

PIERRE BONNET

Analyse de Fourier explicite sur certains groupes de Lie nilpotents

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1987, fascicule 1B
« Actes du colloque Jean Braconnier », , p. 117-145

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1987__1B_117_0

© Université de Lyon, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANALYSE DE FOURIER EXPLICITE SUR CERTAINS GROUPES
DE LIE NILPOTENTS

par Pierre BONNET

Résumé. Pour tout groupe de Lie nilpotent G produit semi-direct de \mathbb{R} par \mathbb{R}^{n-1} , on décrit explicitement la transformée de Fourier des distributions de type positif, telle qu'elle a été définie par l'auteur. On en déduit pour tout sous-groupe fermé connexe, H une formule de Plancherel explicite sur l'espace homogène G/H .

Abstract. For every nilpotent Lie group G which is the semi-direct product of \mathbb{R} and \mathbb{R}^{n-1} we describe explicitly the Fourier transform of positive definite distributions, using the theory built by the author. As an application we give for each closed connected subgroup H a Plancherel formula, in an explicit way, on the homogeneous space G/H .

MOTS CLES. groupes de Lie nilpotents
méthode des orbites
transformée de Fourier
formule de Plancherel.

CLASSIFICATION A.M.S. : 22-E-27.

INTRODUCTION

Plusieurs travaux ont déjà été consacrés à l'analyse harmonique sur les espaces homogènes d'un groupe de Lie nilpotent G . C'est ainsi que dans [10] GRELAUD étudie la désintégration centrale des représentations induites à partir d'un sous-groupe fermé de G ; plus précisément il explicite la mesure sur le dual \hat{G} de G et les multiplicités intervenant dans une telle désintégration. L'étape suivante devrait consister à expliciter l'opérateur réalisant la désintégration, ce qui revient à donner une formule de PLANCHEREL concrète telle que la définit PENNEY dans [14]. Des résultats ont déjà été obtenus dans ce sens : tout d'abord dans [3] et [4] BENOIST obtient la formule de PLANCHEREL lorsque l'espace homogène est un espace symétrique, ce qui implique en particulier que les multiplicités sont 0 ou 1 ; récemment FUJIWARA a généralisé les résultats de BENOIST au cas où toutes les multiplicités sont finies ([9]).

La transformée de FOURIER des distributions de type positif telle qu'elle est définie dans [6] pour tout groupe de Lie de type I peut constituer un outil pour aborder l'étude de la formule de PLANCHEREL, y compris dans le cas de multiplicités infinies. Nous examinons cette possibilité pour des groupes de Lie nilpotents particuliers, ceux qui sont produit semi-direct de \mathbb{R} et d'un facteur distingué abélien.

Le paragraphe I consiste à rappeler brièvement la définition et la construction de la transformée de FOURIER d'une distribution de type positif T sur un groupe de Lie. Cette transformée de FOURIER se ramène à la donnée d'une mesure m sur \hat{G} et d'un champ d'opérateur $(U_\lambda)_{\lambda \in \hat{G}}$ vérifiant la relation

$$\langle \theta(g^{-1}), T(g) \rangle = \int_{\hat{G}} \text{tr}(\pi_\lambda(\theta) U_\lambda) dm(\lambda)$$

pour toute fonction $\theta \in C^\infty$ à support compact sur G . On montre par ailleurs que lorsque G est nilpotent, la relation précédente s'étend aux fonctions C^∞ à décroissance rapide.

Au paragraphe II, et lorsque G vérifie les hypothèses supplémentaires que nous avons indiquées, on obtient une description explicite de la

mesure m et des opérateurs U_λ pour toute distribution de type positif T sur G . Les résultats ne peuvent, sans doute, pas être étendus tels quels à tout groupe de Lie nilpotent ; en effet, m et les U_λ sont déduits de la transformée de FOURIER (au sens classique) d'une distribution $T^\#$ sur l'algèbre de Lie \mathcal{G} de G , cette distribution est l'image réciproque de T par un difféomorphisme qui diffère de l'application exponentielle et qui n'a pas d'équivalent pour un groupe de Lie nilpotent quelconque.

Ces résultats sont appliqués au paragraphe III au cas où T est la distribution induite sur G par la mesure de Haar sur un sous-groupe fermé H . Divers cas sont à considérer suivant la position de H par rapport au sous-groupe dérivé de G et par rapport au facteur distingué abélien, et les multiplicités sont tantôt finies, tantôt infinies. Ces multiplicités étant fournies par le rang des opérateurs U_λ , on retrouve ainsi les résultats de GRELAUD. Mais la donnée de l'opérateur U_λ permet en outre d'énoncer une formule de PLANCHEREL dans un sens très voisin de celui de PENNEY ; la différence avec [14] réside dans le fait que pour les multiplicités infinies, la quantité $\text{tr}(\pi_\lambda(\theta)U_\lambda)$ s'exprime naturellement au moyen d'une intégrale et non pas d'une série ; le passage à la forme série (qui d'ailleurs est moins canonique) est possible si l'on sait exprimer l'opérateur U_λ sous la forme :

$$U_\lambda f = \sum_i (f | f_i) f_i$$

où les f_i sont des vecteurs-distributions, ce qui d'après [6] est toujours possible.

Pour la généralisation à un groupe nilpotent quelconque, une possibilité pourrait être de remplacer $T^\#$ par la distribution T^h image réciproque de T par l'application exponentielle, et la transformation de FOURIER classique par une transformation à exposant polynômial ou rationnel. On devrait pouvoir généraliser ainsi au moins les résultats du paragraphe III. En effet, lorsque T est la distribution induite par la mesure de Haar d'un sous-groupe, on peut choisir le facteur non distingué de G de manière à ce que les distributions $T^\#$ et T^h coïncident.

-:-:-:-

I - TRANSFORMÉE DE FOURIER D'UNE DISTRIBUTION DE TYPE POSITIF.

Dans ce paragraphe, nous rappelons la définition de la transformée de Fourier telle qu'elle est introduite dans [6].

On considère un groupe de Lie G de type I et unimodulaire dont on note \mathcal{G} l'algèbre de Lie (l'hypothèse d'unimodularité n'est pas fondamentale, puisqu'il suffit, lorsqu'elle n'est pas vérifiée, de remplacer les distributions par les fonctions généralisées). On note \hat{G} le dual de G , c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalence de représentations unitaires irréductibles, et, pour chaque λ de \hat{G} , on se donne une représentation π_λ de classe λ agissant dans un espace de Hilbert \mathcal{H}_λ de sorte que les π_λ forment un champ

On note :

- $\mathcal{H}_\lambda^\infty$ l'espace des vecteurs différentiables de π_λ ;
- $\mathcal{H}_\lambda^{-\infty}$ l'espace des vecteurs-distributions ;
- $\mathcal{L}_1(\mathcal{H}_\lambda)^{-\infty}$ l'espace des opérateurs à trace-distributions (c'est-à-dire des opérateurs nucléaires de $\mathcal{H}_\lambda^\infty$ dans $\mathcal{H}_\lambda^{-\infty}$).

