CLAUDE BRADA

Éléments de la géométrie des octaves de Cayley

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1986, fascicule 2D
« Eléments de la géométrie des octaves de Cayley », , p. 1-90
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1986___2D_A1_0>

PUBLICATIONS DU DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES DE L'UNIVERSITE DE LYON I

2/D - 1986

Thèse soutenue le 6 juillet 1984 à l'Université d'Aix-Marseille I

ELEMENTS DE LA GEOMETRIE DES OCTAVES DE CAYLEY

Claude BRADA

Le plan projectif de Cayley, $\mathbb{C}aP^2$, est bien connu des géométres : c'est l'espace symétrique homogène $F_4/\mathrm{Spin}\ 9$ d'E.Cartan. La littérature le concernant est abondante mais très dispersée. A l'exception du remarquable ouvrage de base de H.FREUDENTHAL, "Oktaven, Ausnahmegruppen und Oktavengeometrie" paru en 1951, il nous est apparu qu'il n'existe pas d'écrit détaillé concernant la construction de ce plan.

Dans ce travail nous avons souhaité apporter quelques développements à l'ouvrage de H.Freudenthal et donner une étude de $\mathbb{C}aP^2$ qui se suffise à elle-même ; nous avons voulu pousser plus loin certains calculs potentiellement présents dans l'ouvrage cité, afin d'obtenir un cadre algébrique dans lequel les êtres géométriques apparaissent naturellement.

Le chapitre I contient la description de l'algèbre à division alternative des octaves de Cayley notée $\mathbb{C}a$. L'algèbre des dérivations de $\mathbb{C}a$ apparaît comme sous-algèbre de o(8) isomorphe à l'algèbre de Lie exceptionnelle $\mathfrak{g}_2$; le résultat fondamental pour le reste de l'exposé est le principe de trialité qui est démontré dans sa forme infinitésimale (c.a.d dans o(8) ainsi que dans sa forme finie (c.a.d dans SO(8)). Ce principe met en évidence une réalisation de Spin 8 comme sous-groupe de $SO(8) \times SO(8)$ et caractérise SO(7) et Spin 7 comme sous-groupe de SO(8) ; une application intéressante est l'isomorphisme $\mathrm{Spin}\ 7/G_2 \simeq S^7$, où G_2, forme réelle compacte du groupe de Lie exceptionnel dans la classification d'E.Cartan est le groupe des automorphisme de $\mathbb{C}a$.

Le chapitre II, plus technique, étudie complètement l'algèbre de Jordan $\mathfrak{J}$ des matrices hermitiennes d'ordre 3 à coefficients dans $\mathbb{C}a$; une motivation est donnée au début du chapitre III. L'algèbre des dérivations de $\mathfrak{J}$ est isomorphe à l'algèbre de Lie exceptionnelle $\mathfrak{F}_4$, dont on donne la table des crochets qui ne semble pas avoir été dressée jusqu'ici ;

on en déduit une décomposition de o(9) et de $\mathcal{F}_4$ en algèbre de Lie symétrique. Le principe de trialité permet l'étude du groupe des automorphismes de $\mathcal{J}$, étude qui conduit à la forme réelle compacte du groupe de Lie exceptionnel F_4 et à deux de ses sous-groupes respectivement isomorphes à Spin 8 et Spin 9 ; les algèbres de Lie symétriques obtenues donnent respectivement l'isomorphisme d'espaces homogènes symétriques Spin 9/Spin 8 $\simeq S^8$ et l'espace homogène symétrique F_4/Spin 9.

Suivant Freudental, le chapitre III définit le plan projectif $\mathbb{C}aP^2$ comme ensemble des projecteurs hermitiens de rang 1 éléments de $\mathcal{J}$ caractérisés par des conditions algébriques. Au cours de ce chapitre, l'étude de la droite projective $\mathbb{C}aP^2$ mène à une démonstration de la fibration de Hopf $S^7 \hookrightarrow S^{15} \longrightarrow S^8$ et à un repérage qui joue le rôle de "coordonnées homogènes" sur $\mathbb{C}aP^1$; cet aspect permet d'abord de retrouver l'harmonicité de $\mathbb{C}aP^2$ par un calcul direct et ensuite de donner l'équation d'une droite dans $\mathbb{C}aP^2$: on s'aperçoit alors que la polarité introduite par J.TITS est exactement la correspondance qui au point X associe la droite X de $\mathbb{C}aP^2$ représentée par la même matrice X .

Enfin $\mathbb{C}aP^2 \simeq F_4$/Spin 9 apparaît par le calcul complet, donné au chapitre II, des éléments de base de l'algèbre de Lie de F_4 : la table des crochets permet de calculer facilement la courbure sectionnelle de $\mathbb{C}aP^2$ et retrouver, d'une façon plus naturelle, un résultat de BROWN et GRAY (1972) ([B-G]).

CHAPITRE I : L'ALGÈBRE DES OCTAVES DE CAYLEY

CHAPITRE II: L'ALGÈBRE DE JORDAN $\mathfrak{J}$ DES MATRICES 3x3 HERMITIENNES À COEFFICIENTS DANS $\mathbb{C}a$

CHAPITRE III: LE PLAN PROJECTIF $\mathbb{C}aP^2$

CHAPITRE I

L'ALGEBRE DES OCTAVES DE CAYLEY

1 - PREMIERES DEFINITIONS

1-1. On note $\mathbb{C}a$ l'algèbre de Cayley sur le corps des réels ; c'est l'algèbre construite à partir de l'algèbre réelle des quaternions, $\mathbb{H}$, par la méthode de Cayley-Dickson [SR p.45] :

- $\mathbb{C}a = \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ pour la structure d'espace vectoriel réel.
- La multiplication dans $\mathbb{C}a$ est définie par :

$$(x_1,x_2)(y_1,y_2) = (x_1y_1 - y_2\overline{x}_2, \overline{x}_1y_2 + y_1x_2)$$

où $q \longrightarrow \overline{q}$ est l'involution de $\mathbb{H}$.

Cette multiplication non commutative, non associative possède l'élément neutre $(1,0)$ que nous désignerons par 1 (ou e_o).

L'ensemble des $(x,0)$ où $x \in \mathbb{R}$ sera identifié à $\mathbb{R}$.

1-2. Pour $x = (x_1,x_2)$, $x_1,x_2 \in \mathbb{H}$, on pose :

$$\overline{x} = (\overline{x}_1,-x_2)$$

ce qui définit dans $\mathbb{C}a$ une involution (opérateur linéaire $x \rightarrow \overline{x}$ tel que $\overline{xy} = \overline{y}\,\overline{x}$ et $\overline{\overline{x}} = x$)

On a alors :

$$t(x) = x + \overline{x} \in \mathbb{R}$$

$$x\,\overline{x} = \overline{x}\,x = |x_1|^2 + |x_2|^2 \text{ , où } q \longrightarrow |q| \text{ est la norme dans } \mathbb{H}.$$

On note $|x| = (x\,\overline{x})^{1/2}$; $x \longrightarrow |x|$ est une norme dans $\mathbb{C}a$ associée au produit scalaire $(x|y) = \frac{1}{2}\left[\,|x+y|^2 - |x|^2 - |y|^2\,\right] = \frac{1}{2}\,t(x\overline{y})$

Pour cette norme on vérifie

$$x,y \in \mathbb{C}a \qquad |xy| = |x|\,|y|$$, (donc $\mathbb{C}a$ est une algèbre à division),

et la relation

$$\forall x \in \mathbb{C}a \qquad x^2 - t(x)x + |x|^2 = 0$$

2 - QUELQUES IDENTITES ET PROPRIETES

2-1. De la compatibilité de la norme avec la multiplication, on déduit, pour a, x, y $\in \mathbb{C}a$:

$$(ax \mid ay) = (a|a)\,(x|y) = (xa|ya)$$

ce qui montre que les translations à gauche L_a, et à droite R_a, de $\mathbb{C}a$ sont des isométries pour $|a| = 1$ (des automorphismes de l'espace vectoriel $\mathbb{C}a$ pour $a \neq 0$).

En linéarisant cette relation on obtient, pour $a,b,x,y \in \mathbb{C}a$:

(1) $\quad (ax|by) + (bx|ay) = 2(a|b)\,(x|y)$

Comme $t(a) = a+\bar{a} = 2(a|1)$, pour $b = 1$ dans (1) on a :

$$(ax|y) = (x|\bar{a}y)$$

c.a.d l'adjoint de L_a pour le produit scalaire considéré est $L'_a = L_{\bar{a}}$.
De même $R'_a = R_{\bar{a}}$.

D'autre part comme $(x|y) = (\bar{x}|\bar{y})$ on a $t(x\bar{y}) = t(\bar{x}y) = t(\bar{y}x) = t(y\bar{x})$

2-2. Comme $(ay|ax) = (y|\bar{a}(ax))$
$$= (a|a)(y|x)$$
$$= (y|(\bar{a}\,a)x)$$
on a $\bar{a}(ax) = (\bar{a}\,a)x$ et de même
$$(xa)\,\bar{a} = x(a\,\bar{a})$$
de $\bar{a} = t(a) - a$ et $t(a) \in \mathbb{R}$, on déduit les identités :

(2) $\quad \forall a,x \in \mathbb{C}a \qquad a(ax) = a^2x, \quad (xa)a = xa^2$

c.a.d $\mathbb{C}a$ est une algèbre alternative.
Appelant maintenant <u>associateur</u> la quantité
$$\{a,b,c\} = (ab)c - a(bc)$$
les conditions (2) s'expriment par
$$\{a,a,b\} = \{b,a,a\} = 0$$

équivalentes, la caractéristique étant différente de 2, à

$(a,b,c) \longrightarrow \{a,b,c\}$ est trilinéaire alternée.

Par suite $\{a,x,y\} = \{x,y,a\}$ donne

$(ax)y + x(ya) = a(xy) + (xy)a,$ c.a.d

(3) $\forall a,x,y \in \mathbb{C}a \qquad L_a x.y + x.R_a y = (L_a + R_a)(xy)$

d'où découle en remplaçant successivement x par $L_a x$ et y par $R_a y$ (en remarquant que, d'après (2), $L_a^2 = L_{a^2}$, $R_a^2 = R_{a^2}$)

$$L_{a^2}x.\ y + L_a x\ .\ R_a y = (L_a + R_a)\ (L_a x.y)$$

$$L_a x.R_a y + x\ .\ R_{a^2} y = (L_a + R_a)\ (x.R_a y)$$

et en additionnant :

$$L_{a^2}x.y + 2L_a x.R_a y + x\ R_{a^2} y = (L_a + R_a)\ (L_a x.y + x.R_a y)$$

$$= (L_a + R_a)^2(xy)$$

remplaçant maintenant a par a^2 dans (3) et soustrayant de ce qui précède on arrive à :

$$L_a x\ .\ R_a y = (L_a R_a)(xy)$$

car $L_a R_a = R_a L_a$ (d'après $\{a,x,a\} = 0$)

d'où, en notant axa pour $(ax)a = a(xa)$

(4) $\forall a,x,y \in \mathbb{C}a \qquad (ax)(ya) = a(xy)a$ (Identité de Moufang)

3 - SYSTEMES ORTHONORMES

Ce sont les bases $\{e_i\}_{0 \leqslant i \leqslant 7}$ de $\mathbb{C}a$ telle que $e_0 = 1$ et $(e_i | e_j) = \delta_{ij}$ pour tous $i,j \geqslant 0$

3-1. On note $(\mathbb{C}a)_0 = \{x \in \mathbb{C}a / t(x) = 0\}$.

Comme $t(x) = 2(x|1)$, $(\mathbb{C}a)_0 = \mathbb{K}^{\perp}$ et donc

$\bar{e}_i = -e_i$ si $i > 0$

D'autre part :

$$|e_i + e_j|^2 = (e_i+e_j)\overline{(e_i+e_j)} = |e_i|^2 + e_i\,\overline{e}_j + e_j\,\overline{e}_i + |e_j|^2$$
$$= |e_i|^2 + |e_j|^2 + 2(e_i|e_j)$$

donne :

$$\begin{cases} e_ie_j + e_je_i = 0 \quad , & i \neq j \qquad i,j>0 \\ e_i^2 = -e_o \quad , & i>0 \end{cases}$$

3-2. Dans $\mathbb{C}a$ on peut toujours construire un système orthonormé vérifiant :

(*) $e_i\,e_j = \pm\, e_k$

partant de $e_o = 1$ et de $e_1 \in \mathbb{R}^{\perp}$, $|e_1| = 1$, on choisit $f \in \{e_o,e_1\}^{\perp}$, $|f| = 1$ et on pose :

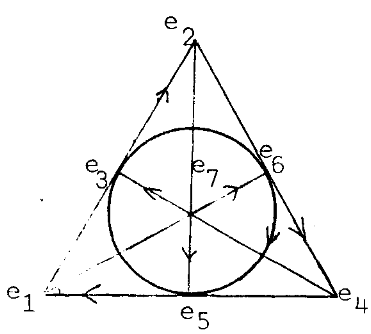
$$e_2 = f\,e_o \;, \qquad e_3 = f\,e_1$$

$\{e_o,e_1,e_2,e_3\}$ est alors orthonormé et vérifie :

$$e_oe_i = e_i \;, \quad i>0 \qquad e_1\,e_2 = -e_3 \;, \qquad e_1e_3 = e_2 \;, \qquad e_2e_3 = -e_1$$

faisant ensuite la même construction à partir de $f' \in \{e_o,e_1,e_2,e_3\}^{\perp}$, $|f'| = 1$ on obtient un système orthonormé $\{e_o,e_1,\text{—},e_7\}$ vérifiant (*)

La table de multiplication des e_i peut être schématisée par le diagramme :



où les flèches indiquent le "sens positif" et qui se lit ([FR] 1 p.13)

$$e_1\,e_3 = e_2 \;, \qquad e_2\,e_7 = e_5$$
$$e_3\,e_6 = e_5 \;, \qquad e_1\,e_6 = -e_7 \text{ etc...}$$

3-3. Soit $\{e_o,e_1,\text{—},e_7\}$ orthonormé vérifiant (*)

Si $\mathcal{B} = \{e_o,e_i,e_j,e_k\}$ avec $e_i\,e_j = \pm e_k$ $(i,j,k > 0)$

$\mathcal{B}$ est une algèbre de quaternions et :

$$\mathbb{C}a = \mathcal{B} \oplus \mathcal{B}^{\perp}$$

Soit $v \in \mathcal{B}^{\perp}$ tel que $|v| = 1$. On a $\overline{v} = -v$, $v^2 = -1$ et pour $x,y \in \mathcal{B}$:

$(x|vy) = (x\overline{y}|v) = 0 \Longrightarrow v\,\mathcal{B} \subset \mathcal{B}^{\perp}$ et égalité d'après les dimensions.

Ainsi : $\mathbb{C}a = \mathcal{B} \oplus v\mathcal{B}$, avec les relations

si $x \in \mathcal{B}$, $vx = \overline{x}v$ car $t(vx) = 0$

si $x,y \in \mathcal{B}$ $\{v,x,y\} + \{x,v,y\} = 0$ donne

$(vx)y - v(xy) + (xv)y - x(vy) = (\overline{x}v)y + (xv)y - v(xy) - x(vy)$

$= (t(x) - x)(vy) - v(xy) = 0$

d'où :

(5) $\forall x,y \in \mathcal{B}$ $\qquad x(vy) = v(\overline{x}y)$

et de même $\qquad (vy)x = v(xy)$

d'autre part on vérifie à l'aide de (5) et de l'identité de Moufang (4) que :

$$(vx)(vy) = -y\overline{x} \quad , \quad x,y \in \mathcal{B}$$

si $x = x_1 + vx_2$, $y = y_1 + vy_2$, $x_i, y_i \in \mathcal{B}$

ces règles de calcul entraînent :

$$x.y = (x_1y_1 - y_2\overline{x}_2) + v(\overline{x}_1y_2 + y_1x_2).$$

4 - LES DERIVATIONS DE L'ALGEBRE $\mathbb{C}a$

4-1. On note :

$\mathcal{D}$ l'ensemble des dérivations de $\mathbb{C}a$, c.a.d les endomorphismes de $\mathbb{C}a$ vérifiant :

$$\forall x,y \in \mathbb{C}a \qquad D(x.y) = D(x).y + x.D(y)$$

$L_o = \{L_a \;/\; a \in (\mathbb{C}a)_o\}$

$R_o = \{R_a \;/\; a \in (\mathbb{C}a)_o\}$

o(8) l'algèbre de Lie des opérateurs antisymétriques sur $\mathbb{C}a$ (identifié à $\mathbb{R}^8$ euclidien), c.a.d l'ensemble des endomorphismes T vérifiant :

$$\forall x,y \in \mathbb{C}a \qquad (Tx|y) + (x|Ty) = o$$

4-2. Si $D \in \mathcal{D}$ on a $D(1) = o$, d'où

$o = D(x+\overline{x}) = Dx + D\overline{x}$

$o = D(x\overline{x}) = Dx.\overline{x} + x.D\overline{x}$

ce qui donne $Dx.\overline{x} - x.Dx = x.\overline{Dx} - \overline{Dx}.\overline{x} = o$

et donc $\forall x \in \mathbb{C}a \qquad t(Dx)(\overline{x}-x) = o$

c.a.d $D : \mathbb{C}a \longrightarrow (\mathbb{C}a)_o$

maintenant $\overline{Dx} = -Dx = D\overline{x}$ donne $D(x.\overline{y}) = Dx.\overline{y} + x\,\overline{Dy}$, d'où en prenant la trace :

$$\forall x,y \in \mathbb{C}a \qquad (Dx|y) + (x|Dy) = o$$

donc $\mathcal{D} \subset o(8)$.

D'autre part, d'après 2-1, on a $L_o \subset o(8)$ et $R_o \subset o(8)$, d'où :

$$\mathcal{D} + L_o + R_o \subset o(8)$$

en fait la somme est directe et égale à o(8) comme nous allons le voir.

4-3. La somme est directe

Par définition de $\mathcal{D}$

$$D \in \mathcal{D} \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{C}a \quad [D,L_x] = L_{Dx}$$

$$\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{C}a \quad [D,R_x] = R_{Dx}$$

et d'autre part on a les formules :

$$(6) \quad [R_x,R_y] = -R_{[x,y]} - 2[L_x,R_y]$$
$$[L_x,L_y] = L_{[x,y]} - 2[L_x,R_y]$$

où $[x,y] = x.y - y.x$

car, par exemple, pour la première :

$$(uy)x - (ux)y = \{u,y,x\} + u(y.x) - \{u,x,y\} - u(xy)$$
$$= -u.[x,y] + 2\{x,u,y\}$$

et $\{x,u,y\} = [R_y,L_x]\,(u)$

de la première identité (6) on déduit :

$$[R_x - L_x,\ R_y] = -R_{[x,y]} - 3[L_x,R_y]$$

Si donc $D+L_u+R_v = o$ avec $D \in \mathcal{D}$ et $u,v \in (\mathbb{C}a)_o$ on a, puisque $D(1) = o$:

$$u + v = o \qquad \text{et} \qquad D = R_u - L_u$$

par suite $\forall y \in \mathbb{C}a$

$$[D,R_y] = R_{Dy} = R_{[y,u]} = -R_{[u,y]} - 3[L_u,R_y]$$

d'où $\forall y \in \mathbb{C}a \quad [L_u,R_y] = o$

et donc $\forall x,y \in \mathbb{C}a \quad \{u,x,y\} = o$

relation qui n'est vérifiée que pour $u \in \mathbb{R}$; or $u \in \mathbb{R}^{\perp}$, par conséquent $u = o$ et $D = L_u = L_v = o$.

4-4. La somme est égale à $o(8)$

Les applications linéaires $a \longrightarrow L_a$ et $a \longrightarrow R_a$ de $(\mathbb{C}a)_o$ dans L_o et R_o sont des isomorphismes, donc

$$\dim L_o = \dim R_o = \dim (\mathbb{C}a)_o = 7$$

Comme $\dim o(8) = 28$ on a $\dim \mathcal{D} \leqslant 28-14 = 14$ et on aura montré

$$o(8) = \mathcal{D} \oplus L_o \oplus R_o$$

en montrant $\dim \mathcal{D} = 14$.

Pour cela on utilise la proposition ([SR] p.77)

Proposition : $\forall x,y \in \mathbb{C}a$, $D_{x,y} = [L_x,L_y] + [L_x,R_y] + [R_x,R_y]$

est une dérivation

en effet, d'après (6), $D_{x,y} = L_{[x,y]} - R_{[x,y]} - 3[L_x,R_y]$

et il suffit de vérifier

$\forall z \in \mathbb{C}a \qquad [D_{x,y},R_z] = R_{D_{x,y}z}$

or

$$2[D_{x,y},R_z] = 2[L_{[x,y]} - R_{[x,y]} - 3[L_x,R_y] , R_z]$$

$$= 3 [-R_{[x,y]} - 2[L_x,R_y] , R_z] + [R_{[x,y]}, R_z] + 2[L_{[x,y]},R_z]$$

$$= 3[[R_x,R_y], R_z] - R_{[[x,y],z]}$$

d'autre part, en notant $[A,B]_+ = AB + BA$, dans toute algèbre alternative on a :

$$[[A,B] ,C] = [A, [B,C]_+]_+ - [B,[A,C]_+]_+ + 2\{A,B,C\}$$

Il s'ensuit :

$$[[R_x,R_y],R_z] = [R_x,[R_y,R_z]_+]_+ - [R_y, [R_x,R_z]_+]_+$$

et comme $[R_u,R_v]_+ = R_{[u,v]_+}$

$$[[R_x, R_y],R_z] = R_{[x,[y,z]_+]_+ - [y,[x,z]_+]_+}$$

$$= R_{[[x,y],z]} - 2\{x,y,z\}$$

et alors :

$$2[D_{x,y},R_z] = R_{2[[x,y],z]} - 6\{x,y,z\}$$

$$= 2R_{[[x,y],z]} - 3\{x,y,z\}$$

$$= 2 R_{D_{x,y}z}$$

De cette proposition on déduit le corollaire :

<u>Corollaire</u> : Si $x,y,u,v \in \mathbb{C}a$ vérifient $[x,y] = [u,v]$ l'application $z \longrightarrow \{u,v,z\} - \{x,y,z\}$ est une dérivation.

en effet si $[x,y] = [u,v]$ on a :

$$D_{x,y} - D_{u,v} = 3[L_u,R_v] - 3[L_x,R_y]$$
$$= 3[\{u,v,.\} - \{x,y,.\}]$$

Soit alors une base orthonormée $\{e_o,e_1,\dots,e_7\}$ définie en 3. et posons pour $i \neq j$, $i,j > o$

$$F_{ij} = \frac{1}{2} L_{e_j} L_{e_i}$$

on a $2(F_{ij} - F_{k\ell}) = \{e_\ell,e_k,.\} - \{e_j,e_i,.\} + L_{e_je_i - e_\ell e_k}$

par suite comme $e_ie_j = e_ke_\ell \Longleftrightarrow [e_i,e_j] = [e_k,e_\ell]$ pour $i,j,k,\ell > o$, il vient :

$$F_{ij} - F_{k\ell} \in \mathcal{D} \text{ si } e_ie_j = e_ke_\ell$$

D'après 3-1. les F_{ij} vérifient $F_{ij} = - F_{ji}$, donc $F_{ij} \in o(8)$.
Complétée par $F_{io} = \frac{1}{2} L_{e_i}$, $i>o$ la famille $\{F_{ij}\}_{o\leqslant j<i\leqslant 7}$, comme on va le montrer dans le paragraphe suivant, forme une base de $o(8)$.
Ce résultat étant provisoirement admis, à partir du diagramme donné en 3-2. on peut définir, pour chaque sommet e_i, $i = 1,\dots,7$, deux dérivations de la forme $F_{ij} - F_{k\ell}$ de façon que ces 14 dérivations soient indépendantes.

En effet pour le sommet e_i il existe trois couples (e_{i_1}, e_{i_2}), $(e_{i'_1}, e_{i'_2})$, $(e_{i''_1}, e_{i''_2})$ vérifiant

$i, i_1, i_2, i'_1, i'_2, i''_1, i''_2$ différents et

$$e_{i_1}.e_{i_2} = e_{i'_1}.e_{i'_2} = e_{i''_1}.e_{i''_2} = e_i$$

d'où $F_{i_1i_2} - F_{i'_1i'_2}$ et $F_{i_1i_2} - F_{i''_1i''_2}$

sont deux dérivations indépendantes.
Les 14 dérivations ainsi construites sont également indépendantes car si :

$$\sum_{i=1}^{7} \lambda^i(F_{i_1i_2} - F_{i'_1i'_2}) + \sum_{i=1}^{7} \mu^i(F_{i_1i_2} - F_{i''_1i''_2}) = o$$

on a :

$$\sum_{i=1}^{7} (\lambda^i+\mu^i)F_{i_1i_2} - \sum_{i=1}^{7} \lambda^i F_{i'_1i'_2} - \sum_{i=1}^{7} \mu^i F_{i''_1i''_2} = o$$

d'où, d'après l'indépendance des F_{ij} et le fait que toutes les parties $\{i_1,i_2\}$, $\{i'_1,i'_2\}$, $\{i''_1,i''_2\}$ $(i = 1,\dots,7)$ sont distinctes :

$$\lambda^i = \mu^i = o \qquad i = 1,\dots,7$$

Il s'ensuit le résultat cherché : $\dim\mathcal{D} = 14$, et donc :

$$o(8) = \mathcal{D} \oplus L_o \oplus R_o$$

5 - PREMIERE ETUDE DE o(8)

5-1. La base de o(8) naturellement associée à la base orthonormée $\{e_i\}_{o\leqslant i\leqslant 7}$ est la famille $\{G_{ij}\}_{o\leqslant j<i\leqslant 7}$ définie par :

$$G_{ij}e_k = \delta_{jk}e_i - \delta_{ik}e_j$$

Ces G_{ij} , $i\neq j$, vérifient :

$$G_{ij} = - G_{ji}$$

$$[G_{ij},G_{jk}] = G_{ik} \quad , \qquad i\neq k$$

$$[G_{ij},G_{k\ell}] = o \text{ si } i,j,k,\ell \text{ sont différents.}$$

A e_i, $i>o$ (cf.triangle 3.2), ces crochets permettent d'associer une sous-algèbre abélienne h_i de l'algèbre de Lie o(8) :

$$h_i = \{\alpha_o G_{io} + \alpha G_{i_1i_2} + \alpha' G_{i'_1i'_2} + \alpha'' G_{i''_1i''_2}\}$$

où les indices sont comme dans 4.4:

$$e_i = e_{i_1}e_{i_2} = e_{i'_1}e_{i'_2} = e_{i''_1}e_{i''_2}$$

on a alors $\overset{7}{\underset{i=1}{\oplus}} h_i = o(8)$; on rappelle (4-4) qu'on a posé $F_{io} = \frac{1}{2} L_{e_i}$, $F_{ij} = \frac{1}{2} L_{e_j} L_{e_i}$; il est aisé (on peut s'aider du schéma 3-2) de vérifier les relations :

$$2 F_{io} = G_{io} - G_{i_1 i_2} - G_{i'_1 i'_2} - G_{i''_1 i''_2}$$

$$2 F_{i_1 i_2} = - G_{io} + G_{i_1 i_2} - G_{i'_1 i'_2} - G_{i''_1 i''_2}$$

$$2 F_{i'_1 i'_2} = - G_{io} - G_{i_1 i_2} + G_{i'_1 i'_2} - G_{i''_1 i''_2}$$

$$2 F_{i''_1 i''_2} = - G_{io} - G_{i_1 i_2} - G_{i'_1 i'_2} + G_{i''_1 i''_2}$$

Ceci définit un endomorphisme π de o(8) tel que

$$\pi(G_{ij}) = F_{ij} \qquad i,j \geqslant o$$

π laisse stable chaque h_i, sa matrice dans h_i étant

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme $\pi^2 = I$

π est un automorphisme de l'espace vectoriel o(8) et $\{F_{ij}\}_{o \leqslant j < i \leqslant 7}$ en est une base.

D'autre part on a :

$$[F_{ij}, F_{jk}] = F_{ik} , \qquad i \neq k$$

$$[F_{ij}, F_{k\ell}] = o \quad \text{si} \quad i,j,k,\ell \quad \text{sont différents.}$$

Ainsi π est un automorphisme de l'algèbre de Lie o(8).

