PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

ANDRÉ LICHNEROWICZ

Extensions essentielles d’algèbres de Lie classiques de dimensions infinies

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1987, fascicule 1B
« Actes du colloque Jean Braconnier », , p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1987___1B_1_0>

EXTENSIONS ESSENTIELLES D'ALGEBRES DE LIE CLASSIQUES DE DIMENSIONS INFINIES

par André LICHNEROWICZ

Introduction.

Soit W une variété différentiable connexe, paracompacte, de classe C^∞ et de dimension $m \geqslant 2$. Tous les éléments introduits sont supposés C^∞ . Soit L l'algèbre de Lie de tous les champs de vecteurs de W, ϕ_p l'espace des p-formes de W. On peut faire opérer L par dérivation de Lie sur ϕ_p . La cohomologie de cette représentation a été étudiée par Flato et moi-même, puis par Lecomte et de Wilde [1] [2] . Nous avons mis en évidence à partir d'un algorithme semblable à l'isomorphisme de Chern-Weil des cocycles de L à valeurs dans ϕ_p qui fournissent des générateurs de cette cohomologie. Les 2 cocycles correspondants peuvent être interprétés en termes d'extensions. En collaboration avec Pereira da Silva [3] nous avons ainsi mis en évidence une extension dite universelle de l'algèbre de Lie L par l'espace ϕ_2 des 2-formes de W considéré comme algèbre de Lie abélienne.

Il est remarquable que les restrictions de cette extension à des sous-algèbres algèbres de Lie de L de dimensions infinies attachées à des structures géométriques variées demeurent essentielles. C'est ce paysage de structures géométriques correspondant à l'existence sur W de feuilletages généralisés que nous allons explorer.

1 - Extensions d'algèbres de Lie par une algèbre de Lie abélienne.

Je vais d'abord rappeler brièvement la théorie des extensions d'algèbres de Lie abéliennes Les algèbres de Lie considérées ici sont des algèbres de Lie de dimensions finies ou infinies sur le corps des réels. Soit $(H,[\,,])$ une algèbre de Lie arbitraire et M une algèbre de Lie abélienne. On a :

DEFINITION : *Une algèbre de Lie* $(A,\{\,,\})$ *est une extension de* $(H,[\,,])$ *par* M *si l'on a la suite exacte d'algèbres de Lie*

$$(1\text{-}1) \qquad 0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\pi} H \longrightarrow 0$$

M est un idéal abélien de $(A,\{\,,\})$ tel que A/M soit isomorphe à $(H,[\,,])$; π est la projection de A sur H. Soit $\mathcal{H}$ un sous-espace de A tel que $A = \mathcal{H} \oplus i\,M$. Pour un choix de $\mathcal{H}$, la restriction $\hat{\pi}$ de π à $\mathcal{H}$ définit un isomorphisme d'espaces de $\mathcal{H}$ sur H. On note p (resp. q) la projection de A sur $\mathcal{H}$ (resp. $i\,M$) parallèlement à iM (resp. $\mathcal{H}$). L'extension $(A,\{\,,\})$ définit une représentation a de $(H,[\,,])$ dans M telle que si $\xi \in H, \mu \in M$, on ait pour tout $X \in A$ vérifiant $\pi X = \xi$

$$(1\text{-}2) \qquad i(a(\xi)\mu) = \{X, i\mu\}$$

Soient $\xi,\eta \in H$ et $\hat{X} = \hat{\pi}^{-1}\xi$, $\hat{Y} = \hat{\pi}^{-1}\eta$ les éléments correspondants de $\mathcal{H}$. La 2-cochaîne C de H à valeurs dans M donnée par :

$$(1\text{-}3) \qquad i(C(\xi,\eta)) = q\{\hat{X},\hat{Y}\}$$

est un 2-cocycle pour la cohomologie de $(H,[\,,])$ à valeurs dans M associée à la représentation a. Si $H^2(H\,;\,a\,;\,M)$ est le second espace de cohomologie correspondant, la 2-classe $\beta \in H^2(H\,;\,a\,;\,M)$ définie par C est indépendante du choix de $\mathcal{H}$. On a :

PROPOSITION : *Toute extension* $(A,\{\,,\})$ *de* $(H,[\,,])$ *par* M *définit une représentation* a *de* $(H,[\,,])$ *dans* M *et une 2-classe* β *de cohomologie élément de* $H^2(H\,;\,a\,;\,M)$. *Inversement si* a *est une représentation donnée et* $\beta \in H^2(H\,;\,a\,;\,M)$ *, il existe des extensions de* $(H,[\,,])$ *par* M *correspondants à ces éléments.*

Choisissons un espace $\mathscr{H}$ isomorphe à H par $\hat{\Pi} : \mathscr{H} \to H$ et introduisons l'espace $A = \mathscr{H} \oplus i\, M$. Pour le 2-cocycle C appartenant à β et associé à $\mathscr{H}$ on a pour $X, Y \in A$ tels que $\Pi X = \xi$, $\Pi Y = \eta$, $q X = i \lambda$, $q Y = i \mu$

$$(1\text{-}4) \qquad \{X,Y\} = \hat{\Pi}^{-1}[\xi,\eta] + i\,(C(\xi,\eta) + a(\xi)\mu - a(\eta)\lambda)$$

Deux extensions $(A,\{,\})$ et $(A_1,\{,\}_1)$ de $(H,[,])$ par M sont dites <u>équivalentes</u> si il existe un isomorphisme ρ de $(A,\{,\})$ sur $(A_1,\{,\}_1)$ tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & & A \arrow[dd, "\rho"] \arrow[dr, "\Pi"] & & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "i_1"'] & & H \arrow[r] & 0 \\
 & & A_1 \arrow[ur, "\Pi_1"'] & &
\end{tikzcd}$$

On a :

<u>PROPOSITION</u> : *Pour que deux extensions de* $(H,[,])$ *par* M *soient équivalentes, il faut et il suffit qu'elles définissent la même représentation a et la même 2-classe de cohomologie* $\beta \in H^2(H\ ;\ a\ ;\ M)$.

