)$ comme une intégration sur Γ muni de la mesure

$$\xi_{\alpha, \beta}^2(\gamma) d\gamma \text{ contre la puissance du noyau de Poisson } Q(a_t, \gamma) \frac{\alpha + \beta + 1}{2}.$$

ii) la transformation intégrale fractionnaire $\mathcal{R}_{\alpha, \beta}$ de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)$ dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}_+)$ transforme le produit $\tilde{\mathcal{K}}_{\alpha, \beta}$ sur le produit $\tilde{\mathcal{K}}_{-1/2}$, il serait intéressant de montrer directement cette propriété (ou plutôt la propriété similaire pour la transformation d'Abel $\mathcal{R}_{\alpha, \beta}$) ce qui donnerait une démonstration de la formule du produit pour les fonctions de Jacobi de deuxième espèce $\Phi_{\alpha, \beta}(\lambda, t)$.

Corollaire 26. Formule d'inversion de la transformation de Laplace-Jacobi pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}_+$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ $\operatorname{Re}(\alpha) > \operatorname{Re}(\beta) \geq -1/2$ posons :

$$(30) \quad \psi_{\alpha, \beta}(\lambda, t) = \frac{2^{2\beta+3-\alpha-1/2}}{\Gamma(\beta+1/2)\Gamma(\alpha-\beta)} \mathcal{R}_{-(\beta+1/2)}^2 \circ \mathcal{R}_{\beta-\alpha}^1 (e^{-i\lambda} \gamma)(t)$$

Pour $V \in \mathcal{V}^{\#}(\mathbb{Y})$ et a suffisamment grand :

$$LV(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \psi_{\alpha, \beta}(\lambda, t) \mathcal{L}_{\alpha, \beta}(V)(\lambda) d\lambda.$$

Cette proposition est une conséquence immédiate de la proposition 26 i),

car $\mathcal{L}_{\alpha, \beta}(V)(\lambda) = \mathcal{L}(\mathcal{R}_{\alpha, \beta}(LV))(-i\lambda)$. Une deuxième formule d'inversion de cette transformation de Laplace-Jacobi faisant intervenir la fonction de première espèce $\varphi_{\lambda}^{(\alpha, \beta)}(t)$ peut être écrite comme dans la proposition 13 b).

§ V.5. Les fonctions de Jacobi $\varphi_{\lambda}^{(\alpha, \beta)}(t)$ et le groupe $SU(2,1)$.

M. Flensted-Jensen [6] a donné une interprétation de ces fonctions comme fonctions sphériques, pour $\alpha = n-2$ entier positif et $\beta \in \mathbb{C}$, en considérant les revêtements universels des groupes $SU(n-1,1)$; il démontre ainsi la formule du produit (4).

Nous ne développerons pas l'interprétation complète des fonctions de Jacobi $\varphi_{\lambda}^{(\alpha, \beta)}(t)$, $\text{Re}(\alpha) > \text{Re}(\beta) > -1/2$, qui peut se faire à l'aide d'algèbres de noyaux intégrables sur l'espace homogène $X = SU(2,1)/S(U(2) \times U(1))$, muni d'une mesure $d_{\alpha, \beta}$ et d'un produit de composition $\circ_{\alpha, \beta}$.

Les résultats sont du même genre que ceux obtenus dans les chapitres précédents, en particulier :

- a) interprétation de la formule (3) et notamment du noyau de Poisson dont les puissances sont les caractères des algèbres de noyaux intégrables sur X .
- b) Les fonctions $t \mapsto \varphi_{\lambda}^{(\alpha, \beta)}(t)$ s'interprètent comme restriction à un sous-groupe à un paramètre de fonctions de type positif sur $SU(2,1)$, coefficients de la série principale de représentations de $SU(2,1)$.
- c) Les transformations d'Abel $W_{\alpha, \beta}$ des noyaux intégrables sur X qui sont des intégrations sur le sous-groupe nilpotent de la décomposition d'Iwasawa de $SU(2,1)$ peut s'écrire, à l'aide des intégrales fractionnaires de type Riemann-Liouville, sous la forme $W_{\alpha, \beta} = \mathcal{W}_{\alpha-\beta}^{-1} \circ \mathcal{W}_{\beta+1/2}^2$, etc... .

