PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

EL HASSAN YOUSSFI

Mesures de Lévy et fonctions de Lévy générales Applications à la décomposition de Lévy-Khintchine

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1986, fascicule 3D
« Mesures de Levy et fonctions de Levy générales - Applications à la décomposition de Levy-Khintchine », , p. 1-81

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1986___3D_A1_0>

© Université de Lyon, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

PUBLICATIONS DU DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES DE L'UNIVERSITE DE LYON I

3/D - 1986

Thèse soutenue le 1er juillet 1986 à l'Université Claude Bernard Lyon I

MESURES DE LEVY ET FONCTIONS DE LEVY GENERALES

APPLICATIONS A LA DECOMPOSITION DE LEVY-KHINTCHINE

El Hassan YOUSSFI

INTRODUCTION GENERALE

Le problème des semi-groupes de moments dont la résolution paraît difficile au coup par coup sans théorie globale, consiste, d'une part à étudier les fonctions ψ définies sur un semi-groupe abélien involutif S et engendrant un semi-groupe $\exp(t\psi)$, $t \geqslant 0$, de fonctions moments et d'autre part à caractériser parmi ces fonctions celles qui engendrent un semi-groupe de F-fonctions moments lorsque F est un sous-*-semi-groupe du dual S^* des semi-caractères sur S.

Des études faites sur les probabilités indéfiniment divisibles, consulter par exemple S.K.S. VARADHAN [32] et K.R. PARTHASARATHY [27], ont conduit à la représentation de Lévy-Khintchine des probabilités indéfiniment divisibles et des semi-groupes de convolution étroitement continus de probabilités sur un groupe abélien localement compact F = G. Aussitôt C. BERG et G. FORST [6] ont caractérisé les semi-groupes de convolution de sous-probabilités sur un groupe abélien localement compact F = G, en termes de fonctions de type négatif sur le groupe dual de G.

A partir de là, cette théorie s'est amorcée avec les semi-groupes "réels" pour lesquels l'involution * est telle que $s^* = s$ et lorsque ψ est bornée, ceci correspond aux travaux de C. BERG, J.P.R. CHRISTENSEN et P. RESSEL [8], puis s'est poursuivie avec les semi-groupes involutifs lorsque Re ψ est inférieurement bornée dans les travaux de P.H. MASERICK [25] , en fournissant une décomposition de Lévy-Khintchine de Re ψ . Ceci a donné plus généralement naissance à une notion plus abstraite de mesure de Lévy portée par le compact $\hat{S}$ des semi-caractères bornés (par 1) ne permettant toutefois de reconstituer la fonction ψ qu'à l'aide d'une fonction de Lévy sur $\hat{S} \times S$. L'existence d'une telle fonction de Lévy vient d'ailleurs d'être prouvée par H. BUCHWALTER [15] .

Toutefois, la démarche suivie sur $\hat{S}$ ne s'adapte plus au cas général d'un

$*$-semi-groupe F du dual S^* et la difficulté réside essentiellement dans le fait que l'on ignorait le moyen d'étendre les résultats classiques à ce cas général.

Or notre avis est que, mis à part le cas d'un semi-groupe "réel" pour lequel $s^* = s$, et peut-être celui d'un groupe avec $s^* = -s$, les notions de mesure de Lévy et de fonction de Lévy sont mal définies ou en tout cas insuffisamment bien définies. Nous proposons donc des définitions plus restrictives a priori, serrant de plus près une réalité mal perçue, qui est que, dans le cas $F = \hat{S}$ toute fonction ψ de type quasi-positif ($-\psi$ est de type négatif) possédant une mesure de Lévy associée est telle que $R.\psi$ est une fonction moment sur $\hat{S}$, pour tout X-polynôme $R \geqslant 0$ sur $\hat{S}$ tel que $R(\mathbb{1}) = 0$.

Pour le premier chapitre nous introduisons donc une notion nouvelle de mesure de Lévy, de fonction de Lévy et de forme quadratique. Notre idée fondamentale est de faire dépendre chacune de ces notions d'un sous-$*$-semi-groupe donné F du dual S^* par l'intermédiaire du cône positif des X-polynômes positifs sur F et qui s'annulent au point $\mathbb{1}$. Nous prouvons d'abord que l'on préserve ainsi les notions classiques et nous étudions les diverses liaisons qui existent entre ces nouvelles notions. Enfin nous donnons des exemples de mesures de Lévy et fonctions de Lévy en ce sens nouveau.

Dans le deuxième chapitre, nous montrons comment ces nouvelles notions de mesures de Lévy, de fonctions de Lévy et de formes quadratiques s'adaptent à la résolution du problème des semi-groupes de moments pour des cas très intéressants et plus généraux que ceux jusque-là connus. Nous commençons par introduire deux classes intéressantes de sous-$*$-semi-groupes F à savoir celle formée des F satisfaisant à la condition d'"adaptation" de Choquet et celle formée des F satisfaisant à la condition de "détermination". Pour chaque F de l'une de ces deux classes, nous offrons une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction de type quasi-positif ψ possède une F-mesure de Lévy associée. Nous énonçons un théorème général donnant une décomposition "du type de Lévy-Khintchine", qui couvre toutes les représentations de Lévy-Khintchine classiques dont les preuves différaient d'un semi-groupe à l'autre. Nous étudions le cas particulier $F \subset \hat{S}$ tout en offrant un théorème de décomposition du type de Lévy-Khintchine, où sont en plus explicitées en fonction de ψ les parties 2-homogène et additive de la forme quadratique canoniquement associée à ψ. Nous donnons ensuite deux théorèmes de résolution partielle du problème des semi-groupes de moments lorsque F est fermé dans $\hat{S}$, à savoir le cas où ψ est réelle et le cas où la F-mesure de Lévy λ associée à ψ satisfait à la contrainte $\int |\chi_s - 1| d\lambda < +\infty$, $s \in S$. Ces deux résolutions sont indépendantes et généralisent toutes les deux le théorème de C. BERG [5] . Dans le dernier paragraphe de ce chapitre on étudie les semi-groupes de convolution sur F, en introduisant les deux notions de semi-groupe de convolution "gaussien" sur F, et de semi-groupe de convolution de "type de Poisson". Lorsque F est localement compact satisfaisant à la condition de détermination, nous donnons une condition suffisante pour qu'un semi-groupe de convolution $(\mu_t)_{t \geq 0}$ sur F se décompose sous la forme

$$\mu_t = \delta_{k_t} * \sigma_t * \nu_t, \quad t \geq 0$$

avec $k_t \in F$, $(\sigma_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe de convolution gaussien et $(\nu_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe de convolution de type de Poisson. Nous montrons ensuite que cette condition est nécessaire lorsque F satisfait aux deux conditions de détermination et d'adaptation.

Nous commençons le troisième chapitre en offrant un résultat de stabilité relatif aux semi-groupes abéliens involutifs, à savoir qu'étant donnés deux tels semi-groupes S et T et un *-morphisme surjectif $\theta : S \to T$, une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $\varphi : T \to \mathbb{C}$ soit fonction moment est que la fonction $\varphi \circ \theta$ soit une fonction moment sur S. Ce résultat permet de retrouver certains résultats classiques de stabilité, par exemple celui ([9] , page 207) garantissant que l'image *-homomorphe d'un semi-groupe parfait est parfait. Finalement nous donnons diverses applications de cette théorie, nous résolvons le problème des semi-groupes de moments lorsque $F = S^*$ satisfait à la condition d'adaptation, ce qui recouvre le cas des semi-groupes de type fini. Nous examinons aussi le cas des groupes de type fini et nous donnons enfin une nouvelle démonstration des théorèmes de C. BERG [4] et de P.J. BICKEL et N.R. VAN ZWET [10] dont les preuves utilisaient les fonctions d'une variable complexe.

*

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE I : MESURES DE LEVY ET FONCTIONS DE LEVY GENERALES

(1.1) Définitions et premières propriétés
Rappels
F-mesure de Lévy, F-fonction de Lévy et F-forme quadratique

(1.2) Mesure de Lévy associée à une fonction de type quasi-positif

(1.3) Cas où F est contenu dans $\hat{S}$

Préservation de la notion classique de mesure de Lévy

(1.4) Théorème de H. Buchwalter sur l'existence d'une $\hat{S}$-fonction de Lévy - préservation de la notion classique de fonction de Lévy, Cas des groupes.

(1.5) Exemples de fonctions de Lévy et de mesures de Lévy générales.

CHAPITRE II : PROBLEME DES SEMI-GROUPES DE MOMENTS ET REPRESENTATION DE LEVY-KHINTCHINE

(2.1) Problème des semi-groupes de moments

(2.2) Espaces vectoriels adaptés, théorème de Choquet

(2.3) Sous-*-semi-groupes F satisfaisant à la condition d'adaptation et procédé de construction de F-mesures de Lévy

Application aux fonctions de type quasi-positif

(2.4) Sous-*-semi-groupes F satisfaisant à la condition de détermination

Condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction de type quasi-positif possède une F-mesure de Lévy associée

(2.5) Décompositions du type de Lévy-Khintchine

(2.6) Le problème des semi-groupes de moments pour $F \subset \hat{S}$

Cas où la mesure de Lévy λ satisfait à la contrainte

$$\int |\rho(s)-1| \, d\lambda(\rho) < +\infty$$

(2.7) Décomposition des semi-groupes de convolution

Table des matières (suite)

CHAPITRE III : THEOREME DE STABILITE ET APPLICATIONS GENERALES

(3.1) Théorème de stabilité

Applications Générales :

(3.2) Cas des semi-groupes de type fini

(3.3) Cas où S est tel que S^* satisfasse à la condition d'adaptation

(3.4) Cas où $S = (Q_+^P, +, id)$, Théorème de Berg

Cas où $S = (Q^P, +, id)$, Théorème de Bick et Van Zweet.

*

CHAPITRE I

MESURES DE LEVY ET FONCTIONS DE LEVY GENERALES

Dans ce chapitre, on introduit des nouvelles notions de mesures de Lévy, de fonctions de Lévy et de formes quadratiques, qui, quand on se restreint au compact $\hat{S}$, diffèrent des définitions classiques par le choix du cône des χ-polynômes positifs qui s'annulent au point $\mathbb{1}$, et par la condition (1.1.4.d). Ensuite, en raisonnant sur $\hat{S}$, on montre que l'on préserve les notions classiques ayant leur définition d'origine sur les groupes [28], [23]. On donnera à la fin des exemples de mesures de Lévy et de fonctions de Lévy, sortant du cas $\hat{S}$ et issus de situations concrètes.

(1.1) Définitions et premières propriétés.

Rappels : Soit $(S,+,*)$ un semi-groupe abélien admettant un élément neutre 0 et involutif, où l'involution $s \to s^*$ est telle que $(s+t)^* = s^* + t^*$, $(s^*)^* = s$; $s,t \in S$ et $0^* = 0$.

On appelle semi-caractère sur S, toute application $\rho : S \to \mathbb{C}$, telle que $\rho(s+t) = \rho(s)\rho(t)$, $\rho(s^*) = \overline{\rho(s)}$, pour $s,t \in S$ et $\rho(0) = 1$. L'ensemble S^* des semi-caractères est structuré en semi-groupe abélien multiplicatif, unitaire et involutif, dont l'élément neutre est le semi-caractère unité $\mathbb{1}$ et avec l'involution $\rho^* = \bar{\rho}$.

La topologie sur S^* est celle de la convergence simple qui est complètement régulière et induit une topologie compacte sur l'ensemble $\hat{S}$ des semi-caractères bornés par 1.

Introduisons la fonction $\chi_s : S^* \to \mathbb{C}$, associée à chaque élément $s \in S$, selon $\chi_s(\rho) = \rho(s)$, c'est la fonction d'évaluation au point s. On a évidemment $\chi_{s+t} = \chi_s . \chi_t$ $\chi_{s^*} = \overline{\chi}_s$ et $\chi_o = \mathbb{1}$. Nous dirons que χ_s est un monôme, et nous introduisons en le notant $\mathscr{P}$ par abus de langage, l'espace vectoriel complexe engendré formellement par les χ_s, et identifié à l'espace somme directe $\mathbb{C}^{(S)}$.

Pour $P = \Sigma\, a_s \chi_s$ et $Q = \Sigma\, b_t \chi_t$ on note

$$P.Q = \Sigma\, a_s b_t \;\chi_{s+t}$$

ce qui définit une structure d'algèbre sur $\mathscr{P}$, nous dirons que $\mathscr{P}$ est l'algèbre des χ-polynômes. Par ailleurs chaque $P \in \mathscr{P}$, détermine (non injectivement en général) une fonction sur S^*, et a fortiori sur toute partie de S^*, notée encore P par abus de notation et définie par

$$P(\rho) = \Sigma\, a_s\, \rho(s)$$

si $P = \Sigma\, a_s \chi_s$

de sorte que l'on définit une forme bilinéaire

$$< P,f > = (P.f)(0) = \Sigma\, a_s f(s)$$

si $P = \Sigma\, a_s \chi_s$, qui est telle que $< \chi_s, f > = f(s)$.

Il est clair que cette forme bilinéaire est séparante et met en dualité les deux espaces $\mathscr{P}$ et $\mathbb{C}^S$.

Il est facile de vérifier le mécanisme d'utilisation de la forme bilinéaire ainsi définie. En effet si P et Q sont deux χ -polynômes, on a les formules

(1) $$\begin{cases} P(Q.f) = (P.Q).f = Q(P.f) \\ < P,Q.f > = < Q,Pf > = < PQ,f > = ((PQ).f)(0) \end{cases}$$

On rappelle qu'une fonction $\varphi : S \to \mathbb{C}$ est dite fonction moment, s'il existe sans exigence d'unicité, une mesure de Radon positive μ sur l'espace complètement régulier S^*, telle que toutes les fonctions monômes soient μ-intégrables et vérifient

(2) $$\varphi(s) = \int_{S^*} \chi_s \, d\mu$$

pour tout $s \in S$.

On notera $\varphi = \hat{\mu}$, appelée transformée de Laplace généralisée de μ.

Lorsque la mesure μ est portée par une partie F de S^* au sens où l'on a $\mu(B) = \mathrm{Sup}\,\{ \mu(K),\ K$ compact contenu dans $B \cap F\}$ pour tout borélien B de F, on dira que φ est une F-fonction moment.

Il est clair que si φ est une fonction moment sur S et si μ est une mesure de Radon positive sur S^*, telle que $\hat{\mu} = \varphi$ alors pour tout χ-polynôme P, on a

$$< P, \varphi > = \int P.d\mu$$

En particulier on a $< |P|^2, \varphi > = \int |P|^2 d\mu \geqslant 0$, et on tire de là que φ est de type positif, c'est-à-dire que l'on a l'inégalité

(3) $$\Sigma\, c_j \overline{c_k}\, \varphi(s_j + s_k^*) \geqslant 0$$

pour toutes les familles finies (c_j) dans $\mathbb{C}$ et (s_j) dans S. On désignera par P(S) le cône convexe des fonctions de type positif définies sur S et par $P^b(S)$ celui des fonctions de P(S) qui sont bornées. On sait avec ([9], th. (4.2.8)) que le cône $P^b(S)$ est en correspondance bijective affine avec le cône $M^+(\hat{S})$ des mesures de Radon positives sur $\hat{S}$.

Finalement, on appellera fonction de type quasi-positif sur S, toute fonction $\psi : S \to \mathbb{C}$ vérifiant l'inégalité (3), pour toutes les familles finies (c_j) dans $\mathbb{C}$ telles que $\Sigma\, c_j = 0$ et (s_j) dans S. On sait par un résultat classique de Schoenberg, que ψ est de type quasi-positif sur S si et seulement si pour tout nombre réel $t \geqslant 0$, $\exp(t\,\psi) \in P(S)$.

Pour tout $s \in S$, on note Γ_s l'opérateur $\frac{1}{2}[\chi_s + \chi_{s^*}]$ et Δ_s l'opérateur $\frac{1}{2i}[\chi_s - \chi_{s^*}]$. Rappelons déjà la définition classique d'une mesure de Lévy associée à une fonction de type quasi-positif, on a ([9], (4.3.12)).

(1.1.1) Proposition. *Soit* $\psi : S \to \mathbb{C}$ *une fonction hermitienne telle que* $(1 - \Gamma_a).\,\psi \in P^b(S)$ *pour chaque* $a \in S$ *, et soit* $\sigma_a \in M^+(\hat{S})$ *telle que* $\hat{\sigma}_a = (1 - \Gamma_a).\,\psi$ *. Alors il existe une mesure de Radon positive unique* λ *sur* $\hat{S} \setminus \{\mathbb{1}\}$ *telle que :*

$$(1 - \Gamma_a)\lambda = \sigma_a|\hat{S} \setminus \{\mathbb{1}\}$$

pour chaque $a \in S$.

Une telle mesure λ *est dite mesure de Lévy associée à* ψ *.*

Introduisons maintenant la famille $\mathscr{F}$ des parties F de S^* qui sont des sous-*-semi-groupes multiplicatifs de S^*, c'est-à-dire telles que $\mathbb{1} \in F$ et $\sigma,\tau \in F$ implique $\sigma.\tau \in F$ et $\sigma^* = \bar{\sigma} \in F$. Chaque $F \in \mathscr{F}$ est muni de sa topologie induite par celle de S^*, donc complètement régulière.

On ne suppose pas F fermé, ni borélien. Néanmoins une mesure de Radon bornée sur F étant portée par un K_σ de F, définira une mesure de Radon sur S^*.

(1.1.2) Définition 1. *Pour chaque* $F \in \mathscr{F}$, *on note* $\mathscr{P}_o^+(F)$ *le cône positif des* X*-polynômes* R *tels que* $R \geqslant 0$ *sur* F *et* $R(\mathbb{1}) = 0$.

(1.1.3) Définition 2. *On appelle mesure de Lévy sur* F, *ou* F*-mesure de Lévy, toute mesure de Radon positive sur l'espace complètement régulier* $F \setminus \{\mathbb{1}\}$ *telle que* $\int R d\lambda < \infty$, *pour tout* $R \in \mathscr{P}_o^+(F)$. *On note* $\mathscr{L}_F$ *le cône positif de telles mesures.*

(1.1.4) Définition 3. *On appelle fonction de Lévy sur* F *ou* F*-fonction de Lévy, toute fonction* $L_F : F \times S \to \mathbb{C}$ *telle que :*

a) $L_F(\rho,.)$ *est additive et hermitienne sur* S, *pour tout* $\rho \in F$.

b) $L_F(.,s)$ *est continue sur* F *pour tout* $s \in S$ *et* $L_F(\bar{\rho},s) = \overline{L_F(\rho,s)}$, $(\rho,s) \in F \times S$.

c) $\int |\rho(s)-1-L_F(\rho,s)| \, d\lambda(\rho) < \infty$, *pour toute* $\lambda \in \mathscr{L}_F$ *et tout* $s \in S$.

d) $< R, L_F(\rho,.) > = 0$, *pour tout* $\rho \in F$ *et tout* $R \in \mathscr{P}_o^+(F)$.

A la suite de ces définitions il y a plusieurs remarques à faire.

(1.1.5) Remarque 1. La définition 2 est apparemment plus restrictive que la définition classique. Il faut voir dans quels cas elle lui est exactement équivalente. L'avantage est alors que la définition 3 l'est moins. Il y a donc plus de chances de trouver une fonction de Lévy.

(1.1.6) Remarque 2. Concernant la définition 2, il faut trouver un moyen de diminuer la famille des X-polynômes R servant de tests. En particulier lorsque F est contenu dans $\hat{S}$, on peut se demander si les X-polynômes $1 - \Gamma_s$ $s \in S$, suffisent, ce qui englobe le cas où S est un groupe. Nous verrons que la réponse à cette question est positive.

Dans le cas $F = S^*$, la même question se pose avec les χ-polynômes $|1-\chi_s|^2$, $s \in S$. Pour le cas d'un semi-groupe "réel" il est fort probable qu'il y ait des simplifications à faire.

(1.1.7) Remarque 3. Si $F_1 \subset F_2$ alors $\mathscr{P}_0^+(F_2)$ est contenu dans $\mathscr{P}_0^+(F_1)$ de sorte qu'une F_1-mesure de Lévy λ est aussi une F_2-mesure de Lévy, telle d'ailleurs que $\lambda(B_2) = \text{Sup}\,\{\lambda(K),\ K \text{ compact } \subset B_2 \cap F_1\}$, pour tout borélien B_2 de F_2. Mais réciproquement une F_2-mesure de Lévy, même portée par F_1 au sens où $\lambda(B_2) = \text{Sup}\,\{\lambda(K),\ K \text{ compact } \subset B_2 \cap F_1\}$ n'est pas nécessairement une F_1-mesure de Lévy.

(1.1.8) Remarque 4. L'intérêt des définitions 2 et 3 réside principalement dans leur adaptation pour résoudre le problème des semi-groupes de moments sur F.

On a déjà le résultat immédiat :

(1.1.9) Proposition. *Soient* λ *une* F*-mesure de Lévy et* L *une* F*-fonction de Lévy. Alors la fonction* $\psi = \psi_{\lambda,L}$ *définie par*

(4) $$\psi(s) = \int_{F \setminus \{\mathbb{1}\}} [\rho(s) - 1 - L(\rho,s)]\,d\lambda(\rho), \quad s \in S$$

est hermitienne, de type quasi-positif et telle que pour tout $R \in \mathscr{P}_0^+(F)$ *la fonction* $R.\psi$ *est une* F*-fonction moment. En particulier*

(5) $$R.\psi = (R.\lambda)^\wedge$$

Preuve. Déjà ψ est hermitienne. De plus pour $\Sigma\, c_j = 0$ avec $c_j \in \mathbb{C}$ on a

$$\Sigma\,\Sigma\, c_j \bar{c}_k \psi(s_j + s_k^*) = \int |\Sigma\, c_j \rho(s_j)|^2 d\lambda(\rho) \geqslant 0$$

donc ψ est de type quasi-positif. Enfin si $R = \Sigma\, a_t \chi_t$ est élément de $\mathscr{P}_0^+(F)$, on a $\Sigma\, a_s = 0$ et

$$(R.\psi)(s) = \sum_t a_t \psi(s+t) = \int [\sum_t a_t \rho(s+t)]\,d\lambda(\rho)$$

soit

$$(R.\psi)(s) = \int \rho(s)R(\rho)d\lambda(\rho) = (R.\lambda)\hat{}(s)$$

car $\sum_t a_t L(\rho,s+t) = L(\rho,s)(\sum_t a_t) + \sum_t a_t L(\rho,t)$

$$= \langle R, L(\rho,.) \rangle = 0,$$

d'où le résultat avec (1.1.4.d).

Les F-formes quadratiques sur S. On sait que la formule de Lévy-Khintchine fait intervenir la notion de forme quadratique. Cette notion, primitivement développée pour les groupes [24], [22], [1], [2], a été étendue au cas des $*$-semi-groupes c'est-à-dire des semi-groupes involutifs, par Maserick [25], et généralisée par Buchwalter [12] pour les besoins de la théorie des semi-groupes de moments sur S^* (et non plus sur $\hat{S}$). Nous proposons ici une généralisation, tenant compte de l'introduction de la famille $\mathscr{F}$, soit :

(1.1.10) Définition 4. *On appelle F-forme quadratique (non nécessairement 2-homogène) toute fonction hermitienne* $Q : S \to \mathbb{C}$ *telle que* $Q(0) = 0$, *vérifiant l'équation fonctionnelle*

(6) $$(R.Q)(s) = (R.Q)(0) = \langle R,Q \rangle = C(R)$$

pour tout $R \in \mathscr{P}_0^+(F)$, *où* $C(R)$ *est une constante complexe.*
On désignera par Q_F *l'espace de ces F-formes.*

Il est clair que si F est contenu dans $\hat{S}$, une telle forme est une forme quadratique au sens de Maserick comme on le voit avec $R = 1 - \Gamma_t$, $t \in S$. Dans le cas général on obtient une forme quadratique au sens de Buchwalter, comme on le voit avec $R = |1-\chi_t|^2$, $t \in S$. Or on sait [12] qu'une telle forme Q se décompose de façon unique en $Q = q+h$, où q est une forme quadratique 2-homogène et où h est une forme hermitienne additive avec

(7) $$q(t) = \frac{1}{2} Q(2t) - Q(t), \quad h(t) = 2\, Q(t) - \frac{1}{2} Q(2t)$$

On a alors :

(1.1.11) Proposition. *Toute F-forme quadratique Q se décompose de façon unique selon*

(8) $$Q = q + h$$

où q *est une* F*-forme quadratique 2-homogène et* h *une* F*-forme additive.*

Preuve. L'unicité provient du fait que la décomposition est nécessairement donnée par les formules (7).

Réciproquement, pour tout $R \in \mathscr{P}_o^+(F)$ posons $R = \Sigma\, a_t\, X_t$ et $R_2 = a_t\, X_{2t}$. Alors si q et h sont définies par (7) on a

$$(R.q)(s) = \frac{1}{2}(R_2Q)(2s) - (RQ)(s)$$
$$(Rh)(s) = 2(R\,Q)(s) - \frac{1}{2}(R_2\,Q)(2s)$$

Mais $R_2(\rho) = \Sigma\, a_t\, \rho^2(t) = \Sigma\, a_t X_t(\rho^2) = R(\rho^2) \geq 0$ sur F puisque $\rho \subset F$ implique $\rho^2 \in F$. Alors $(R_2Q)(s) = \langle R_2, Q \rangle$ est indépendant de s, donc aussi (R.q)(s) et (R.h)(s), d'où le résultat.

Quant à la F-forme q, on sait [12], qu'elle se décompose en $q = q_1 - q_3 + 2i\, q_2$, où les composantes q_1, q_2, q_3 sont réelles. En posant $\tilde{q} = \mathrm{Re} q$ on a donc $\tilde{q} = q_1 - q_3$ et q_1 est de plus déterminée par la condition q $q_1(t) = \frac{1}{4}\, q(t+t^*)$, équivalente à la condition que q_3 soit une forme (2-homogène) de Maserick.