Si $\beta = 0$, l'extension est équivalente au produit semi-direct de $(H,[,])$ par M associé à a ; l'extension est triviale. Si β est $\neq 0$, l'extension est dite <u>essentielle</u>.

2 - <u>L'extension universelle de (L, [,])</u>

L'algèbre L opérant sur ϕ_2 par dérivation de Lie $\mathscr{L}$, on note $H^2(L;\mathscr{L};\phi_2)$ le second espace de cohomologie différentielle de Chevalley de L à valeurs dans ϕ_2 associé à la représentation $\mathscr{L}$. On sait [1] [2] que cet espace admet un générateur privilégié défini de la manière suivante. Soit Γ une connexion linéaire sans torsion, $\mathscr{L}(X)\Gamma$ sa dérivée de Lie par $X \in L$. Si $\{x^i\}$ $(i,j,\ldots=1,\ldots,\pi)$ est une carte de W de domaine U, on a sur $U(\partial_r = \partial/\partial x^r)$.

$$(2\text{-}1) \qquad (\mathscr{L}(X)\Gamma)^k_{\ell i} = \partial_{\ell i} X^k + X^r \partial_r \Gamma^k_{\ell i} - \partial_r X^k \Gamma^r_{\ell i} + \partial_\ell X^r \Gamma^k_{rj} + \partial_i X^r \Gamma^k_{ir} \quad .$$

La 2-cochaine S^Γ de L, à valeurs dans ϕ_2, donnée sur tout domaine U, $X,Y \in L$ par :

$$(2\text{-}2) \qquad S^\Gamma(X,Y)_{ij} = (\mathscr{L}(X)\Gamma)^k_{\ell_i}(\mathscr{L}(Y)\Gamma)^\ell_{kj} - (\mathscr{L}Y)\Gamma)^k_{\ell_i}(\mathscr{L}(X)\Gamma)^\ell_{kj}$$

est un 2-cocycle dont la classe $\beta \in H^2(L ; \mathscr{L}; \phi_2)$ est indépendante du choix de Γ ; β est toujours $\neq 0$ et fournit le générateur privilégié considéré.

Il en résulte qu'il existe une extension essentielle $(A,\{,\})$ de L par ϕ_2 associée à la représentation $\mathscr{L}$ et à la 2-classe β. Ici, comme dans toute la suite, l'équivalence entre extensions est entendu au sens d'équivalence différentielle (ou locale). Un élément de A est un couple (X,λ) d'un vecteur $X \in L$ et d'un 2-forme $\lambda \in \phi_2$. Le crochet dans A de (X,λ) et (Y,μ) s'exprime à partir de $S^\Gamma \in \beta$ par

$$(2\text{-}3) \qquad \{(X,\lambda),(Y,\mu)\} = ([X,Y],S^\Gamma(X,Y) + \mathscr{L}(X)\mu - \mathscr{L}(Y)\lambda) .$$

THEOREME 1 : *Soit $(L,[,])$ l'algèbre des champs de vecteurs de W, ϕ_2 l'espace des 2-formes considéré comme algèbre de Lie abélienne ; L opérant sur ϕ_2 par dérivation de Lie $\mathscr{L}$, il existe une extension essentielle priviligiée $(A,\{,\})$ de $(L,[,])$ par ϕ_2 associée à $\mathscr{L}$ et à la 2-classe $\beta \in H^2(L ;\mathscr{L};\phi_2)$ dont le crochet peur s'exprimer par (2-3).*

Cette extension est dite l'extension universelle de L par ϕ_2.

3 - Transformations infinitésimales d'une structure unimodulaire.

Supposons W orientable ; une structure unimodulaire est définie sur W par la donnée d'une m-forme η partout $\neq 0$. On sait que η définit sur les tenseurs contravariants antisymétriques un opérateur δ de codifférentiation tel que δ^2 = Nous notons L_u l'algèbre de Lie des transformations infinitésimales (t.i) unimodulaires de (W,η). Pour qu'un vecteur X appartienne à L_u [3] il faut et il suffit que $\delta X = 0$. Soit L_u^X le sous-espace de L_u défini par les éléments X pour lesquels il existe un 2-tenseur antisymétrique t de W tel que $X = \delta t$. On sait [4] que l'on a $L_u^X = [L_u , L_u]$.