Par la suite nous aurons besoin des relations suivantes :

$$\pi(D) = D \quad \text{pour } D \in \mathcal{D}$$
$$\pi(L_u) = R_u + L_u \quad , \quad u \in (\mathbb{C}a)_o$$
$$\pi(R_u) = -R_u$$

En effet, comme $L_{e_i} = 2\, F_{io}$ et $L_{e_i} + R_{e_i} = 2\, G_{io}$, $i>o$

on a :

$$\pi(L_u + R_u) = L_u \text{ et donc, comme } \pi^2 = I$$
$$\pi(L_u) = R_u + L_u \quad \text{et} \quad \pi(R_u) = -R_u$$

Pour la première relation il suffit, d'après 4-4, de la vérifier pour :

$$D = F_{i_1 i_2} - F_{i'_1 i'_2} \quad \text{avec} \quad e_{i_1}\, e_{i_2} = e_{i'_1} e_{i'_2} = e_i$$

alors $G_{i_1 i_2}$ et $G_{i'_1 i'_2}$ appartiennent à la même sous-algèbre h_i et d'après la matrice de π on a :

$$\pi(G_{i_1 i_2} - G_{i'_1 i'_2}) = G_{i_1 i_2} - G_{i'_1 i'_2}$$

et donc $D = \pi(D)$

5-2. K désignant l'involution $x \longrightarrow \overline{x}$ de $\mathbb{C}a$, soit κ l'automorphisme de $o(8)$ défini par :

$$A \in o(8) \qquad \kappa(A) = KAK$$

Comme $\overline{e}_o = e_o$ et $\overline{e}_i = -e_i$, $i>o$ on a :

$$\kappa(G_{io}) = -G_{io}$$
$$\kappa(G_{ij}) = G_{ij} \quad , \quad i,j>o .$$

κ est donc un automorphisme de $o(8)$ qui laisse stable chaque h_i, sa matrice dans h_i étant

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et } \kappa^2 = I$$

On a d'autre part les relations :

$\kappa(D) = D$ pour $D \in \mathcal{D}$

$\kappa(L_u) = -R_u$, $u \in (\mathbb{C}a)_o$

$\kappa(R_u) = -L_u$

en effet pour $x \in \mathbb{C}a$:

$\kappa(D)(x) = \overline{\overline{Dx}} = Dx$

$\kappa(L_u)(x) = \overline{\overline{ux}} = x\overline{u} = -R_u x$

$\kappa(R_u)(x) = \overline{\overline{x}u} = \overline{u}x = -L_u x$

Soit alors $\lambda = \pi\kappa$, on a

$\lambda(G_{io}) = -\pi(G_{io}) = -F_{io}$

$\lambda(G_{ij}) = \pi(G_{ij}) = F_{ij}$ $\quad i,j>o$

c.a.d la matrice de λ dans h_i est :

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et } \lambda^3 = I$$

Ainsi π et κ engendrent un groupe d'automorphismes de $o(8)$ qui laisse stable chaque h_i et tel que :

$\pi^2 = \kappa^2 = \lambda^3 = I$, $\qquad \lambda = \pi\kappa$

Ce groupe est isomorphe au groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$ par :

$\lambda \longleftrightarrow (1\ 2\ 3)$

$\kappa \longleftrightarrow (1\ 2)$

$\pi \longleftrightarrow (1\ 3)$

5-3. Chaque h_i, $i = 1,\ldots,7$, est une sous-algèbre de Cartan de $o(8)$. Soit par exemple, pour plus de commodité, $h = h_7 = \{G_{7o}, G_{61}, G_{52}, G_{34}\}$.
h est abélienne et est son propre normalisateur.
En effet à l'aide du diagramme 3-2 et des crochets des G_{ij} on vérifie aisément si $H \in h$:

$$\mathrm{ad}\, H : h_i \longrightarrow h_{7-i} \quad , \qquad i = 1,\ldots,6$$

Par suite si $\forall H \in h$, $[H,X] \in h$, alors $X \in h$

Cherchons le système des racines de $o(8)$ (complexifiée), dont on aura besoin plus tard. Soit $H = \alpha_o G_{7o} + \alpha_1 G_{61} + \alpha_2 G_{52} + \alpha_3 G_{34} \in h$.
Partons de G_{76} on a :

$$[H,G_{76}] = \alpha_o G_{6o} - \alpha_1 G_{71}$$

donc un sous-espace stable par ad H contenant G_{76} doit également contenir G_{6o} et G_{71}

or $[H,G_{6o}] = -\alpha_o G_{76} - \alpha_1 G_{1o}$

$[H,G_{71}] = \alpha_o G_{1o} + \alpha_1 G_{76}$

donc doit contenir aussi G_{1o}

$$[H,G_{1o}] = -\alpha_o G_{71} + \alpha_1 G_{6o}$$

Ainsi ad H laisse stable $\{G_{76}, G_{71}, G_{6o}, G_{1o}\}$.
Sa matrice est

$$\begin{pmatrix} o & \alpha_1 & -\alpha_o & o \\ -\alpha_1 & o & o & -\alpha_o \\ \alpha_o & o & o & \alpha_1 \\ o & \alpha_o & -\alpha_1 & o \end{pmatrix}$$

de valeurs propres $\pm(\alpha_o \pm \alpha_1)i$, auxquelles correspondent les sous-espaces :

$L_{\pm(\alpha_o+\alpha_1)i} = \{ G_{76} + G_{1o} \pm i(G_{71} - G_{6o}) \}$

$L_{\pm(\alpha_o-\alpha_1)i} = \{\mp(G_{76} - G_{1o}) + i(G_{71} + G_{6o})\}$

De la même façon $\{ G_{75}, G_{72}, G_{5o}, G_{2o}\}$,

$\{G_{74}, G_{73}, G_{4o}, G_{3o}\}$, $\{ G_{65}, G_{62}, G_{51}, G_{21}\}$,

$\{G_{64}, G_{63}, G_{41}, G_{31}\}$, $\{ G_{54}, G_{53}, G_{42}, G_{32}\}$

sont stables par ad H et donnent respectivement les racines :

$\pm(\alpha_o \pm \alpha_2)i$, $\pm(\alpha_o \pm \alpha_3)i$, $\pm(\alpha_1 \pm \alpha_2)i$,

$\pm(\alpha_1 \pm \alpha_3)i$, $\pm(\alpha_2 \pm \alpha_3)i$

Les sous-espaces propres s'obtiennent de la même manière que précédemment en changeant les indices.

On reconnaît les racines de $o(2\ell,\mathbb{C})$. ([S N] p.82).

6 - LE PRINCIPE DE TRIALITE

6-1. Dans o(8)

Pour $A,B,C \in o(8)$ soit l'équation

(T_1) $\forall x,y \in \mathbb{C}a$ $A(x.y) = B(x).y + x.C(y)$

on a :

principe de trialité : l'un des éléments A,B ou C étant donné, les deux autres sont déterminés de manière unique de façon que (T_1) soit vérifiée.

Démonstration : Supposons A donné.

D'après 4.4 il suffit de montrer l'existence de B et C successivement pour $A = D \in \mathcal{D}$, $A = L_u \in L_o$ et $A = R_u \in R_o$

Si $A = D$ on prend $B = C = A$

Si $A = L_u$ on prend $B = R_u + L_u$, $C = -L_u$

Si $A = R_u$ on prend $B = -R_u$, $C = R_u + L_u$

en effet pour $A = D$ c'est la définition d'une dérivation et pour $A = L_u$, par exemple, on a :

$$(R_u + L_u)(x).y - x.L_u(y) = (xu).y + (ux)y - x(uy)$$
$$= \{x,u,y\} + \{u,x,y\} + u(xy)$$
$$= u(xy) = A(xy)$$

<u>Unicité</u> : Soient $B,C \in o(8)$ tels que :

$\forall x,y \in \mathbb{C}a \qquad B(x)y + x.C(y) = 0$

prenant respectivement $x = 1$ et $y = 1$ on a :

$$C = -L_{B(1)} \in o(8) \implies B(1) \in (\mathbb{C}a)_o$$

et $B = -R_{C(1)}$

$x = y = 1$ donne : $B(1) + C(1) = 0$

donc $B = R_u$, $C = L_{-u}$ avec $u = B(1) \in \mathbb{R}^{\perp}$

par suite $\forall x,y \in \mathbb{C}a \quad (xu)y - x(uy) = \{x,u,y\} = 0$

d'où $u \in \mathbb{R}$; $u \in \mathbb{R} \cap \mathbb{R}^{\perp} \implies u = o$, et donc $B = C = 0$. c.q.f.d.

Soient φ_1 et φ_2 les applications linéaires définies avec les notations précédentes par :

$$\varphi_1(A) = B , \qquad \varphi_2(A) = C$$

on doit avoir :

$$\varphi_1(D) = \varphi_2(D) = D$$
$$\varphi_1(L_u) = R_u + L_u \quad , \quad \varphi_2(L_u) = -L_u$$
$$\varphi_1(R_u) = -R_u \quad , \quad \varphi_2(R_u) = R_u + L_u$$

D'après les relations de 5-1, on remarque $\varphi_1 = \pi$. Si l'on considère $\kappa(A)$ au lieu de A, κ étant l'automorphisme donné en 5-2, on a :

$$\varphi_1 \circ \kappa(D) = \varphi_2 \circ \kappa(D) = D$$
$$\varphi_1 \circ \kappa(L_u) = R_u , \varphi_2 \circ \kappa(L_u) = -R_u - L_u$$
$$\varphi_1 \circ \kappa(R_u) = -R_u - L_u, \varphi_2 \circ \kappa(R_u) = L_u$$

Comme $\varphi_1 \circ \kappa = \pi \circ \kappa = \lambda$ et que :

$$\lambda^2(D) = D , \qquad \lambda^2(L_u) = -R_u - L_u , \qquad \lambda^2(R_u) = L_u$$

il vient : $\varphi_2 \circ \kappa = \lambda^2$

c.a.d, le principe de trialité précédent s'énonce sous la forme, si $A \in o(8)$:

$(T_1') \quad \forall x,y \in \mathbb{C}a \qquad \kappa(A)(xy) = \lambda(A)(x).y + x . \lambda^2(A)(y).$

κ et λ étant des automorphismes on voit alors qu'on pouvait supposer A donné pour démontrer (T_1).

6-2. Dans SO(8)

L'un des éléments $A,B,C \in SO(8)$ étant donné, les deux autres sont déterminés, de manière unique, au signe près tels que l'équation

(T_2) $\quad \forall x,y) \in \mathbb{C}a \qquad A(x.y) = B(x).C(y)$

soit vérifiée.

Démonstration : on peut supposer $A \in SO(8)$ donné.

Existence : Soit $A' \in o(8)$ tel que $A = \exp A'$.

D'après le principe de trialité dans o(8) il existe B' et $C' \in o(8)$ tels que :

$$\forall x,y \in \mathbb{C}a \qquad A'(xy) = B'(x)y + x\,C'(y)$$

La relation $A'^n(xy) = \sum_{k=o}^{n} C_n^k\, B'^k(x)\, C'^{n-k}(y)$ étant vraie pour $n = 1$ est vraie pour tout n car :

$$A'^{n+1}(x.y) = A'\,A'^n(xy) = A'\Big(\sum_{k=o}^{n} C_n^k\, B'^k(x)\, C'^{n-k}(y)\Big)$$

$$= \sum_{k=o}^{n} C_n^k\, \big(B'^{k+1}(x)\, C'^{n-k}(y) + B'^k(x).C'^{n+1-k}(y)\big)$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} B'^k(x)\, C'^{n+1-k}(y) + \sum_{k=o}^{n} C_n^k\, B'^k(x)\, C'^{n+1-k}(y)$$

$$= B'^{n+1}(x).y + \sum_{k=1}^{n} (C_n^{k-1} + C_n^k)\, B'^k(x)\, C'^{n+1-k}(y) + x.C'^{n+1}(y)$$

$$= \sum_{k=o}^{n+1} C_{n+1}^k\, B'^k(x)\, C'^{n+1-k}(y)$$

on a donc pour tout n :

$$\frac{A'^n}{n!}(x.y) = \sum_{k=o}^{n} \frac{B'^k(x)}{k!}\, \frac{C'^{n-k}(y)}{(n-k)!}$$

Les deux séries $\dfrac{B'^k(x)}{k!}$ et $\dfrac{C'^k(y)}{k!}$ étant respectivement convergentes vers $(\exp B')(x)$ et $(\exp C')(y)$, il s'ensuit :

$$(\exp A')(xy) = \sum_{o}^{\infty} \frac{A'^n(xy)}{n!} = \Big(\sum_{o}^{\infty} \frac{B'^k(x)}{k!}\Big)\Big(\sum_{o}^{\infty} \frac{C'^k(y)}{k!}\Big)$$

c.a.d $A(xy) = B(x)\,C(y)$

avec $B = \exp B' \in SO(8)$ et $C = \exp C' \in SO(8)$

On appellera couple associé à $A \in SO(8)$ (par le principe de trialité) tout couple (B,C), $B,C \in SO(8)$ vérifiant (T_2)

Unicité

- Soit tout d'abord $A = id$ et (B,C) associé à A.

on a donc $\forall x,y \in \mathbb{C}a \quad x.y = B(x)\, C(y)$

$x = y = 1$ donne $1 = B(1)\, C(1)$

posant $r = B(1)$, $s = C(1)$ on a $|r| = |s| = 1$ et

$r = s^{-1} = \bar{s}$

$x = 1$ et $y = 1$ donnent respectivement

$$C = L_{r^{-1}} = L_s \quad \text{et} \quad B = R_{s^{-1}} = R_{\bar{s}}$$

d'où : $\forall x,y \in \mathbb{C}a \quad xy = (x\bar{s})(sy)$

mais $(x\bar{s})(sy) = \{x,\bar{s},sy\} + x(\bar{s}(sy))$

$= \{x, \bar{s}, sy\} + x.y$

donc $\forall x,y \in \mathbb{C}a \quad \{x,\bar{s},sy\} = o$

or $\{x,\bar{s},sy\} = \{x, t(s) - s, sy\}$

$= - \{x,s,sy\}$

et $\{sy,x,s\} = ((sy)x)s - (sy)(xs)$

$= ((sy)x)s - s(yx)s$ d'après l'identité de Moufang 2-2.(4)

$= \{s,y,x\}\, .s$

alors $\forall x,y \in \mathbb{C}a \quad \{s,y,x\}\, .s = o$

Comme $s \neq o$ il s'ensuit

$\forall x,y \in \mathbb{C}a \quad \{s,y,x\} = o$ et donc $s \in \mathbb{R}$

mais alors $|s| = 1 \Longrightarrow s = \pm 1$

Par conséquent si $A = id$ les deux seuls couples associés à A sont

(id, id) et $(-id, -id)$

- soit maintenant $A \in SO(8)$ quelconque et (B,C) associé.

Si $(\hat{B},\hat{C})$ est associé à $\hat{A} \in SO(8)$ on a :

$$\hat{A}(A(x.y)) = \hat{A}(B(x)\, C(y)) = (\hat{B}B)(x)\, (\hat{C}C)(y)$$

c.a.d $(\hat{B}B, \hat{C}C)$ est associé à $\hat{A}A$.

Soit alors $\hat{A} = A^{-1}$ et $(\hat{B}_o, \hat{C}_o)$ un couple fixé qui lui est associé. Comme $\hat{A}A = id$ et d'après ce qui précède on a :

$$\hat{B}_o B = \hat{C}_o C = \varepsilon\, id \quad \text{avec } \varepsilon = \pm 1$$

donc $B = \varepsilon\, \hat{B}_o^{-1}$ et $C = \varepsilon\, \hat{C}_o^{-1}$ sont uniques au signe près.

6.3. Posons $X = \{(B,C) \in SO(8) \times SO(8) \mid \exists A \in SO(8),\ (B,C) \text{ associé à } A\}$

et $p : X \longrightarrow SO(8)$ qui à (B,C) fait correspondre A.

D'après 6.2 X est un sous-groupe de Lie de $SO(8) \times SO(8)$ (par construction même de (B,C) à partir de A) et p est un homomorphisme surjectif avec $\ker p = \{(id,id), (-id,-id)\}$.

On va montrer que X est une réalisation de Spin(8).

<u>X est connexe par arcs</u>. Soient pour $i = 1,2$ $(B_i, C_i) \in X$, $A_i = p((B_i,C_i))$ et $A_i' \in o(8)$ tel que $A_i = \exp A_i'$.

Avec $A_t' = (1-t)A_1' + t\,A_2'$, $t \longrightarrow \exp A_t'$ est une courbe dans $SO(8)$ de A_1 à A_2 pour $0 \leq t \leq 1$.

Par le principe de trialité (T_1) si à A_i' correspond l'unique couple (B_i',C_i'), $i = 1,2$, à A_t' il correspond l'unique couple (B_t', C_t') avec $B_t' = (1-t)B_1' + tB_2'$ et $C_t' = (1-t)C_1' + tC_2'$.

Comme $(\exp B_i', \exp C_i')$ est associé à A_i on a

$$B_i = \varepsilon_i \exp B_i', \quad C_i = \varepsilon_i \exp C_i' \text{ avec } \varepsilon_i = \pm 1$$

Si $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ $t \longrightarrow \varepsilon(\exp B_t', \exp C_t')$ définit pour $0 \leq t \leq 1$ une courbe dans X de (B_1,C_1) à (B_2,C_2).

Si $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = 1$ on peut aller dans X de (B_1,C_1) à (id, id) et de $(-id,-id)$ à (B_2,C_2) ; pour montrer que X est connexe par arcs il suffit alors de montrer qu'on peut aller dans X de (id, id) à $(-id,-id)$.

Or pour $u \in (\mathbb{C}a)_o$ $\exp L_u = L_{\exp u} \in SO(8)$ et de même $\exp R_u = R_{\exp u} \in SO(8)$. Considérant $u_t = t\,\pi\, e_i$, $i > 0$, comme $e_i^2 = -1$ on a :

$$\exp u_t = \cos \pi t + \sin \pi t . e_i$$

et alors $t \longrightarrow L_{\exp u_t}$, $t \longrightarrow R_{\exp u_t}$, $0 \leq t \leq 1$ sont des courbes dans $SO(8)$ de id à $-id$.

Par suite $(L_{\exp u_t}, R_{\exp u_t})$ définit pour $0 \leq t \leq 1$ une courbe de (id,id) à $(-id,-id)$ et comme :

$$A_t = R_{\exp u_t} \circ L_{\exp u_t} \in SO(8) \text{ vérifie :}$$

$$\forall x,y \in \mathbb{C}a \qquad A_t(xy) = (\exp u_t.(xy))\exp u_t$$
$$= (\exp u_t.x)(y.\exp u_t) \qquad \text{(Moufang)}$$
$$= L_{\exp u_t}(x).\ R_{\exp u_t}(y)$$

cette courbe se trouve dans X.

X est Spin(8). Soit $V_1 \times V_2$ un voisinage de (id,id) dans X. $p_{|V_1\times V_2}$ est un isomorphisme de $V_1\times V_2$ sur $p(V_1\times V_2)$ car à A donné $\in p(V_1\times V_2)$ il correspond par le principe de trialité (B,C) et (-B,-C), mais un seul des deux couples se trouve dans $V_1\times V_2$.
X est donc un groupe de Lie connexe localement isomorphe à SO(8), donc aussi à Spin(8), revêtement universel de SO(8). On en déduit (Chevalley, Scholie p.49) que X est isomorphe à Spin(8) quotienté par un sous-groupe discret. Mais puisque X, tout comme Spin(8), est un revêtement à deux feuillets de SO(8), ce sous-groupe ne peut être que réduit à l'identité.

6.4. Spin(7) considéré comme sous-groupe de SO(8)

En identifiant SO(7) aux éléments A de SO(8) vérifiant $A(e_o) = e_o$ et o(7) aux éléments A' de o(8) vérifiant $A'(e_o) = o$, soit :

$$Y = \{(B,C) \in SO(8) \times SO(8) / \exists A \in SO(7),\ (B,C) \text{ associé à } A\}$$

$$= \{(B,C) \in X / p(B,C) \in SO(7)\}$$

Comme précédemment, on a $Y \simeq$ Spin(7). Il suffit seulement de changer dans la démonstration de la connexité, $(L_{\exp u_t}, R_{\exp u_t})$ en $(L_{\exp u_t}, R_{\exp -u_t})$ pour avoir $A_t \in SO(7)$: comme $\exp(-u_t) = (\exp u_t)^{-1}$ on peut encore utiliser l'identité de Moufang.

Soit maintenant $p_1 : Y \to SO(8)$ tel que

$$p_1\,[(B,C)] = B$$

et $Y_1 = p_1(Y)$.

Si $B \in Y_1$ il existe seulement deux couples (C,A) et (-C,-A) tels que (B,C) est associé à A et (B,-C) est associé à -A ; or seul l'un de A ou -A appartient à SO(7), ce qui montre que p_1 est un isomorphisme de Y sur Y_1.

D'autre part, par le principe de trialité (T_1') (6.1) si $A' \in o(7)$, comme $\kappa(A') = A'$, l'élément $B' \in o(8)$ associé de manière unique à A' est :

$$B' = \lambda(A') = \pi\kappa(A') = \pi(A')$$

Y_1 est ainsi une réalisation de Spin(7) dans SO(8) et a $\pi[o(7)]$ pour algèbre de Lie.

De même $Y_2 = p_2(Y)$ $(p_2((B,C)) = C)$ est isomorphe à Spin(7) et est le sous-groupe de SO(8) qui a $\bar{\pi}(o(7)) = \pi\kappa\pi[o(7)]$ pour algèbre de Lie car

$$C' = \lambda^2(A') = \pi\kappa\pi\kappa(A') = \pi\kappa\pi(A')$$

7 - LES AUTOMORPHISMES DE $\mathbb{C}a$

7-1. Ce sont les isomorphismes u de $\mathbb{C}a$ vérifiant

$$\forall x,y \in \mathbb{C}a \qquad u(x.y) = u(x).u(y)$$

Ils forment un groupe, Aut($\mathbb{C}a$).

Proposition : Aut($\mathbb{C}a$) $\subset$ SO(8)

Démonstration : Si $u \in$ Aut($\mathbb{C}a$) on a $u(1) = 1$ et, pour $i = 1,\dots,7$, $e_i^2 = -1$ donne $u(e_i^2) = u(e_i)^2 = -1$, d'où $|u(e_i)| = 1$, $i \geqslant 0$

De $u(e_i)u(\bar{e}_i) = 1$ il suit $u(\bar{e}_i) = \overline{u(e_i)}$; par suite :

$$\forall x \in \mathbb{C}a \qquad u(\bar{x}) = \overline{u(x)}$$

Alors $u(x\bar{x}) = |x|^2 = u(x)\ u(\bar{x}) = |u(x)|^2$ donne

$\forall x \in \mathbb{C}a \quad |u(x)| = |x|$, c.a.d Aut($\mathbb{C}a$) $\subset$ O(8).

Maintenant si $\det u = -1$, K étant l'involution $x \longrightarrow \bar{x}$ de $\mathbb{C}a$ on a $\det K = -1$, d'où $\phi = Ku \in$ SO(8) et vérifie :

$\forall x,y \in \mathbb{C}a \qquad \phi(x.y) = \phi(y).\phi(x)$

d'après le principe de trialité dans SO(8), il existerait alors B, C $\in$ SO(8) tels que :

$\forall x,y \in \mathbb{C}a \qquad \phi(x.y) = B(x).C(y)$

$x = y = 1$ donne $B(1).C(1) = 1$ et $x = 1$, $y = 1$ donnent respectivement $C = L_r\phi$ et $B = R_{\bar{r}}\phi$ où $r = C(1)$.

Par suite :

$\forall x,y \in \mathbb{C}a \qquad (\phi(x).\overline{r}).(r.\phi(y)) = \phi(y).\phi(x)$

soit ϕ étant bijectif :

$(*)\ \forall a,b \quad \mathbb{C}a \qquad (a\,\overline{r})\,(r\,b) = ba$

en particulier, comme $|r| = 1$, $a = r$ donne

$\forall b \in \mathbb{C}a \qquad rb = br$

d'où $r \in \mathbb{R}$ et $r = \pm 1$.

Par $(*)$, $\mathbb{C}a$ serait commutative. Nous avons ainsi démontré que $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}a) \subset SO(8)$.

7-2. D'après le principe de trialité et sa démonstration, l'algèbre de Lie de $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}a)$ n'est autre que l'algèbre $\mathcal{D}$ des dérivations de $\mathbb{C}a$. Il nous faut donc préciser cette algèbre $\mathcal{D}$ pour voir à quel groupe elle correspond dans la classification de Cartan.

On a vu (5-1, 5-2) que pour une dérivation D :

$$\pi(D) = \kappa(D) = \lambda(D) = D$$

Inversement si $\pi(D) = \kappa(D) = D$ pour un élément D de $o(8)$ on a également $\lambda(D) = \pi\kappa(D) = D$ et le principe de trialité T_1' montre que $D(xy) = Dx.y + x.Dy$.

$\mathcal{D}$, algèbre des dérivations de $\mathbb{C}a$, est donc l'intersection des sous-espaces propres pour la valeur propre 1 des deux automorphismes involutifs π , κ de $o(8)$, dont les matrices dans h_i sont (on a ajouté le troisième automorphisme involutif de $o(8)$, à savoir $\overline{\pi} = \pi\kappa\pi = \kappa\pi\kappa$):

$$\pi : \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \kappa : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{\pi} : \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Les équations des sous-espaces propres pour la valeur propre 1 sont respectivement (dans chaque h_i) :

$$\alpha_o + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 , \qquad \alpha_o = 0 , \qquad \alpha_o - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0$$

Les vecteurs propres pour la valeur propre -1 sont respectivement :

$$u_i = (1, 1, 1, 1) \quad , \quad v_i = (1,0,0,0) \quad , \quad w_i = (1,-1,-1,-1)$$

c.a.d $\quad u_i = G_{io} + G_{i_1 i_2} + G_{i'_1 i'_2} + G_{i''_1 i''_2} = 2(G_{io} - F_{io}) = R_{e_i}$

$$v_i = G_{io}$$

$$w_i = G_{io} - G_{i_1 i_2} - G_{i'_1 i'_2} - G_{i''_1 i''_2} = L_{e_i}$$

on a alors :

<u>Théorème</u> : Aut($\mathbb{C}$a) est le groupe exceptionnel G_2 dans la classification d'E.Cartan. (sa forme réelle compacte).

<u>Démonstration</u> : Les équations de $\mathcal{D}$ sont $\alpha_o = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$; par suite :

$$k_i = \{(G_{i_1 i_2} - G_{i'_1 i'_2}), (G_{i_1 i_2} - G_{i''_1 i''_2})\}$$

sous-algèbre de h_i (cf.5-1) est une sous-algèbre abélienne de dimension 2 de $\mathcal{D}$. D'autre part si $X \in \mathcal{D}$ vérifie $\forall D \in k_i \quad [D,X] \in k_i$, la même démonstration qu'en 5-3 montre que $X \in k_i$.

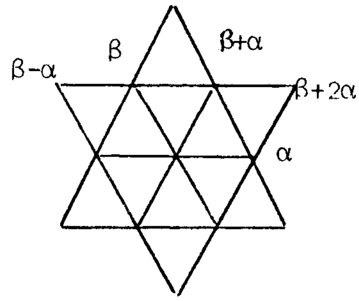
Il s'ensuit que k_i est une sous-algèbre de Cartan de $\mathcal{D}$ et si $D \in k_i$ les sous-espaces de $\mathcal{D}$ stables par ad(D) font partie des sous-espaces de o(8) stables par ad(D) pour $D \in h_i$.

Il en résulte que les racines de $\mathcal{D}$ sont les restrictions des racines de o(8) (cf.5-3) au sous-espace de $\mathbb{C}^4$ défini par $\alpha_o = 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$, soit :

$$\pm(\alpha \pm\beta)i \quad , \quad \pm\alpha i \quad , \quad \pm\beta i, \quad \pm(2\alpha+\beta)i \quad , \quad \pm(\alpha+2\beta)i$$

où l'on a posé : $\alpha+\beta = \alpha_1$, $\alpha = -\alpha_2$ $\beta = -\alpha_3$

Puisque $\beta-\alpha$, β ,$\beta+\alpha$, $\beta+2\alpha$ appartiennent à la figure des racines, l'entier de Cartan $a_{\beta\alpha} = -3$ et cette figure est celle du groupe exceptionnel G_2.



On pourra se référer à [S N] p.48 pour cette figure et p.83 pour une description plus précise de la figure des racines de G_2.