Etant donné une base (e_1, \dots, e_n) de \mathcal{G} on pose

$$D = 1 - \sum_{i=1}^n e_i^2$$

et on note D_λ l'opérateur autoadjoint positif de \mathcal{H}_λ qui est la fermeture de $d\pi_\lambda(D)$. On introduit encore les espaces suivants :

- \mathcal{H}_λ^k , par $k \in \mathbb{N}$, espace des vecteurs de classe C^k de π_λ ;
c'est aussi le domaine de l'opérateur $D_\lambda^{k/2}$. C'est un espace de Hilbert pour la norme

$$p_k(f) = \|D_\lambda^{k/2} f\|.$$

- \mathcal{H}_λ^{-k} antidual de \mathcal{H}_λ^k .

- $\mathcal{L}_1(\mathcal{H}_\lambda)^{-k}$, espace des opérateurs nucléaires de \mathcal{H}_λ^k dans \mathcal{H}_λ^{-k} .

Pour un tel opérateur U , l'opérateur $D^{-k/2} U D^{-k/2}$ est à trace dans \mathcal{H}_λ .

On pose :

$$p_1^{-k}(U) = \text{tr}(|D^{-k/2} U D^{-k/2}|).$$

Une mesure-opérateurs positive à croissance lente sur \hat{G} est définie par un couple (m, U) où m est une mesure scalaire positive sur \hat{G} et

$$U : \lambda \in \hat{G} \rightarrow U_\lambda \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H}_\lambda)^{-\infty}$$

un champ mesurable d'opérateurs à trace-distributions positifs (i.e. vérifiant $(U_\lambda f|f) \geq 0$ pour $f \in \mathcal{H}_\lambda^\infty$) et satisfaisant à la condition suivante (condition de croissance lente) :

il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que :

i) l'opérateur U_λ appartient à $\mathcal{L}_1(\mathcal{H}_\lambda)^{-k}$ pour m -presque tout λ ;

ii) la fonction

$$\lambda \in \hat{G} \rightarrow p_1^{-k}(U_\lambda) = \text{tr}(D^{-k/2} U_\lambda D^{-k/2})$$

est m -intégrable.

En fait, les mesures-opérateurs sont obtenues en identifiant les couples (m, U) et (m', U') lorsque, m' ayant une densité par rapport à m , on a

$$U'_\lambda = \frac{dm'}{dm}(\lambda) U_\lambda \quad \text{m.p.p.}$$

La transformée de Fourier d'une distribution T de type positif sur G est, par définition, la mesure-opérateurs (m, U) introduite par le

THEOREME 1. - Etant donné une distribution T de type positif sur

G , il existe une unique mesure-opérateurs positive à croissance lente sur \hat{G} vérifiant

$$(1) \quad \forall \theta \in \mathcal{D}(G), \langle \theta(g^{-1}), T(g) \rangle = \int_{\hat{G}} \text{tr}(\pi_\lambda(\theta)U_\lambda) \, dm(\lambda).$$

Précisons le sens de (1) : pour $\theta \in \mathcal{D}(G)$, pour $\lambda \in \hat{G}$, et pour tout $k \in \mathbf{N}$, l'opérateur $\pi_\lambda(\theta)$ envoie continuellement \mathcal{H}_λ^{-k} dans \mathcal{H}_λ^k , de sorte que si $U_\lambda \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H}_\lambda)^{-k}$, l'opérateur $\pi_\lambda(\theta)U_\lambda$ est à trace dans \mathcal{H}_λ^k . Le scalaire $\text{tr}(\pi_\lambda(\theta)U_\lambda)$ désigne la trace de cet opérateur, trace qui ne dépend pas de k .

Rappelons brièvement le principe de la construction de (m, U) telle qu'elle figure dans [6]. A la distribution T de type positif, on associe ([1] et [8]) une représentation π_T de G et un vecteur distribution f_T de π_T tels que

$$\langle \theta(g^{-1}), T(g) \rangle = (\pi_T(\theta)f_T | f_T).$$

Soient :

$$\pi_T = \int_{\hat{G}}^{\oplus} n(\lambda)\pi_\lambda \, dm(\lambda)$$

la désintégration centrale de π_T et

$$f_T = \int_{\hat{G}}^{\oplus} f_\lambda \, dm(\lambda)$$

la désintégration de f_T qui lui est associée. Le vecteur-distribution f_λ est défini par une famille $f_{\lambda i}$ de vecteurs-distribution de π_λ ; l'opérateur U_λ est défini par

$$U_\lambda f' = \sum_i (f' | f_{\lambda i}) f_{\lambda i}$$

REMARQUE : Moyennant une légère modification de la démonstration, l'unicité de la mesure-opérateurs (m, U) peut être énoncée comme suit :

Soient m une mesure positive sur \hat{G} et

$$U : \lambda \in \hat{G} \rightarrow U_\lambda \in \mathcal{L}_1(\mathcal{H}_\lambda)^{-\infty}$$

un champ mesurable d'opérateurs à trace-distributions positifs tels que, pour tout θ de $\mathcal{D}(G)$ la fonction $\lambda \rightarrow \text{tr}(\pi_\lambda(\theta)U_\lambda)$ soit m -intégrable et l'égalité (1) ait lieu ; alors la mesure-opérateurs (m, U) est à croissance lente et est la transformée de Fourier de T .

Supposons désormais le groupe G nilpotent connexe simplement connexe. L'application exponentielle est alors un difféomorphisme de \mathcal{Q} sur G , tel que l'image d'une mesure de Lebesgue dA sur \mathcal{Q} soit une mesure de Haar dg sur G . Fixons une fois pour toutes dA et dg .

On définit alors sur G l'espace $\mathcal{S}(G)$ des fonctions C^∞ à décroissance rapide et l'espace $\mathcal{S}'(G)$ des distributions tempérées, par transport, au moyen de l'application exponentielle, des espaces $\mathcal{S}(\mathcal{Q})$ et $\mathcal{S}'(\mathcal{Q})$.

THEOREME 2. - Si T est une distribution de type positif sur G alors T est tempérée et la relation (1) du théorème 1 est vérifiée pour tout $\theta \in \mathcal{S}(G)$.

DEMONSTRATION : On sait d'après [6] que si T est de type positif, elle est continue quand on munit $\mathcal{D}(G)$ de la suite des normes (p_*^{2k}) $k \in \mathbb{N}$ où $p_*^{2k}(\theta)$ désigne la norme dans la C^* -algèbre de G de la fonction $D^{k*\theta*D^k}$. Or $\mathcal{S}(G)$ s'injecte continuellement dans $C^*(G)$ et

l'application

$$\theta \rightarrow D^k * \theta * D^k$$

est continue de $\mathcal{S}(G)$ dans $\mathcal{S}(G)$. Ceci prouve la première assertion. La preuve de la seconde assertion consiste à adapter à $\theta \in \mathcal{S}(G)$ les démonstrations de [6].

II - TRANSFORMÉE DE FOURIER EXPLICITE

Lorsque le groupe G est nilpotent, on peut tenter, en utilisant la méthode des orbites, d'obtenir une construction plus explicite de la mesure m et des opérateurs U_λ définissant la transformée de Fourier de T . C'est ce à quoi nous parvenons dans un cas particulier.