(W,η) admet des atlas de cartes dites canoniques, $\{x^i\}$ telles que η s'écrive sur le domaine U

$$\eta|_U = dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^m$$

Si t est un p-tenseur antisymétrique, les composantes de δt dans une telle carte sont :

$$(\delta t)^{i_2 \ldots i_p} = - \partial_j \, t^{j i_2 \ldots i_p} \ .$$

Sur (W,η) considérons, pour une connexion linéaire sans torsion Γ, le 2-cocycle S^Γ restreint à L_u^*. Nous notons $H^2(L_u^* \; ; \mathscr{L} \; ; \phi_2)$ le second espace de cohomologie différentielle de L_u^* à valeurs dans ϕ_2 associé à la représentation $\mathscr{L}$. Nous nous proposons de montrer que S^Γ ne peut être le cobord d'une 1)cochaîne locale T. Le raisonnement esquissé peut être considéré comme typique pour la situation analysée.

Nous nous plaçons dans le domaine V d'une carte canonique $\{x^i\}$; x_1 est un point de $U \subset V$ tel qu'en ce point $x^1 = x^2 = 0$. Considérons un couple (t',u') de 2-tenseurs qui, sur $\bar{U}$ se réduisent à :

$$t'|_{\bar{U}} = - x^1(x^2)^2 \, \partial_1 \wedge \partial_2 \qquad u'|_{\bar{u}} = (x^1)^2 x^2 \, \partial_1 \wedge \partial_2$$

$X' = \delta t'$ et $Y' = \delta u'$ ont respectivement pour seules composantes non nulles sur U

$$X'^1 = - 2x^1x^2 \qquad X^{12} = (x^2)^2 \qquad Y'^1 = (x^1)^2 \qquad Y^{12} = - 2x^2x^2 \ .$$

On en déduit :

$$[X',Y']^1 = - 6(x^1)^2 x^2 \qquad [X',Y']^2 = 6x^1(x^2)^2 \ .$$

Considérons maintenant les 2-tenseurs t'', u'' se réduisant sur $\bar{U}$ à :

$$t''|_{\bar{U}} = -((x^1)^3/6)\partial_1 \wedge \partial_2 \qquad u''|_{\bar{U}} = ((x^2)^3/6) \, \partial_1 \wedge \partial_2 \ .$$

$X'' = \delta t''$ et $Y'' = \delta u''$ ont respectivement pour composantes non nulles sur U

$$(3\text{-}1) \qquad X''^2 = (x^1)^2/2 \qquad\qquad Y''^1 = (x^2)^2/2$$

On en déduit :

$$[X'',Y'']^1 = (x^1)^2 x^2/2 \qquad [X'',Y'']^2 = -\, x^1(x^1)^2/2$$

Il en résulte :

$$(3\text{-}2) \qquad [X',Y']|_U = -\,12[X'',Y'']|_U \quad .$$

Nous notons que les 1-jets en x_1 de (X',Y') et (X'',Y'') sont nuls. On déduit de (2-1) , (2-2).

$$(3\text{-}3) \qquad S^\Gamma(X',Y')_{12}(x_1) = 12 \qquad S^\Gamma(X'',Y'')_{12}(x_1) = 1$$

Supposons que S^Γ soit le cobord d'une 1-cochaine locale T à valeurs dans ϕ_2

$$S^\Gamma(X,Y) = \mathscr{L}(X)T(Y) - \mathscr{L}(Y)T(X) - T([X,Y]) \quad .$$

Il vient :

$$S^\Gamma(X',Y')(x_1) = -\,T([X',Y'])(x_1) \qquad S^\Gamma(X'',Y'')(x_1) = -T([X'',Y''])(x_1)$$

D'après la localité de T et (3-2) on doit avoir

$$S^\Gamma(X',Y')(x_1) = -\,12\ S^\Gamma(X'',Y'')(x_1).$$

ce qui contredit (3-3). Ainsi le 2-cocycle S^Γ de L_u^* à valeurs dans ϕ_2 définit une 2-classe $\beta_u^* \in H^2\ (L_u^*\ ;\mathscr{L};0)$ qui n'est jamais nulle. On peut noter que le raisonnement précédent étant local permet de retrouver que $\beta \in H^2\ (L;\mathscr{L};\phi_2)$ est $\neq 0$. On a :

THEOREME 2 : *Soit L_u l'algèbre de Lie des t.i d'une variété unimodulaire (X,η) L_u^* son idéal dérivé. Si ϕ_2 est l'espace des 2-formes de W considéré comme algèbre de Lie abélienne, la restriction à L_u^* de l'extension universelle de L définit une extension essentielle A_u^* de L_u^* par ϕ_2 associée à $\mathscr{L}$ et à β_u^* le crochet de A_u^* peut s'exprimer par la restriction de (2-3) à L_u^* . La situation est la même pour L_u.*

4 - Algèbres de Lie associées à un feuilletage généralisé.

a) Soit $P : x \in W \to P_x \subset T_x W$ un champ de plans de dimensions variables ; P est C^∞ s'il est engendrée par un ensemble E de C^∞-vecteurs. Une variété intégrale de P est une sous-variété immergée S telle que $T_x S \subset P_x$. Une variété intégrale est maximale si toute variété intégrale qui la contient coïncide avec elle. Le C^∞-champ P est dit invariant par $X \in L$ s'il est invariant par le flot de X. Cela posé, on a une généralisation du théorème de Frobenius due à Sussman [5].