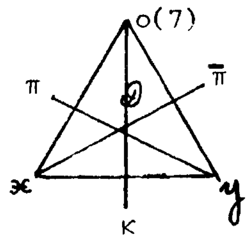
8 - LES ESPACES HOMOGENES REDUCTIFS SPIN(7)/G_2 ET SO(7)/G_2

8.1 - Soit, respectivement, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{X}$ et o(7) les sous-espaces de points fixes pour les involutions π, $\bar{\pi}$, κ

$$\mathcal{Y} = \pi(\mathcal{Y}) \;, \qquad \mathcal{X} = \bar{\pi}(\mathcal{X}) \;, \qquad o(7) = \kappa(o(7))$$

Comme $\bar{\pi} = \kappa\pi\kappa = \pi\kappa\pi$ on a :

$$\left.\begin{aligned} \bar{\pi}(\mathcal{Y}) &= \pi(\mathcal{X}) = o(7) \\ \mathcal{Y} &= \kappa(\mathcal{X}) \end{aligned}\right\}$$ résumé par le diagramme ci-contre



De l'existence des trois automorphismes involutifs κ, π, $\bar{\pi}$ de o(8) et de la remarque de 6.3, on déduit les deux espaces homogènes symétriques compacts de rang 1 (C.R.O.S.S) de dimension 7 :

$$SO(8)_{/SO(7)} \simeq S^7 \quad , \qquad SO(8)_{/Spin(7)} \simeq \mathbb{R}P^7$$

le premier est associé à κ, le deuxième à π(ou $\bar{\pi}$). Les 7 vecteurs $v_i = G_{io}$ et les 7 vecteurs $u_i = R_{e_i}$ (ou $w_i = L_{e_i}$) donnent respectivement 7 champs de vecteurs sur S^7 et $\mathbb{R}P^7$, réalisation de la parallélisabilité.

8.2. L'équation de $\mathcal{K} = \overline{\pi}(\mathcal{K})$ est $\alpha_o-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3 = 0$

donc on peut écrire :

$\mathcal{K} = \pi(o(7)) = \mathfrak{g}_2 \oplus \{L_{e_i} + 2R_{e_i},\ 1\leqslant i\leqslant 7\}$

(car $L_{e_i} + 2R_{e_i} = 3G_{io} + G_{i_1 i_2} + G_{i'_1 i'_2} + G_{i''_1 i''_2}$)

Notons $\mathfrak{m} = \{L_{e_i} + 2R_{e_i}\ ,\ 1\leqslant i\leqslant 7\}$; pour $D \in \mathfrak{g}_2$:

$[D,L_{e_i}] = L_{De_i}$, $[D,R_{e_i}] = R_{De_i}$ et $D(\mathbb{C}a) \subset (\mathbb{C}a)_o$.

Donc $[\mathfrak{g}_2,\mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$; d'autre part $[\ \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_2\ ] \subset \mathfrak{g}_2$.

Il s'ensuit que $\mathrm{Spin}(7)/_{G_2}$ est un espace homogène réductif [KN] .

De même avec $o(7) = \pi(\mathcal{K}) = \mathfrak{g}_2 \oplus \{L_{e_i} - R_{e_i}\ ,\ 1\leqslant i\leqslant 7\}$

$SO(7)/_{G_2}$ est un espace homogène réductif.

pour caractériser ces espaces le principe de trialité T'_1 peut s'écrire :

$\forall A' \in o(8)\quad A'(x.y) = \pi(A')(x).y + x.\overline{\pi}(A')(y)$

$\forall x,y \in \mathbb{C}a$.

8.3 <u>L'espace Spin(7)</u>$/_{G_2}$

Si $A' \in \mathcal{K}$ on a $\overline{\pi}(A') = A'$ et donc

$A'(x.y) = \pi(A')(x).y + x.A'(y)$.

Par suite pour $A \in \mathrm{Spin}(7)$ on a :

$\forall x,y \in \mathbb{C}a\quad A(x.y) = (\exp \pi A')(x).A(y)$ avec $A' \in \mathcal{K}, \exp A' = A$

c.a.d si $A \in \mathrm{Spin}(7)$ on a d'une manière unique :

$\forall x,y \in \mathbb{C}a\quad A(x.y) = B(x).A(y)$

où B est l'unique élément de $SO(8)$ tel que (B,A) soit associé à A par la trialité.

Posons $A(1) = r$ on a :

$r \in S^7$ et $B = R_{\overline{r}}A$

d'où $A(x.y) = (A(x)\overline{r}).A(y)$.

Réciproquement si A est un élément de $SO(8)$ vérifiant l'égalité précédente pour $r \in S^7$ on a :

$A(1) = r$ et $B = R_{\overline{r}}A \in SO(8)$ car $R_{\overline{r}} \in SO(8)$:

tout élément de $\mathbb{C}a$ est le carré d'un élément x de $\mathbb{C}a$ et $(R_x)^2 = R_{x^2}$ implique $\det R_{\overline{r}} = (\det R_x)^2 = 1$.

De $A(xy) = B(x)\,A(y)$ on déduit :

$B(xy) = A(x)\,\overline{A(\overline{y})} = A(x).\kappa A(y)$

mais $B(1) = A(1)\,\overline{r} = 1$ donne $B \in SO(7)$; 6-4 p.19 permet alors de conclure $A \in Spin(7)$.

On a ainsi démontré l'équivalence : pour $A \in SO(8)$

$$A \in Spin(7) \Longleftrightarrow \exists !\, r \in S^7 \quad \forall x,y \in \mathbb{C}a \quad A(x.y) = (A(x)\overline{r})A(y)$$

et on a la relation $r = A(1)$.

Soit donc ψ : $Spin(7) \longrightarrow S^7$ définie par

$$\psi(A) = A(1).$$

<u>ψ est surjective</u> : pour $r \in S^7$ donné, soit $s \in \mathbb{C}a$ fixé tel que r et s engendrent une algèbre de quaternions $\mathfrak{B} = \mathbb{H}(r,s)$ et soit $v \in \mathfrak{B}^{\perp}$ tel que

$\mathbb{C}a = \mathfrak{B} \oplus v\mathfrak{B}$ (cf.3.3)

Définissons A sur $\mathbb{C}a$ par :

$$\left.\begin{array}{l} A(x) = xr \\ A(vx) = vx \end{array}\right. \quad x \in \mathfrak{B}$$

on a $A \in SO(8)$ et à l'aide des règles de calculs données en 3.3 on vérifie :

$\forall x,y \in \mathbb{C}a \qquad A(x.y) = (A(x)\overline{r})A(y)$

d'où la surjectivité de ψ .

<u>Décomposition canonique de ψ</u> : Si $\psi(A) = \psi(B)$ on a $A(1) = B(1)$, d'où $B^{-1}A(1) = 1$, ce qui est équivalent à $B^{-1}A \in Spin(7) \cap SO(7) = G_2$

De ce qui précède, on a ainsi une bijection (qui est un difféomorphisme) :

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\psi} : Spin(7)/G_2 & \longrightarrow & S^7 \\ cl(A) & \longrightarrow & A(1) \end{array}$$

D'autre part si $\psi(A) = r$, $\psi(B) = s$, à l'aide de l'identité $[(a\,b)c]b = a(bcb)$, ([S.R] p.28) ; on trouve après calculs :

$\forall x,y \in \mathbb{C}a$: $BA(x.y) = [BA(x).(\overline{s}\,B(\overline{r})\overline{s})]\,BA(y)$

c.a.d :

Si $\psi(A) = r$, $\psi(B) = s$ on a $\psi(BA) = s(\kappa B(r)).s$ avec encore $\kappa B = KBK$ (K involution de $\mathbb{C}a$, cf.5.2).

Cela nous précise l'action du groupe $Spin(7)$ sur S^7 :

$$(B,r) \longrightarrow s.\kappa B(r).s \quad \text{où } s = B(1).$$

8.4 <u>L'espace $SO(7)$</u>$/G_2$

Si (B,C) est associé à A (par la trialité) nous avons toujours :

$$B = R_{\overline{C(1)}}A \;,\; C = L_{\overline{B(1)}}A$$

Pour $A \in SO(7)$, $A(1) = 1$ donne $1 = B(1)C(1)$ d'où :

$\forall x,y \in \mathbb{C}a \qquad A(x.y) = (A(x)r).(\bar{r}\,A(y))$

avec $r = B(1) \in S^7$ est défini au signe près (comme B).

Réciproquement si $r \in S^7$ et $A \in SO(8)$ vérifie l'égalité précédente, on a :

$$A(1) = A(1)^2 \text{ d'où } A(1) = 1 \quad \text{, c.a.d } A \in SO(7).$$

On peut alors énoncer : si $A \in SO(8)$:

$$A \in SO(7) \iff \exists!\, \dot{r} \in \mathbb{R}P^7 \quad \forall x,y \in \mathbb{C}a \quad A(x.y) = (A(x)r)(\bar{r}A(y))$$

soit donc $\phi : SO(7) \longrightarrow \mathbb{R}P^7$

$$A \longmapsto \dot{r}$$

Si $r \in S^7$ $A = L_rR_{\bar{r}}$ est un élément de $SO(7)$ qui vérifie $A(x.y)=(A(x)r)(\bar{r}A(y))$ (par Moufang), d'où la surjectivité de ϕ .

Maintenant, pour $A,B \in SO(7)$, si $\phi(A) = \dot{r}$ et $A^{-1}B \in G_2$ on a :

$B = A\,u$ avec $u \in G_2$, et :

$$B(x.y) = A(u(x.y)) = A(u(x)u(y)) = (Au(x)r)(\bar{r}\,Au(y))$$
$$= (B(x)r)\,(\bar{r}\,B(y))$$

donne $\phi(B) = \dot{r} = \phi(A)$.

Avant d'étudier la décomposition canonique de ϕ calculons $\phi(A\,B)$ pour $\dot{r} = \phi(A)$, $\dot{s} = \phi(B)$

On trouve (à l'aide de $[(ab)c]b = a(bcb)$):

$$AB(x.y) = \left[AB(x)(A(s)r)\right] . \left[(\bar{r}.A(\bar{s})).AB(y)\right]$$

ce qui donne : $\phi(AB) = \dot{\widehat{A(s)r}}$

en particulier $\dot{1} = \phi(I) = \phi(A^{-1}A) = \dot{\widehat{A^{-1}(r)r'}}$, $(\dot{r}' = \phi(A^{-1}))$

et $\phi(A^{-1}) = \overline{A^{-1}(r)} = \dot{\widehat{A^{-1}(\bar{r})}}$

par suite si $\phi(B) = \phi(A) = \dot{r}$ on a :

$\phi(A^{-1}B) = \dot{\widehat{A^{-1}(r).\overline{A^{-1}(r)}}} = \dot{1}$

or $\phi(C) = \dot{1}$ pour $C \in SO(7)$ signifie $C(x.y) = (Cx)(Cy)$, c'est-à-dire $C \in G_2$

on a démontré :

$$\phi(A) = \phi(B) \Longleftrightarrow A^{-1}B \in G_2$$

on en déduit la bijection :

$$\tilde{\phi} : SO(7)/_{G_2} \longrightarrow \mathbb{R}P^7$$

$$cl(A) \longmapsto \dot{r}$$

et une action de $SO(7)$ sur $\mathbb{R}P^7$ définie par :

$$(B,r) \longmapsto \dot{\widehat{B(r)s}}$$

où s est tel que $\phi(B) = \dot{s}$

CHAPITRE II

L'ALGEBRE DE JORDAN $\mathcal{J}$ DES MATRICES 3×3 HERMITIENNES A COEFFICIENTS DANS $\mathbb{C}a$

9 - $\mathcal{M}_n$, ALGEBRE DES MATRICES n×n A COEFFICIENTS DANS $\mathbb{C}a$

9-1. On note $\mathcal{M}_n$ l'algèbre (non associative) des matrices n×n à coefficients dans $\mathbb{C}a$.

Pour $A \in \mathcal{M}_n$ on pose :

$A^* = {}^t\overline{A}$, $\chi(A) = \text{trace}(A)$

et on définit :

$\mathcal{M}_n^+ = \{A \in \mathcal{M}_n \ / \ A^* = A\}$

$\mathcal{M}_n^- = \{A \in \mathcal{M}_n \ / \ A^* = -A\}$

Si $X = (x_{ij})$ et $Y = (y_{ij}) \in \mathcal{M}_n$ de :

$(XY)_{ij} = \sum_k x_{ik}\, y_{kj}$, $({}^tX{}^tY)_{ij} = \sum_k x_{ki} y_{jk}$

et de :

$(\overline{XY})_{ij} = \sum_k \overline{y}_{kj}\, \overline{x}_{ik} = ({}^t\overline{Y}\, {}^t\overline{X})_{ji}$

on déduit :

$\chi(XY) = \chi({}^tX{}^tY)$ et $(XY)^* = Y^*X^*$

par suite : $\overline{\chi(XY)} = \chi((XY)^*) = \chi(Y^*X^*)$

et : (pour la notation $t(x)$, $x \in \mathbb{C}a$, cf.1-2)

$(X|Y) = \frac{1}{2}\, t(\chi(XY)) = \frac{1}{2}(\chi(XY) + \overline{\chi(XY)})$

$= \chi(\frac{1}{2}\,(XY + Y^*X^*))$

est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur $\mathcal{M}_n$.

En effet :

$t(\chi(XY)) = t(\sum_{i,k} x_{ik}y_{ki}) = \sum_{i,k} t(x_{ik}y_{ki})$ (cf.2-1.)

$= \sum_{i,k} t(y_{ki}\, x_{ik}) = t(\chi(Y\,X))$

et si $X \neq o$ $(X|X^*) = \chi(XX^*) = \sum_{i,k} |x_{ik}|^2 > o$

D'autre part si $X,Y \in \mathfrak{M}_n^+$ ou $X,Y \in \mathfrak{M}_n^-$ on a :

$$(X|Y) = \chi(\tfrac{1}{2}(XY + YX))$$

et comme $(X|X) = \pm(X|X^*)$ pour $X \in \mathfrak{M}_n^{\pm}$, $(\,|\,)$ est respectivement définie positive et définie négative sur $\mathfrak{M}_n^+$, $\mathfrak{M}_n^-$.

Ensuite si $X \in \mathfrak{M}_n^+$, $Y \in \mathfrak{M}_n^-$ on a :

$$(X|Y) = \chi(\tfrac{1}{2}(XY-YX)) = -\chi(\tfrac{1}{2}(YX - XY)) = -(X|Y)$$

c.a.d $\mathfrak{M}_n^+$ et $\mathfrak{M}_n^-$ sont orthogonaux pour $(\,|\,)$.

9-2 De $\{y,x,z\} = \{x,z,y\}$ il vient :

$$(yx)z + x(zy) = y(xz) + (xz)y$$

d'où pour $X,Y,Z \in \mathfrak{M}_n$:

$$\chi((YX)Z) + \chi(X(ZY)) = \chi(Y(XZ)) + \chi((XZ)Y)$$

et donc

$$(YX|Z) + (X|ZY) = (Y|XZ) + (XZ|Y) = 2(Y|XZ)$$

de même $(XZ|Y) + (Z|YX) = 2(X|ZY)$

alors $(X|ZY) - (XZ|Y) = 2(Y|XZ) - 2(X|ZY)$

donne : $(XZ|Y) = (X|ZY)$

de même $(ZY|X) = (Z|YX)$ et en échangeant X et Z dans $(XZ|Y) = (Z|YX)$

$$(ZX|Y) = (X|YZ)$$

par suite :

$$([Z,X]|Y) = (X|[Y,Z]) = -(X|[Z,Y])$$

Considérant alors l'application linéaire de $\mathfrak{M}_n$ définie pour $Z \in \mathfrak{M}_n$ par :

$$\tilde{Z}(X) = [Z,X]$$

on a

$$\forall X,Y \in \mathfrak{M}_n \quad (\tilde{Z}(X)|Y) + (X|\tilde{Z}(Y)) = o$$

c.a.d $\tilde{Z}$ appartient à l'algèbre de Lie des opérateurs linéaires de $\mathfrak{M}_n$ anti-symétriques pour $(\,|\,)$.

D'autre part de $[X,Y]^* = -[X^*,Y^*]$ on déduit les relations :

$$[\mathfrak{M}_n^+ , \mathfrak{M}_n^+] \subset \mathfrak{M}_n^-$$

$$[\mathfrak{M}_n^- , \mathfrak{M}_n^-] \subset \mathfrak{M}_n^-$$

$$[\mathfrak{M}_n^+ , \mathfrak{M}_n^-] \subset \mathfrak{M}_n^+$$

10 - $\mathfrak{J}$, ALGEBRE DE JORDAN EXCEPTIONNELLE SUR $\mathbb{R}$

10-1. On considère maintenant le cas n = 3 et pour $X \in \mathfrak{M}_3^+$ l'élément :

$$\gamma(X) = X(XX) - (XX)X$$

Comme $[\mathfrak{M}_3^+, \mathfrak{M}_3^+] \subset \mathfrak{M}_3^-$, $\gamma(X) \in \mathfrak{M}_3^-$.

Pour $X = (x_{ik})$, à la $i^{\text{ème}}$ ligne, $j^{\text{ème}}$ colonne de $\gamma(X)$ se trouve :

$$\sum_{k,\ell} x_{ik}(x_{k\ell}x_{\ell j}) - \sum_{k,\ell}(x_{ik}x_{k\ell})x_{\ell j} = -\sum_{k,\ell}\{x_{ik},x_{k\ell},x_{\ell j}\}$$

Pour $i \neq j$ deux au moins parmi les indices i,j,k,ℓ sont égaux ; donc parmi x_{ik}, $x_{k\ell}$, $x_{\ell j}$, comme $X \in \mathfrak{M}_3^+$, soit l'un au moins est réel, soit deux sont conjugués.

Ainsi pour $i \neq j$ $\{x_{ik},x_{k\ell},x_{\ell j}\} = o$

Les seuls éléments non nuls de $\gamma(X)$ sont donc diagonaux, d'où

$$\gamma(X) = a.I$$

D'autre part comme $\gamma(X) \in \mathfrak{M}_3^-$ on a $a \in (\mathbb{C}a)_o$

Soit maintenant $A \in \mathfrak{M}_3$ tel que $\chi(A) = o$. On a

$$\chi(A(aI)) = \chi(A).a = o$$

donc si $X \in \mathfrak{M}_3^+$:

$$(A|\gamma(X)) = o \quad \text{et d'après 9-2 :}$$

$$(AX|XX) = (A|X(XX)) = (A|(XX)X) = (XA|XX)$$

d'où :

$$(\tilde{A}X|X^2) = o$$

En linéarisant cette relation on a alors pour $X,Y,Z \in \mathfrak{M}_3^+$ et $A \in \mathfrak{M}_3$, $\chi(A) = o$:

$$(\tilde{A}X|YZ + ZY) + (\tilde{A}Y|ZX + XZ) + (\tilde{A}Z|XY + YX) = o$$

ceci amène à définir un produit commutatif sur $\mathfrak{M}_3^+$ en posant :

$$X \circ Y = \frac{1}{2}(XY + YX)$$

ainsi $(X|Y) = \chi(X \circ Y)$ et comme $(X|Y \circ Z) = (X \circ Y|Z)$

on a : $\chi(X \circ (Y \circ Z)) = \chi((X \circ Y) \circ Z)$

ce qui définit également une forme trilinéaire symétrique sur $\mathfrak{M}_3^+$ par :

$$(X,Y,Z) = \chi(X \circ Y \circ Z)$$

Avec ces notations si $A \in \mathfrak{M}_3^-$, comme $[\mathfrak{M}_3^-, \mathfrak{M}_3^+] \subset \mathfrak{M}_3^+$,
$\tilde{A}$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, $\mathfrak{M}_3^+$, vérifiant comme on l'a vu en 9-2 :

$$\forall X,Y \in \mathfrak{M}_3^+ \quad (\tilde{A}X|Y) + (X|\tilde{A}Y) = o$$

et si de plus $X(A) = o$:

$$\forall X,Y,Z \in \mathfrak{M}_3^+ \quad (\tilde{A}X,Y,Z) + (X,\tilde{A}Y,Z) + (X,Y,\tilde{A}Z) = o$$

$\tilde{A}$ appartient alors à l'algèbre de Lie des opérateurs de $\mathfrak{M}_3^+$ antisymétriques pour le produit scalaire $(|)$, qui de plus laissent invariante (infinitésimalement) la forme trilinéaire $(\,,\, ,\,)$.

On note $\mathfrak{J}$ l'espace vectoriel $\mathfrak{M}_3^+$ muni du produit commutatif o et du produit scalaire euclidien $(\,|\,)$.
On pourra identifier $\mathfrak{M}_3^+$ à $\mathbb{R}^{27}$ et l'algèbre de Lie de ses opérateurs antisymétriques pour $(\,|\,)$ à $o(27)$

10-2. Soit $X \in \mathfrak{J}$. On notera :

$$X = \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix}, \qquad \xi_i \in \mathbb{R}, \qquad x_i \in \mathbb{C}a$$

X se décompose de manière unique sous la forme :

$$X = \xi_1 E_1 + \xi_2 E_2 + \xi_3 E_3 + F_a^1 + F_b^2 + F_c^3 \quad , \text{où}$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_a^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & \overline{a} & 0 \end{pmatrix}, \quad F_b^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \overline{b} \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_c^3 = \begin{pmatrix} 0 & c & 0 \\ \overline{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Avec ces notations une base de $\mathfrak{J}$ est :

$$\{ E_i \,,\, F^i_{e_j} \}_{\substack{i=1,2,3 \\ j=0,..,7}}$$

la table de composition de cette base est :

$E_i \circ E_j = \delta_{ij}\, E_i$

$E_i \circ F^i_a = o$

$E_i \circ F^j_a = \frac{1}{2} F^j_a$ si $i \neq j$

$F^i_a \circ F^i_b = (a|b)(E_j + E_k)$ où i,j,k sont différents

$F^i_a \circ F^j_b = \frac{1}{2} F^k_{\overline{ab}}$ où (i,j,k) est une permutation paire de (1,2,3)

Il en résulte qu'une base orthonormée de $\mathcal{J}$ est :

$$\{ E_i, \frac{1}{\sqrt{2}} F^i_{e_j} \}_{\substack{i=1,2,3\\ j=o,\dots,7}} \qquad (\{e_j\}_{j=o,\dots,7} \text{ base orthonormée de } \mathbf{Ca}).$$

11 - LES DERIVATIONS DE L'ALGEBRE $\mathcal{J}$

11-1. Soit tout d'abord $X \in \mathcal{J}$ et L_X la translation $Y \longrightarrow X \circ Y$. D'après 10-2 on a :

$$\text{trace}(L_X) = \sum_{i=1}^{3} (L_X E_i | E_i) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1,2,3\\ \ell=o,\dots,7}} (L_X F^i_{e_\ell} \mid F^i_{e_\ell})$$

En écrivant : $X = \sum_{k=1}^{3} (\xi_k E_k + F^k_{a_k})$, il vient :

$L_X E_i = \xi_i E_i + \frac{1}{2}(F^j_{a_j} + F^k_{a_k})$, i,j,k différents

$L_X F^i_{e_\ell} = \frac{1}{2}(\xi_j+\xi_k)F^i_{e_\ell} + (e_\ell|a_i)(E_j+E_k) + \frac{1}{2}(F^j_{b_j} + F^k_{b_k})$ avec $b_r = \overline{a_r e_\ell}$ ou $\overline{e_\ell a_r}$

par suite :

$$\text{trace}(L_X) = \sum_{i=1}^{3} \xi_i + \frac{1}{4} \sum_{\substack{i=1,2,3\\ \ell=o,\dots,7}} (\xi_j+\xi_k)(F^i_{e_\ell}|F^i_{e_\ell})$$

$$= (\xi_1+\xi_2+\xi_3)\ (1+8) = 9(\xi_1+\xi_2+\xi_3)$$

soit : (1) $\quad \text{trace}(L_X) = 9\chi(X)$

Notons maintenant $\mathcal{D}(\mathcal{J})$ l'ensemble des dérivations de $\mathcal{J}$, c.a.d l'ensemble des endomorphismes D de $\mathcal{J}$ vérifiant :

$\forall X,Y \in \mathcal{J} \qquad D(X \circ Y) = DX \circ Y + X \circ DY$

ou bien, d'une manière équivalente :

$\forall X \in \mathcal{J} \quad L_{DX} = [D, L_X]$

Si donc $D \in \mathcal{D}(\mathfrak{J})$ on a : $\mathrm{trace}(L_{DX}) = 0$ et d'après (1)

$\forall X \in \mathfrak{J} \quad \chi(DX) = 0$

Il en résulte $\chi(D(X \circ Y)) = \chi(DX \circ Y) + \chi(X \circ DY) = 0$

d'où

(2) $\quad \forall X,Y \in \mathfrak{J} \qquad (DX|Y) + (X|DY) = 0$

Ainsi $\mathcal{D}(\mathfrak{J}) \subset o(27)$

D'autre part

$D((X \circ Y) \circ Z) = D(X \circ Y) \circ Z + (X \circ Y) \circ DZ$

$\qquad = (DX \circ Y) \circ Z + (X \circ DY) \circ Z + (X \circ Y) \circ DZ$

donne, en prenant la trace :

(3) $\forall X,Y,Z \in \mathfrak{J} \quad (DX,Y,Z) + (X,DY,Z) + (X,Y,DZ) = 0$

Réciproquement, soit D un endomorphisme de $\mathfrak{J}$ vérifiant les relations (2) et (3)

On a alors $\forall X,Y,Z \in \mathfrak{J}$:

$\chi(D(X \circ Y) \circ Z) + \chi(X \circ Y \circ DZ) = 0$ et

$\chi(D(X \circ Y) \circ Z) - \chi(DX \circ Y \circ Z) - \chi(X \circ DY \circ Z) = 0$

d'où

$\forall Z \in \mathfrak{J} \quad (D(X \circ Y) - DX \circ Y - X \circ DY|Z) = 0$

$(\,|\,)$ étant non dégénérée sur $\mathfrak{J}$ on a donc

$\forall X,Y \in \mathfrak{J} \qquad D(X \circ Y) = DX \circ Y + X \circ DY$

c.a.d $\quad D \in \mathcal{D}(\mathfrak{J})$

Les dérivations de $\mathfrak{J}$ sont ainsi caractérisées par les relations (2) et (3).

11-2. Notons $\mathcal{K}$ l'ensemble des $A \in \mathfrak{M}_3^-$ vérifiant $\chi(A) = 0$. D'après ce qui précède et d'après 10-1 on a :

$$\tilde{A} \in \mathcal{D}(\mathfrak{J}) \text{ si } A \in \mathcal{K}$$

Soit alors $D \in \mathcal{D}(\mathfrak{J})$. On a, avec $\mathcal{K}_o = \{A \in \mathcal{K} / \text{diagonale nulle}\}$

<u>lemme</u> : il existe $A \in \mathcal{K}_o$ tel que

$$\tilde{A}(E_i) = DE_i \quad , \qquad i = 1,2,3$$

<u>Démonstration</u> :

posons $DE_1 = \xi_1 E_1 + \xi_2 E_2 + \xi_3 E_3 + F^1_{x_1} + F^2_{x_2} + F^3_{x_3}$

comme $E_1^2 = E_1$ on doit avoir $2E_1 \circ DE_1 = DE_1$, d'où $2(\xi_1 E_1 + \frac{1}{2} F^2_{x_2} + \frac{1}{2} F^3_{x_3}) = DE_1$

ce qui donne $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = x_1 = 0$

donc $DE_1 = \begin{pmatrix} 0 & x_3 & \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et de même $DE_2 = \begin{pmatrix} 0 & y_3 & 0 \\ \overline{y}_3 & 0 & y_1 \\ 0 & \overline{y}_1 & 0 \end{pmatrix}$

mais $E_1 \circ E_2 = 0$ donne $DE_1 \circ E_2 + E_1 \circ DE_2 = 0$, d'où

$x_3 + y_3 = 0$ et donc

$$DE_2 = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & 0 \\ -\bar{x}_3 & 0 & -x_1 \\ 0 & -\bar{x}_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(en notant } -x_1\text{, au lieu de } y_1\text{)}$$

maintenant de la relation $E_1+E_2+E_3 = I$ et de $DI = 0$ (qui résulte de $D(X \circ Y) = DX \circ Y + X \circ DY$ avec $X = Y = I$), on tire :

$$DE_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\bar{x}_2 \\ 0 & 0 & x_1 \\ -x_2 & \bar{x}_1 & 0 \end{pmatrix}$$

prenant alors $A = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & -\bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & -\bar{x}_1 & 0 \end{pmatrix}$ on a :

$A \in \mathcal{K}_o$ et vérifie $DE_i = \tilde{A}(E_i)$, $i = 1,2,3$.