Nous considérons désormais un groupe de Lie G nilpotent connexe et simplement connexe, et nous supposons que G contient un sous-groupe fermé connexe G_1 abélien et de codimension 1. Notons \mathfrak{g}_1 l'algèbre de Lie de G_1 . Le sous-groupe G_1 étant de codimension 1 dans G nilpotent, est distingué, et \mathfrak{g}_1 est un idéal de \mathfrak{g} ([18]).

Notons Ad et ad les représentations adjointes de G et \mathfrak{g} dans \mathfrak{g} , ainsi que Ad^* et ad^* les représentations coadjointes de G et \mathfrak{g} dans le dual \mathfrak{g}^* de \mathfrak{g} . Notons p la projection de \mathfrak{g}^* sur \mathfrak{g}_1^* .

Soient e_1 un élément de \mathfrak{g} n'appartenant pas à \mathfrak{g}_1 et e_1^* l'unique élément de \mathfrak{g}_1^\perp vérifiant

$$\langle e_1, e_1^* \rangle = 1 .$$

Soit σ l'action de \mathbb{R} dans \mathcal{G}_1 définie par

$$\sigma_t B = \text{Ad}_{\exp(te_1)} B$$

et soit σ^* l'action dans \mathcal{G}_1^* contragrédiente de σ de sorte que σ^* se déduit de Ad^* par passage au quotient.

Soient $d\sigma$ et $d\sigma^*$ les générateurs des groupes à un paramètre $(\sigma_t)_t \in \mathbb{R}$ et $(\sigma_t^*)_t \in \mathbb{R}$.

L'algèbre de Lie \mathcal{G} est produit semi-direct, au moyen de $d\sigma$, de l'idéal \mathcal{G}_1 , et de $\mathbb{R}e_1$, et G est produit semi-direct du sous-groupe distingué G_1 et de $\exp(\mathbb{R}e_1)$. Nous écrirons tout élément de \mathcal{G}

$$A = \alpha e_1 + A_1, \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R}, A_1 \in \mathcal{G}_1$$

et moyennant le choix de e_1 , nous identifierons \mathcal{G}^* à $\mathbb{R} \times \mathcal{G}_1^*$ en posant

$$x = (\xi, x_1) \quad \text{où } \xi \in \mathbb{R} \text{ et } x_1 \in \mathcal{G}_1^*.$$

Dans cette identification, les représentations Ad^* et ad^* s'écrivent :

$$\begin{aligned} \text{ad}_{\alpha e_1 + A_1}^* (\xi, x_1) &= (-\langle A_1, d\sigma^* x_1 \rangle, \alpha d\sigma^* x_1) \\ \text{Ad}_{\exp(\alpha e_1) \exp(A_1)}^* (\xi, x_1) &= (\xi - \langle A_1, d\sigma^* x_1 \rangle, \sigma_\alpha^* x_1). \end{aligned}$$

EXEMPLES : Les hypothèses que nous nous fixons sont satisfaites pour toutes les algèbres de Lie définies par les crochets

$$[e_1, e_i] = e_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq n-1,$$

ce qui comporte :

- l'algèbre d'HEISENBERG \mathcal{G}_3 ,

- l'unique algèbre nilpotente indécomposable \mathfrak{g}_4 de dimension 4,
- l'algèbre nilpotente \mathfrak{g}_{55} (terminologie de [11] et [13]).

Un autre exemple est fourni par l'algèbre \mathfrak{g}_{52} définie par

$$[e_1, e_2] = e_4 \quad [e_1, e_3] = e_5 \quad .$$

Les orbites et le dual de G .

Pour $x \in \mathfrak{g}^*$ et $y \in \mathfrak{g}_1^*$, notons

- Ω_x l'orbite de x pour l'action coadjointe de G ,
- σ_y l'orbite de y pour l'action σ^* de \mathbb{R} .

Il vient

$$\sigma_{p(x)} = p(\Omega_x).$$

Posons

$$\mathfrak{g}_{(0)}^* = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^\perp \quad \mathfrak{g}_{1(0)}^* = p(\mathfrak{g}_{(0)}^*) = \text{Ker}(d\sigma^*)$$

et notons $\mathfrak{g}_{(I)}^*$ (resp. $\mathfrak{g}_{1(I)}^*$) le complémentaire de $\mathfrak{g}_{(0)}^*$ dans \mathfrak{g}^* (resp. de $\mathfrak{g}_{1(0)}^*$ dans \mathfrak{g}_1^*). Les ensembles $\mathfrak{g}_{(0)}^*$ et $\mathfrak{g}_{(I)}^*$ (resp. $\mathfrak{g}_{1(0)}^*$ et $\mathfrak{g}_{1(I)}^*$) sont stables par Ad^* (resp. par σ^*).

a) Si $x \in \mathfrak{g}_{(0)}^*$ nous avons

$$\Omega_x = \{x\} \quad \text{et} \quad \sigma_{p(x)} = \{p(x)\}.$$

On définit un caractère π_x de G par

$$\pi_x(\exp(A)) = e^{-2i\pi \langle A, x \rangle}$$

et on obtient ainsi une première partie $\hat{G}_{(0)}$ de \hat{G} indexée par $x \in \mathfrak{g}_{(0)}^*$.

b) Si $x = (\xi, x_1) \in \mathcal{G}_{(I)}^*$ (i.e. $x_1 \in \mathcal{G}_{1(I)}^*$), l'orbite $\mathcal{O}_{x_1} = \mathcal{O}_{p(x)}$ est de dimension 1 et peut être paramétrée par

$$t \in \mathbb{R} \rightarrow \exp(te_1)x_1 = \sigma_t^* x_1.$$

L'orbite Ω_x est de dimension 2 et s'identifie à $\mathbb{R} \times \mathcal{O}_{x_1}$.

La mesure de KOSTANT-LIOUVILLE sur Ω_x est $d\xi dt$. En outre l'idéal

\mathcal{G}_1 est une polarisation en x .

Nous obtenons ainsi une deuxième partie $\hat{G}_{(I)}$ de \hat{G} complémentaire de $\hat{G}_{(0)}$. A tout $\lambda \in \hat{G}_{(I)}$ correspondent une orbite Ω_λ contenue dans $\mathcal{G}_{(I)}^*$ et une orbite \mathcal{O}_λ contenue dans $\mathcal{G}_{1(I)}^*$. Soit

$$y \in \mathcal{G}_{1(I)}^* \rightarrow y^\lambda \in \mathcal{O}_\lambda$$

une section borélienne, et posons

$$y_t^\lambda = \exp(te_1) y^\lambda = \sigma_t^* y^\lambda.$$

En fait, on peut trouver (voir paragraphe III) une partition finie de

$\mathcal{G}_{1(I)}^*$ par des ensembles Y_i et une section rationnelle sur chaque Y_i ;

on associe à λ le caractère χ_λ de G_1 défini par

$$\chi_\lambda(\exp(A_1)) = e^{-2i\pi \langle A_1, y^\lambda \rangle}$$

et la représentation π_λ de G induite de χ_λ . On réalise π_λ dans

$L_2(\mathbb{R})$ et il vient :

$$\pi_\lambda(\exp(A_1) \exp(\alpha e_1)) f(t) = e^{-2i\pi \langle A_1, y_t^\lambda \rangle} f(t-\alpha).$$

Dans cette réalisation $\mathcal{H}_\lambda^\infty$ et $\mathcal{H}_\lambda^{-\infty}$ sont respectivement l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ des fonctions C^∞ à décroissance rapide, et l'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ des distributions tempérées. (Voir [3]).