THEOREME (Sussmann) : *Soit* P *un* C^∞*-champ engendré par un ensemble* E *de champs de vecteurs. Supposons* P *invariant pour tout élément de* E . *Alors par tout* $x \in W$, *il passe une variété intégrale maximale unique* $S(x)$ *qui est faiblement plongée dans* W *et telle que*

$$T_y\, S(x) = P_y \qquad (\forall\, y \in S(x))$$

Inversement s'il en est ainsi, P *est invariant pour tout champ de vecteurs lui appartenant.*

Dans cette situation nous dirons que P définit un feuilletage (généralisé) de W, les feuilles étant les variétés intégrales maximales. Un feuilletage ordinaire de Reeb est appelé ici un feuilletage régulier.

Un point x de (X,P) est dit régulier s'il existe un voisinage ouvert U de x tel que la restriction P_U de P à U soit un feuilletage régulier. L'ensemble des points réguliers de (W,P) est un ouvert partout dense de X ; si W_ρ est une composante connexe de cet ouvert, P_{W_ρ} est un feuilletage régulier.

Nous notons L_P^* l'algèbre de Lie des champs de vecteurs tangents à P. Soit L_P le normalisateur de L_P^* dans L : L_P est une algèbre de Lie de champs de vecteurs préservant le feuilletage P.

b) Sur (W,P) nous nous proposons d'étudier le 2-cocycle S^Γ restreint à L_P^*. Il définit une 2-classe $\beta_P^* \in H^2\,(L_P^*\,;\mathcal{L};\,\phi_2)$ indépendante du choix de la connexion.

Supposons que P admette des feuilles de dimension $\geqslant 2$. Soit V un domaine de W tel que le feuilletage P_V soit régulier ; nous supposons que V est domaine d'une carte adaptée à P_V soit $\{x^i\} = \{x^\alpha ; x^a\}$ $(\alpha,\beta,\ldots=1,\ldots p \geqslant 2$; $a = p+1,\ldots,m)$ telle que les feuilles soient définies sur V par $x^a = C^{te}$. Soit U un domaine tel que $U \subset V$; x_1 est un point de U admettant des coordonnées telles que $x^1 = x^2 = 0$. Considérons deux couples (X',Y') et (X'',Y'') d'éléments de $\overset{*}{L}_P$ dont les restrictions à U aient pour seules composantes non nulles

$$X'^1 = x^1 x^2 \qquad\qquad Y'^2 = x^1 x^2$$

et les expressions (3-1). On vérifie que :

$$(4\text{-}1) \qquad [X',Y']|_U = -\,2[X'',Y'']|_U \quad .$$

Les 1-jets en x, de X', Y' sont encore nuls. On obtient :

$$(4\text{-}2) \qquad S^\Gamma(X',Y')_{12}(x_1) = 1 \qquad\qquad S^\Gamma(X'',Y'')_{12}(x_1) = 1 \quad .$$

Si S^Γ est le cobord d'une 1-cochaîne locale T à vecteurs dans ϕ_2 , on démontre comme précédemment que d'après (4-1), on doit avoir

$$S^\Gamma(X',Y')(x_1) = -\,2\;S^\Gamma(X'',Y'')(x_1)$$

ce qui contredit (4-2). Ainsi β_P^x est toujours $\neq 0$.

THEOREME 3 : *Soit* P *un feuilletage généralisé de* W *admettant des feuilles de dimension* $\geqslant 2$, $\overset{*}{L}_P$ *l'algèbre de Lie des champs de vecteurs tangents à* P, L_P *le normalisateur de* $\overset{*}{L}_P$ *dans* L. *Si* ϕ_2 *est l'espace des 2-formes de* W *considéré comme algèbre de Lie abélienne, la restriction à* $\overset{*}{L}_P$ *de l'extension universelle de* L *définit une extension essentielle* $\overset{*}{A}_P$ *de* $\overset{*}{L}_P$ *par* ϕ_2 *associée à* $\mathscr{L}$ *et* $\overset{*}{\beta}_P$. *La situation est le même pour l'algèbre de Lie* L_P.

5. Algèbres de Lie associées à une variété de Poisson.

a) Une structure de Poisson est définie sur W par un 2-tenseur contravariant antisymétrique Λ non identiquement nul, vérifiant au sens du crochet de Schouten [6]

(5-1) $[\Lambda,\Lambda] = 0$

Λ définit sur $N = C^\infty(W;R)$ un crochet par

(5-2) $[u,v] = i(\Lambda)(du \wedge dv)$ $(u,v \in N)$

où $i(.)$ est le produit intérieur ; $(N,[,])$ est l'algèbre de Lie de Poisson de la variété (W,Λ). A tout élément u de N, associons le champ de vecteurs $X_u = [\Lambda,u]$ appelé le champ hamiltonien associé à u. Pour (5-2), on a $[u,v] = \mathscr{L}(X_u)v$. Les champs hamiltoniens de (W,Λ) définissent une algèbre de Lie L^*_Λ dont les éléments laissent Λ invariant ; $\sigma : u \in N \to X_u \in L^*_\Lambda$ est un homomorphisme de $(N,[,])$ sur L^*_Λ dont le noyau est le centre de l'algèbre de Lie de Poisson. Si $x \in W$ les valeurs en x des champs hamiltoniens engendrent un sous-espace $P_x \subset T_xW$. Nous obtenons ainsi sur W un champ P de plans P_x, le champ caractéristique de (W,Λ). L'étude des champs hamiltoniens montre que P définit un feuilletage généralisé [7] ; la restriction de Λ à une feuille de P munit cette feuille d'une structure symplectique. L'ensemble des points réguliers de P est un ouvert partout dense de W dont chaque composante connexe est une variété de Poisson régulière (à feuilles de dimension constante).

