A. GUICHARDET

Représentations de longueur finie et géométrie différentielle sur $\widehat{G}$

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1987, fascicule 1B
« Actes du colloque Jean Braconnier », , p. 31-40
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1987___1B_31_0>

REPRESENTATIONS DE LONGUEUR FINIE
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE SUR $\hat{G}$

*

par **A. GUICHARDET**

1. GENERALITES.

On va tenter, dans cet exposé, de montrer qu'il existe un lien étroit entre, d'une part, la théorie des représentations de longueur finie d'un groupe G ayant pour sous-quotients irréductibles une même représentation unitaire π, et, d'autre part, la Géométrie Différentielle sur $\hat{G}$ au voisinage de π ; en réalité le titre est assez trompeur car nous n'aborderons que la partie "commutative" d'une théorie qui devra, lorsqu'elle verra le jour, être hautement "non commutative". Les groupes de Lie considérés dans l'exposé seront essentiellement de trois types :

A) groupes nilpotents (simplement connexes)

B) groupes semi-simples (réels connexes de centre fini)

C) groupes de déplacements, i.e. produits semi-directs $G = B \ltimes A$ où B est un sous-groupe distingué vectoriel et A un sous-groupe compact ; ces derniers groupes, bien que beaucoup plus simples que les précédents, présentent avec eux des analogies curieuses, signalées au théorème 2 ; leur étude suggère aussi parfois des conjectures intéressantes relatives aux groupes de Lie généraux.

Pour fixer à notre exposé un cadre relativement clair, nous considèrerons uniquement des représentations unitaires irréductibles de G, dont l'ensemble sera noté $\hat{G}$; cependant, tant pour l'étude des groupes Ext^n_G que pour celle des représentations de longueur finie, nous remplacerons un élément π de $\hat{G}$ par

- la représentation différentiable associée π^∞ dans les cas A) et C)
- le $(\underline{g},K)$-module associé $\pi_{(K)}$ dans le cas B) ;

l'expression $\mathrm{Ext}^n_G(\pi,\pi)$ désignera donc $\mathrm{Ext}^n_G(\pi^\infty,\pi^\infty)$ dans les cas A) et C), et $\mathrm{Ext}^n_{g,K}(\pi_{(K)},\pi_{(K)})$ dans le cas B). Cette diversité des choix effectués est assez gênante, mais on espère pouvoir bientôt faire un choix unique pour tous les groupes de Lie.

Le paragraphe 2 est consacré au rappel de résultats de divers auteurs sur les catégories de représentations de longueur finie. Au paragraphe 3 on explique comment, pour un groupe G nilpotent, l'algèbre de Gabriel de cette catégorie est reliée à une autre algèbre qui peut raisonnablement être considérée comme l'algèbre des jets d'ordre infini de fonctions C^∞ sur $\hat{G}$. Enfin dans les paragraphes 4 et 5 on propose une notion d'espace tangent "géométrique" à $\hat{G}$ en un point π, et on la justifie par des résultats concernant la dérivation de familles à un paramètre de représentations.

2. REPRESENTATIONS DE LONGUEUR FINIE.

On fixe un élément π de $\hat{G}$ mais on entend par là π^∞ dans les cas A) et C), $\pi_{(K)}$ dans le cas B) ; on cherche à décrire la catégorie $\mathrm{Ext}(G,\pi)$ des représentations de G, de longueur finie, à sous-quotients irréductibles tous isomorphes à π, c'est-à-dire des représentations ρ contenant des sous-représentations

$$0 \subset \rho_1 \subset \rho_2 \subset \ldots\ldots \subset \rho_n = \rho$$

telles que $\rho_{i+1}/\rho_i \sim \pi$; dans les cas A) et C) on doit supposer en outre que le sous-espace de chaque ρ_i est fermé et admet un supplémentaire topologique (non nécessairement G-invariant !) .

On va ici se borner à rappeler quelques résultats disant, grosso modo, que génériquement (*) la catégorie $\mathrm{Ext}(G,\pi)$ est équivalente à $\mathrm{Ext}(\mathbb{R}^n,1_{\mathbb{R}^n})$ pour un n convenable ; que π admet un voisinage homéomorphe à $\mathbb{R}^n$; et enfin que l'algèbre de cohomologie $\mathrm{Ext}^*_G(\pi,\pi)$ est isomorphe à l'algèbre extérieure $\Lambda^*\mathbb{C}^n$.

