PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

LANDO DEGOLI

Un teorema sui sistemi lineari di quadriche irriducibili di prima e seconda specie

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1985, fascicule 6A
, p. 1-17
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1985___6A_1_0>

Publications du Departement

de Mathématiques

1985 - 6/A

UN TEOREMA SUI SISTEMI LINEARI DI QUADRICHE IRRIDUCIBILI DI PRIMA E SECONDA SPECIE

Lando DEGOLI

(Dipartimaneto di Matematica dell'Università di Modena)

RIASSUNTO :

Si dimostra una condizione necessaria e sufficiente affinchè siano a Jacobiana di caratteristica $r-k$ i sistemi lineari di quadriche di S_r irriducibili di prima e di seconda specie .

Nello spazio lineare complesso S_r di coordinate proiettive x_i $(i = 0,1,\dots,r)$ si assumano $d+1$ quadriche linearmente indipendenti :

$$f_0 = 0 \quad f_1 = 0,\dots\dots,f_d = 0$$

con :

$$f_q = \sum_{i,k=0}^{r} a_q^{ik} \, x_i \, x_k \ .$$

Il sistema lineare $L_{d/m}$ di dimensione d e Jacobiana di caractteristica m è espresso dall'equazione :

$$\sum_{q=0}^{d} \lambda_q \, f_q = 0$$

mentre la matrice Jacobiana ad $r+1$ righe e $d+1$ colonne :

$$J = \left|\left| \frac{\partial f_q}{\partial x_i} \right|\right| \quad \begin{pmatrix} q = 0,1,\dots\dots,d \\ i = 0,1,\dots\dots,r \end{pmatrix}$$

si suppone abbia caratteristica m.

Sovente porremo, quando <u>$m \leqslant r$</u> , <u>$m = r-k$</u> e il sistema sarà indicato con $L_{d/r-k}$.

Quando la Jacobiana è identicamente nulla, l'intero S_r è luogo di punti coniugati rispetto a tutte le quadriche del sistema. Se la Jacobiana è di caratteristica <u>$r-k$</u> un punto generico <u>P</u> è coniugato con un S_k.

Il problema di determinare i sistemi lineari di quadriche $L_{d/r-k}$ è piuttosto complesso in quanto i sistemi subordinati presenti in $L_{d/r-k}$ sono di diversa natura.

Per riuscire a dare una rispota definitiva a tale annosa questione abbiamo suddiviso i sistemi in : <u>riducibili</u> e <u>irriducibili</u> e questi ultimi in : <u>irriducibili di prima e di seconda specie</u>.

Diremo che un sistema lineare di quadriche $L_{d/m}$ è <u>riducibile</u> quando esistono in esso dei sistemi subordinati, privi di quadriche in comune :

$$L_{d_1/m_1} \quad , \quad L_{d_2/m_2} \quad ,\ldots\ldots, \quad L_{d_s/m_s}$$

ed eventualmente <u>p $(p \geqslant 0)$</u> quadriche funzionalmente indipendenti, in modo da soddisfare alle uguaglianze :

$$d = d_1 + d_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + d_s + s + p - 1$$

$$m = m_1 + m_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + m_s + p \quad .$$

In caso contrario sarà detto <u>irriducibile</u>.

Un sistema irriducibile $L_{d/m}$ possiede sempre dei sistemi subordinati $L_{h/m}$ tali che :

$$m - 1 \leqslant h \leqslant d - 1 \quad , \quad n = m \quad ,$$

che diremo <u>banali</u>, ma non è detto che possieda sempre dei sistemi $L_{g/c}$ con :

$$2 \leqslant g \leqslant d-1 \quad , \quad 2 \leqslant c \leqslant m-1 \quad , \quad c \leqslant g \quad ,$$

<u>che diremo essenziali</u>

Quando questi ultimi esistono, impongono a <u>c+1</u> quadriche linearment indipendenti, scelte entro $L_{g/c}$ di essere funzionalmente dipendenti.

Chiamiamo sistemi <u>irriducibili di prima specie</u> quei sistemi che non possiedono sistemi subordinati essenziali, e sistemi <u>irriducibili di seconda specie</u> quelli che, pur non essendo riducibili, possiedono tuttavia dei sistemi subordinati essenziali.