Notons $\tilde{\mathcal{K}} = \{ \tilde{A} / A \in \mathcal{K} \}$ et $\mathcal{D}_o(\mathcal{J}) = \{ D \in \mathcal{D}(\mathcal{J}) \ / \ DE_i = 0, \ i = 1,2,3 \}$.
De ce lemme on a :

<u>Proposition 1</u> : $\mathcal{D}(\mathcal{J}) = \tilde{\mathcal{K}}_o \oplus \mathcal{D}_o(\mathcal{J})$ (somme d'espaces vectoriels).
En effet si $D \in \mathcal{D}(\mathcal{J})$, d'après le lemme, $D-\tilde{A}$ est une dérivation D_o qui vérifie $D_oE_i = DE_i - \tilde{A}(E_i) = 0$, $i = 1,2,3$, donc $D = \tilde{A} + D_o$.
D'autre part, si $\tilde{A} + D_o = 0$, $\tilde{A}(E_i) = 0$ pour $A \in \mathcal{K}_o$ et $i = 1,2,3$; alors on doit avoir, en reprenant la démonstration du lemme,

$$x_3 = x_2 = x_1 = 0 \quad , \qquad \text{d'où } A = 0$$

D'autre part on a :

<u>Proposition 2</u> : $\mathcal{D}_o(\mathcal{J}) = o(8)$: isomorphisme d'algèbres de Lie.
Soit $\mathcal{F}^i$ l'espace vectoriel engendré par $\{F^i_{e_j}\}_{j=o,..,7}$. Comme pour $j \neq i$ on a $E_j \circ F^i_a = \frac{1}{2} F^i_a$, il vient si $D \in \mathcal{D}_o(\mathcal{J})$:

$$E_j \circ DF^i_a = \frac{1}{2} D F^i_a \text{ , d'où :}$$
$$D F^i_a \in \mathcal{F}^i \oplus \mathcal{F}^k \text{ (i,j,k différents)}$$

mais de même $D F^i_a \in \mathcal{F}^i \oplus \mathcal{F}^j$.

Par suite on a $D F^i_a \in \mathcal{F}^i$

c.a.d $\mathcal{D}_o(\mathcal{J})$ laisse stable chaque $\mathcal{F}^i$.

Notons alors $\phi_i(D)$ l'application de $\mathbb{C}a$ dans $\mathbb{C}a$ définie par :

$$DF^i_a = F^i_{\phi_i(D)(a)} \quad , \qquad D \in \mathcal{D}_c(\mathfrak{J}), \quad i = 1,2,3.$$

Comme $F^i_a + F^i_b = F^i_{a+b}$ et D est linéaire, $\phi_i(D)$ est un endomorphisme de $\mathbb{C}a$, et :

$$F^i_a \circ F^i_b = (a|b)\ (E_j + E_k) \text{ donne en dérivant :}$$

$$F^i_{\phi_i(D)(a)} \circ F^i_b + F^i_a \circ F^i_{\phi_i(D)(b)} = 0$$

d'où : $\forall a,b, \in \mathbb{C}a \quad (\phi_i(D)(a)|b) + (a|\phi_i(D)(b)) = 0$

ainsi $\forall D \in \mathcal{D}_o(\mathfrak{J})\ \phi_i(D) \in o(8) \qquad i=1,2,3.$

et d'une façon évidente :

$$\phi_i : \mathcal{D}_o(\mathfrak{J}) \longrightarrow o(8) \text{ est linéaire}$$

Ensuite $F^2_a \circ F^3_b = \frac{1}{2} F^1_{\overline{ab}}$ donne en dérivant :

$$F^2_{\phi_2(D)(a)} \circ F^3_b + F^2_a \circ F^3_{\phi_3(D)(b)} = \frac{1}{2} F^1_{\phi_1(D)(\overline{ab})}$$

d'où : $\overline{\phi_2(D)(a).b} + \overline{a.\phi_3(D)(b)} = \phi_1(D)(\overline{ab})$

Reprenant les automorphismes de o(8) définis en 5-2 on a donc :

$\forall a,b \in \mathbb{C}a \qquad (\kappa\phi_1(D))(ab) = \phi_2(D)(a).b + a.\phi_3(D)(b)$.
D'après le principe de trialité dans o(8) donné en 6-1 il s'ensuit :

$$\phi_2(D) = \lambda(\phi_1(D)) \qquad \phi_3(D) = \lambda^2(\phi_1(D))$$

d'où : $\phi_2 = \lambda\phi_1 \ , \quad \phi_3 = \lambda^2\phi_1$.

Par suite, pour i = 1,2,3, ϕ_i est un isomorphisme de $\mathcal{D}_o(\mathfrak{J})$ sur o(8). Il suffit de le montrer pour ϕ_1.
si $\phi_1(D) = 0$, on a également $\phi_2(D) = \phi_3(D) = 0$, d'où :

$$D(\mathcal{F}^1) = D(\mathcal{F}^2) = D(\mathcal{F}^3) = 0 \text{ et donc } D = 0$$

D'autre part si $A \in o(8)$, l'application linéaire définie sur $\mathfrak{J}$ par :
$DE_i = 0 \ , \quad i = 1,2,3 \ , \quad DF^1_a = F^1_{A(a)} \ , \ DF^2_b = F^2_{\lambda(A)(b)} \ , \ DF^3_c = F^3_{\lambda^2(A)(c)}$
vérifie :

$$D(E_i \circ E_j) = 0 = DE_i \circ E_j + E_i \circ DE_j$$
$$D(E_i \circ F^i_a) = 0 = DE_i \circ F^i_a + E_i \circ DF^i_a$$
$$\begin{aligned} D(F^i_a \circ F^i_b) &= D[(a|b)(E_j + E_k)] = 0 \\ &= [(\lambda^{i-1}(A)(a)|b) + (a|\lambda^{i-1}(A)(b))] \quad (E_j + E_k) \quad (\text{car } A \in o(8)) \\ &= DF^i_a \circ F^i_b + F^i_a \circ DF^i_b \end{aligned}$$

$D(F^1_a \circ F^2_b) = \frac{1}{2} D(F^3_{\overline{ab}}) = \frac{1}{2} F^3_{\lambda^2(A)(\overline{ab})}$, or d'après le principe de trialité :

$$\kappa\lambda^2(A)(ab) = A(a).b + a.\lambda(A)(b) \text{ , donc}$$

$\lambda^2(A)(\overline{ab}) = \overline{A(a).b} + \overline{a.\lambda(A)(b)}$, d'où :

$D(F^1_a \circ F^2_b) = DF^1_a \circ F^2_b + F^1_a \circ DF^2_b$

De même on vérifie les relations :

$D(F^1_a \circ F^3_c) = DF^1_a \circ F^3_c + F^1_a \circ DF^3_c$

$D(F^2_b \circ F^3_c) = DF^2_b \circ F^3_c + F^2_b \circ DF^3_c$

$\{E_i, F^i_{ej}\}$ formant une base de $\mathfrak{J}$, il s'ensuit :

$\forall X,Y \in \mathfrak{J} \quad D(X \circ Y) = DX \circ Y + X \circ DY$

donc $D \in \mathfrak{D}_o(\mathfrak{J})$ est telle que $\phi_1(D) = A$

ϕ_i , $i = 1,2,3$, est ainsi un isomorphisme entre les espaces vectoriels $\mathfrak{D}_o(\mathfrak{J})$ et $o(8)$. Enfin, si $\phi_1(D) = A$, $\phi_1(D') = A'$, de :

$$[D,D'] \quad (F^1_a) = DF^1_{A'(a)} - D'F^1_{A(a)} = F^1_{AA'(a)} - F^1_{A'A(a)}$$
$$= F^1_{[A,A'](a)}$$

on a : $\phi_1([D,D']) = [\phi_1(D), \phi_1(D')]$

c.a.d ϕ_i , $i = 1,2,3$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie.

Utilisons l'isomorphisme ϕ_1. Tout élément $D \in \mathfrak{D}_o(\mathfrak{J})$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$D = \hat{U} \text{ , où } \phi_1(D) = U \in o(8)$$

$\hat{U}$ étant défini sur $X = \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{J}$ par :

$$(4) \qquad \hat{U}(X) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda^2(U)(x_3) & \overline{\lambda(U)(x_2)} \\ \overline{\lambda^2(U)(x_3)} & 0 & U(x_1) \\ \lambda(U)(x_2) & \overline{U(x_1)} & 0 \end{pmatrix}$$

autrement dit, quand U décrit $o(8)$, $\hat{U}$ défini ci-dessus décrit $\mathfrak{D}_o(\mathfrak{J})$.

Des propositions 1 et 2 on peut ainsi énoncer :

Théorème 1 : $\mathcal{D}(\mathfrak{J}) = \tilde{\mathcal{K}}_o \oplus o(8)$, où

$\mathcal{K}_o$ est l'ensemble des éléments A de $\mathfrak{M}_3^-$ de diagonale nulle et $\tilde{A}$ est la dérivation de $\mathfrak{J}$ définie par $\tilde{A}(X) = [A,X]$, $X \in \mathfrak{J}$.
Tout élément de o(8) est identifié à une dérivation $\hat{U}$ de $\mathfrak{J}$ par la relation (4). Ce sont les dérivations qui annulent E_1, E_2 et E_3.

11-3. On a vu $o(8) = L_o \oplus R_o \oplus \mathfrak{g}_2$, et des relations de 5.1 et 5.2 il vient :

si $L_a \in L_o$ $\quad \lambda(L_a)=R_a$, $\quad \lambda^2(L_a) = -R_a - L_a$

d'où pour $X \in \mathfrak{J}$, $a \in (\mathbb{C}a)_o$

$$\hat{L}_a(X) = \begin{pmatrix} 0 & -ax_3-x_3a & -a\overline{x}_2 \\ \overline{x}_3a+a\overline{x}_3 & 0 & ax_1 \\ x_2a & -\overline{x}_1a & 0 \end{pmatrix}$$

de même :
si $R_a \in R_o$ $\quad \lambda(R_a) = -R_a-L_a$, $\quad \lambda^2(R_a) = L_a$

$$\hat{R}_a(X) = \begin{pmatrix} 0 & ax_3 & a\overline{x}_2+\overline{x}_2a \\ -\overline{x}_3a & 0 & x_1a \\ -x_2a-ax_2 & -a\overline{x}_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Notons alors :

$$A_3^a = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et } A_2^b = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

on a pour $a,b \in (\mathbb{C}a)_o$ et $X \in \mathfrak{J}$:

$$[A_3^a,X] = \hat{L}_a(X) , \qquad [A_2^b,X] = \hat{R}_b(X)$$

et donc :

$$\hat{L}_a = \tilde{A}_3^a , \qquad \hat{R}_b = \tilde{A}_2^b$$

D'autre part si $d \in \mathfrak{g}_2$ on a $\lambda(d) = \lambda^2(d) = d$
d'où $\forall X \in \mathfrak{J}$:

$$\hat{d}(X) = \begin{pmatrix} 0 & dx_3 & d\overline{x}_2 \\ d\overline{x}_3 & 0 & dx_1 \\ dx_2 & d\overline{x}_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Notons $\hat{\mathfrak{g}}_2 = \{\hat{d} \;/\; d \in \mathfrak{g}_2\}$ et énonçons :

<u>Théorème 2</u> : $\mathcal{K} = \{A \in \mathcal{M}_3^-, \chi(A) = o\}$; $\mathfrak{g}_2$ est l'algèbre de Lie des dérivations de $\mathbb{C}a$.

a) $\mathcal{D}(\mathcal{J}) = \tilde{\mathcal{K}} \oplus \hat{\mathfrak{g}}_2$

b) $D \in \hat{\mathfrak{g}}_2 \iff \forall X$ réel $\in \mathcal{J}$ $\quad DX = 0$

<u>Démonstration</u> :

a) D'après le théorème 1 et d'après ce qui précède, on a, pour tout D élément de $\mathcal{D}(\mathcal{J})$:

$$D = \tilde{A} + \tilde{A}_3^a + \tilde{A}_2^b + \hat{d}$$

avec $A \in \mathcal{K}_o$, $\quad a,b \in (\mathbb{C}a)_o$, $\quad d \in \mathfrak{g}_2$

on remarque que $B = A + A_3^a + A_2^b$ est un élément de $\mathcal{K}$

et donc $D = \tilde{B} + \hat{d} \in \tilde{\mathcal{K}} + \hat{\mathfrak{g}}_2$.

Pour montrer que cette somme est directe, prenons $\tilde{B} = \hat{d}$, où $B \in \mathcal{K}$ et $d \in \mathfrak{g}_2$; soit C la matrice formée des seuls éléments diagonaux de B. Comme $B \in \mathcal{K}$ ($\chi(B) = o$) on peut écrire :

$$C = A_3^a + A_2^b \text{ avec } a,b \in (\mathbb{C}a)_o$$

alors posant $B_o = B-C$ on a $B_o \in \mathcal{K}_o$ et

$$\tilde{B}_o = -\tilde{C} + \hat{d} = -\hat{L}_a - \hat{R}_b + \hat{d} \in \mathcal{D}_o(\mathcal{J})$$

De la proposition 1, il en découle $B_o = 0$, et l'isomorphisme ϕ_1 donne :

$$L_a + R_b = d \quad , \text{d'où } \quad L_a = R_b = d = 0 \; .$$

b) Si $d \in \mathfrak{g}_2$ on a $d(1) = 0$, donc $\hat{d}(X) = 0$ pour X réel $\in \mathcal{J}$.

Réciproquement si $\forall X$ réel $\in \mathcal{J}$ $\quad D(X) = 0$, soit

$$D = \tilde{B} + \hat{d} , \quad \tilde{B} \in \tilde{\mathcal{K}}, \quad d \in \mathfrak{g}_2$$

On doit avoir :

$$\tilde{B}(X) = 0 \text{ pour X réel}$$

si $B = \begin{pmatrix} a & b_3 & \bar{b}_2 \\ -\bar{b}_3 & b & b_1 \\ -b_2 & -\bar{b}_1 & c \end{pmatrix}$ $\qquad$ prenant respectivement $X = E_1$ et $X = E_2$

on a $\quad b_3 = b_2 = 0 \quad$ et $\quad b_3 = b_1 = 0$

$$\text{d'où} \qquad B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

car $a+b+c = 0$

Ainsi $B = A_3^b + A_2^{-c}$ $\quad$ et comme $b,c \in (\mathbb{C}a)_o$

$$\tilde{B}(X) = \hat{L}_b(X) + \hat{R}_{-c}(X) = \begin{pmatrix} 0 & -x_3(2b+c) & -x_2(b+2c) \\ x_3(2b+c) & 0 & x_1(b-c) \\ x_2(b+2c) & x_1(c-b) & 0 \end{pmatrix}$$

$\tilde{B}(X) = 0$ donne alors $b = c$ et $2b+c = 0$, $\quad$ d'où $\quad b = c = 0$

et donc $\quad B = 0$, $\qquad D = \hat{d}$.

11-4. Soient $A \in \mathcal{K}_o \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & a_3 & \bar{a}_2 \\ -\bar{a}_3 & 0 & a_1 \\ -a_2 & -\bar{a}_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad X \in \mathcal{J}$ $\quad$ et $\quad D = \hat{U} \in \mathcal{D}_o(\mathcal{J})$,

$U \in o(8)$

on calcule :

$$\tilde{A}(X) = \begin{pmatrix} (a_3|x_3)+(a_2|x_2) & \overbrace{(\xi_2-\xi_1)a_3 + \bar{a}_2\bar{x}_1 + \bar{x}_2\bar{a}_1}^{\alpha} & \overbrace{(\xi_3-\xi_1)\bar{a}_2+a_3x_1-x_3a_1}^{\beta} \\ (\xi_2-\xi_1)\bar{a}_3+x_1a_2+a_1x_2 & (a_1|x_1) - (a_3|x_3) & \overbrace{(\xi_3-\xi_2)a_1-\bar{a}_3\bar{x}_2-\bar{x}_3\bar{a}_2}^{\gamma} \\ (\xi_3-\xi_1)a_2+\bar{x}_1\bar{a}_3 - \bar{a}_1\bar{x}_3 & (\xi_3-\xi_2)\bar{a}_1-x_2a_3-a_2x_3) & -(a_2|x_2) - (a_1|x_1) \end{pmatrix}$$

$$D\tilde{A}(X) = \hat{U}(\tilde{A}(X)) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda^2(U)(\alpha) & \overline{\lambda(U)(\beta)} \\ \overline{\lambda^2(U)(\alpha)} & 0 & U(\gamma) \\ \lambda(U)(\beta) & \overline{U(\gamma)} & 0 \end{pmatrix}$$

$$D(X) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda^2(U)(x_3) & \overline{\lambda(U)(x_2)} \\ \overline{\lambda^2(U)(x_3)} & 0 & U(x_1) \\ \lambda(U)(x_2) & \overline{U(x_1)} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}(DX)=\begin{pmatrix} (a_3|\lambda^2(U)(x_3))+(a_2|\lambda(U)(x_2)) & \bar{a}_2\,\overline{U(x_1)}+\overline{\lambda(U)(x_2)}\bar{a}_1 & a_3U(x_1)-\lambda^2(U)(x_3).a_1 \\ U(x_1)a_2+a_1.\lambda(U)(x_2) & (a_1|U(x_1))-(a_3|\lambda^2(U)(x_3)) & -\bar{a}_3\overline{\lambda(U)(x_2)}-\overline{\lambda^2(U)(x_3)}\bar{a}_2 \\ \overline{U(x_1)}\bar{a}_3-\bar{a}_1\overline{\lambda^2(U)(x_3)} & -\lambda(U)(x_2)a_3-a_2\lambda^2(U)(x_3) & -(a_2|\lambda(U)(x_2))-(a_1|U(x_1)) \end{pmatrix}$$

On obtient alors, en utilisant le principe de trialité et le fait que U, $\lambda(U)$, $\lambda^2(U)$ laissent invariant (infinitésimalement) le produit scalaire de $\mathbb{C}a$, que :

$[D,\tilde{A}]\,(X) = D\,\tilde{A}(X) - \tilde{A}(DX)$ est la matrice $\tilde{A}(X)$ dans laquelle a_1, a_2 et a_3 sont respectivement remplacés par $U(a_1)$, $\lambda(U)(a_2)$, $\lambda^2(U)(a_3)$.

Pour $D = \hat{U} \in \mathcal{D}_o(\mathfrak{J})$ et $A \in \mathcal{K}_o$ il est naturel de définir $DA \in \mathcal{K}_o$ par :

$$\hat{U}(A) = DA = \begin{pmatrix} 0 & \lambda^2(U)(a_3) & \overline{\lambda(U)(a_2)} \\ -\overline{\lambda^2(U)(a_3)} & 0 & U(a_1) \\ -\lambda(U)(a_2) & -\overline{U(a_1)} & 0 \end{pmatrix}$$

ceci prolonge en effet la définition de la fin du 11-2 aux éléments de $\mathcal{K}_o$.
On en déduit la relation :

$$(5) \qquad [D,\tilde{A}] = \widetilde{DA}\,, \qquad D \in \mathcal{D}_o(\mathfrak{J})\,, \quad A \in \mathcal{K}_o\,, \quad DA \in \mathcal{K}_o$$

Ayant obtenu les résultats suivants :

$$[\mathcal{D}_o(\mathfrak{J}), \mathcal{D}_o(\mathfrak{J})] \subset \mathcal{D}_o(\mathfrak{J}) \quad \text{et} \quad [\mathcal{D}_o(\mathfrak{J}), \tilde{\mathcal{K}}_o] \subset \tilde{\mathcal{K}}_o$$

il est naturel d'étudier $[\tilde{\mathcal{K}}_o, \tilde{\mathcal{K}}_o]$. Examinons donc
$[\tilde{A},\tilde{B}]$ pour $A,B \in \mathcal{K}_o$.

Remarquons, pour cela, que si $X \in \mathfrak{J}$ est réel, on peut utiliser l'identité de Jacobi :

$$[A,[B,X]] + [B,[X,A]] + [X,[A,B]] = 0$$

qui donne :

$$([\tilde{A},\tilde{B}] - \widetilde{[A,B]})(X) = 0$$

$[A,B] \notin \mathfrak{K}$ car $\chi([A,B]) \neq 0$; posons alors :

$$\Delta_{A,B} = [A,B] - \frac{1}{3}\chi([A,B]).I$$

On a $\Delta_{A,B} \in \mathfrak{m}_3^-$ car $\chi([A,B]) \in (\mathbb{C}a)_o$ et $\chi(\Delta_{A,B}) = 0$, d'où $\Delta_{A,B} \in \mathfrak{K}$.

D'autre part, pour X réel $\in \mathfrak{J}$: $\tilde{\Delta}_{A,B}(X) = \widetilde{[A,B]}(X)$ donc $[\tilde{A},\tilde{B}] - \tilde{\Delta}_{A,B} \in \mathfrak{D}(\mathfrak{J})$ et annule les $X \in \mathfrak{J}$ réels.

Le théorème 2 (11.3) donne alors :

$$[\tilde{A},\tilde{B}] = \widetilde{[A,B]} - \frac{1}{3}\widehat{\chi([A,B]).I} \qquad (\text{mod.}\hat{\mathfrak{g}}_2)$$

Avec la notation habituelle pour $A,B \in \mathfrak{K}_o$, on a :

$$\chi([A,B]) = 2\sum_{i=1}^{3}[a_i,b_i] \quad \text{et posons :}$$

$$D_{A,B} = \sum_{i=1}^{3} D_{a_i,b_i}\ , \quad \text{où}$$

$$D_{a_i,b_i} = L_{[a_i,b_i]} - R_{[a_i,b_i]} - 3\{a_i,b_i,.\} \quad (\text{cf.proposition } 4.4)$$

on trouve, à l'aide d'un calcul :

$$(6) \qquad [\tilde{A},\tilde{B}] - \widetilde{[A,B]} + \frac{1}{3}\widehat{\chi([A,B]).I} = \frac{2}{3}\hat{D}_{A,B}$$

11-5. $\mathfrak{D}(\mathfrak{J})$ est l'algèbre de Lie $\mathfrak{F}_4$ dans la classification d'E.Cartan

$h_7 = \{\alpha_o G_{70} + \alpha_1 G_{61} + \alpha_2 G_{52} + \alpha_3 G_{34}\}$ est une sous-algèbre de Cartan de o(8) (cf.5.1) donc $\hat{h}_7$ est une sous-algèbre abélienne de $\mathfrak{D}_o(\mathfrak{J})$. Montrons que $\hat{h}_7$ est encore une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{D}(\mathfrak{J})$ en prouvant qu'elle est son propre normalisateur dans $\mathfrak{D}(\mathfrak{J})$.

En effet, si $D \in \mathcal{D}(\mathfrak{J})$ vérifie :

$\forall H \in h_7 \ [\hat{H}, D] \in \hat{h}_7$

de $\mathcal{D}(\mathfrak{J}) = \tilde{\mathcal{K}}_o \oplus \mathcal{D}_o(\mathfrak{J})$ on a $D = \tilde{A} + \hat{U}$ avec

$A \in \mathcal{K}_o$, $U \in o(8)$, d'où :

$[\hat{H}, \tilde{A}] + [\hat{H}, \hat{U}] \in \hat{h}_7$

mais $[\hat{H}, \hat{U}] \in \mathcal{D}_o(\mathfrak{J})$ et $[\hat{H}, \tilde{A}] = \tilde{\hat{H}A} \in \tilde{\mathcal{K}}_o$ (relation (5) de 11.4)

donnent, puisque $\tilde{\mathcal{K}}_o \oplus \mathcal{D}_o(\mathfrak{J})$ est une somme directe

$\forall H \in h_7 \quad [\hat{H}, \tilde{A}] = 0$

ainsi $A = 0$ et par suite :

$\forall H \in h_7 \quad [\hat{H}, \hat{U}] \in \hat{h}_7$

Il s'ensuit $U \in h_7$ et donc $D = \hat{U} \in \hat{h}_7$.

Ceci montre que $\hat{h}_7$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathcal{D}(\mathfrak{J})$, de rang 4. On peut alors en déduire les racines de $\mathcal{D}(\mathfrak{J})$.

D'après 5.3 on a déjà, d'une part, les racines $\pm(\alpha_k \pm \alpha_j)i$ de o(8), d'autre part $\tilde{\mathcal{K}}_o$ est engendré par $\tilde{G}_1^a$, $\tilde{G}_2^b$, $\tilde{G}_3^c$

avec :

$$G_1^a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & -\bar{a} & 0 \end{pmatrix}, \qquad G_2^b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{b} \\ 0 & 0 & 0 \\ -b & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad G_3^c = \begin{pmatrix} 0 & c & 0 \\ -\bar{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $H = \alpha_o G_{70} + \alpha_1 G_{61} + \alpha_2 G_{52} + \alpha_3 G_{34} \in h_7$;

d'après la relation (5) de 11.4 :

$$[\hat{H}, \tilde{G}_1^a] = \widetilde{\hat{H} G_1^a} \text{ avec } \hat{H}G_1^a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H(a) \\ 0 & -\overline{H(a)} & 0 \end{pmatrix}$$

et de même

$$[\hat{H}, \tilde{G}_2^b] = \widetilde{\hat{H}G_2^b} \quad \text{avec} \quad \hat{H}G_2^b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \overline{\lambda(H)(b)} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\lambda(H)(b) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[\hat{H}, \tilde{G}_3^c] = \widetilde{\hat{H}G_3^c} \quad \text{avec} \quad \hat{H}G_3^c = \begin{pmatrix} 0 & \lambda^2(H)(c) & 0 \\ -\overline{\lambda^2(H)(c)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $ad\hat{H}$ laisse stable $\tilde{\mathcal{K}}_o$

or la matrice de H dans la base $\{e_i\}_{i=0,..,7}$ de $\mathbb{C}a$ est :

$$\begin{pmatrix} & & & & & & & -\alpha_o \\ & \bigcirc & & & & & -\alpha_1 & \\ & & & & & -\alpha_2 & & \\ & & & & \alpha_3 & & & \\ & & & -\alpha_3 & & & & \\ & & \alpha_2 & & & & \bigcirc & \\ & \alpha_1 & & & & & & \\ \alpha_o & & & & & & & \end{pmatrix}$$

matrice qui possède les valeurs propres $\pm\, i\, \alpha_j$, $j = 0,1,2,3$.
Par exemple un vecteur propre pour la valeur propre $-i\alpha_o$ est $e_o + i\, e_7$.

On rappelle que les algèbres $\mathfrak{D}(\mathfrak{J})$ et $o(8)$ sont supposées complexifiées. L'application $A \longrightarrow \tilde{A}$ étant $\mathbb{C}$-linéaire de $\mathfrak{K}_o$ dans $\tilde{\mathfrak{K}}_o$, si a est vecteur propre de H, $\tilde{G}_1^a$ est vecteur propre de $ad\hat{H}$. Les valeurs propres de H , $\pm\, i\, \alpha_j$, $j = 0,1,2,3$, sont donc des racines de l'algèbre $\mathfrak{D}(\mathfrak{J})$.

$\mathfrak{D}(\mathfrak{J})$ ayant la dimension $24 + 28 = 52$, et le rang 4, il doit y avoir 48 racines. Jusqu'ici nous en avons $24 + 8$. Pour trouver les 16 qui manquent il suffit, d'après la forme de $\hat{H}G_2^b$ et $\hat{H}G_3^c$, d'utiliser la matrice de l'automorphisme λ donnée en 5.2.

En effet puisque λ laisse stable h_7, chaque fois que α est racine, $\alpha \circ \lambda$ est également racine. On obtient ainsi à partir de $\pm i\, \alpha_j$, $j = 0,1,2,3$,

$$\frac{1}{2}\, i(\pm\, \alpha_o \pm \alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \alpha_3)$$

soit 16 racines supplémentaires qui complètent le système. On reconnaît les racines de $\mathcal{F}_4$ ([S N] p.84) :

$$\pm i\, \alpha_j\ , \qquad i(\pm\, \alpha_j \pm \alpha_k) \qquad \frac{1}{2}\, i(\pm\alpha_o \pm \alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \alpha_3)$$

$j = 0,1,2,3$ $\qquad$ $j \neq k = 0,1,2,3$.

11-6. Les dérivations de $\mathfrak{J}$ qui annulent l'un des éléments E_i (i = 1,2 ou 3)

Notons pour i = 1,2 ou 3

$$\mathcal{D}_i(\mathfrak{J}) = \{ D \in \mathcal{D}(\mathfrak{J}) \ / \ D E_i = 0 \}$$

$\mathcal{D}_i(\mathfrak{J})$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{D}(\mathfrak{J})$ qui contient $\mathcal{D}_o(\mathfrak{J}) \simeq o(8)$; nous allons montrer qu'elle est isomorphe à l'algèbre o(9). D'après la table de multiplication de $\mathfrak{J}$, il est clair qu'il suffit de le montrer pour i = 1.