Théorème 1 (P. DELORME [1], A. GUICHARDET [6]). *On suppose que* G *est semi-simple et que* π *est une représentation induite parabolique cuspidale,*

(*) dans cet exposé, "génériquement" signifie "pour tout π appartenant à un ouvert dense de $\hat{G}$ ".

soit $\pi = I_{P,\delta,\nu}$ *où*

- P *est un sous-groupe parabolique cuspidal de décomposition de Langlands* $P = MAN$
- δ *est une représentation de carré intégrable de* M
- ν *est une forme linéaire imaginaire pure sur* $\underline{a}$.

On suppose que π *est irréductible et que le stabilisateur du couple* (δ,ν) *dans le groupe de Weyl de* A *est trivial. Alors le foncteur* $\nu \longmapsto I_{P,\delta,\nu}$ *se prolonge naturellement en un foncteur*

$$T : \mathrm{Ext}(A,e^{\nu}) \to \mathrm{Ext}(\underline{g},K,I_{P,\delta,\nu})$$

qui induit un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^*_A(e^{\nu},e^{\nu}) \to \mathrm{Ext}^*_{\underline{g},K}(I_{P,\delta,\nu}, I_{P,\delta,\nu})\ ; \tag{2.1}$$

enfin π *admet un voisinage (dans le dual réduit de* G *) homéomorphe à* A^*.

Précisons que le foncteur T est composé du foncteur qui associe à tout élément ω de $\mathrm{Ext}(A,e^{\nu})$ la représentation $\delta \times \omega \times 1$ de P, et du foncteur "induction K-finie de P à G".

Théorème 2 (A. GUICHARDET [7]). *On suppose que* G *est un groupe de déplacements ; la théorie de Mackey permet d'écrire* $\pi = \mathrm{Ind}^G_{B.A(\psi)}(e^{i\psi} \times \sigma)$ *où* $\psi \in B^*$ *et* $\sigma \in \widehat{A(\psi)}$ *; on suppose que* ψ *est dans la strate ouverte de l'action de* A *dans* B^* *(i.e.* $A(\psi)$ *est minimum à conjugaison près) ; on note* N_ψ *le sous-espace vectoriel de* B *orthogonal au sous-espace tangent à l'orbite* $A.\psi$ *en* ψ *. On a alors un résultat analogue au théorème 1 en remplaçant* P *par* $B.A(\psi)$, M *par* $A(\psi)$, A *par* N_ψ, N *par un supplémentaire* $A(\psi)$*-invariant de* N_ψ *dans* B, ν *par* $i\psi|_{N_\psi}$.

Théorème 3 (F. DU CLOUX [1]). *On suppose* G *nilpotent et* π *associée par la correspondance de Kirillov à un élément* f *de* $\underline{g}^*$ *tel que son orbite coadjointe soit de dimension maximum ; alors les catégories* $\mathrm{Ext}(G,\pi^\infty)$ *et* $\mathrm{Ext}(G(f), e^{if}|_{G(f)})$ *sont équivalentes et les algèbres* $\mathrm{Ext}^*_G(\pi^\infty,\pi^\infty)$ *et* $\mathrm{Ext}^*_{G(f)}(e^{if}|_{G(f)}, e^{if}|_{G(f)})$ *sont isomorphes.*

Par contre il n'est pas vrai, sous les hypothèses indiquées, que π admette un voisinage homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ où $n = \dim G(f)$ (il peut même arriver, par exemple pour le groupe $G_{5,5}$, que π n'admette aucun voisinage séparé !) ; cela n'est vrai que pour des f plus particulières, par exemple dans la strate ouverte de Pukanszky (cf. [8] , p. 525) ; mais même pour des f très régulières en ce sens, il semble impossible d'obtenir une équivalence de catégories aussi explicite que dans les théorèmes 1 et 2.

3. RELATION ENTRE REPRESENTATIONS DE LONGUEUR FINIE ET JETS DE FONCTIONS DIFFERENTIABLES.

Les résultats de ce paragraphe sont dûs à F. du Cloux [4] ; on suppose G nilpotent et on fixe $\pi \in \hat{G}$. D'après P. Gabriel [5] , la catégorie $\mathrm{Ext}(G,\pi^\infty)$ est équivalente à celle des modules de dimension finie sur une algèbre locale C ; dans [1] du Cloux avait construit explicitement C au sein de l'algèbre enveloppante de $\underline{g}$; dans [4] il en donne l'interprétation suivante, de type "géométrie différentielle non commutative".