VI. AUTRES FORMULES DE PRODUIT.

Pour terminer, signalons qu'il existe deux autres types de formules de produit liant les fonctions de Jacobi qui ont également une interprétation dans le cadre des groupes étudiés dans cet article.

Remarques :

1°) La formule 6.4 (3) p. 397 dans VILENKIN [13], peut s'écrire sous la forme :

$$(31) \quad (2 \operatorname{sh}(t_1+t_2))^\alpha (2 \operatorname{ch}(t_1+t_2))^\beta \Phi_\lambda^{(\alpha, \beta)}(t_1+t_2) =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{i\mathbb{C}^-}^{i\mathbb{C}^+} \frac{\Gamma(\frac{\beta - \alpha + 1 - i\lambda}{2} + i\nu) \Gamma(\frac{\alpha - \beta + 1 - i\lambda}{2} - i\nu)}{2^{i\lambda} \Gamma(1 - i\lambda)} (2 \operatorname{sht}_1)^{i\nu} (2 \operatorname{cht}_1)^{\beta - \alpha + i\nu} \Phi_\lambda^{(i\nu, \beta - \alpha + i\nu)}(t_1) \times$$

$$\times (2 \operatorname{sht}_2)^{\alpha - i\nu} (2 \operatorname{cht}_2)^{\beta + i\nu} \Phi_\lambda^{(\alpha - i\nu, \beta + i\nu)}(t_2) d\nu$$

pour $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$, $\operatorname{Re}(\alpha + \beta + 1) > \operatorname{Im}(\lambda) > \operatorname{Re}(\alpha + \beta - 1)$ et
 $|\operatorname{Re}(\alpha - \beta + 2c)| > \operatorname{Re}(1 - i\lambda)$.

Cette formule peut se démontrer comme dans [13], mais plus directement à partir des représentations hilbertiennes du semi-groupe G_+ du groupe de Lorentz.

2°) La formule (8, 16) dans T. KOORWINDER [8], s'écrit sous la forme théorique

$$(32) \quad \varphi_{\lambda_1}^{(\alpha, \beta)}(t) \varphi_{\lambda_2}^{(\alpha, \beta)}(t) = \int_0^\infty a_{\alpha, \beta}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \varphi_{\lambda_3}^{(\alpha, \beta)}(t) |c_{\alpha, \beta}(\lambda_3)|^{-2} d\lambda_3$$

$$\text{où } c_{\alpha, \beta}(\lambda) = 2^{\alpha + \beta + 1} \frac{\Gamma(\frac{i\lambda}{2}) \Gamma(\frac{1+i\lambda}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha + \beta + 1 + i\lambda}{2}) \Gamma(\frac{\alpha - \beta + 1 + i\lambda}{2})} ; \text{ pour } (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2,$$

$\operatorname{Re}(\alpha) > \operatorname{Re}(\beta) > -1/2$, $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$, $|\operatorname{Im}(\lambda_1)| < \operatorname{Re}(\alpha + \beta + 1)$ et pour $t \in \mathbb{R}$:

Cette formule est liée à une structure duale d'algèbre de convolution sur $L_1(\mathbb{R}_+, |c_{\alpha, \beta}(\lambda)|^{-2} d\lambda)$. Malheureusement on ne connaît pas explicitement le noyau symétrique et analytique $a_{\alpha, \beta}$ sinon lorsque $\beta = -1/2$, pour $\alpha = 0$ et 1.

Conjecture : Pour $\alpha > -1/2$, $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$, le noyau $a_{\alpha, -1/2}$ est de la forme

$$a_{\alpha, -1/2}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = d_\alpha \frac{\left| \Gamma\left(\frac{\alpha + 1/2 + i(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)}{2}\right) \right|^2}{\left| \Gamma(\alpha + 1/2 + i\lambda_1) \Gamma(\alpha + 1/2 + i\lambda_2) \Gamma(\alpha + 1/2 + i\lambda_3) \right|^2} \times$$

$$\times \prod_{\sigma \in S_3} \left| \Gamma\left(\frac{\alpha + 1/2 + i(\lambda_{\sigma(1)} + \lambda_{\sigma(2)} - \lambda_{\sigma(3)})}{2}\right) \right|^2$$

où d_α est une constante de normalisation et S_3 le groupe des trois permutations circulaires.