Soit donc $D \in \mathcal{D}_1(\mathfrak{J})$. D'après le lemme de 11-2 le $A \in K_o$ tel que $\tilde{A}(E_i) = D E_i$ pour i = 1,2 et 3 est de la forme $(D E_1 = 0)$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & -\bar{a} & 0 \end{pmatrix} = G_1^a , \qquad a \in \mathbb{C}a .$$

Comme $D-\tilde{A}$ annule E_1, E_2 et E_3, $D-\tilde{A} \in \mathcal{D}_o(\mathfrak{J}) \simeq o(8)$ et donc :

$$\mathcal{D}_1(\mathfrak{J}) = \left(\bigoplus_{j=o}^{7} \mathbb{R} \ \tilde{G}_1^{e_j} \right) \oplus o(8).$$

De 11-5 nous pouvons alors déduire la proposition :

Proposition : $\mathcal{D}_1(\mathfrak{J})$ est isomorphe à l'algèbre de Lie o(9) (et de même pour $\mathcal{D}_i(\mathfrak{J})$, i = 2,3)

En effet la sous-algèbre de Cartan $\hat{h}_7$ de $\mathcal{D}(\mathfrak{J})$ est encore une sous-algèbre de Cartan de $\mathcal{D}_1(\mathfrak{J})$, de rang 4, et d'après 11-5. $\mathcal{D}_1(\mathfrak{J})$ possède comme racines :

$i(\pm \alpha_j \pm \alpha_k)$, $j \neq k = 0,1,2,3$, fournies par o(8), $\pm i\alpha_j$, $j = 0,1,2,3$, trouvées en faisant agir $ad\hat{H}$ $(H \in h_7)$ sur $\bigoplus_{j=o}^{7} \mathbb{R} \ \tilde{G}_1^{e_j}$.

$\mathcal{D}_1(\mathfrak{J})$ étant de dimension 36, et le rang étant 4, nous avons ainsi toutes ses racines, au nombre de 32 .

Ce système de racines constitue précisément celui de o(9) ([S N] p.80).

A l'aide de la relation (6) de 11-4. nous pouvons préciser le crochet dans $\mathcal{D}_1(\mathfrak{J})$.

Notons $\mathfrak{m} = \bigoplus_{j=o}^{7} \mathbb{R}\, \tilde{G}_1^{e_j}$

Tout d'abord, $[o(8), o(8)] \subset o(8)$ et si $\tilde{G}_1^a \in \mathfrak{m}$ et $U \in o(8)$, la relation (5) de 11-4 donne :

$$[\hat{U}, \tilde{G}_1^a] = \widetilde{\hat{U}\, G_1^a} = \tilde{G}_1^{U(a)} \quad , \text{ d'où } \quad [\mathfrak{m}, o(8)] \subset \mathfrak{m} .$$

Ensuite, pour $\tilde{G}_1^a$ et $\tilde{G}_1^b \in \mathfrak{m}$, la relation (6) donne :

$$[\tilde{G}_1^a, \tilde{G}_1^b] = \widetilde{[G_1^a, G_1^b]} - \frac{1}{3} \chi(\widetilde{[G_1^a, G_1^b]}).I + \frac{2}{3} \hat{D}_{a,b} .$$

$$(D_{a,b} = L_{[a,b]} - R_{[a,b]} - 3[L_a, R_b])$$

Si $X \in \mathfrak{J}$, un calcul nous fournit :

$$[\tilde{G}_1^a, \tilde{G}_1^b] (X) = \hat{U}_1(a,b)(X)$$

avec

$$U_1(a,b) = 2 \{ L_{[a,b]} - _{a\times b} - R_{a\times b} - [L_a, R_b] \} \in o(8)$$

où $a\times b$ est l'élément de $\mathbb{C}a$ défini par :

$$a\times b = \mathrm{Im}\, \bar{b}a = -\frac{1}{2}(\bar{a}b - \bar{b}a)$$

Ainsi $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset o(8)$.

En résumé, nous avons :

$$o(9) \simeq \mathcal{D}_1(\mathfrak{J}) = \mathfrak{m} \oplus o(8) \ , \quad \mathfrak{m} = \bigoplus_{j=o}^{7} \mathbb{R}\, \tilde{G}_1^{e_j}$$

avec

$$[o(8), o(8)] \subset o(8) \quad , [\mathfrak{m}, o(8)] \subset \mathfrak{m} \quad , \quad [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset o(8)$$

$(o(9), o(8), \sigma)$ (où σ est l'automorphisme de $o(9)$ égal à Id sur $o(8)$ et à $-\mathrm{Id}$ sur $\mathfrak{m}$) est par suite une algèbre de Lie symétrique (cf.12-5 fin).

12 - LE GROUPE DES AUTOMORPHISMES DE $\mathfrak{J}$

12-1. On note Aut($\mathfrak{J}$) le groupe des automorphismes de $\mathfrak{J}$, c.a.d l'ensemble des isomorphismes linéaires u de $\mathfrak{J}$ vérifiant :

$$(*)\ \forall X,Y \in \mathfrak{J} \qquad u(XoY) = u(X) \circ u(Y)$$

Cette relation entraîne en particulier

$\forall X \in \mathfrak{J} \quad u(X) = u(X) \circ u(I)$, d'où :

$\forall X \in \mathfrak{J} \quad \chi(u(X)) = (u(X)|I) = (u(X)|u(I))$

c.a.d $u(I) = I$ pour $u \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{J})$.

D'autre part, si $u \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{J})$, la relation (*) peut s'écrire :

$\forall X \in \mathfrak{J} \quad u \circ L_X = L_{u(X)} \circ u$ d'où :

$u \circ L_X \circ u^{-1} = L_{u(X)}$ donne $\forall X \in \mathfrak{J}$ trace (L_X) = trace $(L_{u(X)})$

D'après la relation (1) de 11-1. on a ainsi :

$\forall X \in \mathfrak{J} \quad \chi(u(X)) = \chi(X)$.

Il en résulte que Aut($\mathfrak{J}$) laisse invariant les formes $\chi(X)$,

$\chi(X^2) = (X|X)$ et $\chi(X^3) = (X,X,X)$ avec $X^3 = (XoX)oX$

En particulier :

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{J}) \subset O(27)$$

Nous montrerons, par la suite, qu'en fait Aut $(\mathfrak{J}) \subset SO(27)$ et que Aut($\mathfrak{J}$) est la forme réelle compacte du groupe de Lie F_4 dans la classification d'E.Cartan.

Notons provisoirement $\mathrm{Aut}^+(\mathfrak{J}) = \mathrm{Aut}\,(\mathfrak{J}) \cap SO(27)$.

12-2. Diagonalisation des éléments de $\mathfrak{J}$ par $\mathrm{Aut}^+(\mathfrak{J})$

$\mathrm{Aut}^+(\mathfrak{J})$ est un sous-groupe fermé de SO(27) ; il est donc compact et pour $X \in \mathfrak{J}$, l'orbite $\mathrm{Aut}^+(\mathfrak{J}).X = \{u(X) \ / \ u \in \mathrm{Aut}^+(\mathfrak{J})\}$ est également compacte.

On a alors le théorème de diagonalisation :

Théorème : par l'action de $Aut^+(\mathfrak{J})$ sur $\mathfrak{J}$

i) Toute orbite contient un élément diagonal X_o (donc réel) ; de plus si X_o et Y_o sont diagonaux :

$Aut^+(\mathfrak{J}) . X_o = Aut^+(\mathfrak{J}).Y_o \Leftrightarrow X_o$ et Y_o possèdent les mêmes termes diagonaux, à l'ordre près.

ii) si ξ_1,ξ_2,ξ_3 désignent les éléments diagonaux de $X \in \mathfrak{J}$ on a :

X est diagonale $\Longleftrightarrow$ $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$ est maximum dans l'orbite de X.

Démonstration : 1 - Soient X_o et Y_o deux matrices diagonales telles que $Aut^+(\mathfrak{J}) . X_o = Aut^+(\mathfrak{J}).Y_o$.

λ_i et λ'_i désignant, respectivement, les éléments diagonaux de X_o et Y_o, nous avons :

$$\chi(X_o) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \, , \quad \chi(X_o^2) = \sum_{i=1}^{3}\lambda_i^2 \, , \quad \chi(X_o^3) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^3$$

et de même pour Y_o.

Comme Aut $(\mathfrak{J})$ laisse invariant les formes

$\chi(X),\chi(X^2)$ et $\chi(X^3)$ et que

$Y_o = u(X_o)$ pour $u \in Aut(\mathfrak{J})$, il vient :

$$\sum_{i=1}^{3} \lambda_i^k = \sum_{i=1}^{3}\lambda'^k_i \quad \text{pour } k = 1,2,3$$

Par suite les polynômes $\prod_{i=1}^{3} (\lambda_i-\lambda)$ et $\prod_{i=1}^{3} (\lambda'_i-\lambda)$ sont identiques et

donc $\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\} = \{\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3\}$.

2 - Existence d'un élément diagonal dans chaque orbite

Soit f l'application définie sur $\mathfrak{J}$ par :

$f(X) = \sum_{i=1}^{3} \xi_i^2$ ($\xi_i \in \mathbb{R}$ désignent les éléments diagonaux de X).

f est continue sur l'orbite $Aut^+(\mathfrak{J})$. X compacte, donc il existe $X_o \in Aut^+(\mathfrak{J}).X$ où f est maximum.

Nous allons montrer que X_o est nécessairement diagonale ; sinon, supposons par exemple $x_1 \neq 0$.

Soit $X_o = \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix}$ avec $x_1 \neq 0$

Nous allons calculer explicitement le sous-groupe à un paramètre engendré par l'élément $\tilde{G}_1^a$ de l'algèbre de Lie Aut($\mathfrak{J}$) et montrer que la condition f maximum au point X_o de son orbite contredit l'hypothèse $x_1 \neq 0$.

$\tilde{G}_1^a$ étant la dérivation $X \longrightarrow \tilde{G}_1^a(X) = [G_1^a, X]$, nous avons $\exp t\,\tilde{G}_1^a \in \mathrm{Aut}^+(\mathfrak{J})$, et comme

$$G_1^a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & -\overline{a} & 0 \end{pmatrix}$$ ne fait intervenir que a et $\overline{a}$

nous pouvons calculer associativement les produits

$$G_1^a \dots G_1^a \quad X \quad G_1^a \dots G_1^a \text{ pour } X \in \mathfrak{J} .$$

Ainsi $\exp t\,\tilde{G}_1^a$ est l'automorphisme défini par :

$$\exp t\,\tilde{G}_1^a(X) = \exp t\,G_1^a . X . \exp(-t\,G_1^a)$$

on notera $\tilde{A}$ un tel automorphisme $X \longrightarrow \tilde{A}(X) = A.X.A^{-1}$, de sorte que :

$$\exp t\,\tilde{G}_1^a = \widetilde{\exp t\,G_1^a}$$

Du calcul de $(G_1^a)^{2n}$ et de $(G_1^a)^{2n+1}$ on déduit :

$$\exp t\,G_1^a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t|a| & \frac{a}{|a|}\sin t|a| \\ 0 & -\frac{\overline{a}}{|a|}\sin t|a| & \cos t|a| \end{pmatrix}$$

Soit maintenant $X_t = \text{expt}\ \tilde{G}_1^a . X_o$, avec $|a| = 1$.

$X_t \in \text{Aut}^+(\mathfrak{J}).X_o$ et on trouve :

$$X_t = \begin{pmatrix} \xi_1(t) & x_3(t) & \overline{x}_2(t) \\ \overline{x}_3(t) & \xi_2(t) & x_1(t) \\ x_2(t) & \overline{x_1}(t) & \xi_3(t) \end{pmatrix}$$

avec :

$$(7) \begin{cases} x_1(t) = x_1 + 2\, a \sin t \left[\dfrac{\xi_3-\xi_2}{2} \cos t - (a|x_1) \sin t\right] \\ x_2(t) = x_2 \cos t - \overline{a}\ \overline{x}_3 \sin t \\ x_3(t) = x_3 \cos t + \overline{x}_2\ \overline{a} \sin t \\ \xi_1(t) = \xi_1 \\ \xi_2(t) = \xi_2 \cos^2 t + \xi_3 \sin^2 t + (a|x_1) \sin 2t \\ \xi_3(t) = \xi_2 \sin^2 t + \xi_3 \cos^2 t - (a|x_1) \sin 2t \end{cases}$$

Par hypothèse, $\sum_{i=1}^{3} \xi_i^2(t)$ doit être maximum pour $t = 0$.

Donc $\sum_{i=1}^{3} \xi_i(t) \frac{d}{dt} \xi_i(t) \Big|_{t=o} = 0$, ce qui donne :

$(a|x_1)\ (\xi_2-\xi_3) = 0$, et ceci indépendamment de $a \in \mathbb{C}a$

d'où : $\xi_2 = \xi_3$, et alors :

$$\sum_{i=1}^{3} \xi_i^2(t) = \sum_{i=1}^{3} \xi_i^2 + 2(a|x_1)^2 \sin^2 2t$$

mais, pour tout t, on doit avoir $\sum_{i=1}^{3} \xi_i^2(t) \leqslant \sum_{i=1}^{3} \xi_i^2$

donc : $(a|x_1) = 0$ et ceci pour tout $a \in \mathbb{C}a$, ce qui contredit l'hypothèse $x_1 \neq 0$.

On obtiendrait de manière analogue $x_2 = x_3 = 0$, c.a.d X_o est diagonale.

On a ainsi montré : dans toute orbite il existe une matrice diagonale X_o telle que $f(X_o)$ soit le maximum de f sur $\text{Aut}^+(\mathfrak{J}).X_o$.

Maintenant d'après 1-, si Y_o est diagonale et se trouve dans l'orbite de X_o on a $f(X_o) = f(Y_o)$; c.a.d $f(Y_o)$ est également maximum, d'où le ii) du théorème.

3 - Il reste à montrer que si X_o et Y_o sont deux matrices diagonales possédant les mêmes éléments, à l'ordre près, alors elles se trouvent dans la même orbite.

Soit $X_o = \mathrm{diag}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ et, par exemple $Y_o = \mathrm{diag}(\xi_1,\xi_3,\xi_2)$
La courbe $t \longrightarrow X_t = \exp t\, \tilde{G}_1^a . X_o$ définie en 2 - permet d'échanger ξ_2 et ξ_3.
En effet les relations (7) de 2 - s'écrivent maintenant ($x_1 = x_2 = x_3 = 0$) :

$$x_1(t) = a(\xi_3-\xi_2) \sin t \cos t$$

$$x_2(t) = x_3(t) = 0$$

$$\xi_1(t) = \xi_1$$

$$\xi_2(t) = \xi_2 \cos^2 t + \xi_3 \sin^2 t$$

$$\xi_3(t) = \xi_2 \sin^2 t + \xi_3 \cos^2 t$$

d'où : $Y_o = \exp \frac{\pi}{2} \tilde{G}_1^a . X_o \in \mathrm{Aut}^+(\mathfrak{J}) . X_o$
ce qui achève le théorème.

Chaque orbite est ainsi caractérisé par les éléments diagonaux, $\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}$, d'une de ses matrices diagonales. On appellera ces λ_i, $i = 1,2,3$, les valeurs propres de l'orbite.

<u>Corollaire 1</u> : Soit $X_1 \in \mathfrak{J}$ et $X_{n+1} = X_1 \circ X_n$, $n \geqslant 1$.
Alors pour tous $i,j \geqslant 1$ on a :

$$X_i \circ X_j = X_{i+j}$$

C'est vrai si X_1 est diagonale ; si X_1 est quelconque on a $X_1 = u(Y_1)$ avec $u \in \mathrm{Aut}^+(\mathfrak{J})$ et Y_1 diagonale.
D'où, u étant un automorphisme, pour tout i

$$X_i = u(Y_i) \text{ et}$$

$$X_i \circ X_j = u(Y_i) \circ u(Y_j) = u(Y_i \circ Y_j) = u(Y_{i+j}) = X_{i+j}.$$

Dans la suite on écrit X^n pour $X \circ X \circ \ldots\ldots \circ X$ (n facteurs).

Corollaire 2 : Pour tout $X \in \mathfrak{J}$ on a :

$$(E)\quad \phi(X) = -X^3 + \chi(X)\, X^2 - \frac{1}{2}\left[\chi(X)^2 - \chi(X^2)\right] X + \frac{1}{3}\left[\chi(X^3) - \frac{3}{2}\chi(X)\chi(X^2) + \frac{1}{2}\chi(X)^3\right] = 0$$

En effet, comme $\chi(X)$, $\chi(X^2)$ et $\chi(X^3)$ sont invariants par $Aut(\mathfrak{J})$, si u est un automorphisme on a :

$$\phi(u(X)) = u(\phi(X))$$

d'après le théorème, il suffit de vérifier (E) pour $X = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.
Dans ce cas $\chi(X) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, $\chi(X^2) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$, $\chi(X^3) = \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3$ et $\phi(X) = -X^3 + (\sum_{i=1}^{3}\lambda_i)X^2 - (\sum_{i<j} \lambda_i\lambda_j)X + (\lambda_1\lambda_2\lambda_3)I = 0$ est trivialement vérifié.

Définition : Si $X \in \mathfrak{J}$ on appelle équation caractéristique de X l'équation (E) et det X la quantité

$$(8)\quad \det X = \frac{1}{3}\left[\chi(X^3) - \frac{3}{2}\chi(X)\,\chi(X^2) + \frac{1}{2}\chi(X)^3\right]$$

qui est le terme constant du polynôme ϕ et qu'on obtient aussi à partir de (E) en prenant la trace des deux membres.

Soit $X \in \mathfrak{J}$ $\quad X = \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix}$; à partir de l'expression (8)

le calcul donne :

$$\det X = \xi_1\xi_2\xi_3 - \sum_{i=1}^{3} \xi_i |x_i|^2 + 2\,\mathcal{R}e(x_1x_2x_3)$$

[l'écriture $\mathcal{R}e(x_1x_2x_3)$, où $\mathcal{R}e$ signifie partie réelle, se justifie par
$2\,\mathcal{R}e(x_1x_2x_3) = t(x_1x_2x_3) = 2(x_1x_2|\overline{x}_3) = 2(x_2x_3|\overline{x}_1) = 2(x_3x_1|\overline{x}_2)$]

12-3. $Aut(\mathfrak{J}) \subset SO(27)$

Soit $u \in Aut(\mathfrak{J})$. Comme $Aut(\mathfrak{J}) \subset O(27)$, u se décompose en rotations dans des 2-plans deux à deux orthogonaux et en id, -id, respectivement, dans les sous-espaces propres V_1 et V_{-1}, orthogonaux, relatifs aux valeurs propres +1 et -1.

Soit alors $u \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{J})$ tel que $\det u = -1$; nécessairement $V_{-1} \neq \{0\}$,
c.a.d : $\exists X \neq 0 \quad u(X) = -X$.

Comme $u(I) = I$, $I \in V_{+1}$ donc $\chi(X) = (X|I) = 0$ et de même $\chi(X^3) = 0$
car $X \in V_{-1} \Longrightarrow X^3 \in V_{-1}$ $(u(X^3) = u(X)^3)$

L'équation caractéristique d'un tel X est donc :

$$-X^3 + \frac{1}{2}\chi(X^2)\,X = 0$$

on peut supposer $\chi(X^2) = 2$, d'où $X^3 - X = 0$.

D'après le théorème de diagonalisation il existe X_o diagonale et un élément $u' \in \mathrm{Aut}^+(\mathfrak{J})$ tels que :

$$X = u'(X_o) \quad , \qquad X_o^3 - X_o = 0$$

De $u(X) = -X$, on a alors $(u'^{-1} \circ u \circ u')(X_o) = -X_o$.

Donc si u est un automorphisme tel que $\det u = -1$, il existe une matrice diagonale X_o et un automorphisme v de déterminant -1 tels que :

$$v(X_o) = -X_o \quad , \qquad X_o^3 - X_o = 0 \ .$$

X_o étant diagonale et $\det X_o = 0$, nécessairement X_o est l'un des 6 éléments : $\pm(E_1 - E_2)$, $\pm(E_1 - E_3)$, $\pm(E_2 - E_3)$.

On peut supposer $X_o = E_2 - E_3$

$$X_o = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in V_{-1}(v) \ , \qquad X_o^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in V_{+1}(v)$$

alors $v(E_2 - E_3) = v(E_2) - v(E_3) = E_3 - E_2$

et $v(E_2 + E_3) = v(E_2) + v(E_3) = E_2 + E_3$

donne : $v(E_2) = E_3$, $v(E_3) = E_2$ et aussi $v(E_1) = E_1$
(car $v(I) = v(E_1 + E_2 + E_3) = I$)

Ainsi v est un automorphisme de déterminant -1 qui laisse fixe E_1 et échange E_2 et E_3 .

Or d'après l'étape 2 de la démonstration du théorème 12-2, l'automorphisme $w = \exp \frac{\pi}{2} \tilde{G}_1^a \in Aut^+(\mathfrak{J})$ est tel que :

$$w(E_2) = E_3 , \qquad w(E_3) = E_2 , \qquad w(E_1) = E_1 .$$

Il s'ensuit que v o w est un automorphisme de déterminant -1 qui laisse fixes E_1, E_2, E_3 .

Ainsi si $Aut(\mathfrak{J}) \cap O^-(27) \neq \emptyset$, il existerait un automorphisme de déterminant -1 qui laisserait E_1, E_2 et E_3 fixes.

Nous allons maintenant voir que les automorphismes qui laissent fixes E_1, E_2 et E_3 sont nécessairement de déterminant +1 .

<u>Automorphismes qui laissent E_1, E_2 et E_3 fixes.</u>

Soit u un tel automorphisme.

$u(E_i) = E_i$ pour $i = 1,2,3$ donne, en utilisant la table de $\mathfrak{J}$(10.2) :

$$u(F_a^i) \subset \mathfrak{F}^i = \bigoplus_{j=o}^{7} F_{e_j}^i , \text{ c.a.d}$$

$$u(F_a^i) = F^i_{\phi_i(u)(a)} \quad \text{où } \phi_i(u) \text{ est linéaire de } \mathbb{C}a \text{ dans } \mathbb{C}a .$$

D'une part $F_a^i \circ F_b^i = (a|b)(E_j + E_k)$, i,j,k différents, donne :

$$F^i_{\phi_i(u)(a)} \circ F^i_{\phi_i(u)(b)} = (\phi_i(u)(a) \mid \phi_i(u)(b)) \ (E_j + E_k)$$

$$= (a|b)(E_j + E_k)$$

d'où : $(\phi_i(u)(a) \mid \phi_i(u)(b)) = (a|b) \quad \forall a,b \in \mathbb{C}a$

et donc : $\phi_i(u) \in O(8)$, $i = 1,2,3$.

D'autre part, pour i,j,k permutation paire de 1,2,3

$$F_a^i \circ F_b^j = \frac{1}{2} F^k_{\overline{ab}} \qquad \text{donne}$$

$$\overline{\phi_i(u)(a) \cdot \phi_j(u)(b)} = \phi_k(u)(\overline{ab})$$

c.a.d $[\kappa\, \phi_k(u)]\ (ab) = \phi_i(u)(a).\phi_j(u)(b)$ et en particulier

$\forall a,b \in \mathbb{C}a$:

(9) $[\kappa\phi_1(u)]\ (ab) = \phi_2(u)(a).\phi_3(u)(b)$

(On rappelle que $\kappa\, \phi_1(u) = K\, \phi_1(u)\, K$, K étant l'involution $x \longrightarrow \overline{x}$ de $\mathbb{C}a$).

Faisant respectivement a = 1 et b = 1 dans la relation (9), on obtient :

$$\phi_3(u) = L_s \circ \kappa\, \phi_1(u)\ , \quad \text{où } s = \overline{\phi_2(u)(1)}$$
$$\phi_2(u) = R_t \circ \kappa\, \phi_1(u), \quad \text{où } t = \overline{\phi_3(u)(1)}$$

Comme $\det L_s = \det R_t = +1$ (cf.haut de la p.25), on déduit que :

$$\det \phi_2(u) = \det \phi_3(u) = \det \phi_1(u)\ .$$

Par suite, comme u laisse fixes E_1, E_2 et E_3 et agit sur $\mathcal{F}^i$ à l'aide de $\phi_i(u)$ comme indiqué précédemment, on a :

$$\det u = (\det \phi_1(u))^3$$

Maintenant pour voir que nécessairement det u = +1 pour un automorphisme u qui laisse fixes E_1, E_2 et E_3, il suffit de montrer que $\det \phi_1(u) = +1$.

Pour cela, montrons tout d'abord que la relation (9) ne peut pas être satisfaite avec $\phi_1(u) = K$; c'est-à-dire que l'on ne peut pas avoir :

$$\forall a,b \in \mathbb{C}a \qquad K(ab) = B(a).C(b)\ , \quad \text{où } B,C \in O(8)$$

En effet si cette relation était vérifiée, on aurait :

$$C = L_s \circ K\ , \text{ avec } s = \overline{B(1)}$$

$$B = R_t \circ K\ , \text{ avec } t = \overline{C(1)}$$

et a = b = 1 donnerait ts = 1, d'où $t = \overline{s}$

alors $\forall a,b \in \mathbb{C}a$, on aurait :

$$\overline{ab} = \overline{b}\,\overline{a} = (\overline{a}\,\overline{s})(s\,\overline{b})$$

mais $b = s \Longrightarrow \forall a \in \mathbb{C}a \qquad \overline{s}\,\overline{a} = \overline{a}\,\overline{s} \qquad (|s|^2 = 1)$

d'où nécessairement $s \in \mathbb{R}$ et donc $s = \pm 1$ et par suite $\forall a,b \in \mathbb{C}a$ $ab = ba$, ce qui est impossible.

Ensuite, si det $\phi_1(u) = -1$, on aurait :

det $\phi_1(u)\, K = +1$, c.a.d $\phi_1(u)K \in SO(8)$ et le principe de trialité dans $SO(8)$ (6-2) donnerait :

il existe $B, C \in SO(8)$ tels que $\forall a,b \in \mathbb{C}a \quad (\phi_1(u)K)(ab) = B(a)\, C(b)$
d'où, en remplaçant dans (9)

$$(K\, \phi_1(u)K)(ab) = K(B(a)C(b)) = \phi_2(u)(a)\, .\, \phi_3(u)(b)$$

et en posant $x = B(a)$, $y = C(b)$; $B' = \phi_2(u) \circ B^{-1}$, $C' = \phi_3(u) \circ C^{-1}$

on aurait :

$\forall x,y \in \mathbb{C}a \qquad K(x\, y) = B'(x)\, C'(y)$, avec $B', C' \in O(8)$

or nous venons de voir que cela n'était pas possible.

Par conséquent det $\phi_1(u) = +1$ et donc det $u = +1$; ce qui achève de montrer :

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{J}) \subset SO(27) \qquad (\text{et aussi } \mathrm{Aut}^+(\mathfrak{J}) = \mathrm{Aut}(\mathfrak{J}))$$

12-4. Notons $\mathrm{Aut}(\mathfrak{J})_o = \{u \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{J}) \;/\; u(E_i) = E_i,\ i = 1,2 \text{ et } 3\}$

D'après ce qui précède si $u \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{J})_o$ on a pour $X \in \mathfrak{J}$:

$$u(X) = \begin{pmatrix} \xi_1 & \phi_3(u)(x_3) & \overline{\phi_2(u)(x_2)} \\ \overline{\phi_3(u)(x_3)} & \xi_2 & \phi_1(u)(x_1) \\ \phi_2(u)(x_2) & \overline{\phi_1(u)(x_1)} & \xi_3 \end{pmatrix}$$

où les $\phi_i(u)$ sont des éléments de $SO(8)$ qui vérifient la relation (9) ; ainsi $(\phi_2(u), \phi_3(u))$ est un couple associé à $\kappa\, \phi_1(u)$ par le principe de trialité et de 6-3 nous avons :

$$(\phi_2(u), \phi_3(u)) \in \mathrm{Spin}(8) \text{ et } \kappa\, \phi_1(u) = p(\phi_2(u), \phi_3(u)) \; .$$

Nous pouvons donc définir une application :

$\phi : \mathrm{Aut}(\mathfrak{J})_o \longrightarrow \mathrm{Spin}(8) \qquad$ par :

$u \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{J})_o$, $\qquad \phi(u) = (\phi_2(u), \phi_3(u))$

($\phi_1(u)$ étant alors $\kappa p(\phi(u))$.

Par définition des ϕ_i on a pour $u,v \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{J})_o$

$\phi_i(u \circ v) = \phi_i(u) \circ \phi_i(v)$, $\quad i = 1,2,3$

on en déduit : $\phi(u \circ v) = \phi(u).\phi(v)$

c.a.d ϕ est un homorphisme de groupes.