REMARQUE : On reconnaît ici la description des orbites de la représentation co-adjointe d'un produit semi-direct donnée par RAWNSLEY ([19]) de sorte que la méthode des orbites se confond avec la méthode de MACKEY de construction de \hat{G} .

LA TRANSFORMÉE DE FOURIER.

Soit T une distribution de type positif sur G .

Nous pouvons préciser la structure de la mesure-opérateurs (m, U) transformée de Fourier de T :

- la mesure m s'écrit

$$m = m_{(0)} + m_{(1)}$$

où $m_{(0)}$ et $m_{(1)}$ sont respectivement portées par $\hat{G}_{(0)}$ et $\hat{G}_{(1)}$

- pour $\lambda \in \hat{G}_{(0)}$, la représentation π_λ étant de dimension 1, l'opérateur U_λ est un scalaire. On choisira donc $m_{(0)}$ de manière à avoir

$$U_\lambda = 1 \quad m_{(0)} \cdot \text{P.P.}$$

- Pour $\lambda \in \hat{G}_{(1)}$ l'opérateur U_λ est nucléaire de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Il est donc défini par un noyau $\mathcal{K}U_\lambda$ qui est la distribution tempérée sur \mathbb{R}^2 vérifiant

$$\langle f', U_\lambda f \rangle = \langle f(s)f'(t), \mathcal{K}U_\lambda(s, t) \rangle \quad \text{pour } f, f' \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Ainsi, la transformée de Fourier de T est décrite par la donnée des mesures $m_{(0)}$ et $m_{(1)}$ respectivement portée par $\hat{G}_{(0)}$ et $\hat{G}_{(1)}$, et du noyau $\mathcal{K}U_\lambda \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ pour $m_{(1)}$ -presque tout λ de $\hat{G}_{(1)}$.

Rappelons ([3], [18]) que l'application

$$A = \alpha e_1 + A_1 \in \mathcal{G} \rightarrow \exp(A_1) \exp(\alpha e_1) \in G$$

est un difféomorphisme tel que l'image de la mesure de Lebesgue $d\alpha dA_1$ est la mesure de Haar dg . On définit une distribution tempérée $T^\#$ sur \mathcal{G} par

$$T^\#(\alpha e_1 + A_1) = T(\exp(A_1) \exp(\alpha e_1))$$

et on définit de même $\theta^\#$ pour $\theta \in \mathcal{S}(G)$.

Nous allons décrire $m_{(0)}$, $m_{(1)}$ et les $\mathcal{K}U_\lambda$ à l'aide de transformées de Fourier classiques : la transformée de Fourier totale

$\mathcal{F}T^\#(x) = \mathcal{F}T^\#(\xi, x_1)$ de $T^\#$ et sa transformée de Fourier partielle

$\mathcal{F}_{A_1} T^\#(\alpha, x_1)$ par rapport à la variable A_1 . Pour cela, on commence par calculer $\pi_\lambda(\theta)$, pour θ fonction de $\mathcal{S}(G)$:

- si $x \in \mathcal{G}_{(0)}^*$, l'opérateur $\pi_x(\theta)$ est un scalaire et

$$\pi_x(\theta) = \mathcal{F}\theta^\#(x)$$

- pour $\lambda \in \hat{G}_{(1)}$, l'opérateur $\pi_\lambda(\theta)$ est continu de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (muni de sa topologie forte de dualité) dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et admet un noyau $\mathcal{K}\theta_\lambda$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

Il vient :

$$\begin{aligned} (\mathcal{K}\theta_\lambda)(s, t) &= \int_{\mathcal{G}_1} \theta(\exp A_1 \exp(t-s)e_1) e^{-2i\pi \langle \sigma_{-t}(A_1), y^\lambda \rangle} dA_1 \\ &= \int_{\mathcal{G}_1} \theta^\#((t-s)e_1 + A_1) e^{-2i\pi \langle A_1, y_t^\lambda \rangle} dA_1 = \mathcal{F}_{A_1} \theta^\#(t-s, y_t^\lambda) . \end{aligned}$$

Ceci étant, définissons pour $\lambda \in \hat{G}_{(1)}$ les distributions tempérées suivantes sur \mathbb{R}^2

$$\Psi_{(I)\lambda}(\alpha, t) = \mathcal{X}U_\lambda(t-\alpha, t)$$

$$\Phi_{(I)\lambda}(\xi, t) = \mathcal{F}_\alpha \Psi_{(I)\lambda}(\xi, t) .$$

Soit θ^* la fonction définie par

$$\theta^*(g) = \overline{\theta(g^{-1})} .$$

Il vient :

$$\pi_\lambda(\theta^*) = \pi_\lambda(\theta)^* \quad (\text{adjoint de l'opérateur } \pi_\lambda(\theta))$$

et

$$\mathcal{X}\theta_\lambda^*(s, t) = \overline{\mathcal{X}\theta_\lambda(t, s)}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \text{tr}(\pi_\lambda(\theta^*)U_\lambda) &= \langle \mathcal{X}\theta_\lambda^*(t, s), \mathcal{X}U_\lambda(s, t) \rangle \\ &= \overline{\langle \mathcal{X}\theta_\lambda(s, t), \mathcal{X}U_\lambda(s, t) \rangle} \\ &= \overline{\langle \mathcal{F}_{A_1} \theta^\#(t-s, y_t^\lambda), \mathcal{X}U_\lambda(s, t) \rangle} \\ &= \overline{\langle \mathcal{F}_{A_1} \theta^\#(\alpha, y_t^\lambda), \Psi_{(I)\lambda}(\alpha, t) \rangle} \\ &= \overline{\langle \mathcal{F}\theta^\#(\xi, y_t^\lambda), \Phi_{(I)\lambda}(\xi, t) \rangle} . \end{aligned}$$

De là, il résulte, en appliquant la relation (1) du théorème 1 à la fonction θ^* ,

$$\begin{aligned} \overline{\langle \theta(g), T(g) \rangle} &= \int_{\hat{G}} \text{tr}(\pi_\lambda(\theta^*)U_\lambda) dm(\lambda) \\ &= \int_{\mathcal{G}^*(0)} \overline{\mathcal{F}\theta^\#(x)} dm_{(0)}(x) + \int_{\hat{G}_{(I)}} \overline{\langle \mathcal{F}_{A_1} \theta^\#(\alpha, y_t^\lambda), \Psi_{(I)\lambda}(\alpha, t) \rangle} dm_{(I)}(\lambda) \\ &= \int_{\mathcal{G}^*(0)} \overline{\mathcal{F}\theta^\#(x)} dm_{(0)}(x) + \int_{\hat{G}_{(I)}} \overline{\langle \mathcal{F}\theta^\#(\xi, y_t^\lambda), \Phi_{(I)\lambda}(\xi, t) \rangle} dm_{(I)}(\lambda) \end{aligned}$$

Nous définissons alors des distributions tempérées $\Phi_{(0)}$, $\Phi_{(1)}$ et Φ sur \mathcal{G}^* par

$$\langle \varphi(x), \Phi_{(0)}(x) \rangle = \int_{\mathcal{G}_{(0)}^*} \varphi(x) dm_{(0)}(x) \quad (\varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{G}_{(0)}^*))$$

$$\langle \varphi(x), \Phi_{(1)}(x) \rangle = \int_{\hat{G}_{(1)}} \langle \varphi(\xi, y_t^\lambda), \Phi_{(1)\lambda}(\xi, t) \rangle dm_{(1)}(\lambda) \quad (\varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{G}_{(1)}^*))$$

$$\Phi = \Phi_{(0)} + \Phi_{(1)}$$

Dans la définition de $\Phi_{(1)}$, il s'agit d'une intégrale faible de distinctions tempérées, qui est elle-même une distinction tempérée ([7]).