A toute k-cochaîne C différentielle de L^*_Λ à valeurs dans ϕ_2, associons la k-cochaîne à valeurs dans N donnée par $C_\Lambda = i(\Lambda)C$; Λ étant invariant par les champs hamiltoniens, on voit qu'on définit ainsi un homomorphisme :

$$i(\Lambda) : H^k(L^x_\Lambda ;\mathscr{L}; \phi_2) \to H^k(L^x_\Lambda ; \mathscr{L};N) .$$

En particulier considérons le 2-cocycle S^Γ restreint à L'_Λ qui définit une classe $\beta_\Lambda \in H^2(L^*_\Lambda ;\mathscr{L}; \phi_2)$; il lui correspond le 2-cocycle $i(\Lambda)S^\Gamma$ de L^*_Λ à valeurs dans N qui donne une 2-classe $i(\Lambda)\beta_\Lambda \in H^2(L^*_\Lambda ;\mathscr{L};N)$. La cohomologie de L^*_Λ à valeurs dans N peut être interprétée de la manière suivante : introduisons, pour des cochaînes nulles sur les fonctions constantes sur les feuilles la cohomologie différentielle de Chevalley de $(N,[,])$ à valeurs dans N correspondant à la représentation adjointe ; cette cohomologie est isomorphe à la précédente. En particulier le 2-cocycle de $(N,[,])$ à valeurs dans N donné par

$$S^\Gamma_\Lambda(u,v) = i(\Lambda)S^\Gamma(X_u,X_v) \qquad (u,v \in N)$$

peut être considéré comme définissant $\beta^1_\Lambda \in H^2(N;[;];N)$ correspondant à $i(\Lambda)\beta_\Lambda$.

b) Nous nous proposons d'étudier β^1_Λ qui joue un rôle essentiel dans la <u>théorie des déformations</u> d'une algèbre de Lie de Poisson. Soit $(W_1, \Lambda|_{W_1})$ une composante régulière de (W,Λ). Nous nous plaçons dans un domaine U tel que $\bar{U} \subset W$, et qui est domaine d'une carte $\{x^i\} = \{x^\lambda, x^{\bar{\lambda}} ; x^a\}$ $(\lambda = 1,\ldots,p > 1$; $\bar{\lambda} = \lambda + p$; $a = 2p + 1,\ldots,a)$ adaptée à Λ, où Λ n'admet pour composantes non nulles que $\Lambda^{\lambda\bar{\lambda}} = -\Lambda^{\bar{\lambda}\lambda} = 1$. Nous notons x_1 un point de U admettant des coordonnées telles qu'en ce point $x^1 = x^{\bar{1}} = 0$.

Considérons deux couples (u',v') et (u'',v'') d'éléments de N dont les restrictions à U s'écrivent

$$u'|_{\bar{U}} = x^1(x^{\bar{1}})^2 \qquad v'|_{\bar{U}} = (x^1)^2 x^{\bar{1}}$$

et

$$u''|_{\bar{U}} = (x^1)^3 \qquad v''|_{\bar{U}} = (x^{\bar{1}})^3$$

On a

$$(5\text{-}3) \qquad [u'',v'']|_U = 3[u',v']|_U \quad .$$

Les 1-jets en x_1 de $X_{u'}$, $X_{v'}$, $X_{u''}$, $X_{v''}$ sont nuls. On obtient :

$$(5\text{-}4) \qquad S^\Gamma_\Lambda(u',v')(x_1) = -12 \qquad S^\Gamma_\Lambda(u'',v'')(x_1) = 36 \quad .$$

Si S^Γ_Λ est le cobord d'une 1-cochaîne locale T à valeurs dans N, on voit comme précédemment que (5-3) donne

$$S^\Gamma_\Lambda(u'',v'')(x_1) = 3\, S^\Gamma_\Lambda(u',v')(x_1)$$

ce qui contredit (5-4) . On a $\beta^1_\Lambda \neq 0$ et par suite $\beta_\Lambda \neq 0$. Il vient :

<u>THEOREME 4</u> = *Soit* L^*_Λ *l'algèbre de Lie des champs hamiltoniens d'une variété de Poisson* (W,Λ) . *Si* ϕ_2 *est l'espace des 2-formes de* W *considéré comme algèbre de Lie abélienne, la restriction à* L^*_Λ *de l'extension universelle de* L *définit une extension essentielle* A^*_Λ *de* L^*_Λ *par* ϕ_2 *associée à* $\mathscr{L}$ *et à* β_Λ .

Par $i(\Lambda)$ *on en déduit une extension essentielle de* L_Λ^* *par* N *considéré comme algèbre de Lie abélienne et une extension essentielle* A_Λ^1 *de* $(N,[\,,])$ *par* N *associée à* $[\,,]$ *et à* β_Λ^1.

