MOHAMED GHRAIBA

Semi-groupes intégraux de $SL(2,\mathbb{R})$. Application à la théorie du contrôle

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1985, fascicule 3A
, p. 57-96

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1985___3A_57_0>

Publications du département de mathématiques de Lyon

1985 - 3/A

SEMI-GROUPES INTEGRAUX DE SL(2,$\mathbb{R}$).
APPLICATION A LA THEORIE DU CONTROLE

par Mohamed GHRAIBA

U.A 399

Université de Metz

Table des matières

INTRODUCTION.

On appelle "système asservi invariant à droite" sur un groupe de Lie G une équation différentielle de la forme :

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = X^{\circ}(x) + \sum_{i=1}^{p} u_i X^i(x) \qquad x \in G \quad u=(u_1,\ldots,u_p) \in \mathbb{R}^p$$

X° , $X^1,\ldots,x^p$ sont des champs de vecteurs invariants à droite sur G. La donnée d'un tel système est équivalente à la donnée d'une famille F de champs de vecteurs invariants à droite sur G.

L'étude de l'ensemble des points accessibles à partir de x_o, c'est-à-dire l'ensemble des points x de G, qu'on peut atteindre à partir de x_o en parcourant, dans le sens du temps croissant, les courbes intégrales des champs de F, s'appelle l'étude de la controlabilité.

Il est naturel par analogie à la mécanique, d'étudier un tel système sur un groupe de Lie, qu'on appelle espace des états . Cette idée est claire dans les articles de Brockett , Jurdjeciv-Sussmann , et d'autres auteurs.

Une autre raison de l'étude des systèmes invariants à droite sur un groupe de Lie est la suivante :

Soit G un groupe de Lie connexe qui agit transitivement sur une variété M et soit $\theta : G \times M \to M$ une action C^{∞} . Pour chaque $g \in G$ on définit $\hat{\theta}_g \; M \to M$ par $\tilde{\theta}_g(q) = \theta(g,q)$. et soit x un élément de l'algèbre de Lie $\underline{g}$ de G alors l'application $t \to \tilde{\theta}_{\ell tx}$ est un groupe à 1 paramètre de difféomorphismes locaux de M. Soit $\tilde{x}$ son générateur infinitésimal, on pose $\Lambda_{\theta}(x) = \tilde{x}$. On dit qu'un système F sur M est subordonné à une acction de G s'il existe une action θ , C^{∞} et $\Gamma \subset \underline{g}$ tel que $\Lambda_{\theta}(\Gamma) = F$.

Dans ces conditions, il est bien connu que si Γ est transitif sur G, c'est-à-dire que l'ensemble d'accessibilité de Γ à partir de n'importe quel point de G est G, alors Γ est transitif sur M.

Cette idée est claire par exemple dans les articles de Jurdjevic-Kupka.

Par exemple si $M = \mathbb{R}^n - \{0\}$, on sait bien que les groupes de Lie $SL(n,\mathbb{R})$, $GL^+(n,\mathbb{R})$ agissent transitivement sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$.

Les groupes de Lie agissant transitivement sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$ ont été classés par Boothby .

Le problème de la controlabilité sur les groupes de Lie est loin d'être résolu . Ainsi l'objet de ce travail est l'étude de ce problème sur le groupe de Lie standard $SL(2,\mathbb{R})$.

Je commence par établir le result suivant : (chapitre II).

"Etant donné un système F de champs de vecteurs invariants à droite sur $SL(2,\mathbb{R})$, F est complètement controlable sur $SL(2,\mathbb{R})$ si et seulement si co (F) = co(F) et $Lie(F) = sl(2,\mathbb{R})$ ou F contient au moins deux éléments indépendants et co(F) contient un compact" où co (F) désigne le cône fermé engendré par F, un corollaire de u résultat est qu'il n'y a pas de semi-groupe propre de $SL(2,\mathbb{R})$ transitif sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$.

Dans le chapitre III je donne une classification des systèmes non transitifs dont le cône contient un élément symétrique ainsi une classification de leurs ensembles d'accessibilité et je termine ce chapitre par l'étude du système $F = \{A,B\}$.