Notons encore $\Psi_{(0)}$, $\Psi_{(1)}$ et Ψ les transformées de Fourier inverses partielles par rapport à la variable ξ , de $\Phi_{(0)}$, $\Phi_{(1)}$ et Φ . En particulier :

$$\langle \psi(\alpha, x_1), \Psi_{(1)}(\alpha, x_1) \rangle = \int_{\hat{G}_{(1)}} \langle \psi(\alpha, y_t^\lambda), \Psi_{(1)\lambda}(\alpha, t) \rangle dm_{(1)}(\lambda) \quad \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathcal{G}_1^*)$$

Il vient alors, pour toute fonction θ de $\mathcal{S}(G)$

$$\langle \bar{\theta}^\#, T^\# \rangle = \langle \bar{\theta}, T \rangle = \langle \overline{\mathcal{F}_{A_1} \theta}^\#, \Psi \rangle = \langle \overline{\mathcal{F} \theta}^\#, \Phi \rangle$$

d'où il résulte

$$\Psi = \mathcal{F}_{A_1} T^\# \quad \text{et} \quad \Phi = \mathcal{F} T^\#$$

Théorème 3. Les hypothèses et les notations étant fixées ci-dessus, soit T une distribution de type positif sur G , soient Φ la transformée de Fourier totale de $T^\#$ et Ψ sa transformée de Fourier partielle par rapport à A_1 .

a) On peut trouver :

- des mesures positives $m_{(0)}$ et $m_{(1)}$ sur \hat{G} portées respectivement par $\hat{G}_{(0)}$ (qu'on identifie à $\mathcal{G}_{(0)}^*$) et $\hat{G}_{(1)}$

- des champs $(\Phi_{(I)\lambda})_{\lambda \in \hat{G}_{(I)}}$ et $(\Psi_{(I)\lambda})_{\lambda \in \hat{G}_{(I)}}$ de distributions tempérées sur \mathbb{R}^2 ,

tels que :

i) pour $m_{(I)}$ -presque tout λ , $\Phi_{(I)\lambda}$ est la transformée de Fourier partielle de $\Psi_{(I)\lambda}(\alpha, t)$ par rapport à α .

ii) $\Phi = \Phi_{(0)} + \Phi_{(I)}$ où $\Phi_{(0)}$ et $\Phi_{(I)}$ sont définies par

$$\langle \varphi(x), \Phi_{(0)}(x) \rangle = \int_{\mathcal{G}_{(0)}^*} \varphi(x) dm_{(0)}(x)$$

$$\langle \varphi(x), \Phi_{(I)}(x) \rangle = \int_{\hat{G}_{(I)}} \langle \varphi(\xi, y_t^\lambda), \Phi_{(I)\lambda}(\xi, t) \rangle dm_{(I)}(\lambda) \text{ pour } \varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{G}_1^*)$$

ii') $\Psi = \Psi_{(0)} + \Psi_{(I)}$ où $\Psi_{(0)}$ est la transformée de Fourier inverse partielle par rapport à ξ de $\Phi_{(0)}(\xi, x_1)$ et $\Psi_{(I)}$ est définie par

$$\langle \psi(\alpha, x_1), \Psi_{(I)}(\alpha, x_1) \rangle = \int_{\hat{G}_{(I)}} \langle \psi(\alpha, y_t^\lambda), \Psi_{(I)\lambda}(\alpha, t) \rangle dm_{(I)}(\lambda) \text{ pour } \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathcal{G}_1^*)$$

b) Si des mesures $m_{(0)}$ et $m_{(I)}$ ainsi que des champs $(\Psi_{(I)\lambda})$ et $(\Phi_{(I)\lambda})$ de distributions tempérées vérifient i), ii) et ii'), la transformée de Fourier de T est la mesure-opérateurs (m, U) définie comme suit :

$$- m = m_{(0)} + m_{(I)}$$

- pour $\lambda \in \hat{G}_{(I)}$ l'opérateur U_λ est décrit par le noyau $\mathcal{K}U_\lambda$

suisant :

$$\mathcal{K}U_\lambda(s, t) = \Psi_{(I)\lambda}(t-s, t) = \tilde{\mathcal{F}}_\xi \Phi_{(I)\lambda}(t-s, t)$$

Démonstration. a) a été démontré plus haut et pour b) il suffit de remonter les calculs.

REMARQUE 1 : Dans la pratique, pour utiliser le théorème, il suffit de procéder soit avec Φ , soit avec Ψ et de mettre en évidence, d'une part les mesures $m_{(0)}$ et $m_{(1)}$, d'autre part le champ $(\Phi_{(1)\lambda})$ ou le champ $(\Psi_{(1)\lambda})$.

REMARQUE 2 : On obtient un résultat tout-à-fait analogue à partir de la distribution tempérée T^b définie sur \mathcal{G} par

$$T^b(A) = T^b(\alpha e_1 + A_1) = T(\exp(\alpha e_1)\exp(A_1))$$

mais avec $\mathcal{K}^U_\lambda(s,t) = \Psi_{(1)\lambda}(t-s,s)$.

REMARQUE 3 : On voit comment intervient l'hypothèse d'existence d'un sous-groupe abélien de codimension 1. Cette hypothèse assure l'existence d'une polarisation commune à tous les points de \mathcal{G}^* qui ne sont pas invariants par la représentation coadjointe. En outre, dans le cas général, on ne peut pas définir $T^\#$. Cependant il existe une possibilité d'éviter le recours à $T^\#$.

Dans nos hypothèses, posons :

$$T^\#(A) = T(\exp(A))$$

Il vient, par exemple pour θ dans $\mathcal{S}(\mathcal{G})$,

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \theta^\#(x) &= \int_{\mathcal{G}} \theta(\exp(A_1)\exp(\alpha e_1)) e^{-2i\pi(\langle A_1, x_1 \rangle + \alpha \xi)} dA_1 d\alpha \\ &= \int_{\mathcal{G}} \theta^\#(B) e^{-2i\pi P(B,x)} dB \end{aligned}$$

où, pour $B = \beta e_1 + B_1$ ($B_1 \in \mathcal{G}_1$), on pose :

$$P(\beta, x) = \beta \xi + \langle \beta^{-1}(\sigma_\beta - I)B_1, x_1 \rangle$$

de sorte que P est polynômiale en B et x.