D'une manière évidente ϕ est injectif et, si $(B,C) \in \mathrm{Spin}(8)$, l'application u définie sur $\mathfrak{J}$ par :

$u(E_i) = E_i$, $\quad u(F_a^1) = F^1_{\kappa p(B,C)(a)}$, $u(F_b^2) = F^2_{B(b)}$, $u(F_c^3) = F^3_{C(c)}$

$i = 1,2,3$

est un élément de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{J})_o$ tel que $\phi(u) = (B,C)$.

Il suffit en effet de vérifier que, en posant $A = p(B,C)$, la relation :

$\forall a,b \in \mathbb{C}a \qquad \kappa A(ab) = B(a)\, C(b)$

entraîne les relations analogues par permutation circulaire de A,B,C.

Par exemple : $C(a)\, A(b) = \overline{C(a)}^{-1} A(b)$ (on peut supposer $|a| = 1$)

$$= \overline{\kappa A(\overline{b})\; C(a)^{-1}}$$

$$= \overline{\kappa A((\overline{a}\overline{b})a)\; C(a)^{-1}}$$

$$= \overline{B(\overline{a}\overline{b})} = \kappa B(ab)$$

Par conséquent, ϕ est un isomorphisme de groupeset :

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{J})_o \simeq \mathrm{Spin}(8).$$

12-5. Notons pour $i = 1,2$, ou 3

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{J})_i = \{u \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{J}) \;/\; u(E_i) = E_i\}$$

Nous allons montrer que $\mathrm{Aut}(\mathfrak{J})_i \simeq \mathrm{Spin}(9)$.

Il suffit de le voir pour $i = 1$. Soit donc $u \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{J})_1$

$u(E_1) = E_1$, $\qquad u(I) = I$ et posons :

$$u(E_2) = \sum_{i=1}^{3} (\xi_i E_i + F^i_{x_i})$$

$u(E_1 \circ E_2) = E_1 \circ u(E_2) = 0$ donne :

$\xi_1 E_1 + \frac{1}{2} F^2_{x_2} + \frac{1}{2} F^3_{x_3} = 0$, donc $\xi_1 = x_2 = x_3 = 0$

et $u(E_2 \circ E_2) = u(E_2) \circ u(E_2) = u(E_2)$ donne

$$\begin{cases} \xi_2 = \xi_2^2 + |x_1|^2 \\ \xi_3 = \xi_3^2 + |x_1|^2 \end{cases}$$

Comme $\chi(u(E_2) = \chi(E_2) = 1$ on a :

$\xi_2 + \xi_3 = 1$ ce qui nous permet de poser , ξ_2 et ξ_3 étant positifs :

$$\begin{cases} \xi_2 = \cos^2 \omega \\ \xi_3 = \sin^2 \omega \end{cases} \qquad 0 \leqslant \omega \leqslant \frac{\pi}{2}$$

Par suite, $x_1 = \cos\omega \sin\omega \; s$, avec $s \in \mathbb{C}a$ $|s| = 1$

Donc tout élément u de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{J})_1$ est tel que :

$$u(E_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2\omega & \sin\omega\cos\omega \; s \\ 0 & \sin\omega\cos\omega \; \bar{s} & \sin^2\omega \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} 0 \leqslant \omega \leqslant \frac{\pi}{2} \\ |s| = 1 \end{array}$$

Reprenant les relations (7) de 12-2 nous avons ainsi :

$$u(E_2) = \exp(-\omega \, \tilde{G}^s_1) \, (E_2)$$

soit : $(\exp \omega \, \tilde{G}^s_1 \circ u) \, (E_2) = E_2$

Comme $\exp \omega \tilde{G}^s_1 \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{J})_1$, $\exp \omega \tilde{G}^s_1 \circ u$ laisse fixes E_1 et E_2, donc aussi E_3, c'est-à-dire :

$$\exp \omega \, \tilde{G}^s_1 \circ u \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{J})_o \simeq \mathrm{Spin}(8)$$

Nous venons donc de voir :

pour tout élément $u \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{J})_1$, il existe un couple $((s,\omega),U)$, $(s,\omega) \in S^7 \times [0,\frac{\pi}{2}]$, $U \in \mathrm{Spin}(8)$ tel que :

$$u = \exp(-\omega \, \tilde{G}^s_1) \circ U$$

et comme $\exp(\omega \tilde{G}_1^s) \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{J})_1$, il est clair que pour tout $(s,\omega) \in S^7 \times [0,\frac{\pi}{2}]$ et pour tout $U \in \mathrm{Spin}(8)$ on a : $\exp(-\omega \tilde{G}_1^s) \circ U \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{J})_1$.

D'autre part :

- si $u(E_2) \neq E_2$ et E_3, $(s,\omega) \in S^7 \times]0,\frac{\pi}{2}[$ est déterminé par $u(E_2)$ d'une façon unique, ainsi que $U \in \mathrm{Spin}(8)$ par u et $\exp \omega \tilde{G}_1^s$.

- si $u(E_2) = E_2$ on a $\omega = 0$, s quelconque, $u \in \mathrm{Spin}(8)$.
- si $u(E_2) = E_3$ on a $\omega = \frac{\pi}{2}$, s quelconque ; mais u s'écrit d'une façon unique sous la forme :

$$u = \exp(-\frac{\pi}{2} \tilde{G}_1^{e_o}) \circ U, \quad U \in \mathrm{Spin}(8), \text{ en prenant } s = e_o$$

$(\exp(-\frac{\pi}{2} \tilde{G}_1^s)$ échange E_2 et E_3, quel que soit s ; un calcul montre que $\exp(-\frac{\pi}{2} \tilde{G}_1^s) = \exp(-\frac{\pi}{2} \tilde{G}_1^{e_o}) \circ U$ où $U \in \mathrm{Spin}(8)$ est définie par :
$\phi_1(U)\,(x_1) = \bar{s}\ \ x_1\ \bar{s})$.

Soit alors $\sim$ la relation d'équivalence définie sur $S^7 \times [0,\frac{\pi}{2}]$ par :

$(s,\omega) \sim (s',\omega') \Longleftrightarrow [((s,\omega) = (s',\omega'))$ ou $(\omega = \omega' = 0)$ ou $(\omega = \omega' = \frac{\pi}{2})]$

$S^7 \times [0,\frac{\pi}{2}]/_\sim$ est homéomorphe à S^8 et l'application :

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{J})_1 \longrightarrow S^8 \times \mathrm{Spin}(8) \quad \text{définie par :}$$

$u = \exp(-\omega \tilde{G}_1^s) \circ U \longrightarrow (\dot{\widehat{(s,\omega)}},U)$ pour $\omega \neq 0,\frac{\pi}{2}$

$u = U \longrightarrow (\dot{\widehat{(1,0)}},U)$

$u = \exp(-\frac{\pi}{2} \tilde{G}_1^{e_o}) \circ U \longrightarrow (\dot{\widehat{(1,\frac{\pi}{2})}},U)$

est un homéomorphisme de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{J})_1$ sur $S^8 \times \mathrm{Spin}(8)$

$S^8 \times \mathrm{Spin}(8)$ étant simplement connexe, il en est alors de même de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{J})_1$; mais l'algèbre de Lie de celui-ci étant o(9) (proposition 11.6), on a donc :

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{J})_1 \simeq \mathrm{Spin}(9) .$$

De 11.6 (fin) nous avons l'isomorphisme d'espaces homogènes symétriques :

$$\mathrm{Spin}\ 9/\mathrm{Spin}\ 8 \simeq S^8$$

Remarque : l'équation cartésienne de S^8 est :

$$|x_1|^2 = \xi_2\,\xi_3 \qquad \xi_2 + \xi_3 = 1$$

ou encore $|x_1|^2 + \left(\frac{\xi_2-\xi_3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

et la donnée de $u(E_2) = \tilde{A}(E_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2 & x_1 \\ 0 & \bar{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix}$ où ξ_2, ξ_3, x_1 satisfont à cette équation

détermine d'une façon et d'une seule un élément U de Spin 8 d'après ce qui a été vu.

12.6. Aut($\mathfrak{J}$) est la forme réelle compacte du groupe de Lie F_4 dans la classification d'E.Cartan.

Aut($\mathfrak{J}$) est compact, d'algèbre de Lie $\mathcal{F}_4$ (11.5). Nous aurons Aut($\mathfrak{J}$) $\simeq F_4$ en montrant la connexité de Aut($\mathfrak{J}$).

Soit $u \in$ Aut($\mathfrak{J}$) et $u(E_1) = \sum_{i=1}^{3} (\xi_i\, E_i + F^i_{x_i})$

$u(E_1)$ vérifie $u(E_1)^2 = u(E_1)$, ce qui nous donne, pour i = 1,2,3 et modulo 3, les relations :

$$\begin{cases} \xi_i = \xi_i^2 + |x_{i+1}|^2 + |x_{i+2}|^2 & (*) \\ \xi_i \bar{x}_i = x_{i+1}\, x_{i+2} & (**) \end{cases}$$

D'autre part comme $\chi(u(E_1)) = \chi(E_1) = 1$ on a :

$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1$ et les ξ_i étant positifs, on peut poser :

$$\begin{cases} \xi_1 = \cos^2\phi \;\; \cos^2\omega \\ \xi_2 = \sin^2\phi \;\; \cos^2\omega \\ \xi_3 = \sin^2\omega \end{cases} \qquad \text{avec } 0 \leqslant \phi \leqslant \frac{\pi}{2} \;, \qquad 0 \leqslant \omega \leqslant \frac{\pi}{2}$$

La relation (✱✱) donne $\xi_i \ |x_i|^2 = x_i(x_{i+1}\ x_{i+2})$

mais $\xi_i|x_i|^2 \in \mathbb{R}$, donc pour tout $i = 1,2,3$:

$$\xi_i\ |x_i|^2 = \mathcal{R}e(x_1\ x_2\ x_3)\ .$$

La relation (8) de 12.2 donne :

$$\det(u(E_1)) = \xi_1\xi_2\xi_3 - \sum_{i=1}^{3}\xi_i|x_i|^2 + 2\,\mathcal{R}e(x_1\ x_2\ x_3)$$

$$= \det(E_1) = 0$$

donc : $\xi_i\ |x_i|^2 = \xi_1\xi_2\xi_3 = x_1\ x_2\ x_3$

- si $\xi_i \neq 0$ on a $|x_i|^2 = \xi_{i+1}\ \xi_{i+2}$

- si $\xi_i = 0$ on a $x_{i+1} = x_{i+2} = 0$

Dans ce cas $\xi_{i+1} + \xi_{i+2} = 1$ et les deux relations ✱ qui subsistent donnent encore :

$$|x_i|^2 = \xi_{i+1}\ \xi_{i+2}$$

On voit que les $|x_i|$ sont déterminés par les ξ_i, donc par les paramètres ω et ϕ ; on en déduit :

$$\begin{cases} x_1 = \sin\phi\ \cos\omega\ \ \sin\omega\ .a \\ x_2 = \cos\phi\ \cos\omega\ \ \sin\omega\ .b \\ x_3 = \sin\phi\ \cos\phi\ \ \cos^2\omega\ .c \end{cases}$$

où $a,b,c \in S^7$ et vérifient (lorsque $0 < {\omega \atop \phi} < \frac{\pi}{2}$)

$$a(bc) = b(ca) = c(ab) = 1$$

(a,b,c engendrent une algèbre de quaternions).

Considérons alors $\operatorname{expt} \tilde{G}_2^b \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{J})_2$ et $\operatorname{expt} \tilde{G}_3^c \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{J})_3$. De la même manière qu'en 12.2, nous avons :

$$\operatorname{expt} G_3^c = \begin{pmatrix} \cos t & c\ \sin t & 0 \\ -\bar{c}\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{expt} G_2^b = \begin{pmatrix} \cos t & 0 & \bar{b}\ \sin t \\ 0 & 1 & 0 \\ -b\ \sin t & 0 & \cos t \end{pmatrix}$$

et :

$$\exp t\,\tilde G_2^b.(E_1) = \widetilde{\exp t\, G_2^b.(E_1)} = \begin{pmatrix} \cos^2 t & 0 & -\bar b \cos t \sin t \\ 0 & 0 & 0 \\ -b \cos t \sin t & 0 & \sin^2 t \end{pmatrix}$$

$$(\exp t'\tilde G_3^c \circ \exp \tilde G_2^b)(E_1) = \begin{pmatrix} \cos^2 t'\cos^2 t & -c \sin t' \cos t' \cos^2 t & -\bar b \cos t'\cos t \sin t \\ -\bar c \sin t'\cos t'\cos^2 t & \sin^2 t'\cos^2 t & \bar c\, \bar b \sin t'\cos t \sin t \\ -b \cos t'\cos t \sin t & bc \sin t'\cos t \sin t & \sin^2 t \end{pmatrix}$$

Pour $t = \omega$, $t' = \pi - \phi$ comme $a = \bar c\, \bar b$, on obtient :

$$\exp \omega \tilde G_3^c \circ \exp(\pi-\phi)\tilde G_2^b)(E_1) = u(E_1).$$

Par suite : $\exp(\phi-\pi)\tilde G_2^b \circ \exp -\omega \tilde G_3^c \circ u \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{J})_1 \simeq \mathrm{Spin}(9)$

on a ainsi montré :

pour tout $u \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{J})$, il existe $T_2 \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $T_3 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,
$a,b,c \in S^7$, $U \in \mathrm{Spin}(9)$ tels que :

$$u = \exp T_3\, \tilde G_3^c \circ \exp T_2\, \tilde G_2^b \circ U$$

(si $\xi_1\xi_2\xi_3 \neq 0$, où $\xi_i = (u(E_1)|E_i)$, la décomposition est unique).

Soit alors pour $t \in [0,1]$:

$$u_t = \exp t\, T_3\, \tilde G_3^c \circ \exp t\, T_2\, \tilde G_2^b \circ U$$

Comme $u_o = U$ et $u_1 = u$, tout élément u de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{J})$ peut être joint à un élément de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{J})_1 \simeq \mathrm{Spin}(9)$. Spin(9) étant connexe par arcs, il en résulte que deux éléments quelconques de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{J})$ peuvent être joints et donc que $\mathrm{Aut}(\mathfrak{J})$ est connexe par arcs.

12-7. L'espace symétrique F_4/Spin(9)

De 11-3. (théorème 2), 11-5 et 11-6, nous avons la décomposition :

$$\mathcal{F}_4 = (\bigoplus_{j=o}^{7} \mathbb{R}\, \tilde G_2^{e_j}) \oplus (\bigoplus_{j=o}^{7} \mathbb{R}\, \tilde G_3^{e_j}) \oplus o(9)$$

où $o(9)$ est identifiée à la sous-algèbre de Lie $(\bigoplus_{j=o}^{7} \mathbb{R}\, \tilde G_1^{e_j}) \oplus o(8)$ des dérivations de $\mathfrak{J}$ qui annulent E_1 ($U \in o(8)$ est identifié à la dérivation $\hat U$ qui annule E_1, E_2 et E_3).

La relation (6) de 11-4 nous a permis de calculer en 11-6 :

$$[\tilde{G}_1^{a_1}, \tilde{G}_1^{a_2}] = \hat{U}(a_1,a_2)$$

où $U_1(a_1,a_2) = 2\,\{L_{[a_1,a_2]-a_1\times a_2} - R_{a_1\times a_2} - [L_{a_1}, R_{a_2}]\} \in o(8)$.

De la même façon nous avons :

$$[\tilde{G}_2^{b_1}, \tilde{G}_2^{b_2}] = \hat{U}_2(b_1,b_2) \text{ et } [\tilde{G}_3^{c_1}, \tilde{G}_3^{c_2}] = \hat{U}_3(c_1,c_2)$$

avec :

$$U_2(b_1,b_2) = 2\{R_{b_1\times b_2} - [b_1,b_2]^- [L_{b_1}, R_{b_2}]\} \in o(8)$$

et $\quad U_3(c_1,c_2) = 2\{L_{c_1\times c_2} - [L_{c_1},R_{c_2}]\} \in o(8)$.

Pour $i = 1,2$ ou 3, nous pouvons considérer les applications U_i, définies par les égalités précédentes, comme des applications bilinéaires antisymétriques de $\mathbb{C}a\times\mathbb{C}a$ dans $o(8)$; λ étant toujours l'automorphisme de $o(8)$ ($\lambda^3 = Id$) on vérifie :

$$U_1 = \lambda \circ U_2 = \lambda^2 \circ U_3 .$$

D'autre part (cf.définition des G_i^a p.42) :

$$[G_1^a, G_2^b] = G_3^{\overline{ab}},\ [G_2^b, G_3^c] = G_1^{\overline{bc}},\ [G_3^c, G_1^a] = G_2^{\overline{ca}}$$

Comme $\hat{D}_{G_i^a, G_j^b} = 0$ pour $i \neq j$, toujours d'après la relation (6) de 11-4, les égalités précédentes restent vraies en mettant un $\sim$ sur les G .

Enfin pour $U \in o(8)$, la relation (5) de 11-4 donne :

$$[\hat{U}, \tilde{G}_2^b] = \tilde{G}_2^{\lambda(U)(b)},\ [\hat{U}, \tilde{G}_3^c] = \tilde{G}_3^{\lambda^2(U)(c)} .$$

Notons alors $\mathfrak{m} = (\bigoplus_{j=o}^{7} \mathbb{R}\, \tilde{G}_2^{e_j}) \oplus (\bigoplus_{j=o}^{7} \mathbb{R}\, \tilde{G}_3^{e_j})$; on a :

$$\mathcal{F}_4 = \mathfrak{m} \oplus o(9), \text{ avec :}$$

$$[o(9), o(9)] \subset o(9),\quad [o(9), \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m},\quad [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset o(9).$$

Il s'ensuit que $(\mathcal{F}_4, o(9), \sigma)$ (où σ est l'automorphisme de $\mathcal{F}_4$ égal à Id sur $o(9)$ et à $-Id$ sur $\mathfrak{m}$) est une algèbre de Lie symétrique et $F_4/Spin(9)$ est un espace homogène symétrique compact.

CHAPITRE III

LE PLAN PROJECTIF $\mathbb{C}aP^2$

13 - LE PLAN PROJECTIF $\mathbb{K}P^2$ POUR $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ OU $\mathbb{H}$. MOTIVATION POUR L'INTRODUCTION DE $\mathfrak{J}$.

13.1. Représentation par des coordonnées homogènes normalisées.

La relation d'équivalence sur $\mathbb{K}^3$:

$$(a_1,a_2,a_3) \sim (a'_1,a'_2,a'_3) \Longleftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{K} \text{ tel que } |\lambda| = 1 \text{ et } (a'_1,a'_2,a'_3) = (a_1\lambda,a_2\lambda,a_3\lambda)$$

définit $\mathbb{K}P^2$ comme :

$\mathbb{K}P^2 = S\mathbb{K}^3/S\mathbb{K}$, où $S\mathbb{K}^n$ désigne la sphère unité de $\mathbb{K}^n$.

Chaque triplet (a_1,a_2,a_3), $a_i \in \mathbb{K}$, normalisé par $|a_1|^2+|a_2|^2+|a_3|^2=1$, représente le point de $\mathbb{K}P^2$ dont a_1,a_2,a_3 sont les coordonnées homogènes ponctuelles ; il représente également la droite de $\mathbb{K}P^2$ dont a_1,a_2,a_3 sont les coordonnées homogènes tangentielles, droite qui a pour équation $a_1z + a_2x + a_3y = 0$. Tout autre système de coordonnées homogènes $(a_1\lambda,a_2\lambda,a_3\lambda)$ avec $|\lambda| = 1$ définit le même point ou la même droite.

$\mathbb{K}P^2$ est donc un ensemble de points et de droites ; une droite est un sous-ensemble de l'ensemble des points. Les axiomes dits du plan projectif sont satisfaits (cf. [HL] , p.346) :

P_1 - Deux points distincts appartiennent à une droite et à une seule.

P_2 - Deux droites distinctes ont en commun un point et un seul.

P_3 - Il existe au moins quatre points dont aucun sous-ensemble à trois éléments n'est contenu dans une même droite.

Le point $X = (a_1,a_2,a_3)$ et la droite d'équation $a_1z+a_2x+a_3y = 0$ sont dits associés par dualité. $(1,0,0)$ sont les coordonnées ponctuelles de l'origine et aussi les coordonnées tangentielles de la droite de l'infini, notée D_∞ ; $(0,a_2,a_3)$ représente un point de D_∞ ou une droite passant par l'origine. La condition d'incidence du point $X = (a_1,a_2,a_3)$ avec la droite $Y = (b_1,b_2,b_3)$ est :

$$a_1\overline{b}_1 + a_2\overline{b}_2 + a_3\overline{b}_3 = 0$$

13-2. Représentation par des matrices hermitiennes 3×3

Soit $\mathbb{K}^2$ muni du produit hermitien $<x,y> = \sum_{i=1}^{3} x_i\overline{y}_i$.

Un projecteur hermitien est une matrice :

$$X = \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix} \qquad \xi_i \in \mathbb{R},\quad x_i \in \mathbb{K}, \qquad i = 1,2,3$$

telle que $X^2 = X$, relation qui se traduit par :

(1.1) $\xi_i - \xi_i^2 = |x_j|^2 + |x_k|^2$ $\quad$ i,j,k différents

(1.2) $\xi_i\,\overline{x}_i = x_j\,x_k$ $\quad$ i,j,k permutation circulaire de 1,2,3

si $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1$ (1.1) peut être remplacé (cf.12.6) par

(1.3) $|x_i|^2 = \xi_j\,\xi_k$ $\quad$ i,j,k différents.

On montre facilement que les équations aux inconnues a_1,a_2,a_3 éléments de $\mathbb{K}$:

$$\begin{cases} \xi_i = |a_i|^2 & i = 1,2,3 \\ x_i = a_j\,\overline{a}_k & i,j,k \text{ permutation circulaire de } 1,2,3 \end{cases}$$

où les ξ_i et x_i satisfont aux relations (1.1) et (1.2) ont pour solution les triplets (a_1,a_2,a_3) qui se déduisent de l'un d'entre eux par multiplication à droite par $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| = 1$. De plus, en désignant par $X(X)$ la trace de la matrice hermitienne X :

$$\sum_{i=1}^{3} |a_i|^2 = 1 \iff X(X) = 1 \iff$$ le projecteur hermitien X est de rang 1.

Soit donc :

$$X(a_1,a_2,a_3)=\begin{pmatrix} a_1\bar{a}_1 & a_1\bar{a}_2 & a_1\bar{a}_3 \\ a_2\bar{a}_1 & a_2\bar{a}_2 & a_2\bar{a}_3 \\ a_3\bar{a}_1 & a_3\bar{a}_2 & a_3\bar{a}_3 \end{pmatrix} \qquad \text{avec } |a_1|^2+|a_2|^2+|a_3|^2 = 1$$

Le sous-espace propre de $X\,(a_1,a_2,a_3)$ pour la valeur propre 1 est le point de $\mathbb{K}P^2$ de coordonnées homogènes ponctuelles (a_1,a_2,a_3) ; le sous-espace propre pour la valeur propre 0 est la droite de $\mathbb{K}P^2$ de coordonnées homogènes tangentielles (a_1,a_2,a_3).

$\mathbb{K}P^2$ apparaît ainsi comme l'ensemble des projecteurs hermitiens X de rang 1 :

$$X^2 = X \quad , \qquad X(X) = 1 \, .$$

En ces termes la relation d'incidence entre X et Y se traduit par :

$$XY + YX = 0$$

comme on le constate de façon tout à fait élémentaire.

14 - DEFINITION DU PLAN PROJECTIF $\mathbb{C}aP^2$.

14-1. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}a$, il n'y a pas de coordonnées homogènes, à cause de la non associativité, mais les considérations de 13-2 expliquent la définition qui suit.

Soit Π l'ensemble des idempotents de trace 1 de l'algèbre de Jordan $\mathfrak{J}$ des matrices 3x3 hermitiennes à coefficients dans $\mathbb{C}a$, c'est-à-dire l'ensemble des $X \in \mathfrak{J}$ tels que :

$$X \circ X = X \quad \text{et} \quad X(X) = 1$$

Π est également l'ensemble des idempotents irréductibles X de $\mathfrak{J}$, c'est-à-dire si $X = X_1+X_2$ où X_1 et X_2 sont deux idempotents tels que $X_1 \circ X_2 = 0$, alors $X = X_1$ ou X_2.

<u>Définition 1</u> : - Les points de $\mathbb{C}aP^2$ sont les éléments de

$\Pi = \{ X \in \mathcal{J} ; \quad X \circ X = X \text{ et } \chi(X) = 1\}$

- Si $Y \in \Pi$, on appelle droite Y l'ensemble des points $X \in \mathbb{C}aP^2$ tels que $X \circ Y = 0$.

Chaque élément de Π représente donc aussi bien un point de $\mathbb{C}aP^2$ qu'une droite de $\mathbb{C}aP^2$; la relation d'incidence entre le point X et la droite Y est :

$$X \circ Y = 0 .$$

<u>Définition 2</u> : - On appelle origine de $\mathbb{C}aP^2$ le point E_1, et droite de l'infini (notée D_∞) la droite E_1.

Comme on l'a déjà vu (cf. remarque de la fin de 12-5) D_∞ est la sphère S^8 d'équation :

$$|2x_1|^2 + (\xi_2-\xi_3)^2 = 1 \quad , \qquad x_1 \in \mathbb{C}a, \quad \xi_i \in \mathbb{R} \qquad \xi_2+\xi_3 = 1 .$$

Les points E_2(resp.E_3) de Π lui appartiennent ($\xi_1 = 0$, $\xi_3 = 0$ (resp $\xi_2 = 0$))$\cdot$

L'étude de $\mathcal{J}$ au chapitre II permet d'énoncer :

<u>Théorème 1</u> : i) $\mathbb{C}aP^2 \simeq F_4/\mathrm{Spin}(9)$

ii) Spin(9) opère transitivement sur D_∞ .

<u>Démonstration</u> : i) F_4 opère sur Π et $E_1 \in \Pi$; d'après le théorème de diagonalisation 12-2 (p.47) Π est l'orbite de E_1 par F_4 et d'après 12-5 le stabilisateur de E_1 dans F_4 est Spin(9).

ii) Soit $X \in D_\infty$, c'est-à-dire $X \circ E_1 = 0$. En 12-5(p. 57) nous avons vu qu'il existe $\omega \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $s \in \mathbb{C}a$, $|s| = 1$ tels que :

$$X = \exp(-\omega \, \overset{\sim s}{G_1})(E_2), \quad \exp(-\omega \, \overset{\sim s}{G_1}) \in \mathrm{Spin}\ 9$$

C'est dire que pour tout $X \in D_\infty$ il existe $u \in$ Spin 9 tel que $X = u(E_2)$.

Nous aurons besoin, par la suite, du lemme suivant :

<u>Lemme 1</u> : X et Y sont des éléments de Π :

i) $X \circ Y = 0 \iff (X|Y)=\chi(X \circ Y) = 0$

ii) $X \neq Y \iff |(X|Y)| < 1$

Démonstration : Comme la forme χ est invariante par F_4 on peut supposer $Y = E_1$. Soit $\chi(X \circ E_1) = 0$:

$$\text{si } X = \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix} \quad \text{on a } X \circ E_1 = \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3/2 & \overline{x}_2/2 \\ \overline{x}_3/2 & 0 & 0 \\ x_2/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où $\chi(X \circ Y) = 0 \Longrightarrow \xi_1 = 0$.

La relation (1.3) de 13-2 qui est valable dans Π donne alors :

$y_2 = y_3 = 0$, c'est-à-dire i).

Pour (ii) il suffit de montrer que $|\chi(X \circ E_1)| = 1$ implique $X = E_1$.

Comme $\xi_1 = \chi(X \circ E_1)$ est positif, $\xi_1 = 1$ et par (1.1) $x_2 = x_3 = 0$; par (1.2) $x_1 = 0$; comme $\chi(X) = 1$, il s'ensuit que $\xi_2 = \xi_3 = 0$ et donc $X = E_1$.

14-2. On va maintenant vérifier que $\mathbb{C}aP^2$ satisfait les axiomes d'incidence (cf. 13-1).