In questo caso non possono evidentemente esistere in essi quadriche funzionalmente indipendenti ne sistemi subordinati essenziali isolati, cioè privi di quadriche in comune con gli altri, altrimenti il sistema sarebbe riducibile.

Detti : $\qquad L_{d_1} \; , \; L_{d_2} \; , \ldots , \; L_{d_s}$

i sistemi essenziali contenuti in $L_{d/m}$, questi dovranno formare <u>una catena</u>, nel senso che :

1°) nessuno di essi è riducibile, altrimenti lo sarebbe anche $L_{d/m}$

2°) L_{d_1} ha almeno una quadrica in comune con un altro, ad esempio L_{d_2}, ed il loro sistema congiungente L_a ha almeno una quadrica in comune con un terzo, ad esempio L_{d_3}, ed il sistema congiungente L_a con L_{d_3} ha almeno una quadrica in comune con un quarto e cosi via fino ad esaurire tutto $L_{d/m}$.

Entro L_d potrà anche esistere più di una catena.

Vale il seguente LEMMA :

Se il sistema L_d *, possiede i sistemi subordinati :* L_{d_1} , L_{d_2} ,.....,L_{d_s} *formanti una catena, è sempre possibile scegliere tra le quadriche di questi sistemi passanti per un punto p,* d *quadriche linearmente indipendenti in modo da individuare il sistema* L_{d-1} *di quadriche di* L_d *passanti per* P .

DIMOSTRAZIONE :

Possiamo scrivere le equazioni di L_{d_1} et L_{d_2} nel seguente modo :

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \dots\dots + \lambda_h f_h + \dots\dots + \lambda_{d_1} f_{d_1} = 0$$

$$\mu_0 g_0 + \mu_1 g_1 + \dots\dots + \mu_h g_h + \dots\dots + \mu_{d_2} g_{d_2} = 0 \qquad (1)$$

L'equazione del sistema L_a congiungente risulta :

$$\upsilon_0 f_0 + \upsilon_1 f_1 + \dots + \upsilon_h f_h + \dots + \upsilon_{d_1} f_{d_1} + \vartheta_0 g_0 + \vartheta_1 g_1 + \dots + \vartheta_h g_h + \dots + \vartheta_{d_2} g_{d_2} = 0 \quad (2)$$

Poichè L_{d_1} ed L_{d_2} hanno in comune almeno una quadrica potremo supporre che f_h coincida con g_h.

Sia P un punto di S_r. Indichiamo con :

$$f_0(P) \quad , \quad f_1(P) \; ,\dots, \; g_0(P) \; , \; g_1(P), \; \dots\dots$$

i valori complessi che le quadriche assumono nel punto P.

Sostituendo le coordinate di P in (1) si possono ricavare i valori di λ_h e μ_h in fuzione dei λ_i e μ_i rimanenti, dopo di che i due sistemi diventano :

$$\lambda_0 \left(f_0 + \frac{f_0(P)}{f_h(P)} f_h\right) + \lambda_1 \left(f_1 + \frac{f_1(P)}{f_h(P)} f_h\right) + \ldots + \lambda_{d_1}\left(f_{d_1} + \frac{f_h(P)}{f_h(P)} f_h\right) = 0$$

$$\mu_0 \left(g_0 + \frac{g_0(P)}{f_h(P)} f_h\right) + \mu_1 g_1 + \frac{g_1(P)}{f_h(P)} f_h) + \ldots + \mu_{d_2}\left(g_{d_2} + \frac{g_{d_2}(P)}{f_h(P)} f_h\right) = 0 \quad . \tag{3}$$

Questi sistemi mancano rispetto ai primi dei parametri λ_h e μ_h. Essi risultano i sistemi L_{d_1-1} , L_{d_2-1} di quadriche di L_{d_1} ed L_{d_2} passanti per <u>P</u>.