Ainsi, on peut remplacer $T^\#$ par $T^\#$ à condition d'utiliser une autre transformation que la transformation de Fourier classique. Cela ouvre une possibilité pour la généralisation à un groupe de Lie nilpotent connexe simplement connexe quelconque ; un outil pourrait être fourni par la transformation de Fourier nilpotente (voir [2]).

III. APPLICATION A LA FORMULE DE PLANCHEREL SUR UN ESPACE HOMOGENE

Les hypothèses et les notations sont les mêmes qu'au paragraphe précédent. Soient H un sous-groupe connexe de G et \mathfrak{h} son algèbre de Lie. Etant donné une mesure de Haar dh sur H , soit T la distribution de type positif sur G induite par dh :

$$\langle \theta(g), T(g) \rangle = \int_H \theta(h) dh$$

Soit

$$\mathfrak{g}_1 \supset \mathfrak{g}_2 \supset \dots \supset \mathfrak{g}_n = \{0\},$$

une suite de Jordan-Hölder d'idéaux de \mathfrak{g}_1 , de sorte que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \dots \supset \mathfrak{g}_n = \{0\},$$

est une suite de Jordan-Hölder d'idéaux de \mathfrak{g} . Posons

$$\mathfrak{h}_j = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_j$$

et soit J l'ensemble des entiers j ($1 \leq j \leq n$) tels que

$$\mathfrak{h}_{j-1} \not\supset \mathfrak{h}_j$$

Choisissons une base de Jordan-Hölder (e_1, \dots, e_n) de \mathcal{G} telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} e_j \in \mathcal{G}_{j-1} - \mathcal{G}_j \\ \text{et } e_j \in \mathfrak{h}_{j-1} \text{ lorsque } j \in J \end{array} \right.$$

En particulier, si H n'est pas contenu dans G_1 on choisit e_1 dans \mathfrak{h} . Moyennant ce choix de e_1 il vient :

$$T^\# = \delta_{\mathfrak{h}}$$

(i.e. $\langle \theta^\#(A), T^\#(A) \rangle = \int_{\mathfrak{h}} \theta^\#(B) dB$ où dB est la mesure de Lebesgue sur \mathfrak{h} dont l'image par l'application $\alpha e_1 + A_1 \mapsto \exp(A_1) \exp(\alpha e_1)$, ainsi que par l'application exponentielle est dh) et

$$\Phi = \delta_{\mathfrak{h}^\perp}$$

(i.e. $\langle \varphi(x), \Phi(x) \rangle = \int_{\mathfrak{h}^\perp} \theta(z) dz$ où dz est une mesure de Lebesgue convenablement choisie sur \mathfrak{h}^\perp).

Deux cas sont à distinguer :

$$1^\circ [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h} \text{ d'où } \mathfrak{h}^\perp \subset \mathfrak{g}_{(0)}^*$$

Il vient :

$$\Phi_{(1)} = 0 \quad m_{(1)} = 0$$

et la mesure $m = m_{(0)}$ concentrée sur $\hat{G}_{(0)}$ identifié à $\mathfrak{g}_{(0)}^*$ n'est autre que

$$\delta_{\mathfrak{h}^\perp}.$$

$$2^\circ [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \not\subset \mathfrak{h}$$

Dans ces conditions $\mathfrak{h}^\perp \cap \mathfrak{g}_{(0)}^*$ est négligeable dans \mathfrak{h}^\perp . Il vient

$$\Phi(0) = 0 \quad m(0) = 0 \quad m = m(1)$$

Il est alors préférable de poursuivre le raisonnement en utilisant $\Psi = \Psi(1)$.

Posons :

$$V = p(h_1^\perp)$$

de sorte que V est l'orthogonal de h_1 dans \mathcal{O}_1^* .

Nous devons encore distinguer les 2 cas suivants :

a) Si $h_1 \notin \mathcal{O}_1$ il vient :

$$\begin{aligned} T^\#(\alpha e_1 + A_1) &= \mathbb{1}(\alpha) \delta_{h_1}(A_1) \\ \Phi(\xi, x_1) &= \delta(\xi) \delta_V(x_1) \\ \Psi(\alpha, x_1) &= \mathbb{1}(\alpha) \delta_V(x_1) \end{aligned}$$

b) Si $h_1 \in \mathcal{O}_1$ il vient :

$$\begin{aligned} T^\#(\alpha e_1 + A_1) &= \delta(\alpha) \delta_{h_1}(A_1) \\ \Phi(\xi, x_1) &= \mathbb{1}(\xi) \delta_V(x_1) \\ \Psi(\alpha, x_1) &= \delta(\alpha) \delta_V(x_1) \end{aligned}$$

Bien entendu, les produits figurant dans ces égalités sont des produits tensoriels de distribution, et δ_V est la distribution induite sur \mathcal{O}_1^* sur une mesure de Lebesgue convenablement choisie sur V .

Dans ces 2 cas nous sommes conduits à effectuer une désintégration de la mesure δ_V afin de déterminer la mesure $m(1)$ et le champ $(\Psi(1)_\lambda)_{\lambda \in \hat{G}(1)}$ de distributions tempérées.

Notons $(\epsilon_2, \dots, \epsilon_n)$ la base de \mathcal{O}_1^* duale de (e_2, \dots, e_n) .

Nous allons appliquer à σ^* la méthode de PUKANSKY ([5] et [18]) de paramétrisation des orbites d'une représentation unipotente d'un groupe de Lie

nilpotent. Cette méthode se trouve ici considérablement simplifiée.

Pour tout y de \mathcal{Q}_1^* notons j_y le plus grand des entiers j vérifiant

$$\langle e_j, d\sigma^* y \rangle \neq 0$$

et soit $n > j_1 > \dots > j_\ell > j_{\ell+1} = 1$ la suite indexée de façon strictement décroissante des entiers de la forme j_y lorsque y parcourt \mathcal{Q}_1^* (on a $j_y > 1$ si et seulement si y est dans $\mathcal{Q}_{1(I)}^*$). Posons :

$$F_i = \{y \in \mathcal{Q}_1^* / j_y \leq j_i\}$$

$$Y_i = F_i - F_{i+1} = \{y \in \mathcal{Q}_1^* / j_y = j_i\}$$

Les F_i forment une suite strictement décroissante de sous-espaces vectoriels de \mathcal{Q}_1^* (avec $F_{\ell+1} = \mathcal{Q}_{1(0)}^*$) et $(Y_i)_{1 \leq i \leq \ell}$ est une partition de $\mathcal{Q}_{1(I)}^*$.

En outre, chaque Y_i étant stable par σ^* , il en résulte une partition de $\hat{G}_{(I)}$ par des ensembles boréliens $\hat{G}_{(I,1)}, \dots, \hat{G}_{(I,\ell)}$.