Le chapitre IV exploite les résultats des chapitres précédent dans le cadre de la théorie des semi-groupes intégraux de $SL(2,\mathbb{R})$, on s'intéresse ici à l'aspect global.

Le chapitre V est consacré à l'étude de la controlabilité sur $CL^+(2,\mathbb{R})$, S^1 et $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. Le chapitre montre l'importance et la valeur des résultats obtenus dans les chapitres précédents. L'étude des systèmes plans était l'objet de plusieurs travaux. Je donne une condition nécessaire et suffisante de complète controlabilité de ces systèmes.

CHAPITRE I.

Généralités. Résultats

Dans ce chapitre, je rappelle des résultats sur le groupe de Lie $SL(2,\mathbb{R})$ et son algèbre de Lie $sL(2,\mathbb{R})$. Ainsi des résultats sur les techniques d'extensions.

Ce chapitre ne contient pas de nouveaux résultats. De plus je suis limité à des résultats que j'utiliserai par la suite.

I. LE GROUPE DE LIE SL(2,$\mathbb{R}$) ET SON ALGEBRE DE LIE sL(2,$\mathbb{R}$).

Le groupe de Lie $SL(2,\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées réelles de déterminant 1. C'est une variété analytique de dimension trois. Son algèbre de Lie $sL(2,\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel tangent à $SL(2,\mathbb{R})$ en 1, qui est vectoriel réel de toutes les matrices carrées réelles de traces nulles.

Il est bien connu que l'ensemble des champs de vecteurs invariants à droite sur $SL(2,\mathbb{R})$ est identifié à $sL(2,\mathbb{R})$. Donc un champ de vecteurs invariant à droite sur $SL(2,\mathbb{R})$ est tout simplement un élément de $sL(2,\mathbb{R})$
Le crochet de Lie de $sL(2,\mathbb{R})$ est donné par

$$[X,Y] = XY-YX$$

1. La forme de Cartan Killing.

La forme de Cartan Killing χ sur un algèbre de Lie L est la forme bilinéaire symétrique, qui est définie par

$$\chi(X,Y) = \text{trace adX adY} \qquad \text{ou adX} : Y \mapsto [X,Y]$$

Soit (H,P,Q) la base de Weyl de $sL(2,\mathbb{R})$ où

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Dans cette la forme de Killing sur $sL(2,\mathbb{R})$ a une écriture simple donnée par :

$$\chi(X,Y) = 4 \text{ trace } XY \quad .$$

En particulier si $X = xH + yP + zQ$ et $Y = x'H + y'P + z'Q$

$\chi(X,Y) = 4\ (2xx' + yz' + y'z)$ et $\chi(x,x) = 8(x^2+yz)$

DEFINITION 1.1 : *Soit* $xt \in sL(2,\mathbb{R})$

a) X *est dit compact si* $\chi(x,x) < 0$

b) X *est dit nilpotent si* $\chi(x,x) = 0$

c) X *est hyperbolique si* $\chi(x,x) > 0$

DEFINITION 1.2 : *L'ensemble des éléments compacts de* $sL(2,\mathbb{R})$ *est la réunion de deux cônes ouverts disjoints et opposés :*

$K_1 = \{\ X = xH + yP + zQ$ *avec* $x^2+yz < 0$ *et* $z < 0 < y\}$

$K_2 = \{\ X = xH + yP + zQ$ *avec* $x^2+yz < 0$ *et* $y < 0 < z\}$

2. L'application $\exp : sL(2,\mathbb{R}) \to SL(2,\mathbb{R})$.

Pour étudier l'application exponentielle, on définit les séries suivantes :

(1) $$C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(2n)!} \quad , \quad S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(2n+1)!} \quad .$$

On en déduit les formules suivantes :

(2) $$C(z^2) + z\ S(z^2) = e^z$$

(3) $$C(x) = \begin{cases} \text{coh}\ \sqrt{x} & \text{pour } x \geqslant 0 \\ \cos \sqrt{-x} & \text{pour } x < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \sqrt{|x|}\ \ S(x) = \begin{cases} \sinh \sqrt{x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ \sin \sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(4) $$C'(z) = \frac{1}{2}\ S(z)$$