On considère l'algèbre de convolution $\mathcal{S} = \mathcal{S}(G)$ (espace de Schwartz de G) et son idéal M, noyau de la représentation π prolongée à $\mathcal{S}$; $\mathcal{S}/M$ est évidemment isomorphe à $\mathbb{C}$ lorsque π est de dimension 1 ; dans le cas contraire, c'est une algèbre universelle $\mathcal{A}$, qui joue un rôle analogue à l'algèbre $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ de la théorie des C^*-algèbres. Appelons

- fonction C^∞ sur $\hat{G}$ un élément φ de $\mathcal{S}$
- valeur de φ au point π l'élément $\pi(\varphi) \in \mathcal{S}/M$
- jet d'ordre n de φ en π l'image canonique de φ dans $\mathcal{S}/M^{n+1}$;

alors $\hat{\mathcal{S}}_M =: \varprojlim \mathcal{S}/M^{n+1}$ sera l'algèbre des jets d'ordre infini en π ; Du Cloux démontre que

$$\hat{\mathcal{S}}_M \sim \mathcal{S}/M \otimes C$$

et aussi que

$$M/M^2 \sim \mathcal{S}/M \otimes \mathrm{Ext}^1_G(\pi^\infty, \pi^\infty)^*.$$

Lorsque G est abélien, $\mathcal{S}/M$ est isomorphe à $\mathbb{C}$ et M/M^2 est le dual du complexifié de l'espace vectoriel tangent à la variété $\hat{G}$ au point π ; revenant au cas général, il est donc tentant d'appeler :

- espace vectoriel tangent complexifié à $\hat{G}$ au point π l'espace $\mathrm{Ext}^1_G(\pi^\infty, \pi^\infty)$
- espace vectoriel tangent réel son sous-espace $\mathrm{Ext}^1_G(\pi^\infty, \pi^\infty)_h$ formé des éléments **hermitiens** (disons qu'une classe de cohomologie est hermitienne si elle contient un cocycle hermitien, i.e. tel que $\phi(g)$ soit hermitien pour tout g).

Nous proposons ici d'appeler **espace tangent géométrique** le sous-ensemble de $\mathrm{Ext}^1_G(\pi^\infty, \pi^\infty)_h$ formé des éléments de cup-carré nul (la définition sera rappelée au paragraphe 4) ; c'est un cône que nous noterons $\mathrm{Ext}^1_G(\pi^\infty, \pi^\infty)_{h,o}$. Le reste de cet exposé est consacré à une tentative de justification de cette définition.

4. CONSTRUCTION D'ELEMENTS DE $\mathrm{Ext}^1_G(\pi,\pi)_{h,o}$ COMME DERIVEES DE FAMILLES A UN PARAMETRE DE REPRESENTATIONS.

Le groupe G étant ici quelconque, ce paragraphe est rédigé de façon très formelle. Donnons-nous un intervalle [0,a] et, pour tout $t \in [0,a]$, une représentation unitaire π_t de G dans un espace hilbertien E ; supposons que pour tout $g \in G$ la fonction $t \mapsto \pi_t(g)$ soit C^∞ ; posons

$$\phi(g) = -i\pi'_o(g).\pi_o(g)^{-1} \tag{4.1}$$

où

$$\pi'_o(g) = \frac{d}{dt}\pi_t(g)\Big|_{t=0} \quad ;$$

alors ϕ est un 1-cocycle sur G à valeurs dans End E pour la représentation π_o, i.e.

$$\phi(g_1g_2) = \phi(g_1) + \pi_o(g_1).\phi(g_2).\pi_o(g_1)^{-1} \quad ;$$

on peut donc considérer la classe $[\phi]$ de ϕ dans $\mathrm{Ext}^1_G(\pi_o, \pi_o)$; on voit sur (4.1) que ϕ est hermitien ; en outre son cup-carré $\phi \smile \phi$, défini par

$$(\phi \smile \phi)(g_1,g_2) = \phi(g_1).\pi_o(g_1).\phi(g_2).\pi_o(g_1)^{-1}$$

est le cobord de la 1-cochaîne

$$g \mapsto \frac{1}{2}\pi''_o(g).\pi_o(g)^{-1}$$

comme on le voit en dérivant deux fois la relation $\pi_t(g_1g_2) = \pi_t(g_1).\pi_t(g_2)$.