Operando nello stesso modo nel sistema (2) e ricavando il parametro $(\upsilon_h + \vartheta_h)$ si ottiene :

$$\upsilon_0\left(f_0 + \frac{f_0(P)}{f_h(P)} f_h\right) + \upsilon_1 \left(f_1 + \frac{f_1(P)}{f_h(P)} f_h\right) + \ldots + \upsilon_{d_1}\left(f_{d_1} + \frac{f_{d_1}(P)}{f_h(P)} f_h\right) +$$

$$+ \vartheta_0\left(g_0 + \frac{g_0(P)}{f_h(P)} f_h\right) + \vartheta_1\left(g_1 + \frac{g_1(P)}{f_h(P)} f_h\right) + \ldots + \vartheta_{d_2}\left(g_{d_2} + \frac{g_{d_2}(P)}{f_h(P)} f_h\right) = 0. \tag{4}$$

Poichè il sistema lineare (4) è individuato dalle stesse quadriche linearmente indipendenti dei sistemi (3) risulta provato che il sistema L_{a-1} di quadriche di L_a passanti per <u>P</u> è individuato da <u>a</u> quadriche linearmente indipendenti di L_{d_1-1} ed L_{d_2-1} .

Operando nello stesso modo si proverà che il sistema L_{b-1} formato dalle quadriche del sistema L_b, congiungente L_a con L_{d_3} , passanti per il punto <u>P</u> è individuato da <u>b</u> quadriche linearmente indipendenti estratte de L_{a-1} ed L_{d_3-1} , cioè estratte da L_{d_1-1} , L_{d_2-1} , L_{d_3-1} .

Cosi proseguendo il lemma risulta dimostrato.

Ora possiamo dimostrare il

TEOREMA : *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema lineare di quadriche* L_d *di* S_r *sia a Jacobiana di caratteristica* $r-k \leqslant d (k \geqslant 0)$ *è che le quadriche del sistema che passano per un punto generico di* S_r *abbiano in comune un* S_{k+1} .

DIMOSTRAZIONE :

Dimostriamo innanzitutto la sufficienza.

Se tutte le quadriche di un sistema lineare L_d di S_r , che passano per un punto generico P, hanno in comune un S_{k+1} è evidente che il punto P ha per coniugato lo stesso S_{k+1} rispetto a tutte le quadriche del sistema L_{d-1} , passanti per P. Un'altra quadrica di L_d , non passante per P , non contiene ovviamente l' S_{k+1} il quale non giace nemmeno nell'iperpiano polare di P rispetto a questa quadrica, altrimenti P starebbe nella quadrica. Percio l'iperpiano taglierà l' S_{k+1} in un S_k e quindi il punto P ha per coniugato un S_k rispetto a tutte le quadriche del sistema L_d.

Ciò significa che la Jacobiana è di caratteristica r-k , come volevasi dimostrare.

Dimostriamo ora la necessità.

1°) *Facciamo l'ipotesi che il sistema lineare sia irriducibile di prima specie e supponiamo che sia :* $r \leqslant d$.

Consideriamo dapprima il caso particolare $k=0$ e dimostriamo per ora che : "*Se il sistema* L_d *irriducibile di prima specie è a Jacobiana di caractteristica* r $(r \leqslant d)$, *le quadriche del sistema che passano per un punto generico di* S_r *hanno in comune una retta*".

Se la Jacobiana è di caratteristica r significa che tutti i determinanti d'ordine r+1 estratti dalla matrice sono identicamente nulli.

Consideriamo il determinante individuato da $\underline{r+1}$ quadriche qualsiasi. Potremo scegliere, senza nuocere alla generalità, le prime $\underline{r+1}$ quadriche del sistema e si avrà :

$$D = \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_s} \right\| = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 0, 1, \ldots\ldots, r \\ s = 0, 1, \ldots\ldots, r \end{pmatrix} \qquad (5)$$

I minori di ordine $\underline{r}$ estratti da qualsiasi matrice formata con $\underline{r}$ colonne del determinante $\underline{D}$ non sono tutti nulli, altrimenti esisterebbe entro $L_{d/r}$ il sistema subordinato $L_{r-1/r-1}$ contro l'ipotesi che L_d sia irriducibile di prima specie. E' dunque necessario che uno almeno di questi minori sia $\neq 0$. Possiamo suppore che sia il minore ottenuto eliminando da $\underline{D}$ l'ultima riga e l'ultima colonna : lo indichiamo con A_r.