(5) $$C(z)^2 - z\ S(z)^2 = 1 \quad .$$

De plus pour tout $X \in sL(2,\mathbb{R})$ on a : $X^2 = \frac{1}{8}\ (\chi(x,x))\ \mathbb{1}$ ou $\mathbb{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

On démontre facilement la formule suivante de l'application exponentielle

(6) pour tout $X \in sL(2,\mathbb{R})$ $$\boxed{\exp X = C\left(\frac{1}{8}\ \chi(x,x)\right)\mathbb{1} + S\left(\frac{1}{8}\ \chi(x,x)\right)X}$$

En particulier soit $X = xH + yP + zQ$.

Si X est nilpotent : $\exp X = 1 + X = \begin{bmatrix} 1+x & y \\ z & 1-x \end{bmatrix}$

Si X est compact

$$\exp X = \begin{bmatrix} \cos\sqrt{-x^2-yz} + \dfrac{x \sin\sqrt{-x^2-yz}}{\sqrt{-x^2-yz}} \;, & y\,\dfrac{\sin\sqrt{-x^2-yz}}{\sqrt{-x^2-yz}} \\ z\,\dfrac{\sin\sqrt{-x^2-yz}}{\sqrt{-x^2-yz}} \;, & \cos\sqrt{-x^2-yz} - \dfrac{x \sin\sqrt{-x^2-yz}}{\sqrt{-x^2-yz}} \end{bmatrix}$$

Si X est hyperbolique :

$$\exp X = \begin{bmatrix} \cosh\sqrt{x^2+yz} + x\,\dfrac{\sinh\sqrt{x^2+yz}}{\sqrt{x^2+yz}} \;, & y\,\dfrac{\sinh\sqrt{x^2+yz}}{\sqrt{x^2+yz\mu}} \\ z\,\dfrac{\sinh\sqrt{x^2+yz}}{\sqrt{x^2+yz}} \;, & \cosh\sqrt{x^2+yz} - x\,\dfrac{\sinh\sqrt{x^2+yz}}{\sqrt{x^2+yz}} \end{bmatrix}$$

De (3) et (4), il suit que pour $x > -\pi^2$ on a $C'(x) > 0$. Ainsi C est un homéomorphisme de $[-\pi^2, +\infty[$ dans $[-1, +\infty[$. Son inverse C^{-1} est une fonction réelle analytique de $]-1, +\infty[$ dans $]-\pi^2, +\infty[$.

<u>DEFINITION 1.3</u> : *On pose* $\tau(x) = \frac{1}{2}$ trace X et $K(X) = \frac{1}{8} \chi(x,x)$ et $A^* = \tau^{-1}(\,]-1,+\infty[\,)$.

Maintenant, on définit la fonction

$$f : A^* \to \;]0,+\infty[\qquad g \to \frac{1}{S(C^{-1}(\tau(g)))} .$$

Puis on définit la fonction qu'on note Log par

$$\mathrm{Log} : A^* \to sL(2,\mathbb{R})$$

(7) $\qquad \mathrm{Log}(g) = f(g)\ (g - \tau(g)\mathbb{1})$

On vérifie facilement que :

$$K(\mathrm{Log}(g)) = (f(g))^2\ (\tau(g)^2 - \det g) \quad \text{pour tout } g \in A^+ .$$

Soit $g \in A^+ \cap SL(2,\mathbb{R})$ c'est-à-dire $\det g = 1$, alors :

$$K(\mathrm{Log}(g)) = S(C^{-1}(\tau(g))^{-2}\ (\tau(g)^2-1).$$

Soit $y = C(g)$ et $x = C^{-1}(y)$ de (5) on trouve : $C^{-1}(y) = S(C^{-1}(y))^{-2}(y^2-1)$

donc pour $g \in A^+ \cap SL(2,\mathbb{R})$ on a $K(\mathrm{Log}(g)) = C^{-1}(\tau(g)) > -\pi^2$

et $\exp \mathrm{Log}\, g = C(K(\mathrm{Log}(g))\ 1 + S(K(\mathrm{Log}(g))\ \mathrm{Log}\, g$

$$= \tau(g)\ 1 + S(\tau^{-1}(\mathrm{Log}\, g)\ \frac{1}{S(\tau^{-1}(\mathrm{Log}(g))}\ (g - \tau(g)1)$$

$$= g.$$

(8) $\qquad$ Pour tout $g \in SL(2,\mathbb{R}) \cap A^+$ on a : $\exp \mathrm{Log}(g) = g$.