Le procédé, décrit très formellement par la formule (4.1), fournit donc un élément $[\phi]$ de $\mathrm{Ext}^1_G(\pi_o, \pi_o)_{h,o}$; le problème qui se pose alors naturellement est de savoir si on obtient ainsi l'ensemble $\mathrm{Ext}^1_G(\pi_o, \pi_o)_{h,o}$ tout entier ; le paragraphe suivant donne une réponse affirmative dans divers cas.

Remarquons tout de suite que la réponse est trivialement "oui" lorsque π_o est de dimension 1, car alors

$$\mathrm{Ext}^1_G(\pi_o, \pi_o) = \mathrm{Hom}_{Lie}(G, \mathbb{C})$$
$$\mathrm{Ext}^1_G(\pi_o, \pi_o)_h = \mathrm{Ext}^1_G(\pi_o, \pi_o)_{h,o} = \mathrm{Hom}_{Lie}(G, \mathbb{R}),$$

et tout $\phi \in \mathrm{Hom}_{Lie}(G, \mathbb{R})$ est de la forme (4.1) avec

$$\pi_t(g) = \pi_o(g).\exp(it.\phi(g)).$$

5. PROBLEME DE LA SURJECTIVITE DE LA CONSTRUCTION DU PARAGRAPHE 4.

On va indiquer d'abord des résultats génériques dans les trois cas A,B,C considérés au paragraphe 1, puis des résultats généraux dans le cas C ; remarquons tout de suite que, en ce qui concerne les résultats génériques, on a toujours

$$\mathrm{Ext}^1_G(\pi, \pi)_{h,o} = \mathrm{Ext}^1_G(\pi, \pi)_h$$

puisque $\mathrm{Ext}^*_G(\pi, \pi)$ est une algèbre extérieure.

Résultats génériques.

Supposons d'abord G semi-simple et reprenons les hypothèses du théorème 1 ; considérons une courbe C^∞ dans A^* : $t \longmapsto \nu(t)$ avec $\nu(0) = \nu$; il lui correspond une famille de représentations $\pi_t = I_{P,\delta,\nu(t)}$, et il est facile de voir que l'isomorphisme (2.1) fait correspondre à

$$-i\,\nu'(0) \in \mathrm{Ext}^1_A(e^\nu, e^\nu) = A^*$$

l'élément de $\mathrm{Ext}^1_{g,K}(I_{P,\delta,\nu}, I_{P,\delta,\nu})$ défini par (4.1).

En conclusion on voit que le procédé (4.1) fournit effectivement un isomorphisme entre, d'une part, ce que la théorie de l'induction parabolique cupsidale conduit à appeler "espace tangent en π à $\hat{G}$", et, d'autre part, notre "espace tangent géométrique".

Le cas des groupes de déplacements offre des résultats tout à fait analogues dans le cadre du théorème 2 ; dans le cas nilpotent on obtient, ici encore, des résultats moins explicites que dans les deux précédents : prenant f dans la strate ouverte définie par P. Bonnet [2], on peut paramétrer un voisinage de π à l'aide de $n = \dim G(f)$ paramètres réels, réaliser toutes ces représentations dans un même espace hilbertien, les dériver et obtenir un isomorphisme entre $\mathbb{R}^n$ et $\mathrm{Ext}^1_G(\pi^\infty,\pi^\infty)_h$.

Résultats généraux dans le cas des groupes de déplacements.

On va donner ici une description relativement géométrique de l'ensemble $\mathrm{Ext}^1_G(\pi^\infty_o,\pi^\infty_o)_{h,o}$, π_o étant maintenant une représentation unitaire irréductible quelconque ; on verra en particulier que le procédé (4.1) fournit l'ensemble ci-dessus tout entier.