Prendiamo in considerazione la matrice estratta da $\underline{D}$ formata con le prime $\underline{r}$ righe ed indichiamo con :

$$A_0, A_1, \ldots\ldots\ldots, A_{r-1}$$

i minori d'ordine $\underline{r}$ che si ottengono sostituendo alla prima, seconda ecc. colonna di A_r l'ultima colonna della matrice.

Uno solo di detti determinanti puo essere nullo, perchè se due lo fossero, per un teorema di Kronecker [1] sarebbero tutti nulli compreso A_r il che è impossibile.

Poichè il determinante $\underline{D}$ è identicamente nullo le $\underline{r+1}$ quadriche sono funzionalmente dipendenti. Si avrà, scegliendo una quadrica generica, ad esempio f_r :

$$f_r = F(f_0, f_1, \ldots, f_{r-1}) \qquad (6)$$

Questa relazione vale comunque si scelgano le $\underline{r+1}$ quadriche linearmente indipendenti in seno ad L_d. Ma non è mai possibile che gruppi di quadriche linearmente indipendenti di L_d in numero $\underline{\leq r+1}$ siano funzionalmente dipendenti, altrimenti esisterebbero entro L_d dei sistemi subordinati essenziali, contro l'ipotesi.

Quindi une eguaglianza analoga alla (6) è impossibile con un numero di quadriche linearment indipendenti $\leq r+1$.

Derivando la (6), si ottiene :

$$\sum_{i=0}^{r-1} \frac{\partial F}{\partial f_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_k} = \frac{\partial f_r}{\partial x_k} \qquad (k = 0, 1, \ldots\ldots, r-1) \tag{7}$$

Sistema di primo grado da cui si ricavano le derivate parziali di F :

$$\frac{\partial F}{\partial f_i} = - \frac{A_i}{A_r} \qquad (i = 0, 1, \ldots\ldots, r-1) \tag{8}$$

Consideriamo un punto $\underline{x}$ di S_r di coordinate $x_0, x_1, \ldots, x_r$ e sia $\underline{x'}$ $(x'_0, x'_1, \ldots, x'_r)$ il suo coniugato rispetto a tutte le quadriche del sistema. La retta che unisce i due punti è data da :

$$y_i = t_1 x_i + t_2 x'_i \qquad (i = 0, 1, \ldots\ldots, r) \tag{9}$$

Sostituendo la (9) in tutte le quadriche si ottiene per la quadrica generica f_1

$$f_m(y) = f_m(x)\, t_1^2 + f_m(x')\, t_2^2 \qquad (m = 0, 1, \ldots, r) \tag{10}$$

perchè i termini $2\, a_m^{ik}\, x_i\, x'_k$ sono nulli essendo coniugati i punti $\underline{x}$ e $\underline{x'}$.

Sostituendo le (10) nelle (6) e quindi derivando rispetto a t_1 e t_2 si ha :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_r}{\partial t_1} &= \sum_{s=0}^{r-1} \frac{\partial F}{\partial f_s} \frac{\partial f_s}{\partial t_1} \\ \frac{\partial f_r}{\partial t_2} &= \sum_{s=0}^{r-1} \frac{\partial F}{\partial f_s} \frac{\partial f_s}{\partial t_2} \end{aligned} \tag{11}$$

Derivando le (10) si ha :

$$\frac{\partial f_m}{\partial t_1} = 2\, t_1\, f_m(x)$$
$$\frac{\partial f_m}{\partial t_2} = 2\, t_2\, f_m(x') \qquad (m = 0,\ 1, \ldots\ldots, r)$$

Sostituendo nelle (11) :

$$f_r(x) = \sum_{s=0}^{r-1} \frac{\partial F}{\partial f_s}\, f_s(x)$$

$$f_r(x') = \sum_{s=0}^{r-1} \frac{\partial F}{\partial f_s}\, f_s(x')$$

e infine per la (8) :

$$\sum_{i=0}^{r} A_i\, f_i(x) = 0$$
$$(12)$$
$$\sum_{i=0}^{r} A_i\, f_i(x') = 0$$

Le (12) sono delle identità rispetto a t_1 e t_2 . Perchè queste due identità coesistano occorre e basta che sia :

$$f_m(x) = c\, f_m(x') \qquad (m = 0,\ 1, \ldots\ldots\ldots, r)$$

con <u>c</u> costante non nulla.