Or q étant hermitienne on a $\tilde{q}(t) = \frac{1}{2}[q(t) + q(t^*)]$ de sorte que le raisonnement fait plus haut se reconduit en remplaçant 2t par t^* (donc ρ par $\bar{\rho}$) pour $\tilde{q}$ et par $t+t^*$ (donc ρ par $|\rho|^2$) pour q_1. Enfin la composante q_2 est donnée par

$$q_2(t) = \frac{1}{4i}[q(t) - q(t^*)] \quad \text{et} \quad (R\, q_1)(s) = \langle R, q_2 \rangle = \frac{1}{4i}\, \Sigma\, (a_t - a_{t^*}) q(t),$$

de sorte que $R\, q_2 = 0$ chaque fois que $R = \Sigma\, a_t\, X_t$ est tel que $a_t = a_{t^*}$ pour tout t. En résumé :

(1.1.12) Proposition. *Toute* F*-forme quadratique 2-homogène* q *se décompose de façon unique en*

(9) $$q = q_1 - q_3 + 2iq_2$$

avec $q_1(t) = \frac{1}{4} q(t+t^*)$ *. Les composantes* q_1 *et* q_3 *sont des* F *-formes quadratiques 2-homogènes et* q_3 *est de plus une forme de Maserick. La composante* q_2 *est anti-hermitienne et telle que* $R.q_2 = 0$ *, pour tout* $R = \Sigma a_t \chi_t \in \mathscr{P}_o^+(F)$ *tel que* $a_{t^*} = a_t$ *pour tout* t *.*

(1.2) Mesure de Lévy associée à une fonction de type quasi-positif.

(1.2.1) Définition 5. *Soit* $\psi : S \to \mathbb{C}$ *une fonction hermitienne. On dit qu'une* F *-mesure de Lévy* λ *est associée à* ψ *lorsque l'on a*

(10) $$R.\psi = (R.\lambda)^{\wedge} + C(R)$$

pour tout $R \in \mathscr{P}_o^+(F)$ *, où* $C(R)$ *est une constante réelle positive. En particulier* $R.\psi$ *est une* F *-fonction moment associée à la mesure* $\mu_R = R.\lambda + C(R)\,\delta_{\mathbb{1}}$ *. De plus* ψ *est de type quasi-positif.*

En effet pour $T \in \mathscr{P}$, avec $T(\mathbb{1}) = 0$, on a $<|T|^2, \psi> = (R.\psi)(0) = \int R d\lambda + C(R)$, avec $R = |T|^2$. Remarquons que si $R = 0$ sur F, alors $R \in \mathscr{P}_o^+(F)$ et $-R \in \mathscr{P}_o^+(F)$ donc $C(R) = 0$. Il suit de là que si $R = R'$ sur F alors $R.\lambda = R'.\lambda$, $C(R) = C(R')$ et $R.\psi = R'.\psi$. Par exemple en posant $R = \Sigma\, a_s \chi_s$, on voit que $\overline{R} = \Sigma\, \overline{a_s}\, \chi_{s^*}$ est tel que $R = \overline{R}$ sur F, de sorte qu'en remplaçant R par $\frac{1}{2}[R + \overline{R}]$, et en posant $a_s = b_s + ic_s$, on pourra supposer, si besoin est, que R s'écrit
$R = \Sigma\,(b_s \Gamma_s - c_s \Delta_s)$ avec b_s et c_s réels.

S'il existe une F-fonction de Lévy $L = L_F$, on voit avec (10), que la fonction $\psi = \psi_{\lambda,L}$ admet précisément λ pour mesure de Lévy associée.

La liaison avec les F-formes quadratiques est inévitable, car on a

(1.2.2) Théorème. *Soit* $\psi : S \to \mathbb{C}$ *une fonction hermitienne. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) $\lambda = 0$ *est la seule* F *-mesure de Lévy associée à* ψ

b) La fonction $\psi - \psi(0) = Q$ *est une* F*-forme quadratique telle que*

(11) $$< R,Q > \geqslant 0$$

pour tout $R \in \mathscr{P}_o^+(F)$.

En particulier Q *est de type quasi-positif.*

Preuve. b) $\Rightarrow$ a) Car $R.Q = \langle R,Q \rangle = C(R) \geqslant 0$, donc $\lambda = 0$ est bien une F-mesure de Lévy associée à Q et l'on a bien $Q(0) = 0$. Il reste à voir que c'est la seule, car l'implication a) $\Rightarrow$ b) est immédiate.

Fixons donc la F-mesure de Lévy λ telle que

$$R.Q = (R.\lambda)^{\wedge} + C(R),$$

avec $C(R) \geqslant 0$. On en déduit que $(R.\lambda)^{\wedge}$ est une constante $D(R)$, nécessairement positive ou nulle puisque $D(R) = (R.\lambda)^{\wedge}(0) = \int R d\lambda$. Il faut tirer de là $\lambda = 0$. Pour cela introduisons $\mu = D(R)\,\delta_{\mathbb{1}}$ de sorte que $(R.\lambda)^{\wedge} = \hat{\mu}$. Le lemme qui suit va impliquer l'égalité $R.\lambda = \mu$, qui n'est possible, puisque $R.\lambda$ est une mesure sur $F \setminus \{\mathbb{1}\}$, que si $R.\lambda = 0$. Alors en particulier $|X_s - 1|^2 . \lambda = 0$, pour tout $s \in S$, donc $\lambda = 0$ sur les ouverts $U_s = \{\rho, \rho(s) \neq 1\}$. Mais ces ouverts recouvrent $S^* \setminus \{\mathbb{1}\}$, d'où $\lambda = 0$.

Le lemme utilisé précise une situation délicate et a donc son intérêt propre. On sait en effet que si deux mesures λ et μ sur $\hat{S}$ sont telles que $\hat{\lambda} = \hat{\mu}$ alors $\lambda = \mu$. Le résultat n'est malheureusement plus vrai si λ et μ sont deux mesures sur S^*. Ce lemme figure dans ([9], 6.1.5), mais avec une preuve différente de celle que nous allons lui offrir.

(1.2.3) Lemme. *Soit λ une mesure sur S^* admettant une fonction moment et μ une mesure sur $\hat{S}$. On suppose que $\hat{\lambda} = \hat{\mu}$. Alors $\lambda = \mu$.*

Preuve. Il suffit de se ramener au cas où λ est une mesure sur $\hat{S}$, et pour cela de prouver que $\lambda(K) = 0$, pour tout compact $K \subset S^* \setminus \hat{S}$. Pour tout $\rho \in K$, il existe $s \in S$ tel que $|\rho(s)| > 1$, de sorte qu'on peut recouvrir K par des ouverts $V_{s_1}, \dots, V_{s_p}$ où $V_s = \{\rho \,;\, |\rho(s)| > 1\}$.

Posons $F_n(\rho) = \sum_k |\rho(s_k)|^{2n}$. Comme on a

$$\int |\rho(s)|^{2n} d\lambda(\rho) = \hat{\lambda}[n(s+s^*)] = \hat{\mu}[n(s+s^*)] = \int |\rho(s)|^{2n} d\mu(\rho)$$

on en déduit l'inégalité

$$\int F_n(\rho) d\lambda(\rho) = \int F_n(\rho) d\mu(\rho) \leqslant p.$$

Mais K étant recouvert par les ouverts V_{s_k}, on voit que pour tout $\rho \in K$ il existe s_k tel que $|\rho(s_k)| > 1$, ce qui implique $F_n(\rho) \to +\infty$ sur K. Il n'y a plus qu'à appliquer le lemme de Fatou aux fonctions $1_K F_n$ pour obtenir $\lambda(K) = 0$ à la limite.

Liaison entre les différentes notions. Du théorème (1.2.2), on déduit un premier résultat important, liant entre elles F-mesures de Lévy, F-fonctions de Lévy et F-formes quadratiques, et amenant à la décomposition de Lévy-Khintchine.

(1.2.4) Théorème. *On fixe* $F \in \mathcal{F}$ *et l'on suppose qu'il existe une* F*-fonction de Lévy* $L = L_F$. *Alors les assertions suivantes sont équivalentes, relativement à une fonction hermitienne* ψ.

a) ψ *admet une* F*-mesure de Lévy associée* λ.

b) ψ *admet une décomposition de Lévy-Khintchine*

$$\psi(s) = \psi(0) + Q(s) + \int [\rho(s)-1-L(\rho,s)]d\lambda(\rho) \tag{12}$$

où λ *est un élément de* $\mathcal{L}_F$ *et où* Q *est une* F*-forme quadratique telle que* $\langle R,Q \rangle \geq 0$, *pour tout* $R \in \mathcal{P}_o^+(F)$.

Preuve. a) $\Rightarrow$ b) Pour $R \in \mathcal{P}_o^+(F)$, on a $R.\psi = (R.\lambda)^\wedge + C(R)$ avec $C(R) \geq 0$. Mais $(R.\lambda)^\wedge = R.\psi_{\lambda,L}$ d'après (1.1.9) de sorte que $Q = \psi - \psi(0) - \psi_{\lambda,L}$ est telle que $Q(0) = 0$ et $R.Q = C(R) \geq 0$, donc est une F-forme quadratique vérifiant b).

b) $\Rightarrow$ a) Si ψ vérifie (12), alors $\psi = \psi(0) + Q + \psi_{\lambda,L}$ donc $R.\psi = \langle R,Q \rangle + (R.\lambda)^\wedge = (R.\lambda)^\wedge + C(R)$ avec $C(R) = \langle R,Q \rangle \geq 0$ et tout est dit.

(1.2.5) Remarque. L'hypothèse a) entraîne que $R.\psi$ est une F-fonction moment pour tout $R \in \mathcal{P}_o^+(F)$. La question délicate, au moins dans toute sa généralité, est le problème réciproque.

(1.3) Cas où F est contenu dans $\hat{S}$, préservation de la notion classique de mesure de Lévy.

Il s'agit de voir comment ces nouvelles notions de mesures et de fonctions de Lévy se situent par rapport aux notions classiques, qui ne sont d'ailleurs définies que dans les cas particuliers où S est soit un groupe G avec $* = -\mathrm{id}$, soit un $*$-semi-groupe (éventuellement réel, c'est-à-dire, $* = \mathrm{id}$) mais en se limitant au cas $F = \hat{S}$. Il s'agit aussi de voir qu'elles interviennent explicitement dans l'étude de situations plus générales que les précédentes, par exemple dans le cas de certains $*$-semi-groupes avec $F = S^*$.

Auparavant introduisons dans S un système $*$-générateur $B = (e_k)_{k \in I}$ qui est donc tel, par définition que tout $s \in S$ admet une représentation (non unique en général sauf si B est une $*$-base),

$$s = \Sigma(m_k e_k + n_k e_k^*)$$

où les indices $m = (m_k)$ et $n = (n_k)$ sont des éléments de la somme directe $\mathbb{N}^{(I)}$.

Lorsque F est contenu dans $\hat{S}$, on retrouve exactement pour les mesures de Lévy la notion classique, ce qui justifie notre façon de voir. En effet :

(1.3.1) Théorème. *On suppose* $F \in \mathscr{F}$ *et* $F \subset \hat{S}$. *On dit qu'une mesure* λ *sur* $\hat{S} \setminus \{\mathbb{1}\}$ *est portée par* F *lorsque* $\lambda(B) = \operatorname{Sup}\{\lambda(K),\ K$ *compact* $\subset B \cap F\}$ *pour tout borélien* B *de* $S \setminus \{\mathbb{1}\}$. *Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) λ *est une* F*-mesure de Lévy*

b) λ *est une* $\hat{S}$*-mesure de Lévy portée par* F

c) λ *est une mesure sur* $\hat{S} \setminus \{\mathbb{1}\}$, *portée par* F , *et telle que* $\int (1 - \Gamma_s) d\lambda < +\infty$, *pour tout* $s \in S$ *décrivant un système $*$-générateur de* S .

Preuve. Il est clair que a) $\Rightarrow$ b) d'après (1.1.7) et que b) $\Rightarrow$ c). Supposons c), et soit B un système $*$-générateur de S. Fixons $R = \Sigma\, a_s\, \chi_s \in \mathscr{P}_0^+(F)$. Alors il il existe un système fini $\{e_1, \ldots, e_p\}$ dans B tel que pour tout s figurant dans la décomposition de R, il existe une représentation

$$s = \sum_{k=1}^{p} (m_k^s\, e_k + n_k^s\, e_k^*)$$

avec m_k^s , $n_k^s \in \mathbb{N}$. Alors R, qui est tel que $R(\mathbb{1}) = 0$ peut s'écrire

$$R = \sum_{|m+n| \geqslant 1} a_{m,n}(1 - \Gamma)^m \Delta^n$$

avec $m,n \in \mathbb{N}^p$, $a_{m,n} \in \mathbb{C}$, $\Gamma = (\Gamma_{e_1}, \dots, \Gamma_{e_p})$ et $\Delta = (\Delta_{e_1}, \dots, \Delta_{e_p})$. Puisque Γ et Δ sont réels et que R est positif ou nul sur F, on peut supposer les $a_{m,n}$ réels sans changer les valeurs de R sur F, donc sans changer la valeur de l'intégrale $\int R d\lambda$. Posons alors

$$R_1 = \sum_{\substack{|m+n| \geqslant 1 \\ |n| \text{ pair}}} a_{m,n}(1 - \Gamma)^m \Delta^n \quad \text{et} \quad R_2 = \sum_{\substack{|m+n| \geqslant 1 \\ |n| \text{ impair}}} a_{m,n}(1 - \Gamma)^m \Delta^n$$

Puisque $\rho \in F$ implique $\bar{\rho} \in F$ et que $R_1(\bar{\rho}) = R_1(\rho)$ tandis que $R_2(\bar{\rho}) = -R_2(\rho)$, on voit que l'on a $|R_2(\rho)| \leqslant R_1(\rho)$, d'où $R \leqslant 2R_1$ sur F. Or la condition $F \subset \hat{S}$ assure que les polynômes $(1 - \Gamma)$ et Δ sont bornés sur F, de sorte que la partie de R_1 formée d'indices tels que $|m| \geqslant 1$ est dominée par une combinaison linéaire finie des $(1 - \Gamma_{e_k})$. Et lorsque $m = 0$, alors $|n| \geqslant 2$ et le même résultat est obtenu car, sur $\hat{S}$, donc sur F, on a

$$\Delta_{e_k}^2 \leqslant 1 - \Gamma_{e_k}^2 = (1 - \Gamma_{e_k})(1 + \Gamma_{e_k}) \leqslant 2(1 - \Gamma_{e_k})$$

Ainsi c) implique $\int R d\lambda < \infty$, ce qui prouve c) $\Rightarrow$ a).

(1.3.2) Corollaire 1. *Lorsque* $F \in \mathscr{F}$ *est contenu dans* $\hat{S}$ *, les* F*-mesures de Lévy ne sont autres que les mesures de Lévy habituelles de la théorie, définies par la condition que* λ *soit une mesure de Radon sur* $F \setminus \{\mathbb{1}\}$ *telle que* $\int (1 - \Gamma_s) d\lambda < \infty$, *pour tout* $s \in S$ *, ou seulement pour tout* s *décrivant un système *-générateur.*

(1.3.3) Corollaire 2. *Lorsque* S *est un semi-groupe réel et que* F *est contenu dans* $\hat{S}$ *, alors* $L_F \equiv 0$ *est une* F*-fonction de Lévy.*

Preuve. Car $\rho(s) = \rho(s^*) = \overline{\rho(s)}$ est réel donc $\rho(s) = \Gamma_s(\rho)$. Ainsi pour toute $\lambda \in \mathscr{L}_F$ on a $\lambda \in \mathscr{L}_{\hat{S}}$ donc, $\int (1 - \Gamma_s) d\lambda < \infty$. Alors $L_F \equiv 0$ vérifie évidemment les conditions de (1.1.4).

(1.3.4) Corollaire 3. *Lorsque* $F \subset \hat{S}$, *alors* L_F *est nécessairement imaginaire pure, donc de la forme* $L_F = L = iL_2$ *où* $L_2 : F \times S \to \mathbb{C}$ *est additive en* s, *continue et anti-hermitienne en* ρ, *sans oublier les conditions (1.1.4.c) et (1.1.4.d).*

(1.4) Préservation de la notion classique de fonction de Lévy - Théorème de Buchwalter sur l'existence d'une $\hat{S}$-fonction de Lévy, cas des groupes.

On sait que la notion de fonction de Lévy n'a pas été, jusque-là, extrêmement étudiée. En particulier, avec les définitions classiques de Berg-Christensen et Ressel ([9], 3.17), différant essentiellement des nôtres par la condition (1.1.4.d) et le choix du cône $\mathscr{L}_F$ des mesures tests, on ignore s'il existe une F-fonction de Lévy dans le cas général d'un $*$-sous-semi-groupe de S^*. Toutefois le cas $F = \hat{S}$ lorsque $S = G$ est un groupe abélien muni de $s^* = -s$ a été étudié par PARTHASARATHY-RAO-VARADHAN [28], qui ont apporté une réponse positive, d'ailleurs dans le contexte élargi des groupes abéliens localement compacts quelconques, puis récemment par BUCHWALTER [15] dans le cas $F = \hat{S}$, avec S un $*$-semi-groupe quelconque. On verra au fil de la preuve de [15] que la fonction de Lévy construite est différente, mais en quelque sorte plus naturelle que celle donnée dans [28].

On sait par la monographie de BUCHWALTER [12] qu'à tout $*$-semi-groupe S est attaché le groupe $G = G_S$ quotient associé à la relation d'équivalence sur S, $s \equiv t$ si et seulement s'il existe $u = u^*$ tel que $s+t^*+u = s^*+t+u$.

On voit donc que si S est un groupe muni de l'involution $* = -\mathrm{id}$ on a $G_S = S$ si et seulement si pour $s \in S \setminus \{0\}$ on a $2s \neq 0$.

(1.4.1) Théorème (Buchwalter). *Soit* $(S,+,*)$ *un semi-groupe involutif quelconque. Alors il existe une* $\hat{S}$ *-fonction de Lévy.*

Preuve. Construction de L. Soit $G = G_S$ le groupe associé à S comme ci-dessus, et soit $\tilde{G}$ le groupe sans torsion qui lui est associé, qui est donc le groupe quotient de G par le sous-groupe des éléments d'ordre fini.
Pour $s \in S$, on note $[s]$ son image dans G et $\tilde{s}$ son image dans $\tilde{G}$.

Introduisons maintenant un système $\mathbb{Z}$-libre maximal $(\tilde{e}_k)_{k \in \Lambda}$ dans $\tilde{G}$, où Λ est un ensemble convenable d'indices, et relevons chaque $\tilde{e}_k$ par un élément $e_k \in S$.

Alors, pour tout élément $s \in S$, l'image $\tilde{s} \in \tilde{G}$ est telle, nécessairement, qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ et une suite finie $(n_k) \in \mathbb{Z}^{(\Lambda)}$ avec $n\tilde{s} = \Sigma\, n_k \tilde{e}_k$.

On voit facilement que la suite $(\frac{n_k}{n})$ est unique. On définit alors $L : \hat{S} \times S \to \mathbb{C}$ selon, $L(\rho,s) = i\, \Sigma\, \frac{n_k}{n}\, \mathrm{Im}\, \rho(e_k)$ ce qui garantit les propriétés (1.1.4.a) et (1.1.4.b).

Pour démontrer (1.1.4.c) remarquons que pour chaque $s \in S$ la fonction $F(\rho) = 1 - \rho(s) + L(\rho,s)$ est bornée sur $\hat{S}$ et telle que $\mathrm{Re}\, F(\rho) = 1 - \Gamma_s(\rho)$ et $\mathrm{Im}\, F(\rho) = \frac{1}{i} L(\rho,s) - \Delta_s(\rho)$

$= -iL(\rho,s) - \Delta_s(\rho)$.

Pour $\lambda \in \mathscr{L}_{\hat{S}}$, il suffit pour prouver (1.1.4.c) qu'il existe un voisinage ouvert V de Π dans $\hat{S}$ tel que

$$\int_V |\Delta_s(\rho) + iL(\rho,s)|\, d\lambda(\rho) < +\infty \tag{13}$$

Introduisons encore, pour chaque $s \in S$, la fonction $\theta_s(\rho) = \mathrm{Arg}\, \rho(s)$, choisie telle que $-\pi < \theta_s \leqslant \pi$. Ainsi à chaque $s \in S$ sont associées Γ_s, Δ_s et θ_s que nous noterons pour simplifier Γ_k, Δ_k et θ_k lorsque $s = e_k$.

Fixons maintenant $s \in S$ et l'ensemble fini Λ_s des indices k tels que $n_k \neq 0$ dans la représentation $n\tilde{s} = \Sigma\, n_k \tilde{e}_k$. En étudiant, pour $z = re^{i\alpha} = x + iy \in D$, la fonction $H(r) = (\alpha - r\sin\alpha)(1 - r\cos\alpha)^{-1}$ sur le segment $[0,1]$, il est facile d'obtenir l'inégalité

$$|\alpha - y| \leqslant |\alpha|(1-x) \leqslant 4(1-x) \tag{14}$$

d'où l'on déduit les inégalités suivantes

$$\begin{aligned} |\theta_s - \Delta_s| &\leqslant 4(1 - \Gamma_s) \\ |\theta_k - \Delta_k| &\leqslant 4(1 - \Gamma_k)\,,\ k \in \Lambda_s \end{aligned} \tag{15}$$

permettant de ramener (13) à la condition

$$\int_V \Big|\theta_s(\rho) - \Sigma \frac{n_k}{n}\, \theta_k(\rho)\Big|\, d\lambda(\rho) < +\infty \tag{16}$$

Posons maintenant $v = ns$ et

(17) $$w = \sum_{n_k \geq 1} n_k e_k + \sum_{n_k \leq -1} |n_k| e_k^*$$

de sorte que $\tilde{v} = \tilde{w}$, ou encore $[v] - [w]$ est un élément d'ordre fini du groupe G donc il existe $p \geq 1$, entier tel que $pv \equiv pw$, et il existe alors $u = u^* \in S$ tel que

(18) $$\mathbf{pv+pw^*+u = pv^*+pw+u}$$

En posant $V_1 = \{\rho\ ,\ \rho(u) \neq 0\}$, on obtient un voisinage ouvert de $\mathbb{1}$ dans $\hat{S}$ tel que, pour tout $\rho \in V_1$, on ait la condition

(19) $$[\rho(v)\overline{\rho(w)}]^p \in \mathbf{R}$$

ce qui implique l'égalité $p\,\theta_v(\rho) = p\theta_w(\rho)$ (mod. 2π), soit encore

(20) $$\theta_v(\rho) = \theta_w(\rho) \pmod{\frac{2\pi}{p}}$$

Ainsi la fonction $\theta_v - \theta_w$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs sur V_1, donc il existe un voisinage ouvert V de $\mathbb{1}$, choisi dans V_1 sur lequel sont vérifiées les conditions

(21) $$\begin{cases} n|\theta_s| + \sum |n_k \theta_k| < \pi \\ \theta_v = \theta_w \end{cases}$$

qui impliquent, pour $\rho \in V$, $n\theta_s(\rho) = \theta_v(\rho) = \theta_w(\rho) = \sum n_k \theta_k(\rho)$ ce qui montre (13) pour V.

Pour vérifier (1.1.4.d) fixons $R = \sum a_s X_s$ tel que $R \geq 0$ sur $\hat{S}$ et $R(\mathbf{1}) = 0$. Puisqu'il n'y a qu'un nombre fini d'éléments s qui interviennent dans R, on peut supposer que seul un nombre fini d'éléments e_k intervienne aussi pour représenter les éléments $\tilde{s}$ selon

$$n\tilde{s} = \sum_k n_{k,s}\, \tilde{e}_k$$

avec le même entier $n \geq 1$. Alors, pour $\rho \in \hat{S}$:

$$< R, L(\rho,.) > \; = \sum_s a_s \; L(\rho, s) = \sum_s \sum_k a_s \frac{n_{k,s}}{n} i \operatorname{Im} \rho(e_k)$$

$$= \frac{i}{n} \sum_k \operatorname{Im} \; \rho(e_k) [\sum_k n_{k,s} a_s]$$

de sorte que (1.1.4.d) sera vérifiée si l'on a, pour chaque indice k

(22) $$\sum_s n_{k,s} a_s = 0$$

Fixons k et, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, considérons la fonction $\rho : S \to \mathbb{C}$ définie par

$$\varphi(t) = \exp[i \frac{m_k}{m} \alpha] \text{ , si t vérifie } m\tilde{t} = \sum m_j \tilde{e}_j$$

Alors ρ est un élément de $\hat{S}$ et $R(\rho) = \sum_s a_s \exp[i \frac{n_{k,s}}{n} \alpha]$. On obtient ainsi en définitive une fonction $R(\rho) = H_R(\alpha)$, telle que $H_R(\alpha) \geqslant 0$ et $H_R(0) = R(\mathbb{1}) = 0$.

Alors $H'_R(0) = 0$ donne la condition cherchée (22), ce qui termine la preuve.

(1.4.2) Corollaire 1 ([28]). *Soit* $S = G$ *un groupe abélien muni de l'involution* $* = - \mathrm{id}$. *Alors pour tout sous-groupe multiplicatif fermé* $F \subset \hat{S}$, *il existe une fonction de Lévy* L_F.

Preuve. F est un groupe abélien compact, donc est le dual du groupe quotient discret $T = S_{/F^o}$, où F^o est l'annihilateur de F. On sait d'après [33] que T et F sont en dualité. On construit d'après (1.4.1) une fonction $\tilde{L} : F \times T \to \mathbb{C}$ permettant de définir $L : F \times S \to \mathbb{C}$ selon

$$L(\rho, s) = \tilde{L}(\rho, \dot{s})$$

où $\dot{s}$ est la classe de s dans T. Alors $\tilde{L}$ vérifiant les conditions (1.1.4) entre T et F, il est facile de voir qu'elle les vérifie entre S et F.

(1.4.3) Corollaire 2 [28]. *Soit* S *un groupe abélien de torsion, c'est-à-dire dont tous les éléments sont d'ordre fini. Alors pour tout sous-groupe fermé* $F \subset \hat{S}$ *on peut prendre* $L_F \equiv 0$.

Preuve. Résulte du fait que le groupe sans torsion associé à S est nul, donc celui associé à $T = S/_{F^o}$ aussi.