Ecrivons, comme au théorème 2 mais en changeant légèrement les notations

$$\pi_o = \mathrm{Ind}^G_{B.S_o}(e^{i.\psi_o} \times \sigma_o)$$

où $\psi_o \in B^*$, $S_o = A(\psi_o)$, $\sigma_o \in \hat{S}_o$; notons N_o l'orthogonal dans B du sous-espace tangent en ψ_o à l'orbite $A.\psi_o$; notons Ω l'ensemble des couples (β,ρ) où $\beta \in N^*_o$ et $\rho \in \widehat{S_o(\beta)}$ vérifiant en outre

(5.1) $$\mathrm{Ind}^{S_o}_{S_o(\beta)}\, \rho \sim \sigma_o \quad ;$$

notons enfin $\tilde{\Omega}$ le quotient de Ω par l'action naturelle de S_o. Choisissons une section τ, linéaire et S_o-invariante, pour l'application canonique de B^* sur N^*_o.

Fixons un élément (β,ρ) de Ω ; pour tout réel t posons

$$\psi(t) = \psi_o + t.\tau(\beta)$$

puis

$$\pi(t) = \mathrm{Ind}^G_{B.S_o(\beta)}(e^{i\psi(t)} \times \rho) ;$$

le théorème "de la tranche" ou "des tubes linéaires" (voir [3], n° 9.3) dit en particulier que, pour t suffisamment petit, on a $A(\psi(t)) \subset S_o$; si de plus t est non nul on aura donc $A(\psi(t)) = S_o(\beta)$; d'après la théorie de Mackey, la représentation $\pi(t)$ est alors irréductible. Par ailleurs la condition (5.1) entraîne que $\pi(0)$ est équivalente à π_o. Notons E l'espace de $\mathrm{Ind}_{S_o(\beta)}^{A}\rho$, soit

$$E = \{f \in L^2(A,E_\rho) \mid f(xs) = \rho(s)^{-1}.f(x) \quad \forall x \in A, \ s \in S_o(\beta)\}$$

on a

$$E^\infty = \{f \in C^\infty(A,E_\rho) \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad \}$$

on peut réaliser $\pi(t)$ dans E par

$$(\pi(t)(b,a).f)(x) = \exp(i < x.\psi(t),b >).f(a^{-1}x).$$

La formule (4.1) a un sens et fournit effectivement un 1-cocycle ϕ sur G à valeurs dans End E^∞ :

$$(5.2) \qquad (\phi(b,a).f)(x) = < x.\tau(\beta),b > .f(x).$$

__Théorème 4__. *L'application ainsi définie de* Ω *vers* $\mathrm{Ext}^1_G(\pi_o^\infty, \pi_o^\infty)_{h,o}$ *passe au quotient en une application de* $\tilde{\Omega}$ *vers ce dernier espace qui est bijective.*

Esquisse de la démonstration.

On a montré dans [1], partie V, paragraphe 3, qu'il existe un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^1_G(\pi_o^\infty, \pi_o^\infty) \to \mathrm{Hom}_{S_o}(N_o, \mathrm{End}\ \sigma_o)$$

qui transforme $\mathrm{Ext}^1_G(\pi_o^\infty, \pi_o^\infty)_{h,o}$ en le sous-ensemble formé des φ tels que les $\varphi(n_o)$ soient hermitiens et deux à deux permutables ; le cocycle ϕ donné par (5.2) a pour image φ donnée par

$$(\varphi(n_o).f)(s_o) = < s_o.\beta, n_o > .f(s_o)$$

(on a identifié ici σ_o à $\mathrm{Ind}_{S_o(\beta)}^{S_o}\rho$). Introduisons la représentation irréductible λ de $N_o.S_o$ suivante :

$$\lambda = \mathrm{Ind}_{N_o.S_o(\beta)}^{N_o.S_o}(e^{i\beta} \times \rho) ;$$

il est clair que la restriction de λ à S_o est équivalente à σ_o ; la théorie de Mackey établit une bijection entre $\tilde{\Omega}$ et l'ensemble de ces représentations λ ; enfin on vérifie immédiatement que

$$\lambda(n_o, s_o) = e^{i.\varphi(n_o)} . \sigma_o(s_o).$$

Exemples.