Infatti nelle (12) le variabili t_1 e t_2 compaiono soltanto nei determinati A_0, $A_1, \ldots\ldots, A_{r-1}$, A_r che risultano anche funzioni omogenee dello stesso grado in t_1 e t_2 ed inoltre sappiamo che uno solo al massimo è nullo.

Al rapporto t_1/t_2 si possono dare infiniti valori a piacere ed in particolare si possono fissare i valori in corrispondenza dei quali ciascuna delle (12) dà origine ad un sistema algebrico di primo grado ad $\underline{r}$ equazioni ed $\underline{r}$ incognite.

Queste ultime in entrambi i sistemi risultano gli $\underline{r}$ rapporti delle $f_k(x)$ od $f_k(x')$ rispetto ad una qualunque di esse, ad esempio rispetto ad $f_r(x)$ ed $f_r(x')$. Si tratta cioè rispettivamente dei rapporti :

$$f_k(x) \;/\; f_r(x) \;;\; f_k(x') \;/\; f_r(x') \qquad (k = 0, 1, \ldots\ldots, r-1) \qquad (13)$$

Poichè i coefficienti ed i termini noti di queste equazioni sono sempre gli stessi A_0, $A_1, \ldots\ldots\ldots, A_{r-1}$, A_r in entrambi i sistemi, le due soluzioni che si ottengono saranno le stesse. Si avrà :

$$\frac{f_k(x)}{f_r(x)} = \frac{f_k(x')}{f_r(x')} \qquad (k = 0, 1, \ldots\ldots\ldots, r-1) \qquad (14)$$

Ma tale uguaglianza è verificata solo se :

$$f_p(x) = cf_p(x') \qquad (p = 0, 1, \ldots\ldots\ldots, r) \qquad (15)$$

Con $\underline{c}$ costante non nulla.

A rigore nel caso che uno degli $A_i (i = 0, 1, \ldots\ldots, r)$ delle (12), ad esempio A_j $(0 \leqslant j \leqslant r)$ fosse nullo non sarebbe posibile per la sola quadrica f_j dedurre che :

$$f_j(x) = cf_j(x') \;.$$

Ma, in tal caso, consideriamo tutte le $\underline{r}$ quadriche, le cui derivate parziali compaiono in A_j e la matrice formata con le colonne del determinante $\underline{D}$, in cui compaiono dette quadriche.

Sappiamo che almeno un determinante di detta matrice è non nullo. Denominiamo quest'ultimo con A'_r e ripetiamo il ragionemento già fatto usando al posto di A_r il determinante A'_r. Otterremo così i determinanti A'_0, $A'_1, \ldots, A'_{r-1}$ A'_r e giungeremo a conclusioni analoghe, cioè alle formule :

$$\sum_{i=0}^{r} A'_i \, f_i(x) = 0$$

$$(i = 0, 1, \ldots\ldots, r) \qquad (16)$$

$$\sum_{i=0}^{r} A'_i \, f_i(x') = 0$$

Ma questa volta anche la quadrica f_j soddisfa alle (16) perchè A'_r non è nullo. Pertanto ogni eccezione è rimossa.

Se ne deduce che tutte le quadriche del sistema L_d che passano per un punto x , passano anche per il suo coniugato $\underline{x'}$ e reciprocamente. Se $\underline{x}$ è situato nella quadrica f_p si avrà :

$$f_p(x) = 0$$

e per le (15) :

$$f_p(x') = 0$$

e quindi :

$$t_1^2 \, f_p(x) + t_2^2 \, f_p(x') = 0$$

e per la (10) :

$$f_p(y) = 0$$

dove $\underline{y}$ è il punto generico della retta $\underline{x\ x'}$.

Dunque la retta in questione appartiene alla quadrica f_p. Se ne deduce che tutte le quadriche che passano per $\underline{x}$ contengono la retta $\underline{x\ x'}$.

Supponiamo ora che la Jacobiana del sistema L_d abbia caratteristica $\underline{r-k}$.

Ciò significa che un punto $\underline{x}$ di S_r ha per coniugato un S_k rispetto a tutte le quadriche di L_d.