Considérons tout d'abord le cas $\mathbb{R}P^2$; soient X et Y deux points distincts de $\mathbb{R}P^2$, correspondant respectivement, en termes de projecteurs, aux triplets $a = (a_1,a_2,a_3) \in S^2$ et $b = (b_1,b_2,b_3) \in S^2$, et cherchons la droite Z de $\mathbb{R}P^2$ qui joint ces deux points. Si Z correspond à $c = (c_1,c_2,c_3) \in S^2$ les relations d'incidence entre X et Z ($\langle a,c\rangle = 0$) et Y et Z ($\langle b,c\rangle = 0$) montrent que c est colinéaire à $a \wedge b$, qui n'est pas nul puisque X et Y sont deux points distincts. Ecrivons maintenant, dans la base (a,b,c), les trois matrices de projection orthogonale respectivement sur chacun des trois vecteurs a,b,c. Désignant chaque matrice par la même lettre que l'application, il vient :

$$X = \begin{pmatrix} 1 & \langle a,b\rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \langle a,b\rangle & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$1 - Z$ est un projecteur de rang 2 et on a :

$$(X-Y)^2 = (1-Z)\,(1-\langle a,b\rangle^2)$$

c.a.d, puisque $\langle a,b\rangle^2 = \text{trace}\,(XY) < 1$:

$$Z = 1 - \frac{(X-Y)^2}{1-\text{trace}(XY)}$$

Pour $\mathbb{C}aP^2$ nous avons la même situation ; plus précisément :

Proposition 1 : Soient X et Y deux points distincts de $\mathbb{C}aP^2$; l'élément défini par :

$$X \vee Y = I - \frac{(X-Y)^2}{1-(X|Y)} = \frac{2(XoY) - X - Y + I(1-(X|Y))}{1 - (X|Y)} \tag{2}$$

appartient à Π et est l'unique droite qui joint X et Y .

Démonstration : Puisque $X \neq Y$, $X \vee Y$ est bien défini d'après le ii) du lemme 1 ; pour montrer qu'il appartient à Π , soit $Z = X-Y$; on a :

$$\chi(Z) = \chi(X) - \chi(Y) = 0$$

$$\chi(Z^2) = \chi(X+Y - 2\, XoY) = 2(1-(X|Y))$$

$$\chi(Z^3) = \chi(X-Y - 2\, Xo(XoY) + 2(XoY)oY)$$

$$= -2\chi(XoXoY) + 2\chi(XoYoY) = 0$$

Le corollaire 2 de 12-2 (p.51) donne par suite :

$$Z^3 = \left[1 - (X|Y)\right] Z$$

qui implique :

$$Z^4 = \left[1- (X|Y)\right] Z^2$$

on peut alors calculer à partir de $X \vee Y = I - Z^2/\left[1-(X|Y)\right]$:

$$\chi(X \vee Y) = 3 - 2 = 1$$

$$(X \vee Y)^2 = I - 2\frac{Z^2}{1-(X|Y)} + \frac{Z^4}{\left[1-(X|Y)\right]^2} = X \vee Y$$

c'est-à-dire $X \vee Y \in \Pi$

Pour montrer que $X\, o(X \vee Y) = Yo(X \vee Y) = 0$ ($X \vee Y$ est une droite qui passe par X et Y) vérifions le lemme :

lemme 2 : si $X \in \Pi$ et $Y \in \mathcal{J}$, on a :

$$X\, o\, (XoY) = \frac{1}{2} XoY + \frac{1}{2} (X \mid Y) X \ .$$

Démonstration : il suffit de le constater pour $X = E_1$; dans ce cas :

$$E_1oY = \begin{pmatrix} \xi_1 & y_3/2 & \overline{y}_2/2 \\ \overline{y}_3/2 & 0 & 0 \\ y_2/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_1o(E_1oY) = \begin{pmatrix} \xi_1 & y_3/4 & \overline{y}_2/4 \\ \overline{y}_3/4 & 0 & 0 \\ y_2/4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et l'égalité $E_1 o(E_1 oY) = \frac{1}{2} E_1 oY + \frac{1}{2} \xi_1 E_1$ est bien vraie.

De ce lemme et de (2) on tire aisément :

$X\,o(X \vee Y) = Y\,o\,(X \vee Y) = 0$.

Pour achever la démonstration de la proposition 1, reste à prouver l'unicité de la droite qui joint deux points ; à cet effet on utilise le lemme suivant :

Lemme 3 : Soient X,Y et Z des éléments de Π tels que $XoY = YoZ = ZoX = 0$; alors il existe un élément de F_4 qui diagonalise simultanément X,Y,Z.

Démonstration : Il existe $u \in F_4$ tel que $u(X) = E_1$; alors $u(Y) \in D_\infty$ et comme Spin 9 opère transitivement sur D_∞ , il existe $v \in$ Spin 9 tel que $v \circ u(Y) = E_2$, $v \circ u(X) = v(E_1) = E_1$.
On doit avoir alors :

$$v \circ u(Z)\ o\ E_1 = v \circ u(Z)\ o\ E_2 = 0$$

relations qui entraînent nécessairement $v \circ u(Z) = \lambda E_3$ et $\lambda = 1$ car $v \circ u(Z) \in \Pi$ . .

Si maintenant Z_1 et Z_2 sont deux droites qui passent par X et Y, $X \neq Y$, on a :

$$X \circ Z_1 = Y \circ Z_1 = X \circ Z_2 = Y \circ Z_2 = 0$$

le lemme 3 permet de supposer $X = E_2$, $Z_1 = E_1$; par suite :

$$Y \circ E_1 = 0 \Longrightarrow Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_2 & y_1 \\ 0 & \bar{y}_1 & \eta_3 \end{pmatrix}$$

$$E_2 \circ Z_2 = 0 \Longrightarrow Z_2 = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & \bar{z}_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ z_2 & 0 & \xi_3 \end{pmatrix}$$

et $Y \circ Z_2 = 0$ donne les relations :

$$\eta_3\, \xi_3 = \eta_3\, z_2 = \xi_3\, y_1 = y_1\, z_2 = 0$$

Comme $X \neq Y$, on ne peut avoir $\eta_3 = 0$ (sinon $\eta_2 = 1$, $y_1 = 0$, et $X = Y$) d'où :

$\xi_3 = z_2 = 0$, c'est-à-dire $Z_2 = Z_1$.

Ceci termine la démonstration de la proposition 1 et donc aussi la vérification de l'axiome P_1.

<u>Définition 3</u> : Si X,Y,Z sont des éléments de $\mathfrak{J}$, on appelle det(X,Y,Z) la quantité :

$$\det(X,Y,Z) = \frac{1}{3}X(XoYoZ) - \frac{1}{6}\left[X(XoY) + X(YoZ) + X(ZoX)\right] + \frac{1}{6}$$

α,β,γ étant réels det(X,Y,Z) représente le coefficient de $6\,\alpha\beta\gamma$ dans $\det(\alpha X + \beta Y + \gamma Z)$ donné par la définition (8) p.51. On remarque $\det(X,X,Z) = 0$.

<u>Proposition 2</u> : X,Y,Z sont des points de $\mathbb{C}aP^2$:

X,Y et Z alignés $\Longleftrightarrow$ $\det(X,Y,Z) = 0$.

<u>Démonstration</u> : On peut supposer $X \neq Y$, dans ce cas

$$\det(X,Y,Z) = \frac{1}{3}(XoY - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}Y + \frac{I}{2}(1 - (X|Y) \mid Z)$$

$$= \frac{1 - (X|Y)}{6}(X \vee Y \mid Z)$$

d'après le lemme 1 il vient donc :

$\det(X,Y,Z) = 0 \Longleftrightarrow Z\,o(X \vee Y) = 0$, c.a.d le point Z est sur la droite qui joint les points X et Y.

En même temps que nous avons vérifié l'axiome P_1, nous avons vérifié l'axiome P_2 : les éléments X et Y de Π , $X \neq Y$ représentent aussi deux droites distinctes de $\mathbb{C}aP^2$; elles ont en commun l'unique point $X \vee Y = I - \dfrac{X+Y - 2XoY}{1-X(XoY)}$.

Pour l'axiome P_3, il suffit de vérifier que E_1,E_2,E_3 et la matrice X définie par $\xi_i = x_i = \frac{1}{3}$ pour i = 1,2,3 (qui appartient bien à Π) sont quatre points dont trois ne sont pas alignés ; la vérification est immédiate par la proposition 2 ; en effet

$\det(E_1,E_2,E_3) = \frac{1}{6}$, $\qquad \det(E_i,E_j,X) = \frac{1}{18}$, $\quad i \neq j \in \{1,2,3\}$.

15 - LA DROITE PROJECTIVE $\mathbb{C}aP^1$, DROITE DE L'INFINI DE $\mathbb{C}aP^2$. FIBRATION $S^{15} \longrightarrow S^8$ DE FIBRE S^7 .

15-1. La fibration de Hopf

Dès 1935 H.Hopf ([HF]) établit l'existence d'une fibration de S^{15} en fibres S^7 , la variété des fibres étant S^8 . Pour les sphères S^{2n-1} de dimension inférieure ($n = 2^d$, $d = 0,1,2$) une manière de prouver la fibration ([BR] vol.1 p.122) s'inspire de la projection stéréographique : Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ identifié à $\mathbb{R}^n$ et l'application H (dite application de Hopf) :

$$H : (u,v) \longrightarrow (2u\bar{v},\ |u|^2 - |v|^2)$$

S^{2n-1} s'identifie à $S\mathbb{K}^2 = \{(u,v) \in \mathbb{K}^2 \ / \ |u|^2 + |v|^2 = 1\}$ et $H(S^{2n-1})$ s'identifie à $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$; la relation d'équivalence définie par H est :

$$\left.\begin{array}{r} u\bar{v} = u'\bar{v}' \\ |u|^2-|v|^2 = |u'|^2-|v'|^2 \end{array}\right\}_{(3.1)} \Longleftrightarrow {}_{(3.2)}\left\{\begin{array}{l} \exists \lambda \in \mathbb{K},\ |\lambda| = 1 \text{ tel que} \\ u' = u\lambda \text{ et } v' = v\lambda \end{array}\right.$$

La preuve tient à ce que le produit est associatif dans $\mathbb{K}$. On en déduit que H est la projection canonique pour l'espace fibré :

$$S^{n-1} \hookrightarrow S^{2n-1} \longrightarrow \mathbb{K}P^1 \simeq S^n$$

où $\mathbb{K}P^1$ désigne la droite projective (réelle, complexe, quaternionienne).

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}a$ qui n'est pas associative, l'application H garde un sens, (3.1) et (3.2) ont aussi un sens, mais ne sont pas équivalentes ; enfin S^7 n'est pas un groupe.

On va montrer comment la fibration de S^{15} sur S^8 par des sphères S^7 apparaît naturellement dans l'étude du plan et de la droite projective des octaves et en particulier comment on peut définir des coordonnées "homogènes" sur $\mathbb{C}aP^1$, à l'aide d'une équivalence analogue à (3.1) (3.2).

15-2. Action de Spin 9 sur $\mathbb{C}aP^1$, droite de l'infini de $\mathbb{C}aP^2$

$(\mathrm{Aut}\,\mathcal{J})_1 \simeq$ Spin 9 opère transitivement sur la droite E_1 de $\mathbb{C}aP^2$ et d'après 12-4 (p.55) le sous-groupe d'isotropie du point E_2 dans cette action est $(\mathrm{Aut}\,\mathcal{J})_0 \simeq$ Spin 8.

D'où l'espace fibré principal :

$$\text{Spin } 8 \hookrightarrow \text{Spin } 9 \xrightarrow{\theta} \mathbb{C}aP^1$$

On rappelle (cf.12-4 et 12-5) que tout élément u de Spin 9 se décompose d'une manière unique sous la forme :

$u = \tilde{A} \circ \hat{U}$, où

. $\hat{U} \in (\mathrm{Aut}\,\mathfrak{J})_0 \simeq$ Spin 8 est défini par :

$$\hat{U}(X) = \begin{pmatrix} \xi_1 & \overline{B(\overline{x}_3)} & C(\overline{x}_2) \\ B(\overline{x}_3) & \xi_2 & U(x_1) \\ \overline{C(\overline{x}_2)} & \overline{U(x_1)} & \xi_3 \end{pmatrix}$$

$U \in SO(8)$ et (B,C) un des deux couples d'éléments de $SO(8)$ associés à U par le principe de trialité. Avec les notations de 12-4 :

$$U = \phi_1(\hat{U}) , \qquad B = \kappa\, \phi_3(\hat{U}) , \qquad C = \kappa\, \phi_2(\hat{U})$$

. $\tilde{A} \in (\mathrm{Aut}\,\mathfrak{J})_1 \simeq$ Spin 9 est l'un des automorphismes suivants :

$\exp(-\omega\, \tilde{G}_1^s)$ $(\omega \in]0,\frac{\pi}{2}[$, $s \in S^7)$, $\exp(-\frac{\pi}{2}\, \tilde{G}_1^{e_0})$ ou Id.

L'ensemble des $\tilde{A}$ est homéomorphe à S^8 .

Pour $u = \tilde{A} \circ \hat{U}$ et $v = \tilde{B} \circ \hat{V}$, on vérifie :

(4) $\qquad uv = (\tilde{A}\ \ U(\tilde{B})) \circ \widehat{UV}$

où $U(B)$ est défini par $(\omega, U(s))$ si B est défini par (ω,s).

Il s'ensuit que Spin 8 opère à droite sur Spin 9 par :

$(\hat{V}, \tilde{A} \circ \hat{U}) \longrightarrow \tilde{A} \circ \widehat{UV}$

La projection canonique θ est donnée par :

$\theta(u) = \tilde{A}(E_2) \qquad (u = \tilde{A} \circ \hat{U})$

La fibre au-dessus de $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2 & x_1 \\ 0 & \overline{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix} = \tilde{A}(E_2) \in \mathbb{C}aP^1$

est $\tilde{A} \circ$ Spin 8 .

$X \in \mathbb{C}aP^1$ étant identifié à $(2x_1, \xi_2-\xi_3) \in \mathbb{R}^8 \times \mathbb{R}$ on a déjà vu que la base $\mathbb{C}aP^1$ est la sphère S^8 d'équation $|2x_1|^2 + (\xi_2-\xi_3)^2 = 1$ et (cf.12-5 fin) $\mathbb{C}aP^1$ est l'espace homogène symétrique Spin 9/Spin 8 .

15-3. Action de Spin 9 sur S^{15}. Application de Hopf de S^{15} sur S^8 .

a) Le complémentaire de la droite de l'infini E_1 de $\mathbb{C}aP^2$ est l'ensemble des éléments X de Π :

$$X = \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix} \qquad \text{tel que} \quad \xi_1 \neq 0 .$$

Pour un tel X les relations (1.1)-(1.3) donnent :

$$\bar{x}_1 = \frac{x_2\, x_3}{\xi_1} , \qquad \xi_2 = \frac{|x_3|^2}{\xi_1} , \qquad \xi_3 = \frac{|x_2|^2}{\xi_1}$$

On désigne par $X_{\xi_1}(x_2,x_3)$ cet élément. Pour $\xi_1 \in \left]0,1\right]$ fixé, x_2 et x_3 sont liés par la relation :

$$|x_2|^2 + |x_3|^2 = \xi_1 - \xi_1^2$$

équation qui représente la sphère $S^{15}_{\xi_1}$ de rayon $\sqrt{\xi_1 - \xi_1^2}$ dans $\mathbb{R}^{16}$.

On peut identifier le point $X_{\xi_1}(x_2,x_3)$ et le point (x_2,x_3) de $S^{15}_{\xi_1}$. Le complémentaire de D_∞ dans $\mathbb{C}aP^2$ apparaît alors comme la réunion des $S^{15}_{\xi_1}$ pour $\xi_1 \in \left]0,1\right]$, réunion qui est homéomorphe à $\mathbb{R}^{16}$ en prenant pour homéomorphisme : l'identité si $\xi_1 \in \left[\frac{1}{2},1\right]$ et l'inversion par rapport à la sphère de rayon $\frac{1}{2}$ si $\xi_1 \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$.

Considérons maintenant, pour $\xi_1 \in \left]0,1\right[$ fixé, la projection :

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ \Pi_{\xi_1}\ } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2/1-\xi_1 & x_1/1-\xi_1 \\ 0 & \bar{x}_1/1-\xi_1 & \xi_3/1-\xi_1 \end{pmatrix}$$

Il est clair que $\Pi_{\xi_1}(S^{15}_{\xi_1}) = \mathbb{C}aP^1$; par l'identification faite à la fin de 15-2 entre $\mathbb{C}aP^1$ et S^8 , nous avons :

$$(5) \qquad \Pi_{\xi_1} : (x_2,x_3) \in S^{15}_{\xi_1} \longrightarrow \left(2\ \frac{\bar{x}_3\ \bar{x}_2}{\xi_1(1-\xi_1)} , \frac{|x_3|^2-|x_2|^2}{\xi_1(1-\xi_1)}\right) \in \mathbb{C}aP^1 \simeq S^8 .$$

Rappelons que pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ (cf.13-2) :

$$\xi_1 = |a_1|^2$$

$$\frac{\overline{x}_3\,\overline{x}_2}{\xi_1(1-\xi_1)} = \frac{(a_2\,\overline{a}_1)(a_1\,\overline{a}_3)}{|a_1|^2\,(1-|a_1|^2)} = \frac{a_2\,\overline{a}_3}{1-|a_1|^2}$$

$$\frac{|x_3|^2 - |x_2|^2}{\xi_1(1-\xi_1)} = \frac{|a_1|^2\,|a_2|^2 - |a_1|^2\,|a_3|^2}{|a_1|^2\,(1-|a_1|^2\,)} = \frac{|a_2|^2 - |a_3|^2}{1-|a_1|^2}$$

Posons $u = \dfrac{a_2}{\sqrt{1-|a_1|^2}}$, $v = \dfrac{a_3}{\sqrt{1-|a_1|^2}}$;

comme $|a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2 = 1$

on a $(u,v) \in S\mathbb{K}^2$ et $\Pi\xi_1(x_2,x_3) = H(u,v)$.

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$, $\Pi\xi_1$ est donc exactement l'application de Hopf H (cf. 15-1 au début).

b) $(\mathrm{Aut}\,\mathfrak{J})_1$ laisse stable E_1, donc ξ_1 ; il est naturel de définir une action de Spin 9 sur $S^{15}_{\xi_1}$ par :

$$(u,(x_2,x_3)) \longrightarrow (X_2,X_3) = X\xi_1(X_2,X_3) = u(X\xi_1(x_2,x_3))$$

pour tout $u \in$ Spin 9 et $(x_2,x_3) \in S^{15}_{\xi_1}$.

Soit $u = \tilde{A} \circ \hat{U}$; les définitions et notations de 15-2 fournissent pour $A = \exp(-\omega\, G^a_1)$ et $U,B,C \in SO(8)$ tels que $U(xy) = B(x)\,C(y)$

$$(6)\quad \begin{cases} \overline{X}_2 = \overline{B(\overline{x}_3)}\; a \sin\omega + C(\overline{x}_2)\cos\omega \\ X_3 = \overline{B(\overline{x}_3)}\;\cos\omega - C(\overline{x}_2)\;\overline{a}\sin\omega \end{cases}$$

(Comme on pouvait le prévoir, X_2 et X_3 sont indépendants de ξ_1 ; on remarque que Spin 9 opère isométriquement sur $\mathbb{R}^{16}$).

Si $X\xi_1(x_2,x_3)$ et $X\xi_1(X_2,X_3)$ sont deux éléments de $S^{15}_{\xi_1}$, il existe $u \in F_4$ tel que $u(X\xi_1(x_2,x_3)) = X\xi_1(X_2,X_3)$ (F_4 opère transitivement sur $\mathbb{C}aP^2$);

mais un tel u ne change pas la composante ξ_1 , c.a.d $u(E_1) = E_1$ et donc $u \in$ Spin 9. Spin 9 opère par conséquent transitivement sur $S^{15}_{\xi_1}$.

Choisissons maintenant un point P de $S^{15}_{\xi_1}$ tel que $\Pi_{\xi_1}(P) = E_2$, par exemple $P = (0,R)$, où $R^2 = \xi_1(1-\xi_1)$, et cherchons son sous-groupe d'isotropie dans Spin 9. Les relations (6) donnent :

$$0 = \overline{B(R)}\ a \sin\omega$$
$$R = \overline{B(R)} \cos\omega$$

ω doit être nul, a est arbitraire (ce qui implique $\tilde{A} = Id$) et $B(1) = 1$, d'où $C = U$($x = 1$ dans $U(xy) = B(x).C(y)$).

Le stabilisateur de P dans l'action de Spin 9 sur $S^{15}_{\xi_1}$ est donc le sous-groupe de Spin 8 des $\hat{U}$, $U \in SO(8)$ tels que :

$$\forall x,y \in \mathbb{C}a \qquad U(xy) = B(x)U(y) .$$

Nous avons vu en 8-3 (p.24) que ce sous-groupe est un sous-groupe de SO(8) isomorphe à Spin 7. Nous le noterons $(\text{Spin } 7)_d$, d'où l'espace fibré principal :

$$(\text{Spin } 7)_d \hookrightarrow \text{Spin } 9 \xrightarrow{\psi_{\xi_1}} S^{15}_{\xi_1}$$

ψ_{ξ_1} est la projection canonique définie par $\psi_{\xi_1}(\tilde{A} \circ \hat{U}) = \tilde{A} \circ \hat{U}(P)$

15-4. Reprenons le principe de trialité dans SO(8) (cf.6-2 p.16) :

$$\forall x,y \in \mathbb{C}a \qquad U(xy) = B(x)\ C(y)$$

avec $r = \overline{C(1)}$ et $s = \overline{B(1)}$ nous pouvons l'écrire :

$$(7) \qquad \forall x,y \in \mathbb{C}a \qquad U(xy) = [U(x).r]\ [\overline{s}.U(y)] \quad (U(1) = s\,\overline{r}\ )$$

c'est-à-dire : quel que soit $U \in SO(8)$, il existe un couple (r,s) d'éléments de S^7 , unique au signe près, tel que (7) soit vérifiée.

Inversement à tout couple (r,s) d'éléments de S^7 correspond un élément U de SO(8) tel que (7) soit satisfaite : pour s'en assurer, on peut considérer l'algèbre de quaternions $\mathbb{H}(r,s)$ engendrée par r et s et définir U par :

$$U(x) = s\,x\,\bar{r} \quad \text{pour } x \in \mathbb{H}(r,s) \quad (\text{cf. [BR] vol.2 p.59})$$
$$U(x) = v\,x \quad \text{pour } x \in [\mathbb{H}(r,s)]^{\perp}$$

où v est un élément quelconque de norme 1 de $[\mathbb{H}(r,s)]^{\perp}$.
(7) est alors vérifiée, par associativité, pour $x \in \mathbb{H}(r,s)$; dans les autres cas les vérifications se font grâce aux formules (cf.(5) p.5) :

$$x(vy) = v(\bar{x}y) \quad , \quad (vy)x = v(xy), \quad (vx)(vy) = -y\bar{x}$$

Trois sous-groupes de SO(8) sont ainsi mis en évidence (cf.8) :

. SO(7) caractérisé par $U(1) = 1$, donc $r = s$
$U \in SO(7) \Longleftrightarrow \exists\, r \in S^7$ tel que $U(xy) = [U(x).r]\,[\bar{r}.U(y)]$

.$(\text{Spin } 7)_d$ caractérisé par $s = 1$
$U \in (\text{Spin } 7)_d \Longleftrightarrow \exists !\, r \in S^7$ tel que $U(xy) = [U(x).r]\,U(y)$

. $(\text{Spin } 7)_g$ caractérisé par $r = 1$
$U \in (\text{Spin } 7)_g \Longleftrightarrow \exists !\, r \in S^7$ tel que $U(xy) = U(x).\,[\bar{r}.U(y)]$

L'intersection de deux de ces sous-groupes est le groupe exceptionnel G_2, groupe des automorphismes de $\mathbb{C}a$ et l'application ψ , qui à $U \in (\text{Spin } 7)_g$ fait correspondre $r \in S^7$, définit l'isomorphisme (cf.p.24) d'espaces homogènes $\text{Spin } 7/G_2 \simeq S^7$.

<u>Proposition 3</u> : pour tout élément U de SO(8), il existe $U^g \in (\text{Spin } 7)_g$ et $U^d \in (\text{Spin } 7)_d$ tels que :

$$U = U^g \circ U^d \quad .$$

<u>Démonstration</u> : Soit (r,s) un couple d'éléments de S^7 associé à U tel que (7) soit satisfaite et soit $U^g \in (\text{Spin } 7)_g$ défini par :

$$\forall x,y \in \mathbb{C}a \qquad U^g(xy) = U^g(x)\,[\bar{s}\,.\,U^g(y)]$$

alors $U^g\left[(U^g)^{-1}(x).(U^g)^{-1}(y)\right] = x.(\bar{s}\, y)$ donne, en changeant $\bar{s}y$ en y :

$$\forall x,y \in \mathbb{C}a \qquad (U^g)^{-1}(xy) = (U^g)^{-1}(x).(U^g)^{-1}(sy)$$

d'où :

$$\begin{aligned}(U^g)^{-1} \circ U(xy) &= (U^g)^{-1}\{[U(x).r]\ [\bar{s}.U(y)]\}\\ &= (U^g)^{-1}(U(x).r).(U^g)^{-1}(s.\bar{s}.U(y))\\ &= \left[(U^g)^{-1} \circ U(x).(U^g)^{-1}(sr)\right].(U^g)^{-1} \circ U(y)\end{aligned}$$

et donc $(U^g)^{-1} \circ U \in (\text{Spin } 7)_d$.

Cette décomposition n'est évidemment pas unique puisque $(\text{Spin } 7)_g \cap (\text{Spin } 7)_d = G_2$; l'application qui à la classe de $U^g(\text{mod } G_2)$ fait correspondre la classe de $SO(8)$ (mod.$(\text{Spin } 7)_d$ qui la contient est un isomorphisme.

15-5. Fibration $S^{15} \longrightarrow S^8$ par S^7 ; "coordonnées homogènes" sur $\mathbb{C}aP^1$.

On a défini en 15-2 et 15-3 les deux espaces fibrés principaux :

$$(\text{Spin } 7)_d \hookrightarrow \text{Spin } 9 \xrightarrow{\psi_{\xi_1}} S^{15}_{\xi_1}$$

$$\text{Spin } 8 \hookrightarrow \text{Spin } 9 \xrightarrow{\theta} \mathbb{C}aP^1$$

Les projections canoniques sont données, pour $u = \tilde{A} \circ \hat{U} \in \text{Spin } 9$, par :

$$\psi_{\xi_1}(u) = \tilde{A} \circ \hat{U}(P) , \qquad \theta(u) = \tilde{A}(E_2)$$

où $P = (0,R) \in S^{15}_{\xi_1}$, $\qquad R^2 = \xi_1(1-\xi_1)$

Pour $\tilde{A} = \exp(-\omega\, \tilde{G}^a_1)$ on a (cf.p.57)

$$\tilde{A}(E_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2\omega & a \sin\omega\cos\omega \\ 0 & \bar{a}\sin\omega\cos\omega & \sin^2\omega \end{pmatrix}$$

et d'après les relations (6) (15-3) :

$$\tilde{A} \circ \hat{U}(P) = \begin{pmatrix} \xi_1 & \overline{B(R)}\ \cos\omega & \overline{B(R)}\ a\sin\omega \\ B(R)\cos\omega & \dfrac{R^2\cos^2\omega}{\xi_1} & \dfrac{R^2 a\sin\omega\cos\omega}{\xi_1} \\ \bar{a}B(R)\sin\omega & \dfrac{R^2\bar{a}\sin\omega\cos\omega}{\xi_1} & \dfrac{R^2\sin^2\omega}{\xi_1} \end{pmatrix} \quad (|B(R)|^2 = R^2)$$

alors par définition de Π_{ξ_1}, $\tilde{A}(E_2) = \Pi_{\xi_1}(\tilde{A} \circ \hat{U}(P))$, et donc :

$$\theta = \Pi_{\xi_1} \circ \psi_{\xi_1}$$

Le diagramme ci-dessous résume ces résultats ; il illustre le fait que Π_{ξ_1} fait correspondre à la classe d'un élément de Spin 9 mod$(\text{Spin } 7)_d$ la classe de ce même élément mod.Spin 8.

$$\begin{tikzcd} (\text{Spin } 7)_d & \text{Spin } 9 \arrow[dl, "\psi_{\xi_1}"'] \arrow[d, "\theta"', "\text{Spin } 8"] \\ S^{15}_{\xi_1} \arrow[r, "S^7", "\Pi_{\xi_1}"'] & \mathbb{C}aP^1 \simeq S^8 \end{tikzcd} \qquad \theta = \Pi_{\xi_1} \circ \psi_{\xi_1}$$

$(x_2,x_3) \in S^{15}_{\xi_1}$ est un "système de coordonnées homogènes" du point $\Pi_{\xi_1}(x_2,x_3) \in \mathbb{C}aP^1$; un autre système (X_2,X_3) de coordonnées homogènes du même point est défini par :

$$\Pi_{\xi_1}(x_2,x_3) = \Pi_{\xi_1}(X_2,X_3) \Longleftrightarrow \exists\ \tilde{A} \in S^8 \text{ et cl } U^g \in \text{Spin } 7/G_2 \text{ tels que}$$
$$(X_2,X_3) = \tilde{A} \circ \hat{U}^g \circ \tilde{A}^{-1}(x_2,x_3)$$

A ne dépend que de $\Pi_{\xi_1}(x_2,x_3) = \tilde{A}(E_2)$.

$$\tilde{A} = \exp(-\omega\, \tilde{G}_1^a) \quad \text{avec } a = \frac{\bar{x}_3\, \bar{x}_2}{|x_3|\,|x_2|}\ , \qquad \operatorname{tg} \omega = \frac{|x_2|}{|x_3|}$$

(pour $x_2 = 0$, $\tilde{A} = \mathrm{Id}$ et pour $x_3 = 0$, $\tilde{A} = \exp(-\frac{\pi}{2}\tilde{G}_1^{e_o})$)

(X_2, X_3) est indépendant du choix de $U^g \in (\mathrm{Spin}\ 7)_g$ dans sa classe mod.G_2.