(1.4.4) Corollaire 3. *Soit* S *un groupe sans torsion, possédant une* $\mathbb{Z}$ *-base* $(e_k)_{k \in \Lambda}$ *. Alors la fonction*

$$L(\rho,s) = i \sum_k n_k \operatorname{Im} \rho(e_k)$$

pour $s = \Sigma\, n_k e_k$, *est une fonction de Lévy sur* $\hat{S}$.

(1.5) Exemples de fonctions de Lévy et de mesures de Lévy générales.

Dans ce paragraphe, nous examinons quelques cas où la partie F n'est plus contenue dans $\hat{S}$.

Cas où $S = (\mathbb{N}^p, +, \mathrm{id})$. On sait que $S^* = \mathbb{R}^p$, muni de sa structure multiplicative et que $\hat{S} = I^p$ avec $I = [-1,1]$. Alors :

(1.5.1) Proposition.

a) Pour $F = \mathbb{R}^p$ *les mesures de Lévy* $\lambda \in \mathscr{L}_F$ *sont exactement les mesures* λ *sur* $\mathbb{R}^p \setminus \{\mathbb{1}\}$ *telles que*

(23)
$$\int (1 + r^2)^m \Big[\sum_{k=1}^{p} (X_k - 1)^2 \Big] d\lambda < +\infty$$

pour tout entier $m \geqslant 1$ *, avec* $r^2 = \sum_{k=1}^{p} X_k^2$.

b) Pour $F = \mathbb{R}^p$ *il existe une fonction de Lévy* L *définie par*

(24)
$$L(X,n) = \sum_{k=1}^{p} n_k (X_k - 1)$$

Preuve.

a) La condition (23) est évidemment nécessaire. Réciproquement supposons-la vérifiée. Tout χ -polynôme R sur $\mathbb{R}^p$, tel que $R \geqslant 0$ et $R(\mathbb{1}) = 0$, admet un développement de Taylor par rapport aux variables $\tilde{X} = X - \mathbb{1} = (X_k - 1)$ qui commence au second ordre. Donc chaque monôme qui intervient possède en facteur un terme $\tilde{X}_j \tilde{X}_k$ et le reste de ce monôme est dominé par une expression du type $A(1+r^2)^m$. Il n'y a plus qu'à voir que $2\tilde{X}_j \tilde{X}_k \leqslant \tilde{X}_j^2 + \tilde{X}_k^2$ pour trouver la condition $\int R\, d\lambda < +\infty$.

b) La fonction L vérifie les conditions (1.1.4.a) et (1.1.4.b). Elle vérifie aussi (1.1.4.c) car pour tout $s = n = (n_k) \in \mathbb{N}^p$ le polynôme

$$X^n - 1 - L(X,n)$$

se développe au voisinage de $X = \mathbb{1}$ avec des termes de degré supérieur à deux. Enfin pour démontrer (1.1.4.d), posons $R = \sum a_n X^n$ avec $R(\mathbb{1}) = 0$ et $R \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}^p$. Alors, avec la base canonique (e_k) de $\mathbb{N}^p$, on obtient

$$< R, L(X,.) > = \sum_n a_n \; L(X,n) = \sum_n \sum_k a_n \, n_k \, L(X,e_k)$$

$$= \sum_k L(X,e_k)[\sum_n a_n \, n_k]$$

Or il est clair que l'on a, pour tout k, la condition

$$\sum_n n_k \, a_n = \frac{\partial R}{\partial X_k}(\mathbb{1}) = 0,$$

d'où la condition (1.1.4.d).

(1.5.2) Remarque. Il est intéressant de constater que même dans le cas d'un semi-groupe réel, on n'a plus $L \equiv 0$ lorsqu'on sort de $\hat{S}$, et que la fonction de Lévy obtenue est cette fois réelle et non imaginaire pure. En effet le polynôme $(1 - \Gamma_s)$ n'a plus aucun rôle à jouer en dehors de $\hat{S}$, et il vaut mieux le remplacer par le polynôme $|X_s - 1|^2$, c'est-à-dire ici par $(X^n-1)^2$, d'où l'apparition des termes $(X_k-1)^2$ de degré minimal. Le fait qu'une fonction de Lévy pouvait être réelle, et non imaginaire pure comme il est donné dans la définition (4.3.17) de [9], est suspecté dans la remarque (p. 215) qui suit la preuve de la proposition (5.5.13) de [9] .

<u>Cas où $S = (\mathbb{N}^p \times \mathbb{N}^p, +, *)$ avec $(m,n)^* = (n,m)$.</u> On sait alors que $S^* = \mathbb{C}^p$ et que $\hat{S} = D^p$, où D est le disque unité de $\mathbb{C}$, chacun étant muni de sa structure multiplicative. En posant $Z = (Z_k)$ et $Z_k = X_k + iY_k$, on obtient, par des raisonnements analogues aux précédents basés sur le fait que le point $Z = \mathbb{1}$ correspond à $X_k = 1$ et $Y_k = 0$, les résultats :

(1.5.3) Proposition.

a) Pour $F = \mathbb{C}^p$ *les mesures de Lévy* $\lambda \in \mathscr{L}_F$ *sont exactement les* *mesures* λ *sur* $\mathbb{C}^p\backslash\{\mathbb{1}\}$ *telles que*

(25)
$$\int (1+r^2)^m [\sum_{k=1}^{p} |Z_k - 1|^2] d\lambda < +\infty$$

pour tout entier $m \geqslant 0$, *avec* $r^2 = \Sigma |Z_k|^2 = \| Z \|^2$.

b) Pour $F = \mathbb{C}^p$ *il existe une fonction de Lévy* L *définie par*

(26)
$$\left\{ \begin{aligned} L(Z,(m,n)) &= \sum_{k=1}^{p} [m_k(Z_k - 1) + n_k(\overline{Z}_k - 1)] \\ &= \sum_{k=1}^{p} [(m_k + n_k)(X_k - 1) + i(m_k - n_k)Y_k] \end{aligned} \right.$$

On frôle donc ici la situation générale puisque cette fois la fonction L n'est ni réelle, ni imaginaire pure. Les formes (24) et (26) ont d'ailleurs été explicitement utilisées par H. BUCHWALTER [13], dans l'étude des semi-groupes de moments sur $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{C}^p$, et c'est la raison pour laquelle des définitions élargies des mesures de Lévy et des fonctions de Lévy ont été recherchées.

On verra plus loin des extensions possibles de (1.5.1) et (1.5.3) au cas des *-semi-groupes de type fini, c'est-à-dire admettant un système *-générateur fini.

*

CHAPITRE II

PROBLEME DES SEMI-GROUPES DE MOMENTS ET REPRESENTATION DU TYPE LEVY-KHINTCHINE

(2.1) Problème des semi-groupes de moments.

On fixe le semi-groupe involutif $(S,+,*)$ et le sous-*-semi-groupe F de S^*. Le problème consiste à caractériser les fonctions $\psi : S \to \mathbb{C}$ engendrant un semi-groupe de moments sur F, c'est-à-dire telles que pour tout $t \geqslant 0$, la fonction $\exp[t\,\psi]$ soit une F-fonction moment. Il existe donc une mesure de Radon bornée μ_t sur l'espace complètement régulier F telle que :

$$\exp[t\psi(s)] = \int_F \rho(s)d\mu_t(\rho)$$

pour tout $s \in S$.

Il est clair que ψ doit être hermitienne et la fonction $\exp[t\psi]$ doit être de type positif, pour tout $t \geqslant 0$, ce qui implique par un résultat classique de Schoenberg que ψ doit être de type quasi-positif. Mais ces conditions nécessaires ne suffisent pas en général.

Le problème a déjà été résolu par H. BUCHWALTER et G. CASSIER [16] pour $S = (\mathbb{N},+,id)$ et $F = [-1,1]$, par H. BUCHWALTER [11], pour $S = (\mathbb{N}^p,+,id)$. F étant un convexe compact de $\mathbb{R}^p$ donc nécessairement contenu dans $\hat{S}$, cette résolution a aussitôt permis à C. BERG [5] de traiter le cas général d'un semi-groupe réel $S = (S,+,id)$, avec F un sous-semi-groupe (multiplicatif) fermé de $\hat{S}$, la condition de convexité de [11] ayant évidemment disparu puisque $\hat{S}$ n'a plus de structure linéaire dans ce cas général. Mais quand on sort du compact $\hat{S}$, la résolution se limite au cas $S = (\mathbb{N}^p,+,id)$ ou $S = (\mathbb{N}^p \times \mathbb{N}^p,+,*)$, avec $(m,n)^* = (n,m)$ avec $F = \mathbb{R}^p$ ou $\mathbb{C}^p$, correspondant aux travaux de H. BUCHWALTER [6] et au cas $S = (Q_+,+,id)$ avec $F = \underline{\mathbb{R}} = [-\infty,+\infty[= S^*$, correspondant aux travaux de BERG, CHRISTENSEN et RESSEL ([9], 6.5.6).

Néanmoins le problème général d'un *-semi-groupe reste entier et la difficulté réside essentiellement dans l'ignorance où l'on est de l'existence ou non d'une F-fonction de Lévy lorsque F est différent de $\hat{S}$, et ici nous espérons apporter quelques éléments positifs à la question pour des cas plus généraux que ceux qui précèdent évidemment moyennant les nouvelles notions de fonctions et de mesures de Lévy que nous avons introduites au premier chapitre.

Cela étant, commençons, déjà, en gardant les notations du chapitre I, par énoncer une condition nécessaire de résolution du problème.

(2.1.1) Proposition. *Soit* $(S,+,*)$ *un *-semi-groupe et* F *un sous-*-semi-groupe de* S^* *. Une condition nécessaire pour qu'une fonction* $\psi : S \to \mathbb{C}$ *engendre un semi-groupe de moments,* $\exp(t\psi)$, $t \geq 0$ *sur* F *, est que pour tout* $R \in \mathscr{P}_0^+(F)$ *, on ait*

$$< R, \psi > \geq 0$$

Preuve. Fixons $R \in \mathscr{P}_0^+(F)$ et montrons que $< R, \psi > \geq 0$. Si $R = \Sigma a_s X_s$ et si $\exp[t\psi] = \hat{\mu}_t$, où μ_t est une mesure de Radon positive bornée sur F, alors $\Sigma a_s[\exp(t\psi(s)) - 1] = \int R(\rho)d\mu_t(\rho) \geq 0$ puisque $\Sigma a_s = 0$. Par division par t et en faisant tendre t vers zéro, on obtient $< R, \psi > \geq 0$.

(2.1.2) Remarque. La proposition (2.1.1) exprime que la forme linéaire $R \longmapsto < R, \psi >$ est positive sur l'espace $\mathscr{P}_0^+(F) - \mathscr{P}_0^+(F)$. On peut donc espérer lier le problème des semi-groupes à la théorie des représentations intégrales par des mesures de Radon non bornées [21] .

Avant de s'attaquer au problème, on va rappeler la notion d'espace vectoriel adapté due à CHOQUET [18] .

(2.2) Espaces vectoriels adaptés - Théorème de Choquet.

Etant donné un espace localement compact X, on désigne par C(X) l'espace des fonctions complexes continues sur X et par $\mathscr{K}(X)$ (resp. $C_0(X)$) celui des éléments de C(X) qui sont à support compact (resp. tendant vers zéro à l'infini).

On note aussi par $M(X)$ (resp. $M_C(X)$) l'ensemble des mesures de Radon (resp. à support compact) sur X. Si $\mathscr{A}(X)$ est un ensemble de fonctions ou de mesures sur X, on note $\mathscr{A}^+(X)$ celui des éléments positifs de $\mathscr{A}(X)$.

(2.2.1) Définition. *Un sous-espace vectoriel* V *de* $C(X)$ *est dit adapté si :*

1) Il n'existe pas de point de X *en lequel toutes les fonctions de* V *s'annulent, autrement dit* V *sépare* X.

2) Le cône $V_+ = C^+(X) \cap V$ *engendre* V.

3) Toute $f \in V_+$ *est fortement dominée par une autre* $g \in V_+$ *en ce sens que* $g \geqslant f$ *et que pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un compact* K *de* X *en dehors duquel on a*

$$f \leqslant \varepsilon g$$

Le résultat suivant donne une expression analytique des formes linéaires positives sur V.

(2.2.2) Théorème de CHOQUET [18]. *Soit* V *un espace vectoriel adapté de fonctions continues sur* X. *Pour toute forme linéaire* T *sur* V, *qui est positive sur* V_+, *il existe au moins une mesure de Radon positive* μ *sur* X, *telle que toute* $f \in V$ *soit* μ*-intégrable, vérifiant :*

$$T(f) = \int_X f d\mu$$

(2.3) Sous *-semi-groupe F satisfaisant à la condition d'adaptation et procédé de construction de F-mesures de Lévy.

Introduisons les espaces $\mathscr{P}_o^{\mathbb{R}}(F) = \mathscr{P}_o^+(F) - \mathscr{P}_o^+(F)$, $\mathscr{P}_o(F) = \mathscr{P}_o^{\mathbb{R}}(F) + i\mathscr{P}_o^{\mathbb{R}}(F)$ et $\mathscr{P}(F)$ des restrictions des éléments de $\mathscr{P}$ à F.

On dira que le sous-*-semi-groupe F de S^*, satisfait à la **condition d'adaptation** (CA), lorsqu'il est localement compact et $\mathscr{P}(F)$ est un sous-espace vectoriel adapté de $C(F)$.

Comme exemples, on prendra pour F un sous-*-semi-groupe fermé de $\hat{S}$, qui réalise la condition (CA) grâce au théorème de Stone-Weierstrass. Par ailleurs en supposant S de type fini, on sait que S^* est sous-espace fermé d'un $\mathbb{C}^n$, donc métrisable, localement compact dénombrable à l'infini et que l'espace $\mathscr{P}$ est adapté dans $C(S^*)$ ([9], 6.1.7), de sorte que tout sous-*-semi-groupe fermé de S^* satisfait à la condition (CA).

Dans tout ce paragraphe, les sous-*-semi-groupes F considérés seront supposés satisfaisant à (CA).

(2.3.1) Proposition. *Soit* F *un sous-*-semi-groupe de* S^* *satisfaisant à la condition (CA), et soit* $\psi : S \to \mathbb{C}$ *une fonction engendrant un semi-groupe de fonctions moments,* $\exp(t\psi)$, $t \geqslant 0$, *sur* F. *Alors pour tout* $R \in \mathscr{P}_0^+(F)$, *la fonction* $R.\psi$ *est une fonction moment sur* F.

Preuve. Fixons $R \in \mathscr{P}_0^+(F)$, alors pour tout $T \in \mathscr{P}^+(F)$ on a $RT \in \mathscr{P}_0^+(F)$ de sorte qu'avec (2.1.1), la forme linéaire $T \longmapsto \langle R.T, \psi \rangle$ est positive sur $\mathscr{P}^+(F)$ et la proposition (2.3.1) résulte de (2.2.2).

Considérons maintenant l'espace $\mathscr{C}_0(F \setminus \{\mathbb{1}\})$ des fonctions complexes f, continues sur l'espace localement compact $F \setminus \{\mathbb{1}\}$ et telles qu'il existe $R \in \mathscr{P}_0^+(F)$ tel que $|f| \leqslant R$.

(2.3.2) Définition. *Nous dirons qu'une fonction* $f \in \mathscr{C}_0(F \setminus \{\mathbb{1}\})$ *est* $\mathscr{P}_0^+(F)$ *- fortement dominée lorsqu'il existe* $R \in \mathscr{P}_0^+(F)$ *tel que* f *soit fortement dominée par* R, *c'est-à-dire que pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un compact de* $F \setminus \{\mathbb{1}\}$ *en dehors duquel on a* $|f| \leqslant \varepsilon R$.

On désignera par $\mathscr{O}_0(F \setminus \{\mathbb{1}\})$ l'espace des fonctions $\mathscr{P}_0^+(F)$-fortement dominées.

(2.3.3) Lemme. *Pour tout* $R \in \mathscr{P}_0^+(F)$ *et tout* X *-polynôme* Q *tel que* $Q(\mathbb{1}) = 0$, *le* X *-polynôme* $Q.R$ *est dans* $\mathscr{O}_0(F \setminus \{\mathbb{1}\})$.

Preuve. Puisque $\mathscr{P}$ est adapté dans $C(F)$, il existe un X-polynôme $R' \geqslant 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un compact K_ε de F, en dehors duquel on a $|QR| \leqslant \varepsilon R'$.

Soit donc $\varepsilon > 0$ et $K'_\varepsilon = \{\rho \in K_\varepsilon, |Q(\rho)| \geqslant \varepsilon\}$, K' est compact dans $F \setminus \{\mathbb{1}\}$ et pour $\rho \notin K'_\varepsilon$ on a $|Q.R| \leqslant \varepsilon(R+R')$, de sorte que Q.R est fortement dominé par R+R'.

(2.3.4) Proposition. *Toute forme linéaire positive* L_o *sur* $\mathscr{P}_o(F)$ *se prolonge en une forme linéaire positive* L *sur* $\mathscr{C}_o(F \setminus \{\mathbb{1}\})$.

Preuve. Il suffit d'introduire la fonctionnelle sous-linéaire p définie sur l'espace $\mathscr{C}_o^{\mathbb{R}}(F \setminus \{\mathbb{1}\})$, des fonctions réelles f, qui sont dans $\mathscr{C}_o(F \setminus \{\mathbb{1}\})$ par

$$p(f) = \operatorname{Inf}\{L_o(R),\ f \leqslant R,\ R \in \mathscr{P}_o^{\mathbb{R}}(F)\}$$

qui est telle que $p(R) = L_o(R)$, pour tout $R \in \mathscr{P}_o^{\mathbb{R}}(F)$, de sorte qu'avec le théorème de Hahn-Banach, il existe une forme linéaire L sur $\mathscr{C}_o^{\mathbb{R}}(F \setminus \{\mathbb{1}\})$, prolongeant L_o et telle que :

$$L(f) \leqslant P(f)$$

pour toute $f \in \mathscr{C}_o^{\mathbb{R}}(F \setminus \{\mathbb{1}\})$.

L est positive, puisque si $f \leqslant 0$, $L(f) \leqslant P(f) \leqslant 0$.

Pour $f = f_1 + if_2 \in \mathscr{C}_o(F \setminus \{\mathbb{1}\})$ avec $f_1, f_2 \in \mathscr{C}_o^{\mathbb{R}}(F \setminus \{\mathbb{1}\})$ on pose $L(f) = L(f_1) + iL(f_2)$. On voit donc que L est un prolongement positif de L .

Maintenant on va énoncer le résultat suivant, donnant une expression analytique des formes linéaires positives sur $\mathscr{C}_o(F \setminus \{\mathbb{1}\})$.

(2.3.5) Proposition. *Pour toute forme linéaire positive* L *sur* $\mathscr{C}_o(F \setminus \{\mathbb{1}\})$ *il existe une* F *-mesure de Lévy* λ *, telle que pour toute* f *appartenant à* $\mathscr{C}_o(F \setminus \{\mathbb{1}\})$ *on ait*

$$L(f) = \int f d\lambda$$

Preuve. Il est clair que l'espace $\mathscr{C}_o(F \setminus \{\mathbb{1}\})$, contient l'espace $\mathscr{P}_o(F)$ et l'espace $\mathscr{K}(F \setminus \{\mathbb{1}\})$ des fonctions continues et à support compact dans $F \setminus \{\mathbb{1}\}$, de sorte que la restriction de L à $\mathscr{K}(F \setminus \{\mathbb{1}\})$ définit déjà une mesure de

Radon positive λ sur $F \setminus \{1\!\!1\}$ telle que

$$L(f) = \int f d\lambda$$

pour toute $f \in \mathscr{K}(F \setminus \{1\!\!1\})$.

Considérons une fonction f dans $\mathscr{C}_0^+(F \setminus \{1\!\!1\})$, on a donc :

(1) $$\int f d\lambda = \sup_{\varphi \in \mathscr{K}^+(F \setminus \{1\!\!1\})} \int \varphi d\lambda \leqslant L(f)$$

donc f est λ-intégrable.

Si maintenant f est $\mathscr{P}_0^+(F)$-fortement dominée, alors il existe $R \in \mathscr{P}_0^+(F)$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K de $F \setminus \{1\!\!1\}$ en dehors duquel on a $|f| \leqslant \varepsilon R$. Soit φ une fonction continue et à support compact dans $F \setminus \{1\!\!1\}$ telle que $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$ et $\varphi = 1$ sur K, on a donc

$$f = f\varphi + (1-\varphi)f \leqslant f.\varphi + \varepsilon(1-\varphi)R \leqslant f\varphi + \varepsilon R$$

D'où

$$L(f) \leqslant \int f d\lambda + \varepsilon L(R)$$

de sorte qu'en faisant tendre ε vers zéro on obtient

$$L(f) \leqslant \int f d\lambda$$

ce qui achève la preuve.

Applications aux fonctions de type quasi-positif.

Dans cette partie, nous allons voir comment la proposition (2.3.5) s'utilise pour caractériser les fonctions de type quasi-positif qui possèdent une F-mesure de Lévy associée.

(2.3.6) Théorème. *Soit* F *un sous-*-semi-groupe de* S^* *satisfaisant à la condition (CA). Relativement à une fonction hermitienne* $\psi : S \to \mathbb{C}$, *les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) $R.\psi$ *est une* F*-fonction moment, pour tout* $R \in \mathscr{P}_o^+(F)$.

b) ψ *possède une* F*-mesure de Lévy associée.*

Preuve. (a) implique (b). Soit L_ψ la forme linéaire définie sur $\mathscr{P}_o(F)$, qui, à tout $R \in \mathscr{P}_o(F)$, associe le scalaire $L_\psi(R) = \langle R, \psi \rangle = (R.\psi)(0)$.

L_ψ est positive, puisque si $R \in \mathscr{P}_o^+(F)$, alors $L_\psi(R) = \mu_R(F)$ où μ_R est une mesure de Radon positive sur F telle que $\hat{\mu}_R = R.\psi$.

On est donc invité à appliquer la proposition (2.3.4) pour trouver une forme linéaire positive L sur $\mathscr{C}_o(F \setminus \{\mathbb{1}\})$, prolongeant L_ψ, et avec la proposition (2.3.5) il existe une F-mesure de Lévy λ sur $F \setminus \{\mathbb{1}\}$ telle que

$$\int f d\lambda = L(f)$$

pour toute $f \in \mathcal{O}_o(F \setminus \{\mathbb{1}\})$.

On va montrer que λ est une F-mesure de Lévy associée à ψ. Pour cela soit $s \in S$ et $R \in \mathscr{P}_o^+(F)$, on sait, d'après le lemme (2.3.5) que le χ-polynôme $(\chi_s-1)R$ est dans $\mathcal{O}_o(F \setminus \{\mathbb{1}\})$, de sorte que l'on a

$$\begin{aligned}\int (\chi_s-1)R d\lambda &= L((\chi_s-1).R) = L_o((\chi_s-1).R)\\ &= \langle (\chi_s-1).R, \psi \rangle\\ &= (R.\psi)(s) - \langle R, \psi \rangle\end{aligned}$$

On tire de là

$$R.\psi = C(R) + (R.\lambda)^\wedge$$

avec $C(R) = \langle R, \psi \rangle - \int R d\lambda = L(R) - \int R d\lambda \geq 0$ d'après (1). Ce qui montre que λ est une F-mesure de Lévy associée à ψ. La réciproque est évidente.

(2.3.7) Remarque. Avec le théorème précédent et la proposition (2.1.1), on voit que toute fonction ψ engendrant un semi-groupe de fonctions moments sur F est telle que $R.\psi$ soit une F-fonction moment pour tout $R \in \mathscr{P}_o^+(F)$ ce qui équivaut au fait que ψ possède une F-mesure de Lévy puisque F satisfait à la condition d'adaptation. Toutefois on peut poser le problème réciproque, c'est-à-dire partant d'une fonction ψ satisfaisant aux conditions du théorème (2.3.6) peut-on affirmer que ψ engendre un semi-groupe de fonctions moments (ou sous quelles conditions sur ψ on a cette propriété) sur F ? On verra plus tard que l'on peut répondre partiellement à cette question dans des cas intéressants.

(2.4) Sous-*-semi-groupes F satisfaisant à la condition de détermination.

On fixe le semi-groupe involutif $(S,+,*)$ et le sous-*-semi-groupe F de S^*. On dira que F satisfait à la condition de détermination (CD), lorsque toute F-fonction moment est déterminée, où l'on entend par là que deux mesures de Radon positives μ et ν sur F, admettant des moments de tous les ordres et telles que $\hat{\mu} = \hat{\nu}$, sont égales .

Pour des exemples illustrant cette situation, on peut prendre pour F tout sous-*-semi-groupe de S^*, lorsque S est parfait ([9], page 203). On peut aussi prendre pour F tout sous-*-semi-groupe de $\hat{S}$ avec S quelconque.

Condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction de type quasi-positif possède une F-mesure de Lévy associée.

Dans tout le reste de ce paragraphe, on suppose que le sous-*-semi-groupe F considéré satisfait à la condition de détermination.

Cela étant dit, le résultat suivant va nous donner une caractérisation des fonctions de type quasi-positif qui possèdent une F-mesure de Lévy associée, à savoir :

(2.4.1) Théorème. *Soit* F *un sous-*-semi-groupe satisfaisant à la condition de détermination et soit* $\psi : S \to \mathbb{C}$ *une fonction hermitienne. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) Pour tout $R \in \mathscr{P}_0^+(F)$ *la fonction* $R\psi$ *est une* F*-fonction moment.*

b) ψ *possède une* F*-mesure de Lévy associée* λ .

Preuve. On sait que b) $\Rightarrow$ a) d'après (1.2.1). Réciproquement supposons $R.\psi = \hat{\mu}_R$, pour tout $R \in \mathscr{P}_0^+(F)$, où μ_R est une mesure de Radon positive sur F. Pour $T \in \mathscr{P}_0^+(F)$ on a :

$$(R.T)\psi(s) = \langle R\chi_s, T\psi\rangle = \int \rho(s)R(\rho)d\mu_T(\rho)$$
$$= \langle T\chi_s, R\psi\rangle = \int \rho(s)T(\rho)d\mu_R(\rho)$$

de sorte que $(R.\mu_T)^\wedge = (T.\mu_R)^\wedge$, d'où l'on déduit, grâce à la condition de détermination sur F, l'égalité

$$R.\mu_T = T.\mu_R \,.$$

Or la famille des ouverts $U_R = \{\rho \in F,\ R(\rho) > 0\}$ est un recouvrement de l'espace complètement régulier $F \setminus \{1\!\!1\}$, car pour tout $\rho \neq 1\!\!1$, élément de F, il existe $s \in S$ tel $\rho(s) \neq 1$, ce qui implique $|\rho(s)-1|^2 > 0$ et ainsi $\rho \in U_R$ avec $R = |\chi_s - 1|^2$.