Dans tous les exemples qui suivent on prend $\psi_o = 0$, donc $\pi_o \in \hat{A}$; de plus

$$\Omega = \{(\beta,\rho) | \beta \in B^*, \quad \rho \in \widehat{A(\beta)}, \mathrm{Ind}_{A(\beta)}^{A} \rho \sim \pi_o\} ;$$

remarquons que Ω contient toujours le couple $(0, \pi_o)$, et qu'il ne contient que lui lorsque A est connexe et opère sans point fixe sur $B^* \setminus \{0\}$; remarquons aussi que

$$\mathrm{Ext}_G^1(\pi_o, \pi_o) \sim \mathrm{Hom}_A(B, \mathrm{End}\ \pi_o).$$

1) Groupe des déplacements de $\mathbb{R}^2$: $G = \mathbf{R}^2 \ltimes SO(2)$.

Ici π_o est un caractère de $SO(2)$; on a

$$\mathrm{Ext}_G^1(\pi_o, \pi_o) \sim \mathrm{Hom}_A(B, \mathbb{C}) = 0.$$

2) Groupe des déplacements de $\mathbb{R}^3$: $G = \mathbf{R}^3 \ltimes SO(3)$.

Ici π_o est une représentation D^j de $SO(3)$, $j = 0,1,2,\ldots$; $\mathrm{Ext}_G^1(D^j, D^j)$ est non nul si $j \geqslant 1$, mais la remarque ci-dessus montre que $\mathrm{Ext}_G^1(D^j, D^j)_{h,o}$ est toujours nul.

3) Groupe $G = \mathbf{R}^2 \ltimes D_4$.

On a noté D_4 le groupe diédral $\mathbb{Z}_4 \ltimes \mathbb{Z}_2$; il admet 5 représentations irréductibles notées traditonnellement :

A_1, A_2 de dimension 1, triviales sur $\mathbb{Z}_4$, A_1 triviale

B_1, B_2 de dimension 1, non triviales sur $\mathbb{Z}_4$

E de dimension 2.

L'action de D_4 sur $\mathbb{R}^2$ est $A_2 \oplus B_1$; on prend $\pi_o = E$; un calcul direct montre que $\mathrm{Ext}^1_G(\pi_o, \pi_o)_h$ est de dimension 2 tandis que $\mathrm{Ext}^1_G(\pi_o, \pi_o)_{h,o}$ est la réunion de deux droites.

Remarques.

Dans la situation du théorème 4, la famille $\pi(t)$ converge vers π_o, lorsque t tend vers 0, en un sens très strict puisque π_o est l'unique point d'accumulation de cette famille. D'autre part le théorème 4 reste valable sans supposer π_o irréductible, à condition de remplacer $\mathrm{Ext}^1_G(\pi_o^\infty, \pi_o^\infty)_{h,o}$ par le sous-ensemble formé des cocycles ϕ tels que l'ensemble $\phi(G) \cup \pi_o^\infty(G)$ soit irréductible ; alors les points d'accumulation de la famille $\pi(t)$ sont exactement les composantes irréductibles de π_o. Par exemple dans le cas du groupe des déplacements de $\mathbb{R}^2$, on peut prendre pour π_o la somme directe de tous les caractères de SO(2) ; dans le cas du groupe des déplacements de $\mathbb{R}^3$ - la somme directe $\bigoplus_{j \geqslant j_o} D^j$ où j_o est un indice fixé arbitrairement.

Bibliographie

[1] **P. Blanc et altri.** *Homologie, groupes* Ext^n *, représentations de longueur finie des groupes de Lie* (Astérisque n° 124-125, 1985).

[2] **P. Bonnet.** *Paramétrisation du dual d'une algèbre de Lie nilpotente* (à paraître).

[3] **N. Bourbaki.** *Groupes et algèbres de Lie*, Chapitre IX.

[4] **F. du Cloux.** *Jets de fonctions différentiables sur le dual d'un groupe de Lie nilpotent* (Invent. Math.).

[5] **P. Gabriel.** *Des catégories abéliennes* Bull. Soc. Math. France, t. 90, 1962, p. 323-448).

[6] **A. Guichardet.** *Méthode des orbites pour les représentations de longueur finie, II* (Bull. Soc. Math. France).

[7] **A. Guichardet.** *Méthode des orbites pour les représentations de longueur finie* (Invent. Math., t. 85, 1986, p. 199-215).

[8] **L. Pukanszky.** *Unitary representations of solvable Lie groups* (Ann. Sc . Ec. Norm. Sup., t. 4, 1971, p. 457-608).

*