Il sistema L_d sarà intersecato da un generico S_{r-k} che passa per $\underline{x}$ secondo un sistema lineare L'_d di quadriche di S_{r-k} , che a sua volta intersecherà l' S_k in un punto $\underline{x'}$, che risulta il coniugato di $\underline{x}$ rispetto a tutte le quadriche di L'_d.

Potremo scegliere per coordinate di S_{r-k} le $x_0, x_1, \ldots\ldots, x_{r-k}$, annullando tutte le altre coordinate, cioè scrivendo :

$$x_{r-k+1} = x_{r-k+2} = \ldots\ldots\ldots = x_r = 0$$

Le equazioni delle quadriche $f_0, f_1, \ldots\ldots, f_d$ di S_{r-k} saranno del tipo :

$$f_i \, (x_0, x_1, \ldots\ldots\ldots, x_{r-k}, 0, 0, \ldots\ldots, 0) = 0$$

Le derivate parziali :

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_s} \qquad (i = 0, 1, \ldots\ldots\ldots, d)$$

per $x_{r-k+1} = x_{r-k+2} = \ldots\ldots = x_r = 0$ saranno tutte nulle. La Jacobiana del sistema L'_d :

$$\left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_s} \right\| \qquad \begin{pmatrix} i = 0, 1, \ldots\ldots, d \\ s = 0, 1, \ldots\ldots, r-k \end{pmatrix}$$

sarà identicamente nulla.

Essa non potrà avere caratteristica superiore ad $\underline{r-k}$ perchè il numero delle sue righe è $\underline{r-k+1}$, essa non potrà avere caratteristica inferiore ad $\underline{r-k}$, altrimenti il punto $\underline{x}$ avrebbe per coniugato un S_g con $\underline{g > 0}$ e non solo il punto $\underline{x'}$.

Ne segue che il sistema L'_d di S_{r-k} ha caratteristica r-k, questo porta alla conclusione, per la prima parte del teorema, che le quadriche di L'_d , che passano per $\underline{x}$, avranno in comune la retta $\underline{x\,x'}$.

Poichè possiamo dise la stessa cosa per tutti gli S_{r-k} che passano per $\underline{x}$, se ne duduce che le quadriche di L_d, che passano per $\underline{x}$, avranno in comune l' S_{k+1} congiungente il punto $\underline{x}$ con l' S_k.

Sempre nell'ipotesi che *il sistema sia irriducibile di prima specie, trattiamo il caso* $r > d$, *tenendo presente la condizione* $r-k \leqslant d$, *che finora era superflua.* E' evidente che in questo caso deve essere $\underline{k \geqslant 1}$.

Consideriamo dapprima il caso particolare $\underline{d=r-1}$. Sia dunque il sistema $L_{r-1/r-k}$ con $\underline{k \geqslant 1}$. Per un punto generico $\underline{P}$ di S_r mandiamo un iperpiano, che per un noto teorema di Terracini (vedi [3]) taglia $L_{r-1/r-k}$ in un sistema $\underline{L'}$ di quadriche di S_{r-1} avente la stessa dimensione e la stessa caratteristica : $\underline{r-k = r-1-(k-1)}$.

Poichè in S_{r-1} la dimensione del sistema uguaglia la dimensione delle spazio ambiente, per la prima parte del teorema avremo che le quadriche di L_{r-1} passanti per $\underline{P}$ hanno in comune un S_k non multiplo.

Variando l'iperpiano per $\underline{P}$ si ottengono infiniti S_k che costituiscono une varietà di dimensione non superiore a $\underline{k+1}$ e di ordine non superiore ad uno, altrimenti la sua sezione con un iperpiano per $\underline{P}$ non sarebbe un solo S_k non multiplo. Pertanto tale varietà è un S_{k+1}.

Supponiamo ora di avere un sisteme $L_{r-2/r-k}$ con $\underline{k \geqslant 2}$. Per un punto generico $\underline{P}$ di S_r passa un L_{r-3} appartenente al sistema dato.

Mandiamo per $\underline{P}$ un S_{r-1} che taglia per il teorema di Terracini il sistema dato secondo un $L_{r-2/r-k}$ di S_{r-1}. Entro l' S_{r-1} per $\underline{P}$ mandiamo un S_{r-2} che taglia il precedente sistema secondo un $L''_{r-2/r-k}$.