En posant $\tau_R = \frac{1}{R}\, \mu_R|_{U_R}$, on obtient une famille de mesures sur les U_R, qui sont telles que $\tau_R = \tau_T$ sur $U_R \cap U_T$, donc d'après le principe de recollement des mesures de Radon ([30], ([9], 21.18)), il existe une mesure de Radon positive λ sur l'espace complètement régulier $F \setminus \{1\!\!1\}$ telle que $\lambda_{|U_R} = \tau_R$. Il faut tirer de là que λ est une F-mesure de Lévy associée à ψ.

De l'égalité $\lambda_{|U_R} = \tau_R = \frac{1}{R}\, \mu_R|_{U_R}$ on déduit, en introduisant le fermé $F_R = F \setminus U_R$ de F et la mesure $\nu_R = \mu_R|_{F_R}$, l'égalité

$$\mu_R = R.\lambda + \nu_R$$

laquelle implique pour tout $T \in \mathscr{P}_o^+(F)$ l'égalité

$$R.\nu_T = T\nu_R$$

Maintenant, montrons que ν_R est concentrée au point $1\!\!1$.

Pour cela soit K un compact de $F_R \setminus \{1\!\!1\}$, de sorte qu'on a $R = 0$ sur K. Par un recouvrement fini avec les ouverts associés aux χ-polynômes $|\chi_s - 1|^2$, on voit qu'il existe $T \in \mathscr{P}_o^+(F)$ tel que $K \subseteq U_T$, de sorte que l'on a $T > 0$ sur K. Mais alors

$$\int_K T\, d\nu_R = \int_K R\, d\nu_T = 0$$

d'où l'on tire $\nu_R(K) = 0$. Ainsi $\nu_R = \nu_R(\{1\!\!1\})\,\delta_{1\!\!1}$ et $\nu_R\{1\!\!1\} = \mu_R\{1\!\!1\}$, d'où enfin l'égalité

$$\mu_R = R.\lambda + \mu_R(\{1\!\!1\})\,\delta_{1\!\!1}$$

qui prouve $\int R\,d\lambda < +\infty$, donc $\lambda \in \mathscr{L}_F$, et aussi

$$\hat{\mu}_R = (R.\lambda)^{\wedge} + C(R)$$

avec $C(R) = \mu_R(\{1\!\!1\}) \geqslant 0$, ce qui ramène à (1.2.1) et termine la démonstration.

(2.4.2) Remarques :

1) On a la conclusion du théorème (2.4.1) lorsque F est un sous-*-semi-groupe quelconque de S^*, avec S parfait, ou lorsque F est contenu dans $\hat{S}$ et S quelconque.

2) Lorsque $S = (G,+,*)$ est un groupe abélien topologique avec $* = -\mathrm{id}$, et F le groupe dual de G, formé des caractères continus pour la topologie de G, on voit donc, d'après [29], que F satisfait à la condition de détermination, de sorte que l'on a pour de tels F la conclusion du théorème (2.4.1).

En fait les théorèmes (2.3.6) et (2.4.1) préparent des énoncés plus développés où vont apparaître des décompositions de Lévy-Khintchine, sans même qu'on ait fait l'hypothèse d'existence d'une fonction de Lévy sur F.

(2.5) Décompositions du type de Lévy-Khintchine.

Dans ce paragraphe F étant supposé quelconque, on peut déjà remarquer, que si λ est une F-mesure de Lévy,(*) alors pour tout $R \in \mathscr{P}_o^+(F)$ et $Q \in \mathscr{P}$ tel que $Q(1\!\!1) = 0$ on a

$$(2)\qquad \begin{cases} \langle Q.R, \psi \rangle = \langle Q, R.\psi \rangle = \langle Q, (R.\lambda)^{\wedge} + C(R) \rangle \\ \qquad = \langle Q, (R.\lambda)^{\wedge} \rangle = \int QR\,d\lambda \end{cases}$$

et le même résultat reste valable en remplaçant R par un élément quelconque de $\mathscr{P}_o(F) = \mathscr{P}_o^+(F) - \mathscr{P}_o^+(F) + i(\mathscr{P}_o^+(F) - \mathscr{P}_o^+(F))$.

(*) associée à la fonction ψ

Lorsque $S = (\mathbb{N}^p \times \mathbb{N}^p, +, *)$, avec $(m,n)^* = (n,m)$, alors $S^* = \mathbb{C}^p$ et $\mathscr{P} = \mathbb{C}[Z,\bar{Z}]$ avec $Z = (Z_1,\ldots,Z_p)$, et on a le lemme suivant :

(2.5.1) Lemme. *Soit* $T \in \mathbb{C}[Z,\bar{Z}]$ *un polynôme vérifiant les conditions suivantes*

$$(3) \quad \begin{cases} T(\mathbb{1}) = 0 \\ \dfrac{\partial T}{\partial X_j}(\mathbb{1}) = \dfrac{\partial T}{\partial Y_j}(\mathbb{1}) = 0, \quad j = 1,\ldots,p \\ \dfrac{\partial^2 T}{\partial X_j \partial X_k}(\mathbb{1}) = \dfrac{\partial^2 T}{\partial X_j \partial Y_k}(\mathbb{1}) = \dfrac{\partial^2 T}{\partial Y_j Y_k}(\mathbb{1}) = 0, \; j,k = 1,\ldots,p \end{cases}$$

Alors T *se décompose sous la forme* $T = \Sigma R_i Q_i$ *avec* $R_i \in \mathscr{P}_o = \mathscr{P}_o(\mathbb{C}^p)$ *et* $Q_i(\mathbb{1}) = 0$.

Preuve. On écrit le développement de Taylor de T au point $\mathbb{1}$ qui ne fait apparaître que des termes de degré supérieur ou égal à 3, ayant chacun en facteur l'un des monômes suivants :

$$\begin{array}{c} (1-X_j)(1-X_k)(1-X_\ell) \\ (1-X_j)(1-X_k)\,Y_\ell \\ (1-X_j)\,Y_k\,Y_\ell \\ Y_j\,Y_k\,Y_\ell \end{array}$$

de sorte qu'avec l'égalité polynomiale

$$P_1 P_2 = \left(\frac{P_1 + P_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{P_1 - P_2}{2}\right)^2$$

on voit que ces monômes sont de la forme R.Q avec $R \in \mathscr{P}_o$ et $Q(\mathbb{1}) = 0$.

On tire de là des énoncés fondamentaux préparant la solution du problème des semi-groupes de moments sur F, sous la forme d'une représentation de Lévy-Khintchine.

Introduisons dans S le système $*$-générateur $B = (e_k)_{k \in I}$, donc tout $s \in S$ admet une représentation (non unique) sous la forme

$$s = \Sigma (m_k e_k + n_k e_k^*)$$

où $m = (m_k)$ et $n = (n_k)$ sont des éléments de la somme directe $\mathbb{N}^{(I)}$ de sorte que l'on peut supposer I fini chaque fois que n'interviendront qu'un nombre fini d'éléments s.

(2.5.2) Proposition. *Soient* F *un sous-*-semi-groupe de* S^* , $B = (e_k)_{k \in I}$ *un système *-générateur dans* S *et* $\psi : S \to \mathbb{C}$ *, une fonction hermitienne possédant une* F*-mesure de Lévy associée* λ *. Alors* ψ *admet une représentation du type de Lévy-Khintchine sous la forme*

(4)
$$\psi(s) = \psi(0) + q(s) + \sum_k (b_k m_k + \overline{b}_k n_k)$$
$$+ \int_{F \setminus \{\mathbb{1}\}} [\rho(s) - 1 - \sum_k [(m_k + n_k)(\mathrm{Re}\ \rho(e_k) - 1) + i(m_k - n_k)\mathrm{Im}\ \rho(e_k)]] d\lambda$$

pour $s = \Sigma(m_k e_k + n_k e_k^*)$

où les coefficients b_k *sont donnés par la formule*

(5)
$$b_k = < \psi, \Gamma_k - 1 + i\Delta_k + \frac{1}{2}(\Delta_k^2 - (\Gamma_k - 1)^2) - \frac{i}{2}\Delta_k(\Gamma_k - 1) >$$
$$- \frac{1}{2} \int_{F \setminus \{\mathbb{1}\}} [\Delta_k^2 - (\Gamma_k - 1)^2 - i\, \Delta_k(\Gamma_k - 1)] d\lambda$$

et où q *est une* F*-forme quadratique 2-homogène explicitée de façon indépendante de la décomposition non nécessairement unique de* s *, par trois matrices réelles* $M_1 = (\xi_{j,k})$, $M_2 = (\eta_{j,k})$ *et* $M_3 = (\zeta_{j,k})$ *avec*

(6)
$$\begin{cases} \xi_{j,k} = < \psi, (\Gamma_j - 1)(\Gamma_k - 1) > - \int_{F \setminus \{\mathbb{1}\}} (\Gamma_j - 1)(\Gamma_k - 1) d\lambda \\ \eta_{j,k} = < \psi, (\Gamma_j - 1)\Delta_k > - \int_{F \setminus \{\mathbb{1}\}} (\Gamma_j - 1)\Delta_k\, d\lambda \\ \zeta_{j,k} = < \psi, \Delta_j \Delta_k > - \int_{F \setminus \{\mathbb{1}\}} \Delta_j \Delta_k\, d\lambda \end{cases}$$

selon la formule

(7)
$$2q(s) = <M_1(m+n), m+n> + 2i <M_2(m+n), m-n> - <M_3(m-n), m-n>$$

De plus la matrice $M = \begin{bmatrix} M_1 & M_2^* \\ M_2 & M_3 \end{bmatrix}$ *est de type positif, et* q *est de type quasi-positif.*

Preuve. Fixons $s = \Sigma\,(m_k e_k + n_k e_k^*) \in S$ de sorte que $\rho(s) = Z^m\,\bar{Z}^n$ avec $Z = (Z_k)$, $Z_k = \rho(e_k)$, $Z \in \mathbb{C}^p$ où p est le nombre d'indices intervenant effectivement dans le développement (fini) de s. Posons alors $Q = Z^m\bar{Z}^n$ ce qui implique

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{ll} Q.\mathbb{1} & = 1,\ \dfrac{\partial Q}{\partial X_k}(\mathbb{1}) = m_k + n_k,\ \dfrac{\partial Q}{\partial Y_k}(\mathbb{1}) = i(m_k - n_k),\ k = 1,\ldots,p \\ \dfrac{\partial^2 Q}{\partial X_k^2}(\mathbb{1}) & = (m_k + n_k)^2 - (m_k + n_k), \quad k = 1,\ldots,p \\ \dfrac{\partial^2 Q}{\partial X_j\,\partial X_k}(\mathbb{1}) & = (m_j + n_j)(m_k + n_k), \quad j \neq k = 1,\ldots,p \\ \dfrac{\partial^2 Q}{\partial X_k\,\partial Y_k}(\mathbb{1}) & = i[(m_k + n_k)(m_k - n_k) - (m_k - n_k)] \\ \dfrac{\partial^2 Q}{\partial X_j\,\partial Y_k}(\mathbb{1}) & = i(m_j + n_j)(m_k - n_k), \quad j \neq k = 1,\ldots,p \\ \dfrac{\partial^2 Q}{\partial Y_k^2}(\mathbb{1}) & = -(m_k - n_k)^2 + m_k + n_k \quad k = 1,\ldots,p \\ \dfrac{\partial^2 Q}{\partial Y_j\,\partial Y_k}(\mathbb{1}) & = -(m_j - n_j)(m_k - n_k)\ ;\ j \neq k = 1,\ldots,p \end{array}\right.$$

Il en résulte que le polynôme $T \in \mathbb{C}[Z, Z]$,

$$T = Z^m\,\bar{Z}^n - 1 - \sum_{k=1}^{p}\ [(m_k + n_k)(X_k - 1 + \tfrac{1}{2}(Y_k^2 - (X_k-1)^2)) + i(m_k - n_k)(Y_k - (X_k-1)Y_k)]$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{j,k} [(m_j+n_j)(m_k+n_k)(X_j-1)(X_k-1) + 2i(m_j+n_j)(m_k-n_k)(X_j-1)Y_k - (m_j-n_j)(m_k-n_k)Y_jY_k]$$

vérifie les conditions (3) du lemme (2.5.1). Alors en remplaçant Z par $Z(\rho) = \rho(s)$, X_k devient $\Gamma_k(\rho)$, Y_k devient $\Delta_k(\rho)$ et T devient $\tilde{T}(\rho) = T(Z(\rho)) = T(\rho(s))$. D'après (2) et (3) on a donc

$$< \tilde{T}, \psi > \;=\; \int \tilde{T}\, d\lambda$$

où λ est une F-mesure de Lévy associée à ψ , qui existe d'après l'hypothèse faite sur ψ . En vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz on voit que chacun des χ-polynômes $(\Gamma_j-1)(\Gamma_k-1)$, $(\Gamma_j-1)\Delta_k$ et $\Delta_j \Delta_k$, est λ-intégrable. Il résulte de tout cela la décomposition

$$\psi(s) = \psi(0) + \frac{1}{2}\sum_{j,k}[(m_j+n_j)(m_k+n_k)\xi_{j,k} + 2i(m_j+n_j)(m_k-n_k)\eta_{j,k}$$

$$- (m_j-n_j)(m_k-n_k)\zeta_{j,k}]$$

$$+ \sum_{k=1}^{p}(m_k b_k + n_k \overline{b}_k) + \int_{F\setminus\{\mathbb{1}\}}[\chi_s-1 - \sum_{k=1}^{p}[(m_k+n_k)(\Gamma_k-1) + i(m_k-n_k)\Delta_k]]d\lambda$$

qui n'est autre que (4) avec les expressions (5) et (6) des b_k et des $\xi_{j,k}$, $\eta_{j,k}$ et $\zeta_{j,k}$.

Pour voir que q(s) ne dépend pas de s et que q est une F-forme quadratique, considérons $R \in \mathscr{P}_o^+(F)$, on voit à cause de l'additivité de l'expression $\Sigma(m_k b_k + n_k\overline{b}_k)$ que l'on a

$$(R.q)(s) - (R.q)(0) = \langle(\chi_s-1).R,\psi\rangle - \int(\chi_s-1)R\,d\lambda = 0$$

d'après (2), ce qui prouve que q est une F-forme quadratique.

Reste à montrer que $M = \begin{bmatrix} M_1 & M_2^* \\ M_2 & M_3 \end{bmatrix}$ est de type positif. Pour cela soit $U = (x_k)$ et $V = (y_k)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^{(I)}$ on a :

$$\langle M_1U,U\rangle + 2\langle M_2U,V\rangle + \langle M_3V,V\rangle$$

$$= \sum_{j,k}[x_jx_k\xi_{j,k} + x_jy_k\eta_{j,k} + y_jy_k\zeta_{j,k}]$$

$$= \langle T,\psi\rangle - \int T\,d\lambda, \text{ d'après l'expression (6)}$$

avec $T = (\Sigma[x_j(\Gamma_j-1) + y_j\Delta_j])^2$, qui est donc dans $\mathscr{P}_o^+(F)$, de sorte que l'on a $\langle T,\psi\rangle - \int T\,d\lambda = C(T) \geqslant 0$ car λ est une F-mesure de Lévy associée à ψ. Ceci termine la démonstration.

Notons à titre de remarque que si q(s) ne dépend pas de la décomposition de s, le terme $\Sigma\,(m_k b_k + n_k \bar{b}_k)$ en dépend. De sorte que la représentation du type de Lévy-Khintchine n'est une vraie représentation de Lévy-Khintchine que si $B = (e_k)$ est une base.

Comme première conséquence de la proposition (2.5.2) on a :

(2.5.3) Théorème. *Soit* F *un sous-*-semi-groupe de* S^* *, satisfaisant à la condition* ***d'adaptation*** *ou de* ***détermination,*** $B = (e_k)_{k \in I}$ *un système *-générateur dans* S *et* $\psi : S \to \mathbb{C}$ *, une fonction hermitienne. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) Pour tout χ *-polynôme* $R \in \mathscr{P}_o^+(F)$ *la fonction* $R.\psi$ *est une* F *-fonction moment.*

(ii) ψ *possède une* F *-mesure de Lévy associée* λ *, ainsi qu'une représentation du type de Lévy-Khintchine sous la forme*

$$\psi(s) = \psi(0) + \sum_k (m_k b_k + n_k \bar{b}_k) + q(s)$$

$$+ \int_{F \setminus \{\mathbb{1}\}} [\chi_s - 1 - \sum_k ((m_k + n_k)(\Gamma_k - 1) + i(m_k - n_k)\,\Delta_k)]\,d\lambda$$

$$\textit{pour } s = \Sigma\,(m_k e_k + n_k e_k^*) \in S$$

où les coefficients b_k *sont donnés par la formule (5) et* q *est une* F*-forme quadratique 2-homogène donnée par les formules (6) et (7) et telle que* $\langle R, q \rangle \geqslant 0$ *pour tout* $R \in \mathscr{P}_o^+(F)$.

Preuve. Elle résulte immédiatement des théorèmes (2.3.6) et (2.4.1), et de la proposition (2.5.2).

. <u>Cas des semi-groupes parfaits</u>. On rappelle qu'un semi-groupe involutif $(S,+,*)$ est dit parfait, lorsque toute fonction de type positif sur S est une fonction moment déterminée. Il suit de là que tout sous-*-semi-groupe de S^* satisfait à la condition de détermination, de sorte qu'avec le théorème (2.5.3) on a :

(2.5.4) Corollaire 1. *Soit* $(S,+,*)$ *un semi-groupe parfait,* $B = (e_k)_{k \in I_*}$ *un système *-générateur dans* S *et* F *un sous-*-semi-groupe de* S^* *. Alors relativement à une fonction* $\psi : S \to \mathbb{C}$ *, les assertions suivantes sont équi-*

valentes :

(i) $R.\psi$ *est une* F*-fonction moment pour tout* χ*-polynôme* $R \in \mathscr{P}_o^+(F)$.

(ii) ψ *possède une* F*-mesure de Lévy associée* λ*, ainsi qu'une représentation du type de Lévy-Khintchine sous la forme*

$$\psi(s) = \psi(0) + q(s) + \sum_k (m_k b_k + n_k \bar{b}_k)$$
$$+ \int_{F \setminus \{\mathbb{1}\}} [\chi_s - 1 - \sum_k [(m_k+n_k)(\Gamma_k - 1) + i(m_k - n_k)\Delta_k]] d\lambda$$
$$\textit{pour tout} \quad s = \sum_k (m_k e_k + n_k e_k^*)$$

où les coefficients b_k *sont donnés par la formule (5) et où* q *est une* F*-forme quadratique donnée par les formules (6) et (7) et telle que* $< R,q > \geqslant 0$ *, pour tout* $R \in \mathscr{P}_o^+(F)$.

En particulier lorsque $F = S^*$ *les conditions (i) et (ii) sont équivalentes à*

(iii) ψ *est de type quasi-positif.*

(2.6) Le problème des semi-groupes de moments pour $F \subset \hat{S}$.

On sait, par compacité de la fermeture $\overline{F}$ de F dans $\hat{S}$ et grâce au théorème de Stone-Weierstrass, que de tels sous-*-semi-groupes satisfont à la condition (CD) de sorte qu'avec le théorème (2.5.3) on a la résolution partielle du problème :

(2.6.1) Théorème. *Soit* $(S,+,*)$ *un *-semi-groupe,* F *un sous-*-semi-groupe de* $\hat{S}$*,* $B = (e_k)_{k \in I}$ *un *-système générateur dans* S*, et* $\psi : S \to \mathbb{C}$ *une fonction hermitienne. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) Pour chaque $R \in \mathscr{P}_o^+(F)$ *,* $R.\psi$ *est une* F*-fonction moment.*

b) La fonction ψ *admet une* F*-mesure de Lévy associée* λ *ainsi qu'une décomposition du type de Lévy-Khintchine*

$$\textbf{(9)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \psi(s) = {} & \psi(0) - q(s) - h(s) + i \sum_k (m_k - n_k) \operatorname{Im} \psi(e_k) \\ & + \int_{F \setminus \{\mathbb{1}\}} [\rho(s) - 1 - i \sum_k (m_k - n_k) \operatorname{Im} \rho(e_k)] d\lambda(\rho) \end{aligned} \right.$$
$$\textit{pour} \quad s = \sum (m_k e_k + n_k e_k^*)$$

La fonction q *est une* F*-forme quadratique de Maserick 2-homogène, donnée par la formule*

(10) $$q(s) = -\lim_{n\to\infty} \frac{\psi(ns)}{n^2} = -\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Re}\,\psi(ns)}{n^2}$$

et explicitée (de façon invariante) par la matrice hermitienne

(11) $$M_q = (\zeta_{j,k})\ j,k \in I$$
$$\zeta_{j,k} = \langle \Delta_j\ \Delta_k, \psi\rangle - \int \Delta_j\ \Delta_k d\lambda$$

selon la formule

(12) $$q(s) = \frac{1}{2}\sum \zeta_{j,k}(m_j - n_j)(m_k - n_k)$$

En plus la matrice M_q *est de type positif, ce qui implique* $q(s) \geqslant 0$, *pour tout* $s \in S$. *Enfin pour tout* $R \in \mathscr{P}_o^+(F)$ *on a* $\langle R,q\rangle \geqslant 0$.
La fonction h *est une* F*-forme réelle et additive donnée par la formule*

(13) $$h(s) = -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n}\psi(n(s+s^*))$$

et explicitée de façon invariante par le vecteur réel

(14) $$\begin{cases} b_h = (\beta_k) & k \in I \\ \beta_k = \langle 1 - \Gamma_k - \frac{1}{2}\Delta_k^2, \psi\rangle - \int (1 - \Gamma_k - \frac{1}{2}\Delta_k^2) d\lambda \end{cases}$$

selon

(15) $$h(s) = \sum_k (m_k + n_k)\beta_k$$

De plus on a $\beta_k \geqslant 0$, *pour tout* k , *donc* $h(s) \geqslant 0$ *pour tout* $s \in S$. *Enfin pour tout* $R \in \mathscr{P}_o^+(F)$ *on a* $\langle R,h\rangle \leqslant 0$.

Preuve. L'implication b) $\Rightarrow$ a) est évidente d'après le théorème (2.5.3). Prouvons donc a) $\Rightarrow$ b) et pour cela, remarquons avec (2.5.3) que ψ admet la représentation du type de Lévy-Khintchine sous la forme (4). Puisque F est contenu dans $\hat{S}$, les X-polynômes $1 - \Gamma_k$, $k \in I$ sont dans $\mathscr{P}_o^+(F)$ de sorte qu'avec les formules (6) et (2) on a $\xi_{j\,k} = \eta_{j,k} = 0$, $j,k \in I$, et $\zeta_{j,k} = < \Delta_j \Delta_k, \psi > - \int \Delta_j \Delta_k d\lambda$ c'est-à-dire (11) et de plus $M_q = (\zeta_{j,k})$ est de type positif, et permet de déterminer la F-forme quadratique 2-homogène $-q$ associée à ψ selon (12) à cause de la formule (7), qui est de Maserick comme on le voit avec $1 - \Gamma_s$, $s \in S$. Une constatation analogue sur les coefficients b_k, $k \in I$ donne $b_k = < 1 - \Gamma_k - \frac{1}{2}\Delta_k^2, \psi > + i < \Delta_k, \psi >$ $- \int (1 - \Gamma_k - \frac{1}{2}\Delta^2_k) d\lambda$, en posant $\beta_k = < 1 - \Gamma_k - \frac{1}{2}\Delta^2_k, \psi > - \int (1 - \Gamma_k - \frac{1}{2}\Delta^2_k) d\lambda$ on voit donc que l'on a la formule :

$$\psi(s) = \psi(0) - q(s) - \sum_k [(m_k + n_k)\beta_k + i(m_k - n_k) \mathrm{Im}\ \psi(e_k)]$$
$$+ \int_{F \setminus \{\mathbb{1}\}} [\rho(s) - 1 - i \sum (m_k - n_k) \mathrm{Im}\ \rho(e_k)] d\lambda(\rho)$$
$$\text{pour } s = \sum_k (m_k e_k + n_k e_k^*)$$

qui n'est autre que (9), puisque l'expression $h(s) = \sum_k (m_k + n_k)\beta_k$ est invariante, et les coefficients $\beta_k = \mu_{R_k}\{\mathbb{1}\} \geq 0$, avec $R_k = 1 - \Gamma_k - \frac{1}{2}\Delta^2_k$ qui est positif sur $\hat{S}$ donc sur F, et s'annule au point $\mathbb{1}$, et elle est additive de sorte qu'elle définit une F-forme car $R.h = < R,h >$, $R \in \mathscr{P}^+_o(F)$.