La fibre F_{x_2,x_3} au-dessus du point $\Pi_{\xi_1}(x_2,x_3) = \theta(u) = \tilde{A}(E_2) = \left(2\,\frac{\bar{x}_3\, \bar{x}_2}{R^2}\ ,\ \frac{|x_3|^2 - |x_2|^2}{R^2}\right) \in \mathbb{C}aP^1 \simeq S^8$ est ainsi :

$$F_{x_2,x_3} = \{\ \tilde{A} \circ \hat{U}^g \circ \tilde{A}^{-1}(x_2,x_3)\ /\ U^g \in (\mathrm{Spin}\ 7)_g/G_2\ \} \simeq S^7\ .$$

On a donc une action de S^7 sur S^{15} par :

$$r.(x_2,x_3) = \tilde{A} \circ \hat{U}^g \circ \tilde{A}^{-1}(x_2,x_3)$$

où $\tilde{A}$ est comme précédemment et U^g appartient à la classe de $(\mathrm{Spin}\ 7)_g$ mod.G_2 définie par $r \in S^7$.

Si $V^g \in (\mathrm{Spin}\ 7)_g$ est un élément défini par $r' \in S^7$, on a :

$$r'.\ (r.(x_2,x_3)) = \tilde{A} \circ \widehat{V^g\, U^g} \circ \tilde{A}^{-1}(x_2,x_3)$$

c'est-à-dire $r'.(r.(x_2,x_3)) = r''.(x_2,x_3)$

où $r'' = \overline{r'.V^g(\bar{r})}.r'$ est l'élément obtenu par l'action de Spin 7 sur S^7 donnée en 8-3 (haut de la p.26).

16 - QUELQUES PROPRIETES GEOMETRIQUES DE $\mathbb{C}aP^2$.

16-1. Equation d'une droite

Soit $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & a_3 & \bar{a}_2 \\ \bar{a}_3 & \alpha_2 & a_1 \\ a_2 & \bar{a}_1 & \alpha_3 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix}$

D'après le lemme 1 dire que le point X est sur la droite A, $X \circ A = 0$, est équivalent à $\chi(X \circ A) = 0$; or :

$$\begin{aligned} \chi(X \circ A) = &[\xi_1\alpha_1 + (a_3|x_3) + (a_2|x_2)] + \\ &[\xi_2\alpha_2 + (a_1|x_1) + (a_3|x_3)] + \\ &[\xi_3\alpha_3 + (a_2|x_2) + (a_1|x_1)] \end{aligned}$$

On peut supposer $\alpha_1 \neq 0$ ($\alpha_1 \neq 1$) ; pour les points de A qui se trouvent à "distance finie" (c.a.d non situés sur D_∞) on a $\xi_1 \neq 0$. En multipliant $\chi(X \circ A)$ par $\xi_1\alpha_1$ et en utilisant les relations (1.1)-(1.2)-(1.3), la troisième parenthèse devient :

$$|a_2|^2|x_2|^2 + \xi_1\alpha_1(a_2|x_2) + (\bar{a}_3\,\bar{a}_2\,|\,\bar{x}_3\,\bar{x}_2)$$

à l'aide de :

$$\begin{aligned}(\bar{a}_3\,\bar{a}_2|\,\bar{x}_3\,\bar{x}_2) &= (a_2\,a_3|x_2\,x_3) = ((a_2\,a_3)\bar{x}_3|x_2) \\ &= (\frac{\bar{a}_2}{|a_2|^2}[(a_2\,a_3)\bar{x}_3]\,|\,\bar{a}_2\,x_2)\end{aligned}$$

Nous obtenons pour $\xi_1\alpha_1\,[\xi_3\alpha_3 + (a_2|x_2) + (a_1|x_1)]$ la forme : $(\xi_1\alpha_1 + \bar{a}_2\,x_2 + \frac{\bar{a}_2}{|a_2|^2}\,[(a_2\,a_3)\bar{x}_3]\,|\,\bar{a}_2\,x_2)$

De même la deuxième et la première parenthèse deviennent respectivement :

$$(\frac{\bar{a}_2}{|a_2|^2}\,[(a_2\,a_3)\bar{x}_3] + \bar{a}_2\,x_2 + \xi_1\alpha_1\,|\,\frac{\bar{a}_2}{|a_2|^2}[(a_2\,a_3)\bar{x}_3])$$

$$(\xi_1\alpha_1 + \bar{a}_2\,x_2 + \frac{\bar{a}_2}{|a_2|^2}[(a_2\,a_3)\bar{x}_3]|\xi_1\alpha_1)$$

On obtient donc :

$$(\xi_1\alpha_1)\ X(X \circ A) = |\alpha_1\xi_1 + \bar{a}_2\, x_2 + a_2^{-1}\,[(a_2a_3)\bar{x}_3]\,|^2$$

le changement :

$$\bar{x} = \frac{a_3}{\alpha_1}\ , \quad \bar{y} = \frac{\bar{a}_2}{\alpha_1}\ , \quad \bar{X} = \frac{\bar{x}_3}{\xi_1}\ , \qquad \bar{Y} = \frac{\bar{x}_2}{\xi_1}$$

nous donne pour équation de la droite A :

$$0 = 1 + \bar{y}\ \ Y + y^{-1}\,[(y\ \bar{x})\ X]$$

On retrouve le point de départ de l'étude de $\mathbb{C}aP^2$ par J.TITS ; l'équation précédente représente la polaire de (x,y) par rapport à la conique d'Hermite (ensemble des points doubles x = X , y = Y) $|x|^2 + |y|^2 + 1 = 0$.

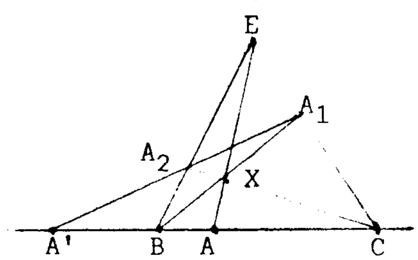
Références : [TS 1] p.322 (I) et [B E] 3.69 et la suivante :

16-2. Harmonicité

On va voir que $\mathbb{C}aP^2$ est harmonique, c'est-à-dire que dans $\mathbb{C}aP^2$ le théorème du quadrilatère complet est vrai.

Par commodité on note [A B] la droite qui joint les points A et B.

Le théorème du quadrilatère complet s'énonce :



Soient A,B,C trois points alignés, E un point non situé sur la droite [A B] et X un point sur la droite [E A] différent de E et A.

Alors le point A' déterminé par la construction donnée par la figure ci-dessus est indépendant du choix de E et de X. Il ne dépend que des trois points A,B,C ; on l'appelle le conjugué harmonique de A par rapport à B et C.

On va tout d'abord démontrer cette propriété lorsque $B = E_2$, $C = E_3$, $E = E_1$.

Dans ce cas, si $X = \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix}$, par la proposition 1 de 14-2 :

$$X \vee E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_3/1-\xi_1 & -x_1/1-\xi_1 \\ 0 & -\overline{x}_1/1-\xi_1 & \xi_2/1-\xi_1 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire la droite X coupe la droite $E_1 = D_\infty$ au point antipodal sur D_∞ de l'image du point X par Π_{ξ_1} (cf.15-3).

De même :

$$(X \vee E_1) \vee E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2/1-\xi_1 & x_1/1-\xi_1 \\ 0 & \overline{x}_1/1-\xi_1 & \xi_3/1-\xi_1 \end{pmatrix} = \Pi_{\xi_1}(X)$$

c'est-à-dire l'intersection des droites $[E_1 X]$ et D_∞ est $A = \Pi_{\xi_1}(X)$ (Π_{ξ_1} apparaît comme la projection conique sur D_∞ faite à partir du point E_1).

De la même façon (E_1, E_2, E_3 jouent des rôles symétriques dans $\mathfrak{J}$) la droite $[E_2\ X]$ coupe la droite $[E_1\ E_3]$, qui est la droite E_2 au point :

$$A_1 = \begin{pmatrix} \xi_1/1-\xi_2 & 0 & \overline{x}_2/1-\xi_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ x_2/1-\xi_2 & 0 & \xi_3/1-\xi_2 \end{pmatrix}$$

et la droite $[E_3\ X]$ coupe la droite $[E_1\ E_2]$, qui est la droite E_3 au point :

$$A_2 = \begin{pmatrix} \xi_1/1-\xi_3 & x_3/1-\xi_3 & 0 \\ \overline{x}_3/1-\xi_3 & \xi_2/1-\xi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le point A' donné par la construction est alors :

$$A' = (A_1 \vee A_2) \vee E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\xi_2}{1-\xi_1} & -\dfrac{\bar{x}_3\,\bar{x}_2}{\xi_1-\xi_1^2} \\ 0 & \dfrac{-x_2\,x_3}{\xi_1-\xi_1^2} & \dfrac{\xi_3}{1-\xi_1} \end{pmatrix}$$

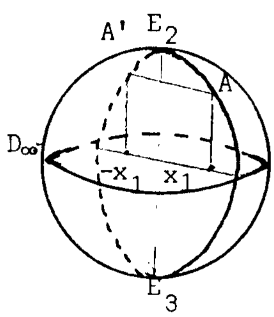
Il en résulte que pour :

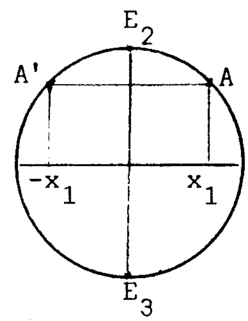
$$A = \left(2\,\frac{\bar{x}_3\,\bar{x}_2}{\xi_1-\xi_1^2}\,,\ \frac{\xi_2-\xi_3}{1-\xi_1}\right) \in \mathbb{C}aP^1 \simeq S^8 \quad \text{(cf. (5) de 15-3)}$$

le point A' correspondant est :

$$A' = \left(-2\,\frac{\bar{x}_3\,\bar{x}_2}{\xi_1-\xi_1^2}\,,\ \frac{\xi_2-\xi_3}{1-\xi_1}\right) \quad \text{et donc ne dépend pas de X.}$$

Les figures ci-dessous schématisent la situation : le quadrangle (E_2, E_3, A, A') est harmonique.





La démonstration de l'harmonicité dans le cas général résulte alors de la proposition suivante :

<u>Proposition:</u> Trois points de $\mathbb{C}aP^2$ étant donnés en position générale, il existe une collinéation (bijection de $\mathbb{C}aP^2$ sur lui-même qui transforme les droites en droites) qui envoie ces points sur E_1, E_2, E_3.

<u>Démonstration</u> : en utilisant des applications ϕ du type :

$$\phi : X \longrightarrow P\,X\,P^*$$

(où P est une matrice dont tous les éléments diagonaux valent 1 et un seul élément non diagonal est un octave non nul), dont on constate par un calcul direct qu'elles conservent det X et par conséquent l'alignement des points, Freudenthal montre ([FL] 1 p.50) qu'il existe une collinéation qui envoie une droite donnée et un point donné non incidents respectivement sur la droite E_1 et le point E_1.

Soient alors E,B,C donnés en position générale (voir figure au début de 16-2) ; on commence par envoyer le point E sur le point E_1 et la droite [BC] sur le droite E_1. Ensuite par un élément de Spin 9 $\simeq (\mathrm{Aut}\,\mathfrak{J})_1$, on peut amener C sur E_3 ; reste à voir qu'il existe une collinéation conservant E_1 et E_3 et envoyant B sur E_2, ce qui se fait encore en utilisant une application ϕ .

Remarque 1 : D'après [SR] , si on ajoute aux axiomes P_1, P_2, P_3 l'axiome P_4 :

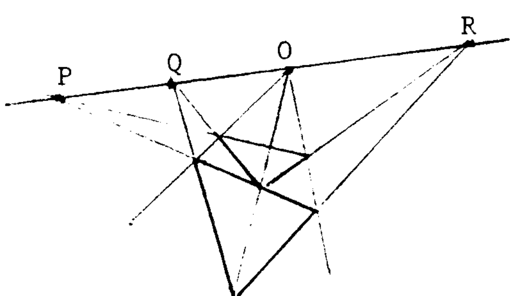
P_4 : il existe une collinéation laissant chaque point d'une droite donnée invariant et transformant un point donné (non incident à la droite donnée) en un autre point donné (non incident à la droite donnée).

le plan projectif considéré est harmonique.

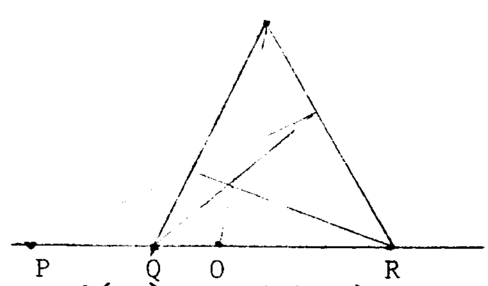
SPRINGER ([SP]) montre que $\mathbb{C}aP^2$ satisfait à P_4, mais dans notre présentation ce n'est pas évident.

Remarque 2 : FREUDENTHAL donne ([FL] 1 p.43,44) une démonstration directe de l'harmonicité de $\mathbb{C}aP^2$ en utilisant la droite réelle (resp. la droite complexe) définie par trois points (resp. quatre points) d'une droite octave.

Remarque 3 : Le théorème du quadrilatère complet est équivalent au "petit" théorème de Desargues (cas particulier où la droite des trois points, que le "grand" théorème dit alignés, passe par le centre de projection) d'après [MG] ; un plan affine est un plan de translation (ou plan de MOUFANG) s'il satisfait au petit théorème de Desargues (cf. [AE]).



petit théorème de Desargues



théorème quadrilatère complet.

16-3 Courbure de $\mathbb{C}aP^2$.

$\mathbb{C}aP^2$ est l'espace homogène symétrique F_4/Spin 9 ; les algèbres de Lie $\mathcal{F}_4$ et o(9) sont telles que :

$$\mathcal{F}_4 = \mathfrak{M} \oplus o(9) \text{ avec}$$

$$\mathfrak{M} = \left(\bigoplus_{j=o}^{7} \mathbb{R}\, \tilde{G}_2^{e_j}\right) \oplus \left(\bigoplus_{j=o}^{7} \mathbb{R}\, \tilde{G}_3^{e_j}\right) , \qquad o(9) = \left(\bigoplus_{j=o}^{7} \mathbb{R}\, \tilde{G}_1^{e_j}\right) \oplus o(8)$$

On rappelle la table des crochets de Lie donnée en 12-7 p.62 :

$a \in \mathbb{C}a$, $b \in \mathbb{C}a$, $\quad a\times b = \operatorname{Im} \bar{b}a = \frac{1}{2}(\bar{b}a - \bar{a}b)$, $\quad [a,b] = ab-ba$

$$[\tilde{G}_i^a, \tilde{G}_i^b] = \hat{U}_i(a,b) , \qquad [\hat{U}, \tilde{G}_i^a] = \tilde{G}_i^{\lambda^{i-1}(U)(a)} \qquad \begin{array}{l} i = 1,2,3 \\ U \in o(8) \end{array}$$

$$[\tilde{G}_i^a, \tilde{G}_j^b] = \tilde{G}_k^{\overline{ab}} \qquad i,j,k \text{ permutation circulaire de } 1,2,3$$

où :

$$U_1(a,b) = 2\,\{ L_{[a,b]} - a\times b - R_{a\times b} - [L_a, R_b] \} \in o(8)$$

$$U_2(a,b) = 2\,\{ R_{a\times b} - [a,b] - [L_a, R_b] \} \in o(8)$$

$$U_3(a,b) = 2\,\{ L_{a\times b} - [L_a, R_b] \} \in o(8)$$

U_1, U_2, U_3 sont liés par : $U_1 = \lambda \circ U_2 = \lambda^2 \circ U_3$

L'algèbre de Lie $\mathcal{F}_4$ étant identifiée à l'espace tangent à F_4 au point Id et la sous-algèbre o(9) à l'espace tangent à Spin 9 au même point, $\mathfrak{M}$ représente l'espace tangent au point E_1, origine de $\mathbb{C}aP^2$, défini par $\xi_1 = 1$. Identifions $\mathfrak{M}$ à $\mathbb{C}a\times\mathbb{C}a$; deux vecteurs tangents à l'origine de $\mathbb{C}aP^2$ sont notés :

$$X = (x_2, x_3) \qquad Y = (y_2, y_3).$$

$\mathbb{C}a\times\mathbb{C}a$ est naturellement muni de la métrique riemannienne :

$$\langle (x_2,x_3) , (y_2,y_3) \rangle = (x_2|y_2) + (x_3|y_3)$$

dont on démontre facilement qu'elle est invariante par Spin 9.

Dans ces conditions le tenseur de courbure R est donné par :

$R(X,Y)Z = -\left[[X,Y],Z\right]$ ([K-N] vol.II p.231)

et la courbure sectionnelle (X et Y orthonormés) par :

$\sigma(X,Y) = \langle R(X,Y)Y,X\rangle$

A l'aide de la table ci-dessus et de l'identification de $\mathfrak{m}$ avec $\mathbb{C}a\times\mathbb{C}a$, on obtient

$R((x_2,x_3), (y_2,y_3)) (z_2,z_3) = (Z_2,Z_3)$, où

$$\begin{cases} Z_2 = - \left[U_1(x_2,y_2) + \lambda^2 U_1(x_3,y_3)\right] (z_2) + (x_2y_3-y_2x_3)\overline{z}_3 \\ Z_3 = - \left[\lambda U_1(x_2,y_2) + U_1(x_3,y_3)\right](z_3) - \overline{z}_2(x_2y_3-y_2x_3) \cdot \end{cases}$$

Par suite la courbure sectionnelle est :

$$\sigma(X,Y) = (U_1(y_2,x_2)y_2 + \lambda^2 U_1(y_3,x_3)y_2 + (x_2y_3-y_2x_3)\overline{y}_3 |\ x_2)$$
$$+ (\ \lambda U_1(y_2,x_2)y_3 + U_1(y_3,x_3)y_3 - \overline{y}_2(x_2y_3-y_2x_3) |\ x_3)$$

c'est-à-dire : $\sigma(X,Y) = 2A + 2B + C + 2D + 2E$, avec :

$$A(y_2,x_2) = \frac{1}{2}(U_1(y_2,x_2)(y_2)|x_2) = (([y_2,x_2] - y_2\times x_2)y_2 - y_2(y_2\times x_2)|x_2)$$

$$B(y_3,x_3) = \frac{1}{2}(U_1(y_3,x_3)(y_3)|x_3) = A(y_3,x_3)$$

$$C(x_2,y_2,x_3,y_3) = (x_2y_3-y_2x_3)\overline{y}_3 |\ x_2) - (\overline{y}_2(x_2y_3-y_2x_3)|x_3)$$

$$D(x_2,y_2,x_3,y_3) = \frac{1}{2}(\lambda^2 U_1(y_3,x_3)(y_2)|x_2) = (y_2(y_3\times x_3 - [y_3,x_3]) -\{y_3,x_3,y_2\}|x_2)$$

$$E(x_2,y_2,x_3,y_3) = \frac{1}{2}(\lambda U_1(y_2,x_2)(y_3)|x_3) = ((y_2\times x_2)y_3-\{y_2,x_2,y_3\}|x_3)$$

Pour faire certains calculs on remarque que le crochet et le produit en croix sont liés par :

$2\ a\times b - [a,b] = t(b)a - t(a)b$

et, comme $([a,b] \mid a) = ([a,b] \mid b) = 0$, on a :

$$(a\times b \mid [a,b]) = \frac{1}{2}|[a,b]|^2$$

d'autre part : $2\bar{b} \times \bar{a} = 2 \text{ Im } a\bar{b} = a\bar{b} - \bar{b}a$ donne :

$$a\times b - \bar{b}\times\bar{a} = [a,b]$$

d'où :

$$\begin{aligned} A(y_2,x_2) &= ([y_2,x_2] - y_2\times x_2 \mid x_2\bar{y}_2) - (y_2\times x_2 \mid \bar{y}_2 x_2) \\ &= ([y_2,x_2] - y_2\times x_2 \mid \text{Im } x_2\bar{y}_2) - (y_2\times x_2 \mid \text{Im } \bar{y}_2 x_2) \\ &= ([y_2,x_2] - y_2\times x_2 \mid x_2\times y_2 - [x_2,y_2]) + |x_2\times y_2|^2 \\ &= 2|x_2\times y_2|^2 \end{aligned}$$

et $B(y_3,x_3) = 2|x_3\times y_3|^2$

Ensuite $C(x_2,y_2,x_3,y_3) = |x_2y_3 - y_2x_3|^2 = |x_2|^2|y_3|^2 + |y_2|^2|x_3|^2 - 2(x_2y_3 \mid y_2x_3)$

$$\begin{aligned} D(x_2,y_2,x_3,y_3) &= (y_2(\bar{x}_3\times\bar{y}_3) - \{y_3,x_3,y_2\} \mid x_2) \\ &= (y_2(\tfrac{1}{2} y_3\bar{x}_3 - \tfrac{1}{2} x_3\bar{y}_3) - \{y_3,x_3,y_2\} \mid x_2) \\ &= (y_2(\tfrac{1}{2} y_3\bar{x}_3 + \tfrac{1}{2} x_3\bar{y}_3 - x_3\bar{y}_3) - \{y_2,x_3,\bar{y}_3\} \mid x_2) \\ &= (y_2(x_3 \mid y_3) - (y_2x_3)\bar{y}_3 \mid x_2) \\ &= (x_2 \mid y_2)(x_3 \mid y_3) - (y_2\, x_3 \mid x_2\, y_3) \end{aligned}$$

De même : $E(x_2,y_2,x_3,y_3) = D(x_2,y_2,x_3,y_3)$

En rassemblant tous les résultats et en utilisant (2-1, identité (1)) l'égalité $2(x_2 \mid y_2)\,(x_3 \mid y_3) = (x_2x_3 \mid y_2y_3) + (x_2y_3 \mid y_2x_3)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \sigma(X,Y) = {} & 4|x_2\times y_2|^2 + 4|x_3\times y_3|^2 + |x_2|^2\,|y_3|^2 + |y_2|^2\,|x_3|^2 \\ & + 2(x_2x_3 \mid y_2y_3) - 4(y_2x_3 \mid x_2y_3) \end{aligned}$$

$(X = (x_2,x_3), \quad Y = (y_2,y_3)) \qquad ||X||^2 = ||Y||^2 = 1 , \qquad \langle X,Y\rangle = 0)$

$|a\times b|^2 = |a\wedge b|^2 = |a|^2\ |b|^2 - (a|b)^2$: on retrouve la formule donnée par Brown et Gray ([B.G] p.53).

En particulier :

$\sigma((x_2,0),\ (0,y_3)) = 1$

$\sigma((x_2,0),\ (y_2,0)) = 4 \qquad (y_2 \neq \lambda x_2\ ,\ \lambda\in \mathbb{R})$

D'autre part, du fait que l'action de Spin 9 sur S^{15} est transitive (cf.15) et que σ est invariante par Spin 9, on peut supposer $X = X_o = (1,0)$; il vient, dans ce cas :

$$* \quad \sigma(X_o,Y) = 4|y_2|^2 + |y_3|^2 = 1 + 3|y_2|^2$$

ce qui montre que quels que soient X et Y (non colinéaires) :

$$\sigma(X,Y) \in [1,4]$$

La formule * est exactement celle de Besse ([B E] p.81) établie dans l'ouvrage cité pour $\mathbb{K} = \mathbb{R},\ \mathbb{C},\ \mathbb{H}$.

BIBLIOGRAPHIE

On trouvera une bibliographie très complète (jusqu'à 1965) dans FL 2 .

[AE] J. ANDRÉ : Über nicht-Desarguessche Ebenen mit transitiver Translations gruppe. Math. Zeitschr. Bd.60, p. 156-186 (1954).

[BE] A.L. BESSE : Manifolds all of whose geodesics are closed. Springer Verlag n°93 (1978).

[B-G] R. BROWN, A. GRAY : Riemannian manifolds with holonomy group Spin(9). Diff. geom., in honor of K. Yano, Kinokuniya, Tokyo, 1972, p. 41-59.

[BL] A. BOREL : Le plan projectif des octaves et les sphères comme espaces homogènes, C.R.A.S. 230 (1950), 1378-1380.

[BN] R. BROWN : On generalized Cayley-Dickson algebras, Pacific jour. of Math. vol. 20 n°3, p. 415-422 (1967).

[BR] M. BERGER : Géométrie (5 volumes). Paris: CEDIC - Nathan (1976).

[CN] E. CARTAN : Sur certaines formes riemanniennes remarquables des géométries à groupe fondamentale simple. Ann. Ecole Norm. Sup. 44, 345-467 (1927).

[C-S] C. CHEVALLEY, R. SCHAFER : The exceptional simple Lie algebras F_4 and E_6. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 36, 137-141 (1950).

[CY] C. CHEVALLEY : Theory of Lie groups (2 vol.) Princeton Univ. Press 1946.

[FL] H. FREUDENTHAL :
1. Oktaven, Ausnahmegruppen und Oktavengeometrie. Math. Inst. der Rijksuniversiteit, Utrecht, 1951 (mimeographed); new revised edition, 1960.
2. Zur ebenen Oktavengeometrie, Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap. A 56 (1953), 195-200.
3. Lie groups in the foundations of geometry. Advan. Math. 1, 145-190 (1965)

[G-P-R] M. GÜNAYDIN, C. PIRON, H. RUEGG : Moufang Plane and Octonionic Quantum Mechanics. Commun. Math. Phys. 61, 69-85 (1978).

[HF] H HOPF : Ueber die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimensionen , Fund. Math., 25, 1935, p. 427-440.

[HH] G. HIRSCH : La géométrie projective et la topologie des espaces fibrés, Colloq. Intern. C.N.R.S. n°12 (1949), 35-42.

[HL] M. HALL : The theory of groups. New York : Mac Millan 1959.

[HN] S. HELGASON : Differential geometry and Symmetric Spaces. Pure and appl. Math. New York : Academic Press 1962.

[JN] N. JACOBSON :
1. Cayley numbers and normal simple Lie algebras of type G, Duke Math. J. 5, 775-783 (1939).
2. Composition algebras and their automorphisms, Rend. Circ. Math. Palermo (2) 7, 55-80 (1958).
3 Some groups of transformations defined by Jordan algebras, I,II,III. I: J. Reine Angew. Math. 201, 178-195 (1959); II, ibid. 204, 74-98 (1960); III ibid. 207, 61-85 (1961).

[K-N] S. KOBAYASHI, K. NOMIZU : Foundations of Differential Geometry (2 vol.) New York : Interscience Publishers 1963.

[MG] R. MOUFANG : Alternativekörper und der Satz vom Vollständigen Vierseit. Abhandl. Math. Univ. Hamburg, 9, 207-222 (1933).

[SC] R. SCHAFER :
1. An introduction to Non associative Algebras. Pure and applied Math. New York : Academic Press 1966.
2. On the algebras formed by the Cayley-Dickson process, Amer. J. Math. 76, 435-446 (1954).

[ST] N. STEENROD : The topology of fibre bundles, Princeton Univ. Press, 1951.

[SN] H. SAMELSON : Notes on Lie algebras. Van Nostrand, New York 1969.

[SP] T. SPRINGER : The projective Octave plane. Indag. Math. 22, 74-100 (1960)

[TS] J. TITS :
1. Le plan projectif des octaves et les groupes de Lie exceptionnels. Bull. Acad. Roy. Belgique 39, 309-329 (1953).
2. Le plan projectif des octaves et les groupes exceptionnels E_6 et E_7. Bull. Acad. Roy. Belgique 40, 29-40 (1954).