Possiamo ora dedurre per la prima parte del teorema che le quadriche di $\underline{L''}$ passanti per $\underline{P}$ hanno in comune un S_{k-1}. Variando L' S_{r-2} entro l' S_{r-1}, otteniamo un S_k comune a tutte le quadriche per $\underline{P}$ di $\underline{L'}$, variando L' S_{r-1} otterremo un S_{k+1} comune a tutte le quadriche di L_{r-3}.

Proseguendo in tal modo riusciremo a dimostrare il teorema anche per $L_{r-h/r-k}$ e quindi per $L_{d/r-k}$ con $\underline{d \leqslant r-1}$ porchè $\underline{r-k \leqslant d}$.

Infatti basta porre $\underline{r-d=h}$ perchè sia : $L_{d/r-k} = L_{r-h/r-k}$.

2°) *Supponiamo ora che il sistema* L_d *sia irriducibile di seconda specie* ($r \gtreqless d$).

Esaminiamo il caso particolare in cui si sistemi subordinati

L_{d_1/m_1}, L_{d_2/m_2}, ..., L_{d_s/m_s} $(m_i \leqslant d_i)$ contenuti in L_d siano tutti irriducibili di prima speciè.

Poichè la caratteristica della Jacobiana è $r-k \leqslant d (k \geqslant 0)$, tra le $\underline{d+1}$ quadriche linearmente indipendenti che individuano L_d ne esistono $\underline{r-k}$ funzionalmente indipendenti.

Poiché L_{d_1/m_1} è un sistema irriducibile di prima specie, soddisfa alla prima parte del teorema. Pertanto le quadriche di L_{d_1} che passano per un generico punto $\underline{P}$ di S_r hanno in comune un S_{r-m_1+1}.

Esse costituiscono un sistema L_{d_1-1}.

Consideriamo il sistema L_{d-1} di quadriche di L_d passanti per $\underline{P}$. Le quadriche funzionalmente indipendenti di detto sistema, che non appartengono a L_{d_1-1} sono $\underline{r-k-m_1}$.

infatti siano :

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \ldots\ldots + \lambda_{d_1} f_{d_1} = 0 \tag{17}$$

$$\mu_0 f_0 + \mu_1 f_1 + \ldots + \mu_{d_1} f_1 + \mu_{d_1+1} f_{d_1+1} + \ldots + \mu_d f_d = 0$$

le equazioni di L_{d_1} e di L_d .

Se imponiamo ad entrambi i sistemi di passare par P, ricavando λ_0 e μ_0 si ottiene :

$$\lambda_1 (f_1 + \frac{f_1(P)}{f_0(P)} f_0) + \lambda_2 (f_0 + \frac{f_2(P)}{f_0(P)} f_0) + \ldots + \lambda_{d_1} (f_{d_1} + \frac{f_{d_1}(P)}{f_0(P)} f_0) = 0$$

$$\mu_1 (f_1 + \frac{f_1(P)}{f_0(P)} f_0) + \mu_2 (f_0 + \frac{f_2(P)}{f_0(P)} f_0) + \ldots\ldots + \mu_{d_1} (f_{d_1} + \frac{f_{d_1}(P)}{f_0(P)} f_0) + \tag{18}$$

$$+ \mu_{d_1+1} (f_{d_1+1} + \frac{f_{d_1+1}(P)}{f_0(P)} f_0) + \ldots + \mu_d (f_d + \frac{f_d(P)}{f_0(P)} f_0) = 0.$$

Ora il numero delle quadriche funzionalmente indipendenti di L_d , che non appartengono ad L_{d_1} , è ovviamente la differenza delle relative caratteristiche cioè :

$$r - k - m_1 \quad .$$

Ma le (17) e le (18) dimostrano che tale numero rimane invariato passando ad L_{d-1} , L_{d_1-1} perchè le quadriche che individuano L_{d_1-1} si trovano tutte in L_{d-1} percio se L_{d_1-1} ha perso una quadrica funzionalmente indipendente rispetto ad L_{d_1} la stessa quadrica è stata persa da L_{d-1} , rispetto ad L_d.