Démontrons maintenant la formule (10). Remarquons déjà que la fonction $\rho \to \rho(s) - 1 - i \sum (m_k - n_k) \mathrm{Im}\ \rho(e_k)$ est λ-intégrable, de sorte qu'en négligeant des termes en $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n^2}$ on a

$$\frac{\psi(ns)}{n^2} = - q(s) + \int_{F \setminus \{\mathbb{1}\}} \frac{\rho^n(s) - 1 - in\ \mathrm{Im}\ \rho(s)}{n^2} d\lambda(\rho) + 0(\frac{1}{n})$$

et (10) sera démontrée si l'on prouve que $\int g_n d\lambda \to 0$ quand n tend vers l'infini, avec

$$g_n(\rho) = \frac{1}{n^2} [\rho^n(s) - 1 - in\ \mathrm{Im}\ \rho(s)]$$

Pour cela on utilise le théorème de convergence dominée de Lebesgue. En effet introduisons la meilleure constante M_n telle que

$$|1 - Z^n + iny| \leq M_n(1-x), \text{ si } Z = x + iy$$

et $|Z| \leq 1$. Alors

$$1 - Z^{n+1} + i(n+1)y = 1+Z(1-Z^n+iny) - Z - inyZ + i(n+1)y$$
$$= Z(1-Z^n+iny) + 1-x + ny^2 + iny(1-x)$$

Sachant que $y^2 \leqslant 1-x^2 \leqslant 2(1-x)$ on obtient

$$|1-Z^{n+1} + i(n+1)y| \leqslant (1-x)[M_n+1+3n]$$

d'où l'on tire $M_{n+1} \leqslant M_n + 3n+1 < M_n + 3(n+1)$, ce qui, avec $M_1 = 1$, donne la majoration

$$M_n \leqslant \frac{3}{2} n(n+1)$$

On en déduit

$$|g_n(\rho)| \leqslant \frac{3}{2} \frac{n(n+1)}{n^2} (1-\Gamma_s(\rho)) \leqslant 3(1 - \Gamma_s(\rho))$$

ce qui donne la condition de convergence dominée puisque $\int (1 - \Gamma_s(\rho))d\lambda(\rho) < + \infty$. Ainsi la condition $g_n(\rho) \to 0$ sur $\hat{S} \setminus \{\mathbb{1}\}$, et a fortiori sur $F \setminus \{\mathbb{1}\}$, fournit le résultat. En passant à la partie réelle on remplace ψ par Re ψ d'où les deux égalités de (10) sachant que $q(s) \geqslant 0$.

Vérifions enfin la formule (13). Puisque $q(s+s^*) = 0$ on a, avec le fait que h est réelle et hermitienne,

$$\frac{\psi[n(s+s^*)]}{2n} = \frac{\psi(0)}{2n} - h(s) - \int_{F \setminus \{\mathbb{1}\}} \frac{1 - |\rho(s)|^{2n}}{2n} d\lambda(\rho)$$

Or pour $0 \leqslant r \leqslant 1$ on a, avec $r^2 = x^2 + y^2$

$$\frac{1 - r^{2n}}{2n} \leqslant \frac{1 - r^2}{2} \leqslant \frac{1 - x^2}{2} \leqslant 1-x$$

de sorte que la condition

$$\frac{1 - |\rho(s)|^{2n}}{2n} \leqslant 1 - \Gamma_s(\rho)$$

donne la convergence dominée. On a donc, quand $n \to + \infty$,

$$\frac{1}{2n}\,\psi(n(s+s^*)) \to -h(s)$$

ce qui fournit (13).

Il reste encore quelques points à vérifier. Fixons en effet $R = \Sigma\, a_s X_s$ et $R \in \mathscr{P}_o^+(F)$. On a alors avec (10) et (15) les égalités

$$\text{(16)} \quad \left\{ \begin{array}{l} <R, -q> \;=\; \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_s a_s \psi(ns) \\[2ex] <R, -h> \;=\; \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2n} \sum\limits_s a_s \psi(ns + ns^*) \end{array} \right.$$

Introduisons les polynômes

$$S_n = \frac{1}{n^2} \sum_s a_s X_{ns}, \quad T_n = \frac{1}{2n} \sum_s a_s \; X_{ns + ns^*}$$

de sorte que $S_n(\mathbb{1}) = T_n(\mathbb{1}) = R(\mathbb{1}) = 0$.

De plus pour $\rho \in F$ on a $\rho^n \in F$ et $|\rho^{2n}| \in F$ et $S_n(\rho) = \frac{1}{n^2} R(\rho^n)$, $T_n(\rho) = \frac{1}{2n} R(|\rho^{2n}|)$ ce qui démontre que l'on a $S_n \in \mathscr{P}_o^+(F)$ et $T_n \in \mathscr{P}_o^+(F)$. Alors avec les formules (16) on obtient

$$< R, -q > \;\geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad <R, -h> \;\geqslant 0$$

ce qui termine la preuve du théorème.

Le théorème (2.6.1) fournit des conditions nécessaires, d'après la proposition (2.1.1), pour que la fonction ψ engendre un semi-groupe de F-fonctions moments lorsqu'on suppose F fermé. Mais toutes ces conditions nécessaires ne sont pas encore suffisantes pour que le problème des semi-groupes de moments sur F soit considéré comme résolu. Revenons à ce problème, en utilisant les notations du théorème (2.6.1) et en rajoutant l'hypothèse que F est fermé.

Désignons pour simplifier par $\mathscr{M}_F$ le cône des fonctions moments sur F, et partons de l'hypothèse

$$\text{(17)} \qquad \exp(t\psi) \in \mathscr{M}_F, \quad \text{pour tout } t \geqslant 0.$$

Il existe donc une famille $\mu_t \in M^+(F)$ telle que

(18) $$\exp(t\psi) = \hat{\mu}_t, \quad t \geqslant 0$$

Pour n entier $\geqslant 1$ on a donc

$$\exp[\tfrac{t}{n^2}\psi(ns)] = \int \rho^n(s)d\mu_{\frac{t}{n^2}}(s)$$

de sorte que si l'on considère l'application $P_n : \rho \to \rho^n$ qui opère de F dans F, on voit en posant

$$\sigma_{t,n} = P_n(\mu_{\frac{t}{n^2}})$$

que $\hat{\sigma}_{t,n}(s) = \exp[\frac{t}{n^2}\psi(ns)]$. Ainsi en particulier $\hat{\sigma}_{t,n}(0) = \int d\sigma_{t,n} = \exp[\frac{t}{n^2}\psi(0)]$ et comme, d'après (10), on voit aussi que $\hat{\sigma}_{t,n}(s) \to \exp[-tq(s)]$ quand $n \to +\infty$, on obtient, par le raisonnement habituel de compacité, que les mesures $\sigma_{t,n}$ sur F ont une limite σ_t telle que

(19) $$\exp(-tq) = \hat{\sigma}_t$$

ce qui démontre déjà que $\exp(-tq) \in \mathscr{M}_F$. Mais $q(s+s^*) = 0$, puisque q est une forme quadratique 2-homogène de Maserick, d'où l'on déduit $q(s) = 0$ pour $s = s^*$ par 2-homogénéité. Alors

$$\exp[-tq(s)] = 1 = \int \rho(s)d\sigma_t(\rho)$$

et comme $\rho(s) \in [-1,1]$, pour $s = s^*$, on obtient $\rho(s) = 1$ σ_t-presque partout. La fonction $\chi_s : \rho \to \rho(s)$ étant continue, on en déduit supp $\sigma_t \subseteq \{\rho, \ \rho(s) = 1\}$, donc aussi supp $\sigma_t \subseteq F_1$ en introduisant le sous-groupe fermé F_1 de F défini par

$$F_1 = \{\rho \in F \ ; \ \rho(s) = 1 \quad \forall\, s = s^*\}$$

Ainsi σ_t est une mesure sur F_1, donc

(20) $$\exp(-tq) \in \mathscr{M}_{F_1}, \quad t \geqslant 0$$

A partir de la formule (13), on peut reprendre le même raisonnement et aboutir à la conclusion que la forme additive -h engendre elle aussi un semi-groupe de moments sur F. Mais $\exp(-th) \in \mathscr{M}_F$ s'écrit plus simplement

(21) $$\exp(-th) \in F, \qquad t \geqslant 0$$

Avant d'aller plus loin rassemblons ce qui a été obtenu :

(2.6.2) Proposition. *Soit* $(S,+,*)$ *un *-semi-groupe,* F *un sous *-semi-groupe fermé de* $\hat{S}$ *et soit* $\psi : S \to \mathbb{C}$ *une fonction hermitienne engendrant un semi-groupe* $\exp(t\psi)$, $t \geqslant 0$ *de fonctions moments sur* F. *Alors tous les résultats du théorème (2.6.1) s'appliquent à* ψ. *De plus la forme quadratique 2-homogène* q *et la forme additive* h *figurant dans la formule de Lévy-Khintchine (9) sont telles que*

(22) $$\begin{cases} \exp(-tq) \in \mathscr{M}_{F_1} & t \geqslant 0 \\ \exp(-th) \in F & t \geqslant 0 \end{cases}$$

où $F_1 = \{\rho \in F,\ \rho(s) = 1,\ \forall s = s^*\}$.

<u>Cas où l'on a</u> $\int |\rho(s)-1|\, d\lambda(\rho) < +\infty$. Ce cas particulier est intéressant car, d'une part, on peut résoudre complètement le problème des semi-groupes de moments sur F avec cette hypothèse supplémentaire, et d'autre part, il recouvre un certain nombre de cas déjà connus, tout en offrant une réelle généralisation. Examinons tout d'abord la signification exacte de l'hypothèse :

(2.6.3) Proposition. *Soit* $B = (e_k)$, $k \in I$ *un *-système générateur de* S. *Pour toute mesure de Lévy* λ *sur* $\hat{S} \setminus \{\mathbb{1}\}$ *les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) On a $\int |R|\, d\lambda < \infty$ *pour tout* X*-polynôme* R *tel que* $R(\mathbb{1}) = 0$.

b) On a $\int |\rho(s)-1|\, d\lambda(\rho) < +\infty$, *pour tout* $s \in S$

c) On a $\int |\Delta_s(\rho)|\, d\lambda(\rho) < +\infty$, *pour tout* $s \in S$

d) On a $\int |\Delta_k|\, d\lambda < \infty$, *pour tout* $k \in I$.

Preuve. On a a) $\Rightarrow$ b) et b) $\Leftrightarrow$ c) grâce aux inégalités

$$|y| \leqslant |Z-1| \leqslant 1-x + |y|$$

pour $Z = x + iy$ et $|Z| \leqslant 1$, sachant que $\int (1-\Gamma_s)\, d\lambda < \infty$.

(*) fermé

Puisque c) $\Rightarrow$ d), il reste à prouver d) $\Rightarrow$ a). Or si $R(\mathbb{1}) = 0$, on peut supposer que R provient d'un polynôme $T = \sum_{m,n} a_{m,n} Z^m \overline{Z}^n$ tel que $T(\mathbb{1}) = 0$. Mais alors T peut s'écrire $T = \sum_k [(1-X_k)A_k + Y_k B_k]$ avec A_k, $B_k \in \mathbb{C}[Z,\overline{Z}]$, d'où l'égalité $R = \sum_k [(1-\Gamma_k)\tilde{A}_k + \Delta_k \tilde{B}_k]$ qui fournit a).

On peut maintenant énoncer le résultat répondant à la réciproque partielle de (2.1.1) :

(2.6.4) Théorème. *Soit* F *un *-sous-semi-groupe fermé de* $\hat{S}$ *et soit* $\psi : S \to \mathbb{C}$ *une fonction hermitienne telle que* $R.\psi \in \mathcal{M}_F$ *pour tout* $R \in \mathcal{P}_o^+(F)$ *. On suppose de plus que la* F *-mesure de Lévy* λ *, associée à* ψ *, dont l'existence provient du théorème (2.6.1), vérifie les conditions (2.6.3). On a alors l'équivalence des assertions :*

a) La fonction ψ *engendre un semi-groupe de moments sur* F, *c'est-à-dire* $\exp[t\psi] \in \mathcal{M}_F$, *pour* $t \geqslant 0$.

b) La fonction ψ *admet une décomposition de Lévy-Khintchine*

(23) $$\psi(s) = \psi(0) - q(s) + \ell(s) + \int (\rho(s)-1)d\lambda(\rho)$$

où ℓ *est une* F*-forme additive et hermitienne telle que*

(24) $$\ell(s) = -h(s) + i\,k(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(\psi + q)(ns)$$

avec par conséquent

(25) $$k(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Im} \psi(ns)$$

la décomposition (23) étant telle que l'on ait les conditions

(26) $$\exp(-tq) \in \mathcal{M}_{F_1} \quad , \quad t \geqslant 0$$

(27) $$\exp(-t\,\ell) \in F \quad , \quad t \geqslant 0$$

Preuve. a) $\Rightarrow$ b) les conditions (2.6.3) montrent que la formule de Lévy-Khintchine (9) peut se mettre sous la forme (23) avec $\ell(s) = -h(s) + i\,k(s)$, où $k : S \to \mathbb{R}$ est une forme additive anti-hermitienne explicitée (de façon invariante) par

(28) $$\begin{cases} k(s) = \Sigma\ \gamma_j(m_j - n_j) \\ \gamma_j = < \Delta_j, \psi > - \int \Delta_j d\lambda \end{cases}$$

ce qui est en accord avec les définitions (11) et (14) des $\zeta_{j,k}$ définissant q et des β_k définissant h. Posons maintenant

$$\theta(s) = \int [\rho(s)-1] d\lambda(\rho)$$

On voit aisément par troncature que $\exp(t\theta) \in \mathscr{M}_F$ pour $t \geqslant 0$. Désignons en effet par $\mathscr{V}$ une base de voisinages, symétriques pour l'opérateur $\rho \to \bar{\rho}$, du point $\mathbb{1}$ dans $\hat{S}$ (ou dans F) et choisis ouverts. Alors la mesure $\lambda_V = \lambda_{|F \setminus V}$ est bornée, pour chaque $V \in \mathscr{V}$ de sorte que

$$\theta_V(s) = \int [\rho(s)-1] d\lambda_V(\rho)$$

est telle que $\theta_V = \hat{\lambda}_V - C_V$, avec $C_V = \int d\lambda_V$. Désignons maintenant par * le produit de convolution naturel sur $M^+(\hat{S})$, associé à la multiplication, et posons

$$E_t(\lambda_V) = \mathrm{Exp}^*(t\lambda_V) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (\lambda_V)^{*n}$$

$$= \delta_{\mathbb{1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (\lambda_V)^{*n}$$

On obtient

$$\exp(t\theta_V) = \exp(-tC_V)\hat{E}_t(\lambda_V) \in \mathscr{M}_F$$

et par passage à la limite en V, compte tenu que $\exp(-tC_V)E_t(\lambda_V)$ est une probabilité sur F, on obtient bien la condition $\exp(t\theta) \in \mathscr{M}_F$, ce qui prouve encore, par le raisonnement habituel de compacité, que l'on a

(29) $$\begin{cases} \exp(t\theta) = \hat{\nu}_t \\ \nu_t = \lim\limits_{V} \exp(-tC_V)E_t(\lambda_V) \in \mathrm{Prob}(F) \end{cases}$$

Par ailleurs la fonction θ vérifie la condition

(30) $$\lim_{n \to \infty} \frac{\theta(ns)}{n} = 0$$

car en effet,

$$\frac{\theta(ns)}{n} = \int \frac{\rho^n(s)-1}{n} \, d\lambda(\rho)$$

et il suffit d'appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue puisque $|Z^n-1| \leqslant n|Z-1|$, $|Z| \leqslant 1$. L'égalité (30) signifie donc

(31) $$\ell(s) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} (\psi + q)(ns)$$

d'où l'on déduit les deux égalités

(32) $$\begin{cases} -h(s) = \lim\limits_{n \to \infty} (\mathrm{Re}\, \psi + q)(ns) \\ k(s) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} \mathrm{Im}\, \psi(ns) \end{cases}$$

On remarque d'ailleurs que l'égalité $q(s+s^*) = 0$ redonne la valeur $-h(s)$ exprimée par (13), et que l'égalité fournissant $k(s)$ exprime une propriété de ψ, conséquence de l'hypothèse faite sur sa mesure de Lévy λ.

Il reste à prouver (27) puisque (26) a déjà été obtenue. Pour cela remarquons que $\exp(t\ell)$ est un caractère sur S, élément de S puisque son module est $\exp(-th)$ et que l'on a $h(s) \geqslant 0$ d'après le théorème (2.6.1). Par ailleurs l'égalité

$$\psi(s) - \psi(0) = -q(s) + \ell(s) + \theta(s)$$

fournit par passage aux exponentielles

(33) $$\exp(-t\,\psi(0))\mu_t = \sigma_t * \delta_{\exp(t\ell)} * \nu_t$$

où l'on rappelle que $\hat{\sigma}_t = \exp(-tq)$, avec $\sigma_t \in M^+(F_1)$ l'égalité (33) étant lue dans $M^+(\hat{S})$. Par ailleurs toutes les mesures étant à support compact, on tire de l'égalité classique $\mathrm{supp}\, \mu * \nu = \overline{\mathrm{supp}\, \mu \,.\, \mathrm{supp}\, \nu}$, ([9], 4.2.3), l'égalité

$$\text{(34)} \qquad \operatorname{supp} \sigma_t \, . \, \exp(t\ell).\operatorname{supp} \nu_t = \operatorname{supp} \mu_t \subset F$$

Mais supp $\sigma_t \subset F_1$, de sorte que tout $\rho \in \operatorname{supp} \sigma_t$ est tel que $|\rho| = 1$, donc par multiplication par $\overline{\rho}$, on obtient la condition

$$\text{(35)} \qquad \exp(t\ell) \, . \, \operatorname{supp} \nu_t \subset F$$

Mais on a aussi

$$\psi(s) + q(s) - \psi(0) = \ell(s) + \theta(s)$$

donc

$$\exp[t(\psi+q - \psi(0))] = \exp[t(\ell + \theta)] \in \mathcal{M}_F$$

puisque $\exp[t(\ell + \theta)] = (\delta_{\exp(t\ell)} * \nu_t)\hat{}$. On tire de là le résultat auxiliaire

$$\text{(36)} \qquad \exp[t(\psi+q)] \in \mathcal{M}_F$$

Si on pose encore

$$\text{(37)} \qquad \varphi(s) = \psi(s) + q(s) - \psi(0) = \ell(s) + \theta(s)$$

On voit donc que φ engendre un semi-groupe de moments sur F et ℓ s'obtient avec (31) selon

$$\ell(s) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \varphi(ns)$$

Le raisonnement fait plus haut pour obtenir (19) prouve alors de la même façon que le semi-caractère $\exp(t\,\ell)$ est élément de F, d'où la condition (27).

b) $\Rightarrow$ a) : La preuve est ici évidente car la formule de Lévy-Khintchine provient de la condition $R.\psi \in \mathcal{M}_F$ pour tout $R \in \mathcal{P}_o^+(F)$. Comme précédemment on voit, par troncature, que $\exp(t\,\theta) \in \mathcal{M}_F$. L'égalité

$$\exp(-t\psi(0))\exp(t\psi) = \exp(-tq) \,.\, \exp(t\ell) \,.\, \exp(t\theta)$$

fait donc apparaître $\exp(t\,\psi)$ comme produit de F-fonctions moments, d'où $\exp(t\psi) \in \mathscr{M}_F$, et le théorème est démontré.

En fait on se doute bien que les conditions (2.6.3) ne doivent pas être nécessaires pour impliquer le résultat. On le voit aisément lorsque ψ est réelle.

(2.6.5) Théorème. *Soit* F *un *-sous-semi-groupe fermé de* $\hat{S}$ *et soit* $\psi : S \to \mathbb{R}$ *une fonction hermitienne réelle telle que* $R.\psi \in \mathscr{M}_F$, *pour tout* $R \in \mathscr{P}_o^+(F)$. *Alors* ψ *admet la décomposition de Lévy-Khintchine*

(38)
$$\psi(s) = \psi(0) - q(s) - h(s) - \int [1 - \operatorname{Re} \rho(s)] d\lambda(\rho)$$

où q *et* h *sont les* F*-formes respectivement quadratique 2-homogène et additive introduites au théorème (2.6.1).*

Pour que ψ *engendre un semi-groupe de moments sur* F , *il faut et il suffit que les deux conditions supplémentaires soient vérifiées*

(39)
$$\exp(-tq) \in \mathscr{M}_{F_1}, \qquad t \geq 0$$

(40)
$$\exp(-th) \in F, \qquad t \geq 0$$

Preuve. L'égalité $\psi(s) = \overline{\psi(s)} = \psi(s^*)$ prouve que la mesure de Lévy λ associée à ψ , est invariante par la symétrie $\rho \to \overline{\rho}$. En désignant par $\overline{\lambda}$ la mesure symétrique de λ , image de λ par l'application $\rho \to \overline{\rho}$, on a donc $\lambda = \overline{\lambda}$. Maintenant la formule (38) provient de (9) par passage à la partie réelle, mais comme rien ne permet d'affirmer que λ vérifie les conditions (2.6.3) on ne peut appliquer le théorème (2.6.4). Procédons alors par troncature pour prouver que (38) et (39) impliquent $\exp(t\,\psi) \in \mathscr{M}_F$, puisque la réciproque est déjà acquise par (19) et (21). Il suffit d'ailleurs de prouver que la fonction

$$\theta(s) = \int [\mathrm{Re}\ \rho(s)-1]\,d\,\lambda(\rho)$$

est telle que $\exp(t\,\theta) \in \mathscr{M}_F$ et la difficulté vient du fait qu'on ne peut introduire $\int [\,\rho(s)-1]\,d\lambda(\rho)$ qui n'a pas de sens. Revenons donc au choix d'une base de voisinages de $\mathbb{1}$ dans $\hat{S}$, dénotée par $\mathscr{V}$, voisinages choisis symétriques et ouverts, et posons $\lambda_V = \lambda_{|F \setminus V}$ qui est une mesure bornée et symétrique. Introduisons la fonction

$$\theta_V(s) = \int [\rho(s)-1]\,d\lambda_V(\rho)$$

qui est telle que $\exp(t\theta_V) \in \mathscr{M}_F$ pour $t \geqslant 0$. Mais

$$\begin{aligned} \overline{\theta}_V &= \int [\overline{\rho}-1]\,d\lambda_V = \int [\rho-1]\,d\overline{\lambda_V} \\ &= \int [\rho-1]\,d\lambda_V = \theta_V \end{aligned}$$

de sorte que $\theta_V(s) = \int [\mathrm{Re}\ \rho(s)-1]\,d\lambda_V(\rho)$.

Mais alors $\lim\limits_{V} \theta_V(s) = \theta(s)$ et la condition $\exp(t\theta_V) \in \mathscr{M}_F$ donne $\exp(t\,\theta) \in \mathscr{M}_F$ par passage à la limite, ce qui termine tout.

(2.6.6) Remarque. Lorsque S est un semi-groupe réel, c'est-à-dire tel que $* = \mathrm{id}$, le théorème (2.6.4) et le théorème (2.6.5) redonnent tous les deux un résultat récent de BERG [5] . On a en effet dans ce cas

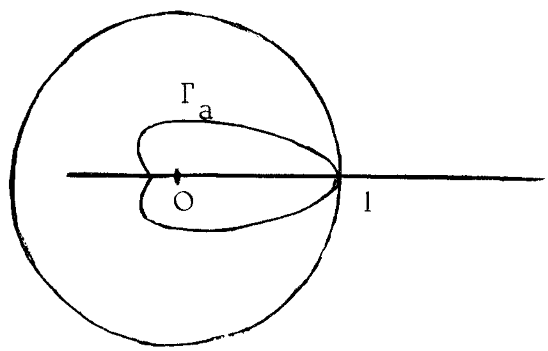
$$|\rho(s)-1| = 1 - \rho(s) = 1 - \Gamma_s(\rho)$$

donc les conditions (2.6.3) sont satisfaites, et bien entendu ψ est réelle. De plus dans ce cas $q = 0$, puisque dans le cas général on a $q(s) = 0$ lorsque $s = s^*$. La seule condition reste donc (40), qui est la condition donnée par Berg. Il est juste de dire que la première condition de ce type, résolvant un problème de semi-groupes de moments dans ce cas particulier a été obtenue par BUCHWALTER ([11] , th. 4).

(2.6.7) Remarque. Il peut arriver que les conditions (2.6.3) qui sont a priori des contraintes sur λ, soient automatiquement vérifiées pour certains choix de F. Comme exemple, considérons $S = (\mathbb{N} \times \mathbb{N},+,*)$ avec $(m,n)^* = (n,m)$, de sorte que $\hat{S} = D = \{z \in \mathbb{C},\ |z| \leqslant 1\}$. Pour tout $a > 0$, posons

$$F_a = \{z = \rho e^{i\theta},\ |\theta| \leqslant \pi\ ,\ \rho \leqslant e^{-a|\theta|}\}$$

Il est assez facile de vérifier que F_a est un *-sous-semi-groupe (multiplicatif) de D, délimité par sa frontière Γ_a qui est une courbe formée de deux arcs de spirale logarithmique.



Pour $F = F_a$, on a $F_1 = \{\mathbb{1}\}$, donc $q = 0$. Les tangentes au point $\mathbb{1}$ à Γ_a sont les droites $Y = \pm \frac{1}{a}(X-1)$, de sorte que les polynômes

$$R = (1-X) \pm aY$$

sont éléments de $\mathscr{P}_o^+(F)$. Ainsi $a|Y| \leqslant 1-X$ sur F. De plus S possède une base formée du seul élément $e = (1,0)$ et $X = \Gamma_e$, $Y = \Delta_e$, d'où l'on déduit que les conditions (2.6.3) sont satisfaites pour toute mesure de Lévy sur F.

Maintenant la forme additive $\ell(m,n) = -\beta(m+n) + i\gamma(m-n)$ doit être telle que $< R, \ell > \geqslant 0$, pour tout $R \in \mathscr{P}_o^+(F_a)$, ce qui implique facilement la condition $\beta \geqslant a|\gamma|$. Réciproquement cette condition implique $\exp(-th) \in F_a$ comme on voit d'abord pour les petites valeurs $t > 0$. Ainsi

(2.6.8) Proposition. *Pour qu'une fonction hermitienne* $\psi : S \to \mathbb{C}$ *soit telle que* $\exp(t\psi) \in \mathscr{M}_{F_a}$ *, pour tout* $t \geqslant 0$ *, il faut et il suffit qu'il existe* *une mesure de Lévy* λ *sur* F_a *et des constantes* $\beta \geq 0$, γ *réelle telle que* $a|\gamma| \leq \beta$, *permettant d'exprimer* ψ *selon*

$$\textbf{(41)} \qquad \psi(m,n) = \psi(0,0) - \beta(m+n) + i\gamma(m-n) + \int [Z^m \bar{Z}^{-n} - 1] d\lambda(Z)$$

(2.6.9) Remarque. Il peut aussi arriver que F soit tel que les conditions (2.6.3) soient toujours vérifiées et que l'on ait $q = 0$ et $h = 0$. Cela se produira lorsque $F_1 = \{\mathbb{1}\}$, ce qui entraîne $q = 0$. Pour garantir $\ell = 0$, introduisons le sous-semi-groupe réel de $\hat{S}$ défini par

$$\textbf{(42)} \qquad |F| = \{|\rho|, \ \rho \in F\}$$

et supposons $|F|$ dénombrable. Alors la condition $\exp(-th) \in |F|$ pour tout $t \geq 0$ implique nécessairement $h = 0$ par condition de dénombrabilité. On a alors

$$\psi(s) = \psi(0) + ik(s) + \int [\rho(s)-1] d\lambda(\rho)$$

et

$$\mathrm{Re}\ \psi(s) = \psi(0) - \int [1 - \mathrm{Re}\ \rho(s)] d\lambda(\rho)$$

de sorte que la fonction Re ψ est non seulement majorée mais aussi bornée. Comme exemple de tel F, considérons $S = (\mathbb{N},+,\mathrm{id})$, de sorte que $\hat{S} = [-1,1]$, et fixons, pour $0 < a < 1$

$$F = \{ 1, a, a^2, \ldots, a^p, \ldots, 0 \}$$

Alors ici on a même $\ell = 0$ puisque F est réel, et ψ est réelle et telle que $c - \psi \in \mathcal{M}_F$, pour une constante convenable c.