Cette conjecture est confortée par le fait que l'on connaît l'opérateur transformée de Fourier en cosinus de l'opérateur intégrale fractionnaire de Weyl ; plus précisément :

3°) Relations duales entre les fonctions de Jacobi.

Partons de la formule (22) de la proposition 12 :

$$\frac{\sqrt{\pi} 2^{3(\alpha+1/2)}}{c_\alpha(\lambda)c_\alpha(-\lambda)\Gamma(\alpha+1)} \varphi_\alpha(\lambda, t) = \mathcal{W}_{-(\alpha+1/2)}(\cos \lambda s)(t) \text{ pour } |\operatorname{Im}(\lambda)| < \operatorname{Re}(\alpha+1/2)$$

et du fait que la transformée de Fourier en cosinus de $\varphi_\alpha(\lambda, t)$ s'exprime pour $|\operatorname{Im}(\lambda)| < \operatorname{Re}(\alpha+1/2)$ par

$$\mathcal{F}_C(\varphi_\alpha(\lambda, \cdot))(\mu) = \frac{2^{2\alpha-2}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1/2)}$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1/2+i(\lambda+\mu)}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha+1/2+i(\lambda-\mu)}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha+1/2-i(\lambda+\mu)}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha+1/2-i(\lambda-\mu)}{2}\right)}{\Gamma(\alpha+1/2+i\lambda)\Gamma(\alpha+1/2-i\lambda)}$$

Alors l'opérateur transformée de Fourier en cosinus noté $F\mathcal{W}_-\delta$ de l'opérateur $\mathcal{W}_-\delta$ s'écrit pour une bonne fonction g :

$$F\mathcal{W}_-\delta(g)(\lambda) = \frac{2^\delta}{4\pi \Gamma(\delta)\Gamma(i\lambda)\Gamma(-i\lambda)} \int_0^\infty \Gamma\left(\frac{\delta+i(\lambda+\mu)}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\delta+i(\lambda-\mu)}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\delta-i(\lambda+\mu)}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\delta-i(\lambda-\mu)}{2}\right) g(\mu) d\mu,$$

pour $\delta \in \mathbb{C}$ $\operatorname{Re}(\delta) \geq 0$ et on a : $F\mathcal{W}_-\delta_1 \circ F\mathcal{W}_-\delta_2 = F\mathcal{W}_-(\delta_1 + \delta_2)$, $F\mathcal{W}_0 = \operatorname{id}$; la formule (22) s'écrit donc :

$$\frac{\sqrt{\pi} 2^{3(\alpha+1/2)}}{c_\alpha(\lambda)c_\alpha(-\lambda)\Gamma(\alpha+1)} \varphi_\alpha(\lambda, t) = F\mathcal{W}_-(\alpha+1/2)(\cos \mu t)(\lambda) \text{ et plus généralement}$$

$$(33) \quad \frac{2^{3\delta} \varphi_\delta(\lambda, t)}{\Gamma(\delta+1)c_\delta(\lambda)c_\delta(-\lambda)} = F\mathcal{W}_{\alpha-\delta}\left(\frac{2^{3\alpha} \varphi_\alpha(\mu, t)}{\Gamma(\alpha+1)c_\alpha(\mu)c_\alpha(-\mu)}\right)(\lambda) \text{ pour } \operatorname{Re}(\delta) > \operatorname{Re}(\alpha)$$

et $|\operatorname{Im}(\lambda)| < \operatorname{Re}(\alpha+1/2)$.