Gli iperpiani polari delle $\underline{r-k-m_1}$ quadriche funzionalmente indipendenti di Ld_{-1} non appartenenti ad L_{d_1-1} , passano tutti per $\underline{P}$ e intersecano l'S_{r-m_1+1} secondo un S_{k+1} , che risulta almeno tangente a tutte le quadriche di L_{d-1}.

Questo risultato è dunque indipendente da d_1 e da m_1.

Pertanto ragionando in modo analogo su L_{d_2/m_2} , L_{d_3/m_3} ,...,L_{d_s/m_s} si otterramo gli spazi :

$$S_{r-m_2+1} \quad , S_{r-m_3+1} \ ,\ldots\ldots\ldots\ldots, S_{r-m_s+1} \quad ,$$

che, intersecati dagli iperpiani polari delle rimanenti quadriche funzionalmente indipendenti di L_{d-1} , daranno sempre lo stesso S_{k+1}.

Percio questo S_{k+1} risulta essere comune rispettivamente a tutte le quadriche di L_{d_1-1} , L_{d_2-1} ,.....,L_{d_s-1} in quanto è contenuto negli :

$$S_{r-m_1+1} \quad , S_{r-m_2+1} \ ,\ldots\ldots, S_{r-m_s+1}$$

precedenti.

Ma poichè L_{d_1} , L_{d_2} , L_{d_s} formano entro L_d una catena per il LEMMA è sempre possibile scegliere in L_{d_1-1} , L_{d_2-1} , L_{d_s-1} , $\underline{d}$ quadriche linearmente indipendenti che individuano L_{d-1} .

Ora queste $\underline{d}$ quadriche possiedono in comune l' S_{k+1} e pertanto tutte le quadriche di L_{d-1} avranno in comune un S_{k+1} passante per $\underline{P}$, comme volevasi dismotrare.

Il ragionamento precedente è stato fatto nell'ipotesi che il sistema lineare irriducibile di seconda specie possieda solo sistemi lineari subordinati irriducibili di prima specie.Ora però possiamo supporre che i sistemi subordinati siano tutti o in parte di seconda specie, possedendo questi ultimi sistemi irriducibili di prima specie.

Per quanto è stato ora dimostrato, nulla cambia nel ragionamento precedente e quindi la dimostrazione è valida anche in questo caso. Così proseguendo è evidente che nulla cambia nel ragionamento precedente anche se i sistemi subordinati dei sistemi subordinati sono di specie quelsiasi e che quindi la dimostrazione è valida per tutti i sistemi di seconda specie con $\underline{r \gtrless d}$.

In questo modo il teorema risulta dimostrato in ogni sua parte.

BIBLIOGRAFIA.

[1] L. KRONECKER, "Werke", Leipzig - 1885 p. 238.

[2] G. BONFERRONI, "Sui sistemi lineari di quadriche la cui Jacobiana ha dimensione irregolare", R. Acc. Sci. di Torino , vol. 50 1914-15.

[3] A. TERRACINI, "Alcune questioni sugli spazi tangenti e osculatori ad una varietà" Atti R. Acc, Sc. Torino, Nota 11, 51 (1916) III, 55, 1919-20.

[4] L. MURACCHINI, "Sulle varietà V_5 i cui spazi tangenti ricoprono una varietà W di dimensione inferiore all'ordinaria". (parte II) Riv. Mat. Univ. di Parma, 3, 75-89 (1952).

[5] S. XAMBO, "On projectives varieties of minimal degree", Collectanea Mathematica - Barcelona - 1981, vol. XXXII.

[6] L. DEGOLI, "Un théorème sur les systèmes linéaires de quadriques à Jacobienne indéterminée" Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica, Budapest, Tomo 17 (1982) 325-330.

[7] L. DEGOLI, "Due nuovi teoremi sui sistemi lineari di quadriche a Jacobiana identicamente nulla", Collectanea Mathematica Barcelona - 1982, vol. XXXIII.

[8] L. DEGOLI, "Trois nouveaux théorèmes sur les systèmes linéaires de quadriques à Jacobienne indentiquement nulle", Demonstratio Mathematica - Warzawa, n° 3, Vol. 15 - 1983.