Avant d'aborder ce qu'on peut dire du cas général il est intéressant de revenir sur un point de détail. Dans le cours de la preuve du théorème (2.6.4), on a vu apparaître la condition (36) exprimant que la fonction $(\psi+q)$ engendre un semi-groupe de moments sur F. On peut se demander si ce résultat est véritablement lié aux contraintes (2.6.3) imposées à λ . La réponse est heureusement négative et fournit un résultat général.

(2.6.10) Proposition. *Soit* F *un *-sous-semi-groupe fermé dans* $\hat{S}$ *et* $\psi : S \to \mathbb{C}$ *une fonction hermitienne, engendrant un semi-groupe de moments sur* F. *Alors* ψ *admet la décomposition de Lévy-Khintchine (9) et la forme quadratique* q *est telle que*

(43) $$\exp(t(\psi+q)) \in \mathscr{M}_F.$$

Preuve. Posons $\psi = -q + \varphi$, d'où

(44) $$\exp(t\psi) = \exp(-tq).\exp(t\varphi)$$

et prouvons d'abord que $\exp(t\varphi) \in \mathscr{M}_{\hat{S}}$. Or cela est évident avec (9) et le lemme de Schoenberg, car (9) implique sans difficulté que φ est de type quasi-positif et telle que

(45) $$\operatorname{Re} \varphi(s) = \psi(0) - h(s) - \int [1-\operatorname{Re} \rho(s)]d\lambda(\rho) \leqslant \psi(0)$$

Il existe donc des mesures $\nu_t \in M^+(\hat{S})$ telles que

(46) $$\begin{cases} \exp(t\varphi) = \hat{\nu}_t \\ \mu_t = \sigma_t * \nu_t \end{cases}$$

avec $\hat{\mu}_t = \exp(t\psi)$ et $\hat{\sigma}_t = \exp(-tq)$. Mais $\mu_t \in M^+(F)$ tandis que $\sigma_t \in M^+(F_1)$, de sorte que la condition déjà exploitée

$$\operatorname{supp} \mu_t = \operatorname{supp} \sigma_t \,.\, \operatorname{supp} \nu_t$$

prouve l'inclusion supp $\nu_t \subseteq F$, donc $\nu_t \in M^+(F)$.

Or (44) s'écrit

$$\exp[t(\psi+q)] = \exp(t\varphi) = \hat{\nu}_t \in \mathscr{M}_F, \text{ d'où le résultat } (43).$$

L'intérêt de la proposition (2.6.10) réside dans le fait qu'en partant de l'hypothèse $\exp(t\psi) \in \mathscr{M}_F$ on peut se ramener, en remplaçant ψ par $\psi - \psi(0)+q$ à supposer $\psi(0) = 0$ et $q = 0$.

(2.7) Décomposition des semi-groupes de convolution.

Soit $F \in \mathcal{F}$ un sous-*-semi-groupe de S^*. On appelle semi-groupe de convolution sur F, toute famille $(\mu_t)_{t \geqslant o}$ de mesures de Radon positives et bornées sur F, telle que

(i) $\mu_o = \delta_{\mathbb{1}}$

(ii) Pour tous $s,t \geqslant 0$, on a $\mu_{s+t} = \mu_s * \mu_t$.

Si $\mathcal{H}$ est une partie de $M^+(F)$ telle que $\mu_t \in \mathcal{H}$ pour tout $t \geqslant 0$ et si τ est une topologie sur $\mathcal{H}$, on dira que le semi-groupe de convolution $(\mu_t)_{t \geqslant o}$ est τ-continu lorsque l'application $t \longmapsto \mu_t$ est continue sur $[0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathcal{H}$ munie de la topologie τ.

(2.7.1) Remarque. Si F est localement compact, τ_b la topologie faible sur le sous-ensemble $M_b^+(F)$ de $M^+(F)$, formé des mesures bornées, associée à l'espace $C^{\infty}(F)$ des fonctions continues et bornées sur F, et τ_v la topologie vague sur $M^+(F)$, alors une condition nécessaire et suffisante pour qu'un semi-groupe de convolution $(\mu_t)_{t \geqslant o}$ τ_v-continu sur F, soit τ_b-continu, est que l'on ait :

$$\lim_{t \downarrow 0} \int d\mu_t = 1,$$

Pour cela, voir par exemple ([9], (2.3.4) et (2.4.2)).

(2.7.2) Remarque. Soit $(\mu_t)_{t \geqslant o}$ un semi-groupe de convolution sur F satisfaisant à la condition

(47) $$\int |\chi_s| \, d\mu_t < \infty$$

pour tous $s \in S$ et $t \geqslant 0$, et soit τ_p la topologie faible, sur le sous-ensemble M_F de $M^+(F)$ formé des mesures ayant des moments de tous les ordres, associée à l'espace $\mathcal{P}$ des χ-polynômes ; si $(\mu_t)_{t \geqslant o}$ est τ_p-continu, alors il existe une unique fonction $\psi : S \to \mathbb{C}$, telle que

(48) $$\exp(t\psi) = \hat{\mu}_t$$

Cette fonction ψ , engendre alors un semi-groupe de fonctions moments sur F, mais ne permet pas en général de définir $(\mu_t)_{t \geqslant 0}$, sauf si F satisfait à la condition de détermination.

(2.7.3) Proposition. *Soit* F *un sous-*-semi-groupe de* S^* , *satisfaisant à la condition d'adaptation, et soit* $(\mu_t)_{t \geqslant 0}$ *un semi-groupe de convolution sur* F , *vaguement continu, vérifiant (47), et tel que*

(49) $$\sup_{t_0 \geqslant t \geqslant 0} \int_F T\,d\mu_t < \infty, \text{pour tout } t_0 > 0, \text{ et tout X-polynôme } T \geqslant 0 \text{ sur } F$$

Alors $(\mu_t)_{t \geqslant 0}$ *est* τ_p *- continu.*

Preuve. Soit $P \in \mathscr{P}$, comme $\mathscr{P}$ est adapté dans C(F), on peut trouver un X-polynôme $T > 0$ sur F tel que $P_{/T} \in C^{\circ}(F)$, et comme $t \longmapsto \mu_t$ est vaguement continue sur $[0,+\infty[$, la fonction $t \longmapsto T.\mu_t$ est aussi vaguement continue, de sorte qu'avec ([9], (2.4.4)) la fonction $t \to T.\mu_t$ est continue sur $[0,+\infty[$ à valeurs dans M_F muni de la topologie faible associée à l'espace $C^{\circ}(F)$. Il suit de là, que la fonction $t \longmapsto \int P\,d\mu_t$ est continue sur $[0,+\infty[$, ce qui achève la démonstration.

Par analogie avec les groupes [3] , [21], [31], nous dirons qu'un semi-groupe de convolution $(\mu_t)_{t \geqslant 0}$ τ_p-continu est gaussien, lorsque la fonction $q = \psi : S \to \mathbb{C}$ qui lui est associée par la relation (48) est une F-forme quadratique 2-homogène.

(2.7.4) Remarque.

1. Cas $S = (\mathbb{N}^p,+,id)$, $p \in \mathbb{N}^*$, on prend $F = \mathbb{R}^p$. Pour $t \geqslant 0$, soit μ_t la mesure image, de la mesure gaussienne γ_t dont la fonction caractéristique est $\exp(-\frac{t\|x\|^2}{2})$ par l'application H qui, à $u = (u_1,\dots,u_p) \in \mathbb{R}^p$ associe le vecteur $H(u) = (e^{u_1},\dots,e^{u_p}) \in \mathbb{R}^p$. On a donc, pour $n \in \mathbb{N}^p$

$$\exp(\frac{t}{2}\|n\|^2) = \int_{\mathbb{R}^p} \exp(<u,n>)d\gamma_t(u)$$
$$= \int_{\mathbb{R}^p} y^n d\mu_t(y)$$

On voit donc que $(\mu_t)_{t \geqslant 0}$ est un semi-groupe de convolution gaussien sur le semi-groupe multiplicatif $\mathbb{R}^p = S^*$, associé à la forme quadratique $q(n) = \frac{1}{2} \| n \|^2$, $n \in \mathbb{N}^p$.

2. Pour $S = (\mathbb{Z},+,-id)$, S^* est isomorphe et homéomorphe au tore $\mathbb{T}$. Soit τ_t la probabilité gaussienne sur $\mathbb{T}$ dont les coefficients de Fourier sont

$$\hat{\tau}_t(n) = \exp(-tn^2)$$

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{Z}$$

$(\tau_t)_{t \geqslant 0}$ est un semi-groupe de convolution gaussien sur $(\mathbb{T},.)$, dont la forme quadratique associée est $q'(n) = -n^2$.

(2.7.5) Remarque. Soit $F \in \mathscr{F}$ et F contenu dans $\hat{S}$. Si $(\mu_t)_{t \geqslant 0}$ est un semi-groupe de convolution gaussien sur F, alors toutes les mesures μ_t, $t \geqslant 0$, sont des probabilités portées par le sous-groupe $F_1 = \{\rho \in F, \rho(s) = 1 \;\; \forall s = s^*\}$ fermé dans F, et la F-forme quadratique $-q = \psi$ associée à $(\mu_t)_{t \geqslant 0}$ par la relation (48), est de Maserick et vérifie $q(s) \geqslant 0$, pour tout $s \in S$. Plus précisément, on a avec (2.6.1) :

(2.7.6) Proposition. *Soit* $F \in \mathscr{F}$ *et* F *contenu dans* $\hat{S}$, $(\mu_t)_{t \geqslant 0}$ *un semi-groupe de convolution sur* F, τ_p*-continu, et soit* $\psi : S \to \mathbb{C}$ *la fonction associée à* $(\mu_t)_{t \geqslant 0}$ *par la relation (48). Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $(\mu_t)_{t \geqslant 0}$ *est gaussien*

(ii) $\psi(ns) = n^2\psi(s)$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $s \in S$.

(2.7.7) Problème. Soit $F \in \mathscr{F}$, et soit $(\mu_t)_{t \geqslant 0}$ un semi-groupe de convolution sur F, τ-continu. Nous posons le problème de décomposition sous la forme suivante

(50) $$\mu_t = \delta_{k_t} * \sigma_t * \nu_t, \quad t \geqslant 0$$

avec $k_t \in F$, $(\sigma_t)_{t \geqslant 0}$ un semi-groupe de convolution gaussien τ-continu sur F, et $(\nu_t)_{t \geqslant 0}$ un semi-groupe de convolution τ-continu sur F vérifiant

(51) $$\liminf_{t \downarrow 0} \int_{F \setminus \{\mathbb{1}\}} |\chi_s - 1| \, d\frac{\nu_t}{t} < +\infty, \quad \forall s \in S$$

On verra dans ce qui suit que le semi-groupe de convolution $(\nu_t)_{t \geqslant 0}$ représente en quelque sorte une partie poissonnienne de $(\mu_t)_{t \geqslant 0}$.

Un problème du même genre que (2.7.7), mais ne faisant pas intervenir la condition (51), a été posé et résolu par C. BERG [1] et [2], relativement à un semi-groupe de convolution $(\mu_t)_{t \geqslant 0}$, symétrique, ou de type local (c'est-à-dire que la mesure de Lévy λ qui lui est associée est nulle), lorsque $F = G$ est un groupe abélien localement compact et τ est la topologie vague sur $M^+(G)$.

Nous allons donner maintenant une nouvelle interprétation du problème (2.7.7), en termes de fonctions de type quasi-positif, lorsque F satisfait aux deux conditions de détermination et d'adaptation et $(\mu_t)_{t \geqslant 0}$ est vaguement continu vérifiant (49).

(2.7.8) Lemme. *Soit* F *un sous-*-semi-groupe de* S^*, *satisfaisant aux deux conditions d'adaptation et de détermination, et soit* $(\nu_t)_{t \geqslant 0}$ *un semi-groupe de convolution vaguement continu sur* F, *vérifiant la condition (47).*

Alors la famille des mesures $\left(\frac{\nu_t}{t}\right)_{t \geqslant 0}$ *converge vaguement sur* $F \setminus \{\mathbb{1}\}$ *vers la* F*-mesure de Lévy associée à la fonction* $\psi : S \to \mathbb{C}$, *liée elle-même à* $(\nu_t)_{t \geqslant 0}$ *par la relation (48).*

Preuve. Pour tout $R \in \mathscr{P}_o^+(F)$ on a $\int R \, d\frac{\nu_t}{t} \xrightarrow{t \to o} \langle R, \psi \rangle$ donc la famille des mesures $R\frac{\nu_t}{t}$, $t \geqslant 0$, est étroitement, relativement compacte. Ainsi pour tout $R \in \mathscr{P}_o^+(F)$ toute valeur d'adhérence vague de $\left(R\frac{\nu_t}{t}\right)_{t \geqslant o}$ est aussi une valeur d'adhérence étroite et réciproquement. Soit ν_R une telle valeur d'adhérence, pour tout χ-polynôme T positif sur F la famille des mesures $TR\frac{\nu_t}{t}$, $t \geqslant 0$, admet comme valeur d'adhérence vague la mesure $T\nu_R$ donc aussi comme valeur d'adhérence étroite, car $TR \in \mathscr{P}^+_o(F)$.

Soit P un χ-polynôme positif sur F, puisque F satisfait à la condition d'adaptation, on peut donc trouver un χ-polynôme $T > 0$ sur F tel que $\frac{P}{T} \in C^o_+(F)$ donc la famille $\int \frac{P}{T} TR\, d\frac{\nu_t}{t}$, $t \geqslant 0$, admet la valeur d'adhérence $\int \frac{P}{T} T\, d\nu_R = \int P\, d\nu_R$ lorsque $t \to 0$. Mais

$\int \frac{P}{T} TR\, d\frac{\nu_t}{t} = \int PR\, d\frac{\nu_t}{t} \xrightarrow{t \to o} \langle PR, \psi \rangle$ et ainsi $\int P\, d\nu_R = \langle PR, \psi \rangle$ de sorte que ν_R est l'unique valeur d'adhérence vague de $(R\frac{\nu_t}{t})_{t \geqslant o}$ lorsque $t \to 0$, car F satisfait à la condition de détermination. Il suit de là que

$R\frac{\nu_t}{t} \xrightarrow{t \to o} \nu_R$ vaguement sur F.

Maintenant, soit $\varphi \in \mathscr{K}(F \setminus \{\mathbb{1}\})$ et soit $R \in \mathscr{P}^+_o(F)$ tel que le support de φ soit contenu dans l'ouvert $\mathcal{O}_R = \{\rho,\ R(\rho) \neq 0\}$ de F. Soit λ l'unique F-mesure de Lévy associée à ψ, on a donc $\lambda_{|\mathcal{O}_R} = \frac{1}{R}\, \nu_{R|\mathcal{O}_R}$ de sorte que

$$\int \varphi\, d\lambda = \int \frac{\varphi}{R}\, d\nu_R = \lim_{t \downarrow o} \int \frac{\varphi}{R}.R\, d\frac{\nu_t}{t}$$
$$= \lim_{t \downarrow o} \int \varphi\, d\frac{\nu_t}{t}$$

donc $(\frac{\nu_t}{t})_{|F \setminus \{\mathbb{1}\}} \xrightarrow{t \downarrow o} \lambda$ vaguement, ce qui termine la démonstration de (2.7.8).

(2.7.9) Définition. *Soit* $F \in \mathscr{F}$ *et* $(\nu_t)_{t \geqslant o}$ *un semi-groupe de convolution* τ_p*-continu sur* F *et possédant une* F*-mesure de Lévy associée* λ *, c'est-à-dire que, la fonction* $\psi : S \to \mathbb{C}$ *qui lui est associée par la relation (48) possède* λ *comme* F*-mesure de Lévy associée. On dira que* $(\nu_t)_{t \geqslant o}$ *est sans composante locale* [2] *, ou de type poissonnien, lorsque, pour tout* χ*-polynôme* R λ*-intégrable tel que* $R(\mathbb{1}) = 0$ *on a*

$$\langle R, \psi \rangle = \int R\, d\lambda$$

(2.7.10) Remarque. Soit $F \in \mathscr{F}$, et F localement compact satisfaisant à la condition de détermination, et soit λ une F-meusre de Lévy telle que $\int |\chi_s - 1| d\lambda < \infty$ pour tout $s \in S$, en utilisant un procédé de troncature on voit que la fonction $\psi_\lambda : s \longmapsto \int (\chi_s - 1) d\lambda$ engendre un semi-groupe de F-fonctions moments. Soit $(\nu_t)_{t \geqslant 0}$ le semi-groupe de convolution sur F tel que

$$\hat{\nu}_t = \exp(t\,\psi_\lambda)$$

pour tout $t \geqslant 0$, on voit donc que $(\nu_t)_{t \geqslant 0}$ est un semi-groupe de type poissonnien.

(2.7.11) Théorème. *Soit* $(S,+,*)$ *un $*$-semi-groupe abélien,* F *un sous - $*$ - semi-groupe de* S^*, *localement compact et satisfaisant à la condition de détermination, et soit* $(\mu_t)_{t \geqslant 0}$ *un semi-groupe de convolution* τ_p*-continu sur* F :

a) Si la fonction $\psi : S \to \mathbb{C}$, *associée à* $(\mu_t)_{t \geqslant 0}$ *par la relation (48) admet une décomposition sous la forme*

$$\psi(s) = \psi(0) + q(s) + h(s) + i\,\ell(s) + \int (\chi_s - 1) d\lambda \tag{52}$$

pour tout $s \in S$,

où q *est une* F*-forme quadratique 2-homogène engendrant un semi-groupe de fonctions moments sur* F, h *et* ℓ *sont des formes additives réelles respectivement hermitienne et anti-hermitienne telles que* $\exp[t(h+i\ell)] \in F$, *pour tout* $t \geqslant 0$, *et où* λ *est une* F*-mesure de Lévy telle que*

$$\int |\chi_s - 1| d\lambda < \infty$$

pour tout $s \in S$,

alors $(\mu_t)_{t \geqslant 0}$ *admet une décomposition unique sous la forme (50), avec* $k_t \in F$, $t \geqslant 0$, $(\sigma_t)_{t \geqslant 0}$ *gaussien et* $(\nu_t)_{t \geqslant 0}$ *de type poissonnien.*

b) Si F *satisfait aux deux conditions d'adaptation et de détermination, alors, relativement à un semi-groupe de convolution* $(\mu_t)_{t \geqslant 0}$, *vaguement* *continu et vérifiant (49), l'implication a) ci-dessus devient une équivalence.*

Preuve.

a) On suppose que la fonction ψ, associée à $(\mu_t)_{t \geq 0}$ par la relation (48), admet une représentation sous la forme (52). En utilisant un procédé de troncature, on voit que la fonction $s \longmapsto \int (\chi_s - 1) d\lambda$ engendre un semi-groupe de fonctions moments sur F, soit $(\nu_t)_{t \geq 0}$ le semi-groupe de convolution qui lui est associé par (48), nous allons prouver que l'on a

$$\limsup_{t \downarrow 0} \int |\chi_s - 1| \, d \frac{\nu_t}{t} < +\infty$$

Pour ce faire, soit K un compact de $F \setminus \{\mathbb{1}\}$ et soit $\nu_{t,K}$ l'unique mesure de Radon positive sur F telle que $\hat{\nu}_{t,K}(s) = \exp[t(\int_K (\chi_s - 1) d\lambda)]$, $s \in S$. On a donc :

$$\nu_{t,K} = \exp(-t\lambda(K)) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \lambda_K^{*n}$$

$$\text{où } \lambda_K = \lambda_{|K}$$

Mais, grâce à l'inégalité $|\rho\rho' - 1| \leq |\rho - 1||\rho' - 1| + |\rho - 1| + |\rho' - 1|$, et en utilisant un procédé de récurrence on a l'inégalité

$$|\rho_1 \ldots\ldots \rho_n - 1| \leq \sum_{1 \leq n_1 < \ldots < n_j \leq n} (|\rho_{n_1} - 1| \ldots |\rho_{n_j} - 1|)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tous $\rho_1, \ldots, \rho_n \in F$.

Il suit facilement de là que l'on a, pour tout $s \in S$,

$$\int |\rho(s) - 1| d\lambda_K^{*n}(\rho) = \int |\rho_1(s) \ldots \rho_n(s) - 1| d\lambda_K(\rho_1) \ldots d\lambda_K(\rho_n)$$

$$\leq \sum_{1 \leq n_1 < \ldots < n_j \leq n} \int |\rho_{n_1}(s) - 1| \ldots |\rho_{n_j}(s) - 1)| d\lambda_K(\rho_1) \ldots d\lambda_K(\rho_n)$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} C_n^j \left[\int |\rho(s) - 1| d\lambda_K(\rho) \right]^j (\lambda(K))^{n-j}$$

$$\leqslant [\int |\rho(s)-1|\, d\lambda_K(\rho) + \lambda(K)]^n - (\lambda(K))^n.$$

On tire de là

$$\int |\rho(s)-1|\, d\nu_{t,K}(\rho) = \exp(-t\lambda(K)) \sum_{n=o}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \int |\rho(s)-1|\, d\lambda_K^{*n}(\rho)$$

$$\leqslant \exp(-t\lambda(K)) \sum_{n=o}^{\infty} \frac{t^n}{n!} [(\int |\rho(s)-1|\, d\lambda_K(\rho) + \lambda(K))^n - (\lambda(K))^n]$$

$$\leqslant \exp(-t\lambda(K))[\exp(t(\int |\rho(s)-1|\, d\lambda_K(\rho) + \lambda(K))) - \exp(t\lambda(K))]$$

c'est-à-dire

$$\int |\rho(s)-1|\, d\nu_{t,K}(\rho) \leqslant \exp[t\int |\rho(s)-1|\, d\lambda_K(\rho)] - 1$$

ce qui donne, en faisant croître K vers $F \setminus \{\mathbb{1}\}$,

$$\int |\rho(s)-1|\, d\nu_t(\rho) \leqslant \exp[t\int |\rho(s)-1|\, d\lambda(\rho)] - 1$$

on en déduit que

$$\limsup_{t \downarrow o} \int |\rho(s)-1|\, d\frac{\nu_t}{t}(\rho) \leqslant \int |\rho(s)-1|\, d\lambda(\rho) < +\infty .$$

Pour terminer la preuve de a), il suffit de remarquer que l'on a, pour tout $t \geqslant 0$,

$$e^{-t\psi(o)} \cdot \mu_t = \delta_{\exp(tk)} * \sigma_t * \nu_t$$

où $(\sigma_t)_{t \geqslant o}$ est le semi-groupe de convolution associé par la relation (48), à la F-forme quadratique 2-homogène q.

b) On suppose que F satisfait aux deux conditions, de détermination et d'adaptation. Soit $(\mu_t)_{t \geqslant o}$ un semi-groupe de convolution sur F vaguement continu et vérifiant (49), on sait, d'après (2.7.3), que $(\mu_t)_{t \geqslant o}$ est τ_p-continu. Si $(\mu_t)_{t \geqslant o}$ admet une décomposition sous la forme (50) avec $(\nu_t)_{t \geqslant o}$ poissonnien vérifiant (51), alors, avec la relation $\hat{\mu}_t = k_t . \hat{\sigma}_t . \hat{\nu}_t$,

$t \geqslant 0$, on voit que, pour chaque $s \in S$, la fonction $t \longmapsto k_t(s)$ est continue et telle que, $k_{t+t'}(s) = k_t(s).k_{t'}(s)$, pour tous $t,t' \geqslant 0$. Il suit de là qu'il existe une application $k = h + i\ell : S \to \mathbb{C}$ additive et hermitienne, c'est-à-dire que h et ℓ sont respectivement hermitienne et anti-hermitienne, telle que $k_t(s)=\exp(tk(s))$, $s \in S$.

Soit λ la F-mesure de Lévy associée à $(\nu_t)_{t \geqslant o}$, montrons que l'on a

$$\int |\chi_s - 1| d\lambda < \infty,$$

pour tout $s \in S$.

Pour cela, soit $s \in S$ et $\varphi \in \mathscr{K}(F \setminus \{\mathbb{1}\})$ telle que $\varphi \leqslant |\chi_s - 1|$, on sait d'après le lemme (2.7.8) que λ est la limite vague de $\frac{\nu_t}{t}\Big|_{F \setminus \{\mathbb{1}\}}$, lorsque t tend vers 0 donc

$$\begin{aligned} \int \varphi \, d\lambda &= \lim_{t \to o} \int \varphi \, d\frac{\nu_t}{t} \\ &\leqslant \liminf_{t \downarrow o} \int |\chi_s - 1| d\frac{\nu_t}{t} < +\infty \end{aligned}$$

on en déduit que

$$\int |\chi_s - 1| d\lambda \leqslant \liminf_{t \downarrow o} \int |\chi_s - 1| \, d\frac{\nu_t}{t} < +\infty,$$

de sorte qu'avec la définition (2.7.9) la fonction $\psi' : S \to \mathbb{C}$ associée à $(\nu_t)_{t \geqslant o}$ par la relation (48), admet une décomposition sous la forme

$$\psi'(s) = \psi'(0) + \int (\chi_s - 1) d\lambda$$

pour tout $s \in S$,

finalement la fonction $\psi : S \to \mathbb{C}$ associée à $(\mu_t)_{t \geqslant o}$ par la relation (48) est donnée par

$$\psi(s) = q(s) + h(s) + i\ell(s) + \int (\rho(s) - 1) d\lambda(\rho), \; s \in S$$

où q est la F-forme quadratique 2-homogène associée à $(\sigma_t)_{t \geqslant o}$, ce qui termine la preuve de (2.7.11).