De même à partir de la formule (21) et de la transformation de Laplace de $t \mapsto \text{sh}t^{2\alpha} \Phi_\alpha(\lambda, t)$ on obtient un semi-groupe d'opérateurs $\mu \mapsto L \mathcal{W}_\mu$, transformée de Laplace du semi-groupe d'opérateurs $\mu \mapsto \mathcal{W}_\mu \circ (\frac{1}{\text{sh}})$ pour $\mu \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(\mu) \geq 0$. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
 e_\alpha \text{sh}t^{2\alpha} \Phi_\alpha(\lambda, t) &= L \mathcal{W}_{\alpha-\delta} (e_\delta \text{sh}t^{2\delta} \Phi_\delta(\mu, t))(\lambda) \\
 &= \frac{2^{-(\alpha-\delta)} \Gamma(\alpha-\delta)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e_\delta \text{sh}t^{2\delta} \Phi_\delta(\mu, t) \\
 &\quad \frac{\Gamma(\frac{1/2-\alpha-i(\mu-\lambda)}{2}) \Gamma(\frac{1/2-\alpha+i(\mu+\lambda)}{2})}{\Gamma(\frac{3/2+\alpha-i(\mu-\lambda)}{2}) \Gamma(\frac{3/2+\alpha+i(\mu+\lambda)}{2})} d\mu .
 \end{aligned}$$

Il se pose alors le problème de l'interprétation de ces transformations intégrales $F \mathcal{W}_{-\mu}$ et $L \mathcal{W}_\mu$ sur le dual sphérique du groupe de Lorentz et le plan de représentations hilbertiennes du semi-groupe de Lorentz.

*

Michel MIZONY
U.A. C.N.R.S. n° 746
 Institut de Mathématiques
 Université Claude Bernard - LYON I
 43, bd du 11 novembre 1918
 69622 Villeurbanne Cedex

BIBLIOGRAPHIE

- G. ARSAC [1]** : "Le groupe de Poincaré et ses représentations"
Publ. Dep. Math. Lyon 1982 3/C p. 1-171.
- L. DURAND [2]** : "Addition formulas for Jacobi, Gegenbauer, Laguerre and hyperbolic Bessel functions of the second kind"
Siam J. Math. Anal. Vol. 10, n° 2 1979.
- A. ERDELYI [3]** : "Tables of integral transforms" Vol. 2
Mac Graw-Hill book Company New-York 1954.
"Higher transcendental functions", Vol. 1
Mac Graw-Hill book Company New-York 1953.
- J. FARAUT [4]** : "Algèbres de Volterra de certains espaces affines symétriques"
Publ. Dep. Math. Lyon 1982 4/B p. 12-1 à 12-12.
- J. FARAUT et G.A. VIANO [5]** : "Volterra algebra and Bethe-Salpeter Equation"
J. Math. Phys. 27(3) 1986 p. 840-846.
- M. FLENSTED-JENSEN [6]** : "The spherical functions on the universal covering of $SU(n-1,1)/SU(n-1)$ "
Preprint n° 1, 1973, Kobenhavns universitet.
- J. HILGERT et K.H. HOFMANN [7]** : "Semi-groups in Lie groups, Lie semialgebras in Lie algebras"
Trans. AMS Vol. 288 n° 2 (1985), p. 481-504.
- T.H. KOORWINDER [8]** : "Jacobi functions and analysis on non compact semi-simple Lie groups"
In R.A. Askey et al. Special functions, p. 1-85, Reidel publishing Company 1984.
- W. KOSTERS [9]** : "Eigenspaces of the Laplace-Beltrami operator on $SL(n, \mathbb{R})/S(GL(1) \times GL(n-1))$. Part. I"
Indagationes Math. Vol. 47 (1985) p. 99-123.
- M. MIZONY [10]** : "Une transformation de Laplace-Jacobi"
SIAM J. Math. Anal. Vol. 14 n° 5 (1983), p. 987-1003.
- M. MIZONY [11]** : "Analyse harmonique hyperbolique : représentations et contractions des groupes $S_{00}(1, n)$ "
Publ. Dep. Math. Lyon 1982 2/P p. 1-27.
- J. SEKIGUCHI [12]** : "Eigenspaces of the Laplace-Beltrami operator on a hyperboloïd"
Nagoya Math. J. Vol. 79 (1980) p. 151-185.
- N. JA. VILENKIN [13]** : "Fonctions spéciales et théorie de la représentation des groupes"
Dunod, Paris (1969).
- G. WARNER [14]** : "Harmonic analysis on semisimple Lie groups I"
Springer-Verlag, Berlin (1972).