6. Structure conforme générale de Jacobi ([7] [8]).

a) Soit $\Pi : K \to W$ un fibré en droites réelles sur W , $(\Gamma(K),[\,,])$ une algèbre de Lie locale sur l'espace $\Gamma(K)$ des sections de K. Soit $\{U,V,..\}$ un recouvrement localement fini de W par des domaines munis de sections locales sans zéro, soit σ_U au-dessus de U ; si $s \in \Gamma(K)$, on a $s|_U = u_U\sigma_U$ où $u_U \in N(U)$. Si V est tel que $U \cap V \neq \emptyset$, on a $\sigma_V = h_{UV}\sigma_U$ (où $h_{UV} \neq 0$) où les h_{UV} forment un système de fonctions de transition. On a $u_U = h_{UV}u_V$ sur $U \cap V$; $(\Gamma(K),[\,,])$ induit sur N(U) une algèbre de Lie $(N(U),[\,,])$ avec

$$(6\text{-}1)\qquad [u_U,v_U] = i(\Lambda_U)(du_U \wedge dv_U) + i(E_U)(u_U\, dv_U - v_U\, du_U).$$

Λ_U est ici un 2-tenseur contravariant antisymétrique et E_U un vecteur sur U tels que :

$$(6\text{-}2)\qquad [\Lambda_U,\Lambda_U] = 2E_U \wedge \Lambda_U \qquad [E_U,\Lambda_U] \equiv \mathscr{L}(E_U)\Lambda_U = 0$$

Sur $U \cap V$, il vient :

$$(6\text{-}3)\qquad \Lambda_V = h_{UV}\,\Lambda_U \qquad E_V = h_{UV}\,E_U + [\Lambda_U,h_{UV}]$$

$(\Gamma(K),[\,,])$ définit sur W une structure conforme de Jacobi associée à K ; L_J est l'algèbre de Lie des tr i de cette structure. A $s \in \Gamma(K)$ est associé un champ hamiltonien X_s de W , élément d'un idéal L_J^* de L_J. Au-dessus de U :

$$(6\text{-}4)\qquad X_1|_U = u_U\, E_U + [\Lambda_U,u_U] \quad .$$

On définit comme paragraphe 5 le champ caractéristique P de la structure. L'étude des champs hamiltoniens montre encore que P définit un feuilletage généralisé de W [7]. Soit S une feuille de P ; si S est de dimension impaire, les $(\Lambda_U|_S\ ,\ E_U|_S)$ définissent sur S une structure de contact ; si S est de dimension paire, ils définissent une structure localement conformément symplectique.

b) Cela posé, soit $\{x^i\}$ $(i,j,\ldots = 1,\ldots,m)$ une carte de W de domaine U ; un point $\tilde{x}$ de K au-dessus de $x \in W$ peut s'écrire $x^0\ \sigma_U(x)$. Ainsi $\{x^A\} = \{x^0,x^i\}$ $(A,B,\ldots = 0,\ 1,\ldots,m)$ est une carte de K au-dessus de U. Si (x^0,x^i) est une carte analogue au-dessus de V, on a $x^{0'} = h^{-1}_{UV}\ x^0$ pour $U \cap V$. Le champ fondamental $\tilde{Z}$ du fibré vectoriel K a pour composantes $\tilde{Z}^0 = -x^0$, $\tilde{Z}^i = 0$ sur U ; (Λ_U, E_U) déterminent sur $\Pi^{-1}(U)$ des éléments, désignés par la même notation, invariants par $\tilde{Z}$. Le 2-tenseur $\tilde{\Gamma}_U$ de $\Pi^{-1}(U)$ donné par :

$$\tilde{\Gamma}_U = \Lambda_U + \tilde{Z}|_{\Pi^{-1}(U)}\ E_U$$

est aussi invariant par $\tilde{Z}$. Les $x^0\ \tilde{\Gamma}_U$ définissent la restriction à $\Pi^{-1}(u)$ d'un 2-tenseur $\tilde{\Lambda}$ de K vérifiant

$$(6\text{-}5) \qquad [\tilde{\Lambda},\tilde{\Lambda}] = 0 \qquad\qquad \mathscr{L}(\tilde{Z})\tilde{\Lambda} = -\ \tilde{\Lambda}\ .$$

A une structure conforme de Jacobi est ainsi associé canoniquement une <u>structure de Poisson</u> $\tilde{\Lambda}$ sur K, homogène de degré -1 par rapport à Z, et inversement [7].

Soit K_0 une composante connexe de K privé de sa section nulle, $\tilde{N}_h$ l'espace des fonctions définies sur K_0, homogènes et de degré h, dont nous notons $\{,\}$ le crochet de Poisson. A $s \in \Gamma(K)$ faisons correspondre $\tilde{u} \in \tilde{N}_1$ définie par $\tilde{u}|_{\Pi^{-1}(U)} = (x^0)^{-1}\ \Pi^*\ u_U$. On définit ainsi un isomorphisme d'espaces $\rho : s \in \Gamma(K)$ $\tilde{u}\ \ \tilde{N}_1$. On vérifie immédiatement que $\{\tilde{N}_1,\tilde{N}_h\} \subset \tilde{N}_h$; en particulier $(\tilde{N}_1,\{,\})$ est une algèbre de Lie et ρ est <u>un isomorphisme de</u> $(\Gamma(K),[\,,])$ <u>sur</u> $(N_1,\{,\})$.

c) Soit $K^* \to W$ le fibré en droites dual de K et $\Gamma(K^*)$ l'espace de ses sections. Nous munissons le recouvrement $\{U,V,\ldots\}$ de W de sections locales sans zéros $\{\sigma^*_u,\sigma^*_u\}$ duales de $\{\sigma_u,\sigma_V,\ldots\}$. Si $s^* \in \Gamma(K^*)$, on a $s^*|_U = u^*_U \sigma U$; où $u^*_U \in N(u)$. Pour V tel que $U \cap V \neq \emptyset$, $\sigma^*_V = h^{-1}_{uV}\ \sigma^*_U$ et $u^*_U = h^{-1}_{UV}\ u^*_V$ sur $U \in V$. A toute section $s^* \in \Gamma(K^*)$ faisons correspondre la fonction $\tilde{u}^* \in \tilde{N}_{-1}$ définie sur K^0 par $\tilde{u}^*|_{\Pi^{-1}(U)} = x^0\ \Pi^*\ u^*_U$. On a ainsi un isomorphisme d'espace $\tau = s^* \in \Gamma(K^*) \to u^* \in N_{-1}$.