(2.7.12) Remarque.

1. La preuve du théorème précédent montre que, sous les conditions (2.7.9.b), on a

$$\lim_{t \downarrow o} \int_F |\chi_s - 1| \, d\frac{\nu_t}{t} = \int |\chi_s - 1| \, d\lambda$$

pour tout $s \in S$.

2. Si F est un sous-groupe localement compact de $\hat{S}$ satisfaisant aux conditions de (2.7.9.b), alors selon la remarque précédente, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un semi-groupe de convolution $(\mu_t)_{t \geq o}$ de sous-probabilités sur F, soit de type local , est que l'on ait

$$\lim_{t \downarrow o} \int |\chi_s - 1| \, d\frac{\mu_t}{t} = 0$$

pour tout $s \in S$.

*

CHAPITRE III

THEOREME DE STABILITE ET APPLICATIONS GENERALES

Soient S et T deux $*$-semi-groupes, nous notons sauf mention expresse du contraire, par le même symbole $*$, l'involution sur S et sur T et nous désignons par $\mathscr{M}(S)$ (respectivement $\mathscr{M}(T)$), le cône convexe des fonctions moments définies sur S (respectivement sur T). Nous supposons qu'il existe un $*$-morphisme surjectif $\Theta : S \to T$, c'est-à-dire une application Θ de S sur T telle que $\Theta(u+v) = \Theta(u) + \Theta(v)$, $u,v \in S$, $\Theta(u^*) = \Theta(u)^*$, $u \in S$, et $\Theta(0) = 0$.

On se pose la question de savoir si l'on peut caractériser les éléments de $\mathscr{M}(T)$ à partir d'éléments de $\mathscr{M}(S)$ et Θ. Nous répondrons positivement à cette question par un théorème que nous appelons de stabilité, disant qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $\varphi : T \to \mathbb{C}$ soit dans $\mathscr{M}(T)$ est que la fonction $\varphi \circ \Theta$ soit dans $\mathscr{M}(S)$. Nous verrons ensuite comment le théorème de stabilité s'adapte de façon très élégante à la résolution du problème des semi-groupes de moments pour des cas intéressants. Enfin nous abordons les applications générales, de la théorie faite et les résultats acquis au premier et second chapitre, sur les différentes notions de mesures de Lévy, de fonctions de Lévy et de formes quadratiques.

(3.1) Le théorème de stabilité.

Soit Θ un $*$-morphisme surjectif d'un $*$-semi-groupe S sur un $*$-semi-groupe T. Pour tout $\rho \in T^*$ on a $\rho \circ \Theta \in S^*$ et $\rho \circ \Theta(u) = \rho \circ \Theta(v)$ pour tous $u,v \in S$ tels que $\Theta(u) = \Theta(v)$. Inversement, soit $\rho' \in S^*$, tel que $\rho'(u) = \rho'(v)$ pour tous $u,v \in S$ tels que $\Theta(u) = \Theta(v)$, alors on peut définir un semi-caractère sur T par $\rho(t) = \rho'(u)$ si $t = \Theta(u)$ et on a $\rho' = \rho \circ \Theta$, ainsi

(3.1.1) Proposition. *Le dual* T^* *de* T *s'identifie au sous-*-semi-groupe de* S^* *formé des semi-caractères* $\rho' \in S^*$, *tels que* $\rho'(u) = \rho'(v)$, *pour tous* $u,v \in S$ *tels que* $\Theta(u) = \Theta(v)$, *selon la correspondance qui, à tout* $\rho \in T^*$, *associe le semi-caractère* $\widetilde{\Theta}(\rho) = \rho \circ \Theta \in S^*$.

(3.1.2) Théorème de stabilité. *Soit* $\Theta : S \to T$ *un *-morphisme d'un *-semi-groupe* S *sur un *-semi-groupe* T . *Alors une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction* $\varphi : T \to \mathbb{C}$, *soit élément de* $\mathcal{M}(T)$ *est que la fonction* $\varphi \circ \Theta$ *soit élément de* $\mathcal{M}(S)$.

Preuve. Si φ est une fonction moment sur T , alors on voit de façon évidente que la fonction $\varphi \circ \Theta$ est une fonction moment sur S, puisque les topologies sur T^* et S^* étant celles de la convergence simple, l'injection de T^* dans S^* est continue.

Réciproquement, supposons que $\varphi \circ \Theta$ est un élément de $\mathcal{M}(S)$ et prouvons que φ est un élément de $\mathcal{M}(T)$. Pour cela considérons une mesure de Radon positive μ_Θ sur l'espace complètement régulier S^*, telle que $\hat{\mu}_\Theta = \varphi \circ \Theta$ et prouvons que μ_Θ est portée $T^* \circ \Theta = \{\rho \circ \Theta, \ \rho \in T^*\}$.
En effet, soit K un compact de $S^* \setminus T^* \circ \Theta$, d'après (3.1.1), pour tout $\rho' \in K$, il existe $u,v \in S$ tels que $\Theta(u) = \Theta(v)$ et $\rho'(u) \neq \rho'(v)$, de sorte que les ouverts $\mathcal{O}_{u,v} = \{\rho' \in S^*, \ \rho'(u) \neq \rho'(v)\}$ recouvrent le compact K, il existe donc parmi ces ouverts un nombre fini $\mathcal{O}_{u_i,v_i}$, $i = 1,\ldots,n$, recouvrant K. Considérons maintenant la fonction $f(\rho') = \sum_{i=1}^{n} |\rho'(u_i) - \rho'(v_i)|^2$ définie sur S^* qui est strictement positive sur K. Mais

$$\int_K f(\rho')d\mu_\Theta(\rho') \leq \int_{S^*} f\,d\mu_\Theta = \sum_{i=1}^{n} \int_{S^*} |\rho'(u_i) - \rho'(v_i)|^2 d\mu_\Theta(\rho')$$

et pour chaque $i = 1,\ldots,n$ on a

$$\begin{aligned}\int_{S^*} |\rho'(u_i) - \rho'(v_i)|^2 d\mu_\Theta(\rho') &= \int [\rho'(u_i+u_i^*) - \rho'(u_i+v_i^*) - \rho'(u_i^* + v_i) + \rho'(u_i+v_i^*)]d\mu_\Theta(\rho') \\ &= \varphi \circ \Theta(u_i+u_i^*) - \varphi \circ \Theta(u_i+v_i^*) - \varphi \circ \Theta(u_i^*+v_i) + \varphi \circ \Theta(v_i+v_i^*) \\ &= 0,\end{aligned}$$

puisque $\Theta(u_i) = \Theta(v_i)$, $i = 1,\ldots,n$.

On tire de là

$$\int_K f \, d\mu_\Theta = 0$$

donc $\mu_\Theta(K) = 0$, ce qui prouve que μ_Θ est portée par $T^* \circ \Theta$ et que φ est une fonction moment sur T associée à la mesure $\mu = \tilde{\Theta}^{-1}(\mu_\Theta)$ image de μ_Θ par l'application $\tilde{\Theta}^{-1} : T^* \circ \Theta \to T^*$.

(3.1.3)Remarque. Lorsque $(S,+,*)$ est de type fini ayant un système $*$-générateur $G = \{e_1,\ldots,e_p\}$, le théorème (3.1.2) permet d'affirmer que l'on peut ramener l'étude du problème des moments sur S à celle sur le semi-groupe $\mathbb{N}^p \times \mathbb{N}^p$ muni de l'involution $(m,n)^* = (n,m)$.

Comme conséquence immédiate du théorème (3.1.2), considérons le cas où S est parfait, on a donc d'après (3.1.2) le résultat suivant, figurant dans ([9], 6.5.5) où il a été démontré en utilisant le fait que S est parfait.

(3.1.4) Corollaire. *Soient S et T deux $*$-semi-groupes et $\Theta : S \to T$ un $*$-morphisme surjectif. Si S est parfait, alors T est parfait.*

Applications générales.

(3.2) Cas des semi-groupes de type fini.

Soit $(S,+,*)$ un semi-groupe de type fini, admettant un système $*$-générateur $G = \{e_1,\ldots,e_p\}$, $p \in \mathbb{N}^*$, on prend pour F le semi-groupe S^* qui est donc métrisable, localement compact et dénombrable à l'infini, et tel que l'espace $\mathscr{P}$ soit adapté dans $C(S^*)$. ([9], p. 180-181)

Soit $\psi : S \to \mathbb{C}$ une fonction hermitienne possédant une S^*-mesure de Lévy λ. On sait, par le théorème (2.5.3), que ψ admet une représentation de Lévy-Khintchine sous la forme

$$\psi(s) = \psi(0) + q(s) + \sum_{k=1}^{p} (m_k b_k + n_k \overline{b_k})$$

$$+ \int_{S^* \setminus \{\mathbb{1}\}} [\rho(s) - 1 - \sum_k [(m_k+n_k)(\mathrm{Re}\, \rho(e_k)-1) + i(m_k-n_k)\mathrm{Im}\, \rho(e_k)]] d\lambda(\rho)$$

$$\text{pour } s = \sum_k (m_k e_k + n_k e_k^*)$$

où les coefficients b_k sont donnés par la formule (5) et q est donnée par les formules (6) et (7) de la proposition (2.5.2).

(3.2.1) Lemme. *La* S^* *-forme quadratique 2-homogène associée à* ψ *engendre un semi-groupe de fonctions moments sur* S .

Preuve. Introduisons la matrice réelle et symétrique

$$\Gamma = \begin{bmatrix} M_1 & M_2^* \\ M_2 & M_3 \end{bmatrix}$$

avec $M_1 = (\xi_{j,k})_{j,k=1,\dots,p}$, $M_2 = (\eta_{j,k})_{j,k=1,\dots,p}$ et $M_3 = (\zeta_{j,k})_{j,k=1,\dots,p}$ sont données par la formule (6), et M_2^* la matrice adjointe de M_2. Notons T la forme linéaire positive définie sur $\mathscr{C}_o(S^* \setminus \{\mathbb{1}\})$ par :

$$T(f) = L_\psi(f) - \int f d\lambda \quad , \quad f \in \mathscr{C}_o(S^* \setminus \{\mathbb{1}\})$$

où L_ψ est un prolongement positif de la forme linéaire $P \to \langle P, \psi \rangle$ définie sur $\mathscr{P}$.

Pour tout $u = (X,Y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$,

$$\begin{aligned} \langle \Gamma U,U \rangle &= \langle M_1 X,X \rangle + 2\langle M_2X,Y \rangle + \langle M_3Y,Y \rangle \\ &= \sum_{j,k} [\xi_{j,k}x_jx_k + 2\eta_{j,k}x_jy_k + \zeta_{j,k}y_jy_k] \\ &= \sum_{j,k} [x_jx_kT(\Gamma_j-1)(\Gamma_k-1)) + 2x_jy_kT((\Gamma_j-1)\Delta_k) + y_jy_kT(\Delta_j\Delta_k)] \\ &= T[(\sum_{j=1}^{p} (x_j(\Gamma_j-1) + y_j\Delta_j))^2] \geqslant 0. \end{aligned}$$

Si Q est la forme quadratique sur $\mathbb{R}^{2p}$ associée à Γ, et si $\gamma_Q = \gamma$ est la mesure gaussienne sur $\mathbb{R}^{2p}$, dont la fonction caractéristique est exp(-Q/2), on pose, $Q(X,Y) = Q(U)$ pour $U = (X,Y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$, on a donc

$$\exp[\tfrac{1}{2} Q(X,Y)] = \int_{\mathbb{R}^{2p}} e^{\langle X,u \rangle} e^{\langle Y,v \rangle} d\gamma(u,v)$$

et pour $m = (m_1,\dots,m_p)$, $n = (n_1,\dots,n_p) \in \mathbb{N}^p$, on a $q(s) = \frac{1}{2} Q(m+n,\ i(m-n))$, si $s = \sum_k (m_k e_k + n_k e_k^*)$ donc

$$\begin{aligned}\exp(tq(s)) &= \exp[\tfrac{t}{2} Q(m+n,\ i(m-n))] \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2p}} e^{<m,t(u+iv)>} e^{<n,t(u-iv)>} d\gamma(u,v) \\ &= \int_{\mathbb{C}^p} z^m \bar{z}^n \, d\mu_t(z)\end{aligned}$$

où μ_t est la mesure image de γ par l'application $g_t : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{C}^p$ qui, à tout (u,v), associe le vecteur $g_t(u,v) = (e^{t(u_1+iv_1)},\dots,e^{t(u_p+iv_p)})$, ce qui prouve que la suite $q_{m,n} = q(\sum_{k=1}^{p} (m_k e_k + n_k e_k^*))$ engendre un semi-groupe de moments sur $\mathbb{C}^p$.

Considérons maintenant l'application Θ, qui, à tout $(m,n) \in \mathbb{N}^p \times \mathbb{N}^p$, associe l'élément $s = \sum_k (m_k e_k + n_k e_k^*)$ de S et qui est donc surjective, de sorte qu'avec le théorème de stabilité la fonction q engendre un semi-groupe de fonctions moments sur S, ce qui termine la démonstration de (3.2.1).

Maintenant, posons

$$\begin{aligned}\psi_1(s) &= \psi(0) + \sum_k (b_k m_k + \bar{b}_k n_k) \\ &\quad + \int_{S^* \setminus \{\mathbb{1}\}} [\rho(s)-1 - \sum [(m_k+n_k)(\mathrm{Re}\, \rho(e_k)-1) + i(m_k-n_k)\mathrm{Im}\, \rho(e_k)]] d\lambda(\rho) \\ &= \psi(s) - q(s) \\ s &= \sum_k (m_k e_k + n_k e_k^*)\end{aligned}$$

On voit donc, en utilisant un procédé de troncature, que la suite double $r_{m,n} = \psi_1(\sum_k (m_k e_k + n_k e_k^*))$, $m = (m_1,\dots,m_p)$, $n = (n_1,\dots,n_p) \in \mathbb{N}^p$, engendre un semi-groupe de moments sur $\mathbb{C}^p$, de sorte qu'avec le théorème de stabilité ψ_1 engendre un semi-groupe de fonctions moments sur S. Ainsi $\psi = q + \psi_1$ engendre un semi-groupe de fonctions moments sur S. D'où :

(3.2.2) Théorème. *Soit* $(S,+,*)$ *un* $*$*-semi-groupe de type fini admettant un système* $*$*-générateur* $G = \{e_1,\dots,e_p\}$ *. Relativement à une fonction hermitienne* $\psi : S \to \mathbb{C}$ *les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) ψ *engendre un semi-groupe* $\exp(t\psi)$, $t \geq 0$ *de fonctions moments sur* S.

(ii) Pour tout χ *-polynôme* $R \geq 0$ *tel que* $R(\mathbb{1}) = 0$ *la fonction* $R.\psi$ *est une fonction moment sur* S *.*

(iii) ψ *possède une* S^* *-mesure de Lévy associée* λ *, ainsi qu'une représentation du type de Lévy-Khintchine sous la forme*

$$(1)\quad \psi(s) = \psi(0) + q(s) + \sum_{k=1}^{p} (m_k b_k + n_k \overline{b_k})$$

$$+ \int_{S^* \setminus \{\mathbb{1}\}} [\rho(s) - 1 - \Sigma\, [(m_k + n_k)(\operatorname{Re}\, \rho(e_k) - 1) + i(m_k - n_k) \operatorname{Im}\, \rho(e_k)]] d\lambda(\rho)$$

où q *est une* S^* *-forme quadratique sur* S *, 2-homogène, engendrant un semi-groupe de fonctions moments sur* S *donnée par les formules (6) et (7) de la proposition (2.5.2) et où les coefficients* b_k *sont donnés par la formule (5) de (2.5.2).*

Si $S = (G,+,id)$ est un groupe abélien, une fonction moment sur S est dite fonction moment bilatérale. Avec (3.3.2) nous allons donner une résolution, généralisant ([9], 6.4.8), du problème des semi-groupes de fonctions moments bilatères lorsque G est de type fini au sens du groupe. On verra que la forme quadratique q ne dépend pas des différentes représentations d'un élément $s \in G$.

(3.2.3) Corollaire. *Soit* $S = (G,+,id)$ *un groupe abélien muni de l'involution* $s^* = s$ *et admettant un système générateur* $\{e_1,\dots,e_p\}$ *au sens du groupe, et soit* $\psi : G \to \mathbb{R}$ *une fonction réelle définie sur* G*. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) ψ *engendre un semi-groupe de fonctions moments sur* $S = (G,+,id)$.

(ii) Pour tout $R \in \mathscr{P}_0^+(S^*)$ *, la fonction* $R.\psi$ *est une fonction moment sur* S*.*

(iii) ψ *possède une* S^* *-mesure de Lévy ainsi qu'une représentation du type de Lévy-Khintchine sous la forme*

$$\psi(s) = \psi(0) + q(s) + \sum_{k=1}^{p} m_k b_k + \int_{S^* \setminus \{\mathbb{1}\}} [\chi_s - 1 - \Sigma\, m_k (\chi_{e_k} - 1)] d\lambda$$

où q *est une* S^* *-forme quadratique engendrant un semi-groupe de fonctions moments sur* S , *donnée par la matrice réelle symétrique*

$$\xi_{j,k} = <(\chi_{e_j}-1)(\chi_{e_k}-1), \psi> - \int (\chi_{e_j}-1)(\chi_{e_k}-1)d\lambda$$

selon

$$q(s) = \frac{1}{2} \Sigma \xi_{j,k} m_j m_k , \quad si \quad s = \Sigma m_k e_k$$

et où les coefficients b_k *sont donnés par*

$$b_k = <\chi_{e_k}-1 + \frac{1}{2}(\chi_{e_k}-1)^2, \psi> - \frac{1}{2}\int (\chi_{e_k}-1)^2 d\lambda$$

Preuve. Remarquons déjà que le système $\{-e_1,\dots,-e_p, e_1,\dots,e_p\}$ engendre le semi-groupe réel (G,+,id) et que $S^* = (G,+,id)^*$ s'identifie à un sous-semi-groupe multiplicatif de $(\mathbb{R} \setminus \{0\})^p$ par la correspondance qui, à tout $\rho \in G^*$, associe l'élément $(\rho(e_1),\dots,\rho(e_p))$ de $(\mathbb{R} \setminus \{0\})^p$.

L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) résulte immédiatement du théorème (3.2.2). Il reste à prouver (ii) $\Rightarrow$ (iii) puisque l'implication (iii) $\Rightarrow$ (i) est évidente en utilisant un procédé de troncature.

Pour cela, déjà avec le théorème (3.2.2) ψ possède une représentation du type de Lévy-Khintchine sous la forme

$$\psi(s) = \psi(0) + q(s) + \sum_{0\neq k=-p}^{p} n_k b_k + \int_{S^*\setminus\{\mathbb{1}\}} [\chi_s - 1 - \sum_{0\neq k=-p}^{p} n_k(\chi_{e_k}-1)]d\lambda$$

si $s = \sum_{0\neq k=-p}^{p} n_k e_k$, avec $e_{-k} = -e_k$, $n_k \in \mathbb{N}$, $k = 1,\dots,p$.

1) On a $\sum_{0\neq k=-p}^{p} n_k b_k + \int [(\chi_s-1) - \sum_{0\neq k=-p}^{p} n_k(\chi_{e_k}-1)]d\lambda = \sum_{k=1}^{p} (n_k-n_{-k})b_k +$

$$\int [\chi_s - 1 - \sum_{k=1}^{p} (n_k-n_{-k})(\chi_{e_k}-1)]d\lambda , \quad \psi(0) = \psi(0)+b_k+b_{-k} + \int (\chi_{e_k} -1 + \chi_{-e_k} -1)d\lambda ,$$

d'où $b_k + b_{-k} + \int (\chi_{e_k} - 1 + \chi_{-e_k} - 1) d\lambda = 0$, $k = 1,\dots,p$, ce qui donne immédiatement le résultat.

2) On a $\xi_{jj} = \xi_{-j-j} = -\xi_{-jj}$, $j = 1,\dots,p$.

En effet, on a avec $q(e_j) = q(2e_j + e_{-j})$, l'égalité

$$\xi_{jj} = 4\xi_{jj} + 4\xi_{-jj} + \xi_{-j-j}$$

et avec $0 = q(e_j + e_{-j})$, on a l'égalité

$$0 = \xi_{jj} + 2\xi_{-jj} + \xi_{-j-j}$$

On tire de là $\xi_{jj} = \xi_{-j-j}$ et $\xi_{-jj} = -\xi_{jj}$, $j = 1,\dots,p$.

3) On a $\xi_{-jk} = -\xi_{jk}$, $j,k = 1,\dots,p$, car avec $q(e_j) = q(e_j + e_k + e_{-k})$, on a

$$\begin{aligned} \xi_{jj} &= \xi_{jj} + 2\xi_{jk} + 2\xi_{-jk} + 2\xi_{-kk} + \xi_{kk} + \xi_{-kk} \\ &= \xi_{jj} + 2\xi_{jk} + 2\xi_{-jk} \end{aligned}$$

donc $\xi_{-jk} = -\xi_{jk}$.

Avec les relations 2) à 3) on voit donc que si $s = \sum_{k=1}^{p} m_k e_k$, $m_k \in \mathbb{Z}$, $k = 1,\dots,p$ alors $q(s) = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{p} m_j m_k \xi_{jk}$ et avec la relation 1) on a

$$\psi(s) - \psi(0) - q(s) = \sum_{k=1}^{p} m_k b_k + \int [\chi_s - 1 - \sum_{k=1}^{p} m_k(\chi_{e_k} - 1)] d\lambda$$

d'où l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii). Pour prouver (ii) $\Rightarrow$ (i) on utilise un procédé de troncature pour montrer que la suite $\alpha_m = \psi(\sum_{k=1}^{p} m_k e_k)$, $m \in \mathbb{Z}^p$, engendre un semi-groupe de fonctions moments sur $\mathbb{Z}^p$, puis on applique le théorème de stabilité pour conclure.

Comme conséquence immédiate du corollaire (3.2.3) on a

(3.2.4) Corollaire. *Soit* $(\alpha_m)_{m \in \mathbb{Z}^p} = \alpha$ *une suite de nombres réels. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) α *engendre un semi-groupe de moments sur* $(\mathbb{R}\setminus\{0\})^p$.

(ii) Pour tout polynôme positif $R \in \mathbb{R}[X_1,\ldots,X_p]$ *tel que* $R(\mathbb{1}) = 0$ *et tout* $n \in \mathbb{N}^p$ *tel que* $|n|$ *soit pair, la suite* $(R.\beta)(m)$ *est une suite de moments sur* $(\mathbb{R}\setminus\{0\})^p$ *, où l'on a posé* $\beta_i = \alpha_{i-n}$ *,* $i \in \mathbb{Z}^p$.

(iii) Il existe un vecteur $(b_1, \ldots, b_p)$ *de* $\mathbb{R}^p$*, une matrice* $p \times p$ *réelle* $(\xi_{j,k})$ *symétrique et de type positif et une mesure* λ *de Radon* $(\mathbb{R}\setminus\{0\})^p$ *telle que*

$$\int_{(\mathbb{R}^p\setminus\{0\})^p} \frac{(1+r^2)^{\ell}[\Sigma(X_k-1)^2]}{r^{2\ell'}}\, d\lambda(X) < \infty \qquad \forall \ell,\ \ell' \in \mathbb{N}$$

où l'on a posé $X = (X_1,\ldots,X_p) \in (\mathbb{R}\setminus\{0\})^p$ *et* $r^2 = \sum_{i=1}^{p} X_i^2$ *, permettant d'exprimer* α *selon*

(2)
$$\alpha_m = \alpha_o + \sum_{k=1}^{p} m_k b_k + \frac{1}{2}\Sigma\gamma_{j,k}\, m_j m_k$$
$$+ \int_{(\mathbb{R}\setminus\{0\})^p} [X^m - 1 - \sum_{k=1}^{p} m_k(X_k-1)]\, d\lambda(X).$$

Preuve. Il suffit de remarquer que le cône convexe $\mathscr{P}_o^+(\mathbb{R}\setminus\{0\})^p$ est formé des fractions rationnelles de la forme $\frac{R}{X^m}$ avec $0 \leqslant R \in \mathbb{R}[X_1,\ldots,X_p]$ et $R(\mathbf{1}) = 0$, et $m \in \mathbb{N}^p$ tel que $|m|$ soit pair. Il suit facilement de là que les mesures de Lévy sur $(\mathbb{R}\setminus\{0\})^p$, peuvent être définies par la condition

$$\int_{(\mathbb{R}\setminus\{0\})^p} \frac{(1+r^2)^{\ell}[\sum_{k=1}^{p}(X_k-1)^2]}{r^{2\ell'}}\, d\lambda(X) < +\infty$$

pour tous $\ell, \ell' \in \mathbb{N}$.

(3.2.5) Remarque. La fonction L qui à tout élément (X,m) de $(\mathbb{R}\setminus\{0\})^p \times \mathbb{Z}^p$ associe le nombre réel, $L(X,m) = \sum_{k=1}^{p} m_k(X_k-1)$, est une fonction de Lévy sur le semi-groupe réel $\mathbb{Z}^p$. En effet il suffit de vérifier la condition (1.1.4.d). Pour cela soit $P \in \mathscr{P}_o^+((\mathbb{R}\setminus\{0\})^p)$, alors P peut s'écrire sous

sous la forme $P = \frac{R}{X^m}$ avec $R \geq 0$, $R \in \mathbb{R}[X_1,\dots,X_p]$ et $R(\mathbb{1}) = 0$, et $m \in \mathbb{N}^p$, avec $|m|$ pair. On a donc, pour $P = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^p} a_\ell X_\ell$ et $n \in \mathbb{Z}^p$,

$$\begin{aligned}(P.L(X,.))(n) = \Sigma a_\ell\, L(X,\ell+n) &= \Sigma a_\ell L(X,\ell) + \Sigma\, a_\ell L(X,n)\\ &= \Sigma\, a_\ell L(X,\ell)\\ &= \langle P,L(X,.)\rangle\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}P.L(X,.) = \frac{1}{X^m}.R.L(X,.) &= \frac{1}{X^m}\,.\,\langle R,L(X,.)\rangle\\ &= \langle R,L(X,.)\rangle = 0\end{aligned}$$

d'après b) de la preuve de (1.5.1), d'où (1.1.4.d).