Pour tout y de Y_i il vient :

$$\sigma_t^* y = \sum_{j=2}^n P_j(t,y) \epsilon_j$$

où les P_j sont des polynômes en t et y avec

$$P_{j_i}(t,y) = y_{j_i} + t \langle e_{j_i}, d\sigma^* y \rangle$$

$$\text{et } P_j(t,y) = y_j \text{ pour } j > j_i$$

Donc, si $\lambda \in \hat{G}_{(I,i)}$ il existe un unique point y^λ de σ_λ vérifiant

$$\langle e_{j_i}, y^\lambda \rangle = 0$$

et, en associant à tout y de Y_i le point y^λ tel que $y \in \theta_\lambda$, on définit une section rationnelle pour l'action de \mathbb{R} dans Y_i au moyen de σ^* .

Soit v_i l'application linéaire de \mathbb{R}^{n-2} dans \mathcal{G}_1^* qui, à $\lambda = (\lambda_2, \dots, \lambda_{j_i-1}, \lambda_{j_i+1}, \dots, \lambda_n)$ associe

$$v_i \lambda = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq j_i}} \lambda_j \epsilon_j$$

Posons

$$M_i = v_i^{-1}(F_i) \quad N_i = v_i^{-1}(F_{i+1}) \quad \text{et}$$

$$\Lambda_i = M_i - N_i = v_i^{-1}(Y_i)$$

On peut indexer $\hat{G}_{(I,i)}$ par $\lambda \in \Lambda_i$ de manière à avoir $y^\lambda = v_i \lambda$. La bijection entre Λ_i et $\hat{G}_{(I,i)}$ est un isomorphisme d'espaces boréliens.

La mesure δ_V sur \mathcal{G}_1^* se désintègre au moyen d'une mesure m sur \hat{G} portée par $\hat{G}_{(I)}$ et d'une famille

$$\lambda \in \hat{G}_{(I)} \longrightarrow \mu_\lambda$$

où μ_λ est une mesure sur θ_λ . Désormais i désignera le plus grand entier tel que V soit contenu dans F_i ; alors F_{i+1} est négligeable dans V et la mesure δ_V est portée par Y_i . De là il résulte que m est portée par $\hat{G}_{(I,i)} = \Lambda_i$. En outre, pour m -presque tout λ la mesure μ_λ est portée par $\theta_\lambda \cap V$. (Pour la désintégration de δ_V voir [7])

LEMME. - i) Si V n'est pas stable par σ^* , la mesure μ_λ est à support fini pour m -presque tout λ .

ii) Si V est stable par σ^* , la mesure μ_λ est équivalente à la mesure dt pour m -presque tout λ et la densité de μ_λ par rapport à dt est polynômiale.

DEMONSTRATION : Une base de \mathcal{H}_1 est constituée par les e_j pour $2 \leq j \leq n$ et $j \in J$. Donc, si $y \in Y_i$, le point $\sigma_t^* y$ appartient à V si et seulement si $P_j(t,y) = 0 \quad \forall j \in \{2, \dots, n\} \cap J$.

Par conséquent si, y étant un point de θ_λ , nous notons $\rho(y)$ l'ensemble des zéros communs aux polynômes $P_j(.,y)$ pour $j \in \{2, \dots, n\} \cap J$, l'application

$$t \longmapsto \sigma_t^* y = \sum_{j=2}^n P_j(t,y) \epsilon_j$$

envoie bijectivement $\rho(y)$ sur $\theta_\lambda \cap V$. Il en résulte que $\theta_\lambda \cap V$ est, soit fini, soit égal à θ_λ . Posons :

$$\Lambda'_i = \{\lambda \in \Lambda_i / \theta_\lambda \subset V\}$$

$$Y'_i = \bigcup_{\lambda \in \Lambda'_i} \theta_\lambda$$

Si nous écrivons

$$P_j(t,y) = \sum_k P_{jk}(y)t^k,$$

nous voyons que Y'_i est l'ensemble des zéros communs dans Y_i à tous les polynômes P_{jk} , pour tout k et pour $j \in \{2, \dots, n\} \cap J$. Il en résulte que :

i) ou bien Y'_i est négligeable dans V et alors Λ'_i est m -négligeable, et $\rho(y)$ et $\theta_\lambda \cap V$ sont finis pour m -presque tout λ .

ii) ou bien $Y_i^!$ est égal à V , ce qui signifie que V est stable par σ^* . Alors m est portée par $\Lambda_i^!$.

L'application

$$(t, \lambda) \longmapsto y_t^\lambda = \sigma_t^*(y^\lambda)$$

réalise alors un isomorphisme d'espaces mesurables de $\mathbb{R} \times \Lambda_i^!$ sur V . Pour voir que μ_λ (dont le support est égal à \mathcal{G}_λ) a une densité polynômiale par rapport à dt , il suffit d'exprimer cet isomorphisme dans une base de M_i obtenue en complétant une base de $M_i \cap v_i^{-1}(V)$.

Q.E.D.

Nous pouvons maintenant aborder la description de $\Psi_{(I)\lambda}$ et de U_λ dans les différents cas.

a) \mathcal{G}_y n'est pas contenu dans \mathcal{G}_1 ; on choisit donc e_1 dans \mathcal{G}_y . L'espace \mathcal{G}_{y_1} est stable par σ et V est stable par σ^* . On est donc dans la situation ii) du lemme. En outre, δ_V étant invariante par σ^* , on peut choisir m de façon à ce que chaque μ_λ soit définie par

$$d\mu_\lambda(y_t^\lambda) = dt$$

Il vient alors, pour $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathcal{G}_1^*)$

$$\begin{aligned} \langle \psi(\alpha, y), \Psi(\alpha, y) \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathcal{G}_1^*} \psi(\alpha, y) d\delta_V(\alpha, y) dy \right) d\alpha \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\Lambda_i} \left(\int_{\mathbb{R}} \psi(\alpha, y_t^\lambda) dt \right) dm(\lambda) \right) d\alpha \\ &= \int_{\Lambda_i} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \psi(\alpha, y_t^\lambda) d\alpha dt \right) dm(\lambda) \end{aligned}$$

Ainsi, il vient, pour m -presque tout λ de Λ_i ,

$$\begin{aligned} \Psi_{(I)\lambda}(\alpha, t) &= \mathbb{1}(\alpha, t) \\ \mathcal{X}U_\lambda(s, t) &= \mathbb{1}(t-s, t) = \mathbb{1}(s, t) \end{aligned}$$

et U_λ est l'opérateur de rang 1 défini par

$$U_\lambda f(t) = \left(\int_{\mathbb{R}} f(s) ds \right) \mathbf{1}(t)$$

b) \mathcal{H} est contenu dans \mathcal{G}_1 .

i) V n'est pas stable par σ^* , ce qui équivaut à H non distingué. D'après le lemme, on a, pour presque tout λ ,

$$\mu_\lambda = \sum_{r=1}^{r_\lambda} a^\lambda(r) \delta_{y_{t_r}^\lambda}, \text{ avec } \rho(y^\lambda) = \{t_1, \dots, t_{r_\lambda}\}$$

d'où, pour $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathcal{G}_1^*)$

$$\begin{aligned} \langle \psi(\alpha, y), \Psi(\alpha, y) \rangle &= \int_{\mathcal{G}_1^*} \psi(0, y) d\delta_V(y) \\ &= \int_{\Lambda_i} \left(\sum_{r=1}^{r_\lambda} a^\lambda(r) \psi(0, y_{t_r}^\lambda) \right) dm(\lambda) \end{aligned}$$