Considérons la représentation de $(\Gamma(K),[,])$ dans $\Gamma(K^*)$ obtenue en faisant opérer les champs hamiltoniens X_S par dérivation de Lie sur les sections de K^*. On a :

$$\tau(\mathcal{L}(X_S)t^*) = \{\rho(S),\tau(t^*)\} \qquad (s \in \Gamma(K), t^* \in \Gamma(K^*)) \tag{6-6}$$

A toute k-cochaîne, C de $(\Gamma(K),[,])$ à valeurs dans $\Gamma(K^*)$, associons la k-cochaîne $\tilde{C} = \mu C$ de $(N_1,\{,\})$ à valeurs dans $\tilde{N}_{-1}$ donnée par :

$$(\mu C)(\tilde{u}_1,\ldots,\tilde{u}_k) = C(\rho^{-1}(\tilde{u}_1),\ldots,\rho^{-1}(\tilde{u}_k)) \quad . \tag{6-7}$$

On déduit de (6-6) que la cohomologie de $(\Gamma(K),[,])$ à valeurs dans $\Gamma(K^*)$ associée à la représentation précédente est isomorphe par μ à la cohomologie de $(N,\{,\})$ à valeurs dans N_1 associé à $\{,\}$. On démontre de plus [3] .

PROPOSITION : *Soit Γ une connexion linéaire sans torsion de W. Considérons la connexion linéaire sans torsion $\tilde{\Gamma}$ définie sur K_0 relativement à un atlas de cartes envisagées par :*

$$\tilde{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} \;, \quad \tilde{\Gamma}^i_{0A} = 0 \;, \quad \tilde{\Gamma}^0_{0j} = 0 \;, \quad \tilde{\Gamma}^0_{ij} = 0 \;, \quad \tilde{\Gamma}^0_{00} = -(x^0)^{-1} \tag{6-8}$$

La connexion $\tilde{\Gamma}$ qui vérifie $\tilde{\nabla} Z = 0$ est invariante par $\tilde{Z}$.

7. Extensions essentielles.

a) Soit $L^{*(1)}_{\tilde{\Lambda}}$ l'algèbre de Lie des champs hamiltoniens de $(K_0,\tilde{\Lambda})$ associés aux éléments de $\tilde{N}_1$; $L^{*(1)}_{\tilde{\Lambda}}$ est isomorphe à L^*_J . Considérons, pour K_0 et pour une connexion (6-8), le 2-cocycle $\tilde{S}^{\tilde{\Gamma}}$ restreint à $L^{*(1)}_{\tilde{\Lambda}}$; $\tilde{S}^{\tilde{\Gamma}}$ est à valeurs dans $\Pi^*\phi_2$ et définit $\beta_{\tilde{\Lambda}} \in H^2(L^{*(1)}_{\tilde{\Lambda}};\mathcal{L};\Pi^*\phi_2)$.

Le 2-cocycle de $(\tilde{N}_1,\{,\})$ à valeurs dans $\tilde{N}_{-1}$ donné par

$$\tilde{S}^{\Gamma}_{\tilde{\Lambda}}(\tilde{u},\tilde{v}) = i(\tilde{\Lambda})\tilde{S}^{\tilde{\Gamma}}(\tilde{X}_{\tilde{u}},\tilde{X}_{\tilde{v}})$$

définit $\beta^1_{\tilde{\Lambda}} \in H^2(\tilde{N}_1 \,;\{\ ,\ \};\, \tilde{N}_{-1})$. Nous allons étudier l'exactitude de $\tilde{\tilde{S}}^{\Gamma}_{\tilde{\Lambda}}$.

Soit W_1 une composante régulière de W ; nous nous plaçons dans un domaine U tel que $U \subset W_1$. Deux cas sont à distinguer selon que les feuilles S de W_1 sont de dimension paire ou impaire.

<u>Supposons</u> S = 2p <u>avec</u> $p \geqslant 1$. Pour U contraticle, par changement de la section σ_U on peut supposer que la structure obtenue sur U est une <u>structure de Poisson</u>. Si $\tilde{S}^{\Gamma}_{\tilde{\Lambda}}$ était exact, $\mu^{-1}(S^{\Gamma}_{\tilde{\Lambda}})$ le serait et pour la connexion (6-8) S^{Γ}_{Λ} le serait aussi sur (U,Λ_U) ce qui contredit le paragraphe 5.

b) <u>Supposons dim</u> S = 2p+1 <u>avec</u> $P \geqslant 1$. On démontre

<u>LEMME</u> : *Il existe sur* $K_0|_{W_1}$ *des cartes* $\{x^0, x^{\bar{\rho}}; x^a\}$ $(\rho = 1,\dots,p+1\ ;\bar{\rho} = \rho+p+1\ ;$ $a = 2p+3,\dots,m+1)$ *telles que les* $x^{\bar{\rho}} = y^{\rho}$ *soient homogènes de degré 1 et que* $\tilde{\Lambda}$ *et* $\tilde{Z}$ *aient pour seules composantes non nulles* $\tilde{\Lambda}^{\rho\bar{\rho}} = -\tilde{\Lambda}^{\bar{\rho}\rho} = 1$, $\tilde{Z} = y^{\rho}$.