(3.3) Cas où S^* satisfait à la condition d'adaptation.

Dans ce paragraphe, (S,+,*) est supposé quelconque, avec la condition que S^* satisfasse à la condition d'adaptation.

Pour tout sous-*-semi-groupe de type fini T de S, on note $\mathcal{P}_T$, l'espace somme directe $\mathbb{C}^{(T)}$. Il est clair que $\mathcal{P}_T$ est contenu dans $\mathcal{P}$ et que l'on a

$$\mathcal{P} = \bigcup_{T \text{ de type fini}} \mathcal{P}_T$$

de sorte qu'une forme linéaire L définie sur $\mathcal{P}$ est positive si et seulement, pour tout sous-*-semi-groupe de type fini T de S, la restriction L_T de L à $\mathcal{P}_T$ est positive. Ainsi on a

Théorème. *Soit* (S,+,*) *un *-semi-groupe tel que* S^* *satisfasse à la condition d'adaptation. Alors relativement à une fonction hermitienne* $\psi : S \to \mathbb{C}$ *, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) ψ *engendre un semi-groupe de fonctions moments sur* S .

(ii) Pour tout X *-polynôme positif* R *tel que* $R(\mathbb{1}) = 0$, $R.\psi$ *est une fonction moment sur* S.

(iii) Même énoncé qu'en (ii) de (2.5.3).

(3.4) Cas où $S = (Q_+^p,+,id)$, $p \in \mathbb{N}$.

On sait, par la monographie ([9], page 210), que le semi-groupe $(Q_+{}^p,+,id)$

est parfait et que son dual s'identifie à $[-\infty,+\infty[^p = (\underline{\mathbb{R}})^p$, selon la correspondance qui, à tout $x = (x_1,\dots,x_p) \in \underline{\mathbb{R}}^p$, associe le semi-caractère $\rho_x(r_1,\dots,r_p) = \exp[<r,x>]$ avec $<r,x> = r_1x_1 + \dots + r_px_p$ et $r = (r_1,\dots,r_p) \in Q_+{}^p$.

Pour $j = 1,\dots,p$, on pose $e_j = (0,\dots,\underset{j^e\text{place}}{1},0,\dots,0) \in Q_+{}^p$. On voit donc que l'ensemble $\{\frac{1}{n} e_j,\ j = 1,\dots,p,\ n \in \mathbb{N}^*\} = E$ engendre le semi-groupe réel $Q_+{}^p$.

En choisissant alors pour F le semi-groupe $(\underline{\mathbb{R}})^p$, on obtient le résultat suivant, généralisant la proposition (6.5.13) de [9] :

(3.4.1) Théorème. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $\psi : Q_+{}^p \to \mathbb{R}$ soit de type quasi-positif, est qu'elle admette la représentation de Lévy-Khintchine*

$$\psi(r) = \psi(0) + \sum_{j,k=1}^{p} r_jr_k\,\xi_{j,k} + \sum_{k=1}^{p} b_kr_k + \int_{(\underline{\mathbb{R}})^p\setminus\{0\}} [\exp(<r,x>)-1 - \sum_{k=1}^{p} r_k(e^{x_k} - 1)]d\lambda(x) \tag{3}$$

où la matrice $(\xi_{j,k})_{j,k=1,\dots,p}$ *est réelle symétrique de type positif, les coefficients* b_k, $k = 1,\dots,p$ *sont des nombres réels et* λ *est une mesure de Lévy sur* $(\underline{\mathbb{R}})^p\setminus\{0\}$ *, tous déterminés de façon unique.*

Preuve. La condition est évidemment suffisante, il suffit donc de voir qu'elle est nécessaire, pour cela, déjà, si ψ est de type quasi-positif, elle engendre un semi-groupe de fonctions-moments sur $Q_+{}^p$, de sorte qu'avec le théorème (2.5.3), elle admet une décomposition de Lévy-Khintchine sous la forme

$$\psi(r) = \psi(0) + q(r) + \sum_{j=1}^{p} m_j\, b(\frac{1}{n_j} e_j) + \int_{(\underline{\mathbb{R}})^p\setminus\{0\}} [\exp(<r,x>)-1 - \sum_{j=1}^{p} m_j(\exp(\frac{x_j}{n_j})-1)]d\lambda(x)$$

pour $r = (r_1,\dots,r_p) = (\frac{m_1}{n_1},\dots,\frac{m_p}{n_p}) \in (Q_+)^p$, $m_j \in \mathbb{N}$, $n_j \in \mathbb{N})$ avec pour q la forme quadratique 2-homogène associée à ψ, pour $b(\frac{1}{n_j}e_j)$ les coefficients réels, indexés par le système générateur $\{\frac{e_j}{n}, j = 1,\dots,p, n \in \mathbb{N}\}$ et associés à ψ dans le théorème (2.5.3) et pour λ la mesure de Lévy associée à ψ dans le théorème (2.5.3).

Mais, on sait que le polynôme $X^{n_j} - 1 - n_j(X-1) \in \mathbb{R}[X]$ admet $(X-1)^2$ comme facteur, donc par substitution de X par $\exp(\frac{x_j}{n_j})$, on voit que le χ-polynôme $e^{x_j}-1-n_j(\exp(\frac{x_j}{n_j})-1)$ agissant sur $(\mathbb{R})^p$ est dans $\mathscr{P}_o(\mathbb{R})^p$, donc λ-intégrable, et il suit de là que le χ-polynôme

$$\exp(<r,x>) - 1 - \sum_{j=1}^{p} m_j(\exp(\frac{x_j}{n_j})-1) - \sum_{j=1}^{p} \frac{m_j}{n_j} (\exp(x_j)-1-n_j(\exp(\frac{x_j}{n_j})-1))$$

$$= \exp(<r,x>)-1 - \sum_{j=1}^{p} r_j(\exp(x_j)-1)$$

est λ-intégrable.

On peut donc écrire ψ sous la forme

$$\psi(r) = \psi(0) + q(r) + \sum_{j=1}^{p} r_j b_j$$

$$+ \int_{(\mathbb{R})^p\setminus\{0\}} [\exp(<r,x>)-1 - \sum_{j=1}^{p} r_j(e^{x_j}-1)]d\lambda(x)$$

avec $b_j \in \mathbb{R}$.

En revenant à la proposition (2.5.2), on voit que la forme quadratique q, 2-homogène est déterminée par la matrice réelle symétrique de type positif

$$M_1 = (\xi_{\frac{e_j}{n_j}, \frac{e_k}{n_k}})_{n_k, n_j \in \mathbb{N}^*} \quad j = 1,\dots,p$$

selon

$$q(r) = \frac{1}{2} \Sigma\, m_j m_k\, \xi_{\frac{e_j}{n_j}, \frac{e_k}{n_k}} \quad , \text{ pour tout } r = (r_1,\dots,r_p) \in Q^p,$$

avec $r_i = \frac{m_i}{n_i}$, $i = 1,\dots,p$, où les coefficients $\xi_{\frac{e_j}{n_j}, \frac{e_k}{n_k}}$ indexés par le système générateur $\{\frac{e_j}{n}\ ,\ j = 1,\dots,p,\ n \in \mathbb{N}\}$, sont donnés par la formule (6) de la proposition (2.5.2).

Or on a

$$q(\frac{e_j}{n_j} + \frac{e_k}{n_k}) = \frac{1}{(n_j\ n_k)^2}\ q(n_k e_j + n_j e_k)$$

$$= \frac{1}{(n_j)^2}\ \xi_{e_j,e_j} + \frac{2}{n_j\ n_k}\ \xi_{e_j,e_k} + \frac{1}{(n_k)^2}\ \xi_{e_k,e_k}$$

et

$$q(\frac{e_j}{n_j} + \frac{e_k}{n_k}) = \xi_{\frac{e_j}{n_j},\frac{e_j}{n_j}} + 2\ \xi_{\frac{e_j}{n_j},\frac{e_k}{n_k}} + \xi_{\frac{e_k}{n_k},\frac{e_k}{n_k}}$$

$$= \frac{1}{(n_j)^2}\ \xi_{e_j,e_j} + 2\ \xi_{\frac{e_j}{n_j},\frac{e_k}{n_k}} + \frac{1}{(n_k)^2}\ \xi_{e_k,e_k}$$

d'où

$$\xi_{\frac{e_j}{n_j},\frac{e_k}{n_k}} = \frac{1}{n_j\ n_k}\ \xi_{e_j,e_k}$$

et q s'écrit alors

$$q(r) = \frac{1}{2}\sum_{j,k} \frac{m_j}{n_j}\frac{m_k}{n_k}\ \xi_{e_j,e_k}\ ,$$

ce qui termine la preuve du théorème (3.4.1).

Comme conséquence de ce théorème, on peut énoncer le théorème suivant, dû à Berg [4] qui l'a prouvé en utilisant les fonctions d'une variable complexe.

(3.4.2) Théorème [4]. *Relativement à une fonction* $\psi : \mathbb{R}_+^p \to \mathbb{R}$ *, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) ψ *est de type quasi-positif et continue.*

(ii) Pour tout $R \in \mathscr{P}_0^+(\mathbb{R}^p)$ *la fonction* $R.\psi$ *est une fonction moment continue sur le semi-groupe réel* $\mathbb{R}_+^p$*.*

(iii) ψ *possède une mesure de Lévy associée* λ *, portée par* $\mathbb{R}^p\setminus\{0\}$*, ainsi qu'une représentation de Lévy-Khintchine*

$$\psi(x) = \psi(0) + \langle x,b \rangle + \Sigma\, x_j x_k\, \xi_{j,k}$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^p \setminus \{0\}} [\exp(\langle x,y \rangle)-1 - \frac{\langle x,y \rangle}{1+\|y\|^2}]d\lambda(y)$$

où b *est un vecteur de* $\mathbb{R}^p$, *et où* $(\xi_{j,k})$ *est une matrice réelle symétrique de type positif.*

De plus le triplet $(b, (\xi_{j,k}), \lambda)$ *est déterminé de façon unique.*

Preuve. Il suffit de prouver l'implication (i) $\Rightarrow$ (iii) car on peut voir le reste facilement. Supposons donc que ψ est de type quasi-positif et continue,alors la restriction de ψ à ${Q_+}^p$ est de type quasi-positif et engendre un semi-groupe de fonctions moments $\exp(t\psi)$, $t \geqslant 0$ sur ${Q_+}^p$, il existe donc, pour tout $t \geqslant 0$, une mesure de Radon positive μ_t sur $(\underline{\mathbb{R}})^p$ telle que

$$\exp(t\psi(r)) = \int_{(\underline{\mathbb{R}})^p} \exp\langle r,y \rangle d\mu_t(y), \quad r \in {Q_+}^p$$

et comme $\exp(t\psi)$ est continue on voit donc d'après ([9], 6.5.8) ou Devinatz [20] que μ_t est portée par $\mathbb{R}^p$ et on a ainsi $\exp(t\psi(x)) = \int_{\mathbb{R}^p} \exp\langle r,y\rangle d\mu_t(y)$, $x \in \mathbb{R}_+$. Mais, $\mathbb{R}^p$ considéré comme sous-semi-groupe de $(\underline{\mathbb{R}})^p$ satisfait à la condition de détermination de sorte qu'avec (3.4.1) ψ admet une représentation de Lévy-Khintchine sous la forme

$$\psi(r) = \psi(0) + \langle r,b \rangle + \sum_{j,k=1}^{p} \xi_{j,k}\, r_j r_k$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^p \setminus \{0\}} [\exp(\langle r,y \rangle)-1 - \sum_{k=1}^{p} r_k(e^{y_k} - 1)]d\lambda(y)$$

$$\text{pour tout } r \in (Q_+)^p,$$

où le triplet $(b, (\xi_{j,k}), \lambda)$ est déterminé avec le théorème (3.4.1).

On tire de là, par continuité de ψ, que pour tout $x \in {\mathbb{R}_+}^p$, on a

$$\psi(x) = \psi(0) + \langle x,b \rangle + \sum_{j,k=1}^{p} \xi_{j,k}\, x_j x_k$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^p \setminus \{0\}} [\exp(\langle x,y \rangle)-1 - \sum_{k=1}^{p} x_k(e^{y_k} - 1)]d\lambda(y)$$

Pour terminer la démonstration, il suffit de remarquer qu'au voisinage des points 0 et ∞ les expressions

$$y \longmapsto \exp(< x,y >)-1 - \sum_{k=1}^{p} x_k(e^{y_k} - 1) \quad \text{et} \quad y \longmapsto \exp <x,y> -1 - \frac{< x,y >}{1+\|y\|^2}$$

sont équivalentes pour tout x fixe dans $\mathbb{R}_+^p$.

Cas où $S = (Q^p,+,id)$.

En utilisant les mêmes arguments qu'en (3.4.1) on peut énoncer le théorème suivant :

(3.4.3) Théorème. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction* $\psi : Q^p \to \mathbb{R}$ *soit de type quasi-positif est qu'elle admette la représentation de Lévy-Khintchine*

(4)
$$\psi(r) = \psi(0) + < r,b > + \sum_{j,k=1}^{p} \xi_{j,k}\, r_j r_k$$
$$+ \int_{\mathbb{R}^p \setminus \{0\}} [\exp< r,y > -1 - \frac{< r,y >}{1+\|y\|^2}]d\lambda(y)$$

pour tout $r = (r_1,\dots,r_p) \in Q^p$,

où $b \in \mathbb{R}^p$, $(\xi_{j,k})$ *est une matrice réelle symétrique de type positif et* λ *est une mesure de Radon positive sur* $\mathbb{R}^p\setminus\{0\}$ *telle que*

$$\int_{\|y\| \leq 1} \|y\|^2 d\lambda(y) < \infty$$

et

$$\int_{1 < \|y\|} \exp(< x,y >)d\lambda(y) < \infty , \textit{ pour tout } x \in \mathbb{R}^p.$$

De plus le triplet $(b, (\xi_{j,k}), \lambda)$ *est déterminé de manière unique.*

Cela implique que toute fonction $\psi : Q^p \to \mathbb{C}$ *de type quasi-positif au sens du semi-groupe, admet une extension* $\tilde{\psi} : \mathbb{C}_+^p \to \mathbb{C}$, *holomorphe sur l'intérieur de* $\mathbb{C}_+^p$ *et continue sur* $\mathbb{C}_+^p$, *définie par*

$$\tilde{\psi}(z) = \psi(0) + < z,b > + \sum_{j,k=1}^{p} \xi_{j,k}\, z_j z_k$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^p \setminus \{0\}} [\exp <z,y> -1 - \frac{<z,y>}{1+\|y\|^2}] d\lambda(y)$$

où $(b, (\xi_{j,k}), \lambda)$ *est le triplet associé à* ψ *dans la décomposition (4).*

Preuve. On sait, d'après ([9], page 212), que le semi-groupe réel $(Q^p,+,id)$ est parfait et que $(Q^p,+,id)^*$ est homéomorphe et isomorphe au semi-groupe $(\mathbb{R}^p,+)$ selon la correspondance qui, à tout $x \in \mathbb{R}^p$, associe le semi-caractère $\rho_x(r) = \exp(< r,x >)$. Le résultat en découle facilement, par des considérations analogues à celles de (3.4.1) et (3.4.2).

Comme conséquence immédiate de ce théorème, on peut énoncer le théorème de Bickel et Van Zwett [10] suivant :

(3.4.4) Théorème. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction* $\psi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ *soit de type quasi-positif et continue, est qu'elle admette la représentation de Lévy-Khintchine sous la forme*

$$\psi(x) = \psi(0) + < x,b > + \sum_{j,k=1}^{p} \xi_{j,k}\, x_j x_k$$
$$+ \int_{\mathbb{R}^p \setminus \{0\}} [\exp <x,y> -1 - \frac{<x,y>}{1+\|y\|^2}] d\lambda(y)$$

où le triplet $(b, (\xi_{j,k}), \lambda)$ *est déterminé par le théorème (3.4.3).*

(3.4.5) Remarque. La démosntration est ici élémentaire et beaucoup plus simple que celle donnée dans [9], p. 220, qui passe par l'utilisation de la formule de Lévy-Khintchine au sens de Bochner sur le groupe additif $\mathbb{R}^p$, à travers des considérations de prolongement analytique.

*

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. BERG, *On the relation between gaussian measures and convolution semi-groups of local type*, Math. Scand., 37, 183-192 (1975).

[2] C. BERG, *On the support of the measures in a symetric convolution semi-group*, Math. Z. 148, 141-146 (1976).

[3] C. BERG, *Hunt convolution kernels which are continuous singular with respect to Haar measure*, Lecture Notes in Math. 706, Springer-Verlag, Berlin (1978).

[4] C. BERG, *Fonctions définies négatives et majoration de Schur*, In "Colloque de théorie du potentiel Jacques Deny" Orsay 1983. Lecture Notes in Math. 1096, Berlin-Heidelberg-New-York, Springer Verlag (1984).

[5] C. BERG, *Semi-groupes de moments*, Math. Scand. 54, 177-182 (1984).

[6] C. BERG et G. FORST, *Potential theory on locally compact abelian groups*, Berlin-Heidelberg-New-York, Springer Verlag (1975).

[7] C. BERG et P.H. MASERICK, *Exponentially bounded positive definite functions*, Illinois J. Math. 28, 162-179 (1982).

[8] C. BERG, J.P.R. CHRISTENSEN et P. RESSEL, *Positive definite functions on abelian semi-groups*, Math. Ann. 223, 253-272 (1976).

[9] C. BERG, J.P.R. CHRISTENSEN et P. RESSEL, *Harmonics analysis on semi-groups*, Graduate texts in Math., Vol. 100, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York (1984).

[10] P.J. BICKEL et W.R. VAN ZWET, *On a theorem of Hoeffding. In Asymptotic theory of statistical tests and estimation* , (ed. by I.M. Chakrararti) 307-324, New-York Academic Press (1980).

[11] H. BUCHWALTER, *Semi-groupes de moments sur un convexe compact de* $\mathbb{R}^p$, Math. Scand. 157-169 (1984).

[12] H. BUCHWALTER, *Formes quadratiques sur un semi-groupe involutif*, Math. Ann. 271, 619-639 (1985).

[13] H. BUCHWALTER, *Semi-groupes de moments sur* $\mathbb{R}^p$ *et* $\mathbb{C}^p$, Arkiv för Math. 23-2, 203-215 (1985).

[14] H. BUCHWALTER, *Semi-groupes de moments complexes*, Amer. J. Math., à paraître.

[15] **H. BUCHWALTER,** *Les fonctions de Lévy existent !* , Math. Ann., 274, 31-34 (1986).

[16] **H. BUCHWALTER** et **G. CASSIER,** *Semi-groupes dans le problème des moments,* C.R. Acad. Sc. Paris, série I, 296, 389-391 (1983).

[17] **G. CASSIER,** *Problème des moments n-dimensionnel, mesures quasi-spectrales et semi-groupes,* Thèse de 3e cycle, Lyon I, 1-118 (1983).

[18] **G. CHOQUET,** *Le problème des moments,* Séminaire d'initiation à l'analyse, 1ère année. Inst. Henri Poincaré, Paris (1962).

[19] **J.P.R. CHRISTENSEN** et **P. RESSEL,** *A probabilistic characterization of negative definite and completely alternating functions,* Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 57, 407-417 (1981).

[20] **A. DEVINATZ,** *The representation of functions as Laplace-Stieltjes integrals,* Duke Math. J. 22, 185-192 (1955).

[21] **K. DONNER,** *Integral representations by non-finite Radon measure and measure of finite variation,* Math. Ann. 224, 1-20 (1976).

[22] **G. FORST,** *Convolution semi-groups of local type,* Math. Scand. 34, 211-218 (1974).

[23] **G. FORST,** *The Lévy-Khinčin representation of negative definite functions,* Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 34, 313-318 (1976).

[24] **K. HARZALLAH,** *Sur une démonstration de la formule de Lévy-Khintchine,* Ann. Inst. Fourier, 19-2, 527-532 (1969).

[25] **P.H. MASERICK,** *A Lévy-Khintchine formula for semi-groups with involutions,* Math. Ann. 236, 209-216 (1978).

[26] **W. MLAK,** *Conditionally positive definite functions on linear spaces,* Ann. Polonici, Math. XLII, 187-239, (1983).

[27] **K.R. PARTHASARATHY,** *Probability measures on metric spaces,* Acad . Press, New-York (1967).

[28] **K.R. PARTHASARATHY, R.R. RAO, S.R.S. VARADHAN,** *Probability distributions on locally compact abelian groups,* Illinois J. Math. 7, 337-369 (1963).

[29] **W. RUDIN,** *Fourier analysis on groups,* Wiley (Interscience), New-York (1962).

[30] **L. SCHWARTZ,** *Radon measures on arbitrary topological spaces and cylindrical measures,* Tata Institute of fundamental research, Oxford University Press (1973).

[31] **K. URBANIK,** *Gaussian measures on locally compact abelian groups,* Studia Math. 19, 77-88 (1960).

[32] **S.R.S. VARADHAN,** *Limit theorems for sums of independant random variables in a Hilbert space,* Sankhy a Ser. A, 24, 213-238 (1962).

[33] **A. WEIL,** *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications,* Hermann, Paris (1940).

*

NOM : **YOUSSFI** (avec précision du nom de jeune fille, le cas échéant) Prénoms : **El Hassan**	DATE de SOUTENANCE **mardi 1er juillet 1986**

TITRE :

Mesures de Lévy et Fonctions de Lévy générales
Applications à la décomposition de Lévy-Khintchine

NATURE : Numéro d'ordre : **51-86**

DIPLOME DE DOCT.	DOCTEUR-INGENIEUR	DOCTORAT D'ETAT	DOCTORAT DE 3e CYCLE	Spécialité :
[X]	[ ]	[ ]	[ ]	

Cote B.I.U. - Lyon : T 50/210/19 / et bis CLASSE :

RESUME :

Ce travail a pour but d'approfondir l'étude du problème des semi-groupes de moments, des fonctions de type quasi-positif et des semi-groupes de convolution sur un sous-*-semi-groupe F du dual S^* d'un semi-groupe abélien involutif (S,+,*) quelconque.

Dans le premier chapitre on introduit de nouvelles notions de mesures de Lévy, de fonctions de Lévy et de formes quadratiques. On montre que l'on préserve les notions classiques et on donne des exemples de telles notions définies en ce sens nouveau.

Le deuxième chapitre fournit, moyennant les notions introduites au premier chapitre, un nouveau théorème général de décomposition du "type de Khintchine" qui couvre les représentations de Lévy-Khintchine classiques. Ce qui permet de donner deux résolutions partielles indépendantes du problème de décomposition des semi-groupes de convolution au moyen des semi-groupes de convolution "gaussiens" et "poissonniens".

Dans le troisième chapitre on offre un résultat original, dit de stabilité, relatif aux semi-groupes abéliens involutifs, permettant de retrouver certains résultats déjà connus et de résoudre le problème des semi-groupes de moments dans un cas très intéressant sortant du cas compact. Enfin, des applications générales sont données et permettent de retrouver avec des démonstrations plus simples les théorèmes de Berg et de Bickel et Van Zwet, sur les décompositions de Lévy-Khintchine des fonctions continues de type négatif sur $(\mathbb{R}_+)^p$ et sur $\mathbb{R}^p$.

MOTS-CLES : **semi-groupe involutif ; fonction de type quasi-positif ; fonction moment ; fonction de Lévy ; mesure de Lévy ; forme quadratique ; semi-groupe de moments , décomposition de Lévy-Khintchine ; semi-groupe de convolution.**

Laboratoire(s) de recherches : **Analyse Fonctionnelle**

Directeur de recnerches : **H. BUCHWALTER**

Président du jury :

Composition du jury : **H. BUCHWALTER** (Univ. Claude Bernard Lyon I) - **A. GOLDMAN** (U.C.B. Lyon I) - **P. RESSEL** (Katholische Universität Eichstätt, R.F.A.) - **F. HIRSCH** (Rapporteur) (E.N.S.E.T.-Cachan)

UNIVERSITE CLAUDE BERNARD - LYON I

DIPLOME DE DOCTORAT

Date prévue pour la soutenance : **mardi 1er juillet 1986**

N° d'étudiant : **822418 H**

Nom et prénom de l'auteur : **YOUSSFI El Hassan**

Titre de la thèse :

"MESURES DE LEVY ET FONCTIONS DE LEVY GENERALES
APPLICATIONS A LA DECOMPOSITION DE LEVY-KHINTCHINE"

Résumé dactylographié et références bibliographiques précises des publications :

Ce travail a pour but d'approfondir l'étude du problème des semi-groupes de moments, des fonctions de type quasi-positif et des semi-groupes de convolution sur un sous-*-semi-groupe F du dual S^* d'un semi-groupe abélien involutif (S,+,*) quelconque.

Dans le premier chapitre on introduit de nouvelles notions de mesures de Lévy, de fonctions de Lévy et de formes quadratiques. On montre que l'on préserve les notions classiques et on donne des exemples de telles notions définies en ce sens nouveau.

Le deuxième chapitre fournit, moyennant les notions introduites au premier chapitre, un nouveau théorème général de décomposition du "type de Khintchine" qui couvre les représentations de Lévy-Khintchine classiques. Ce qui permet de donner deux résolutions partielles indépendantes du problème de décomposition des semi-groupes de convolution au moyen des semi-groupes de convolution "gaussiens" et "poissonniens".

Dans le troisième chapitre on offre un résultat original, dit de stabilité, relatif aux semi-groupes abéliens involutifs, permettant de retrouver certains résultats déjà connus et de résoudre le problème des semi-groupes de moments dans un cas très intéressant sortant du cas compact. Enfin, des applications générales sont données et permettent de retrouver avec des démonstrations plus simples les théorèmes de Berg et de Bickel et Van Zwet, sur les décompositions de Lévy-Khintchine des fonctions continues de type négatif sur $(\mathbf{R}_+)^p$ et sur $\mathbf{R}^p$.