On en déduit, pour m -presque tout λ de Λ_i ,

$$\Psi_{(1)\lambda}(\alpha, t) = \sum_{r=1}^{r_\lambda} a^\lambda(r) \delta(\alpha) \delta_{t_r}(t)$$

et :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}U_\lambda(s, t) &= \sum_{r=1}^{r_\lambda} a^\lambda(r) \delta(t-s) \delta_{t_r}(t) \\ &= \sum_{r=1}^{r_\lambda} a^\lambda(r) \delta_{t_r}(s) \delta_{t_r}(t) \end{aligned}$$

et U_λ est l'opérateur de rang r_λ défini par

$$U_\lambda f(t) = \sum_{r=1}^{r_\lambda} a^\lambda(r) f(t_r) \delta_{t_r}(t)$$

ii) V est stable par σ^* , ce qui équivaut à H distingué. D'après le lemme, on a, pour m -presque tout λ

$$d\mu_\lambda(y_t^\lambda) = a^\lambda(t)dt$$

où les a^λ sont des polynômes sans racines réelles. Il vient :

$$\langle \psi(\alpha, y), \Psi(\alpha, y) \rangle = \int_{\Lambda_i} \left(\int_{\mathbb{R}} a^\lambda(t) \psi(0, y_t^\lambda) dt \right) dm(\lambda)$$

d'où, pour m - presque tout λ ,

$$\Psi_{(I)\lambda}(\alpha, t) = \delta(\alpha) a^\lambda(t)$$

$$\mathcal{H}U_\lambda(s, t) = \delta(t-s) a^\lambda(t)$$

et U_λ est l'opérateur de multiplication par a^λ .

REMARQUE : Ici la représentation π_T de la démonstration du théorème 1 est la représentation quasi-régulière associée au sous-groupe H . On retrouve donc dans un cas particulier, les résultats de GRELAUD ([10]) sur la désintégration d'une telle représentation. Mais la connaissance des opérateurs U_λ va nous donner des informations supplémentaires.

Formule de Plancherel : En remarquant que lorsque T est la distribution induite par la mesure de Haar sur H on a

$$T(g^{-1}) = T(g)$$

on obtient la formule de Plancherel concrète au sens de [14] en explicitant dans chaque cas le scalaire $\text{tr}(\pi_\lambda(\theta)U_\lambda)$ dans la relation (1) de définition de la transformée de Fourier (m, U) . Les différents cas sont décrits dans le tableau suivant, où θ désigne une fonction de $\mathcal{S}(G)$.

$$1^\circ [\mathcal{G}, \mathcal{G}] \subset \mathcal{H}$$

$$\int_{\mathcal{H}} \theta(h) dh = \int_{\mathcal{G}(0)}^* \pi_x(\theta) d\delta_{\mathcal{H}}(x)$$

$$2^\circ [\mathcal{G}, \mathcal{G}] \not\subset \mathcal{H}$$

La mesure m est concentrée sur l'un des ensembles $\hat{G}_{(I,i)} = \Lambda_i$.

$$a) \mathcal{H} \not\subset \mathcal{G}_1$$

$$\int_{\mathcal{H}} \theta(h) dh = \int_{\Lambda_i} \left(\int_{\mathbb{R}} (\pi_\lambda(\theta) \cdot \mathbb{1})(t) dt \right) dm(\lambda)$$

$$b) \mathcal{H} \subset \mathcal{G}_1$$

i) \mathcal{H} non distingué

$$\int_{\mathcal{H}} \theta(h) dh = \int_{\Lambda_i} \left(\sum_{r=1}^{r_\lambda} a^\lambda(r) (\pi_\lambda(\theta) \cdot \delta_{t_r})(t_r) \right) dm(\lambda)$$

ii) \mathcal{H} distingué

$$\int_{\mathcal{H}} \theta(h) dh = \int_{\Lambda_i} \left(\int_{\mathbb{R}} a^\lambda(t) (\pi_\lambda(\theta) \cdot \delta_t)(t) dt \right) dm(\lambda).$$

*

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. F. AARNES, Distributions of positive type and representations of Lie groups, *Math. Ann.*, 240 (1979), 141-156.
- [2] D. ARNAL, J. C. CORTET, Nilpotent Fourier transform and applications, *Lectures in mathematical physics n° 9 (1985)*, 23-34.
- [3] Y. BENOIST, Espaces symétriques exponentiels, *Thèse 3-ème cycle, Paris VII, 1983*.
- [4] Y. BENOIST, Analyse harmonique sur les espaces symétriques nilpotents, *Journ. Func. Anal.*, 59, n° 2 (1984) 211-253.
- [5] P. BERNAT, N. CONZE, M. DUFLO, M. LEVY-NAHAS, M. RAÏS, P. RENOARD, M. VERGNE, Représentations des groupes de Lie résolubles, *Monographies de la Soc. Math. de France, Dunod, Paris 1972*.
- [6] P. BONNET, Transformation de Fourier des distributions de type positif sur un groupe de Lie unimodulaire, *Journ. Func. Anal.*, 55, n° 2 (1984), 220-246.
- [7] N. BOURBAKI, Intégration, livre VI, *Hermann, Paris*.
- [8] P. CARTIER, Vecteurs différentiables dans les représentations unitaires des groupes de Lie, *Séminaire BOURBAKI, Exp. n° 454, Lectures Notes 514, 20-34, Springer, Berlin/New-York, 1975*.
- [9] H. FUJIWARA, Représentations monômiales des groupes de Lie nilpotents, *Université de Kyushu, preprint, 1985*.
- [10] G. GRELAUD, Sur les représentations des groupes de Lie résolubles, *Thèse d'Etat, Université de Poitiers, 1984*.

- [11] C. GODFREY, Table of coadjoint orbits for nilpotent Lie algebras, *Université de Massachusets, Boston, preprint.*
- [12] KIRILLOV, Eléments de la théorie des représentations, *Editions Mir, Moscou (1974).*
- [13] O.A. NIELSEN, Unitary representations and coadjoint orbits of low-dimensional nilpotent Lie groups, *Queen's papers in pure and applied mathematics, n° 63, Queen's University, Kingston, Ontario.*
- [14] R. PENNEY, Abstract Plancherel theorem and a Frobenius reciprocity theorem, *Jour. Func. Anal.*, 18 (1975), 177-190.
- [15] N.S. POULSEN, On C^∞ vectors and intertwining linear forms for representations of Lie groups, *Jour. Funct. Anal.*, 9 (1972), 87-120.
- [16] L. PUKANSKY, Unitary representations of solvable Lie groups, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. Paris, t. 4 (1971), 457-608.*
- [17] L. PUKANSKY, Leçons sur les représentations des groupes, *Dunod Paris, (1967).*
- [18] M. RAIS, Représentations des groupes de Lie nilpotents et méthode des orbites, *Analyse harmonique, les cours du C.I.M.P.A. (1982), 447-710.*
- [19] RAWNSLEY, Representation of a semi-direct product by quantization, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 78 (1975), 345-350.

*