Choisissons sur $K_0|_{X_1}$ un domaine $\tilde{U}$ et une carte $\{x^{\rho},y^{\rho};x^a\}$ de domaine $\tilde{V}$ (avec $\tilde{U} \subset \tilde{V}$) telle que $r = \sqrt{\Sigma\,(y^{\rho})^2}$ ne s'annule pas sur $\tilde{U}$; r est homogène de degré 1 et strictement positive ; $\tilde{x}_1 \in \tilde{U}$ est un point admettant pour coordonnées $x^{\rho} = 0$ $(\rho = 1,\dots,p+1)$, $y^{\rho} = 0$ $(\rho = 1,\dots,p)$, $y^{p+1} = 1$, $x^a = 0$. Considérons deux couples $(\tilde{u}',\tilde{v}')$ et $(\tilde{u}'',\tilde{v}'')$ d'éléments de $\tilde{N}_1$ dans les restrictions à $\tilde{U}$ sont :

$$\tilde{u}'|_{\tilde{U}} = x^1 (y^1)^2 r^{-1} \qquad \tilde{v}'|_{\tilde{U}} = (x^1)^2 y^1$$

et

$$\tilde{u}''|_{\tilde{U}} = (y_1)^3 r^{-2} \qquad \tilde{v}''|_{\tilde{U}} = (x^1)^3 r$$

Un calcul direct donne :

$$\{\tilde{u}'',\tilde{v}''\}|_{\tilde{U}} = 3\{\tilde{u}',\tilde{v}'\}|_{\tilde{U}} \quad . \tag{7-1}$$

Les 2-jets des 4 fonctions en $\tilde{x}_1$ sont nuls. Il vient :

$$\tilde{S}^{\tilde{\Gamma}}_{\tilde{\Lambda}}(\tilde{u}',\tilde{v}')(\tilde{x}_1) = -12 \qquad \tilde{S}^{\tilde{\Gamma}}_{\tilde{\Lambda}}(\tilde{u}'',\tilde{v}'')(\tilde{x}_1) = 36 . \tag{7-2}$$

Si $\tilde{S}^{\tilde{\Gamma}}_{\tilde{\Lambda}}$ est le cobord d'une 1-cochaîne $\tilde{T}$ locale, on voit comme précédemment que (7-2) contredit (7-1). On en déduit $\beta^1_{\tilde{\Lambda}} \neq 0$ si W admet des feuilles de dimension $\geqslant 2$. Mais $\beta^1_{\tilde{\Lambda}}$ correspond à $\beta^1_J \in H^2(\Gamma(K);\mathscr{L};\Gamma(K^*))$. Il en résulte

<u>THEOREME 5</u> : *Soit $\Pi : K \to W$ un fibré en droites réelles, $(\Gamma(K),[,])$ une algèbre de Lie locale sur l'espace des sections $\Gamma(K)$, qui définit une structure conforme de Jacobi admettant des feuilles de dimension $\geqslant 2$.*

1°) La restriction à L^*_J de l'extension universelle de L par ϕ_2, considéré comme algèbre de Lie abélienne, définit une extension essentielle de L^*_J par ϕ_2 correspondant à $\mathscr{L}$ et à β^*_J. La situation est semblable pour L_J.

2°) Soit $\Gamma(K^*)$ l'espace des sections du fibré dual, considéré comme algèbre de Lie abélienne, sur lequel $\Gamma(K)$ agit par dérivée de Lie pour les champs hamiltoniens. Pour $i(\tilde{\Lambda})$ on déduit de l'extension précédente une extension essentielle de $(\Gamma(K),[,])$ par $\Gamma(K^*)$ associée à β^1_J.

Le théorème 5 comprend l'algèbre de Lie des t.i. de contact d'une <u>variété de contact</u>.

<u>Références</u> :

[1] M. FLATO et A. LICHNEROWICZ, C.R. Acad. Sci. Paris 291 A, 1980, p. 331-335.

[2] M. de WILDE et P. LECOMTE, J. Math. pures et appl. 62, 1983, p. 197.

[3] A. LICHNEROWICZ et J.A. PEREIRA da SILVA, C.R. Acad. Sci. Paris 301 I, 1985, p. 311-315 et 363-367. Extensions essentielles privilégiées d'algèbres de Lie classiques de dimensions infinies. J. Math. pures et appl. (à paraître).

[4] A. LICHNEROWICZ, Ann. Inst. Fourier 24, 1974, p. 219-266.

[5] H.S. SUSSMANN, Trans. Amer. Math. Soc. 180, 1973, p. 171.

[6] J.L. SCHOUTEN, Conv. Int. Geom. Diff., Cremonese Roma 1954 ; A. NIJENHUIS Indag. Math. 17, 1955, p. 390.

[7] F. GUEDIRA et A. LICHNEROWICZ, J. Math. pures et appl. 63, 1984, p. 407-484.

[8] A.A. KIRILLOV, Russ. Math. Surv. 31, 1976, p. 55.