De plus $\tau(\exp x) > -1$ si et seulement si $C(K(x)) > -1$ $\quad$ (6)
donc $\exp X \in A^*$ si et seulement si $K(x) > -\pi^2$. Considérons le domaine ouvert suivant $D = \{X \in sL(2,\mathbb{R})\ ,\ K(x) > -\pi^2\}$.

Pour $X \in D$, nous avons $\exp X \in A^*$, donc on peut considérer la fonction donc on peut définir la fonction analytique :

$$X \to \mathrm{Log}\, \exp X \text{ de } D \to sL(2,\mathbb{R}).$$

Puisque exp est un difféomorphisme local autour de zéro, alors pour chaque X dans un voisinage de zéro, X peut être représenté sous la forme $X = \mathrm{Log}\, g$ pour g dans un voisinage de A (par (8)).

Pour un tel X on a $\mathrm{Log}\, \exp X = \mathrm{Log}\, \exp \mathrm{Log}\, g = \mathrm{Log}\, g = X$.

L'application analytique X $\to$ Log exp X est égale à l'identité sur un ouvert donc partout sur D.

On vient de démontrer le théorème suivant :

THEOREME 1.4. . *L'application* exp. $sL(2,\mathbb{R}) \to SL(2,\mathbb{R})$ *induit un isomorphisme de variétés analytiques réelles de* D *dans* $SL(2,\mathbb{R}) \cap A^*$ *dont l'inverse est donnée par* $\log(g) = S(C^{-1}(\tau(g)))^{-1}\,(g - \tau(g)1)$ *pour tout* g *dans* $SL(2,\mathbb{R}) \cap A^*$

En particulier soit $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R}) \cap A^*$ on a :

$$\log g = S(C^{-1}(\frac{a+d}{2}))^{-1} \begin{bmatrix} \frac{a-d}{2} & b \\ c & \frac{d-a}{2} \end{bmatrix}$$

DEFINITION 1.5. : *On pose* $P^+ = \mathbb{R}H + \mathbb{R}^+P + \mathbb{R}^+Q$ *et*

$$SL(2,\mathbb{R})^+ = \{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & x' \end{bmatrix} \in SL(2,\mathbb{R}),\ u \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0 \text{ et } x' \geqslant 0\} .$$

PROPOSITION 1.6. : $\exp P^+ = SL(2,\mathbb{R})^+$

II. LES TECHNIQUES D'EXTENSIONS.

Soit M une variété connexe, métrisable. On considère une famille F de champs de vecteurs C^∞ et complets sur M.

Si X est un champ de vecteurs, on note $X_t(x_o)$ l'unique solution de l'équation différentielle $\begin{cases} \frac{d}{dt}(X_t(x_o)) = X(X_t(x_o)) \\ X_o(x_o) = x_o \end{cases}$

On note par G(F) l'ensemble $\{ X^1_{t_1} ,o\ldots o\, X^p_{t_p} (.)\ ti \in \mathbb{R},\ X^i \in F,\ p \in \mathbb{N}^*\}$

G(F) est un groupe de difféomorphisme de M.

Il est bien connu que les orbites $G(F)(x)$ sont des variétés immergées dans M. Maintenant, on note par $S(F)$ le semi-groupe engendré par $\{ X^i_{t_i}\ ,\ X^i \in F \ \ t_i \geqslant 0\}$.

Pour chaque $x_o \in M$ $S(F)(x_o)$ s'appelle l'ensemble d'accessibilités de la famille F à partir de x_o. Il est clair que $S(F)(x) \subset G(F)x$.

DEFINITION 1.7. *Deux systèmes sont équivalents si leurs orbites sont les mêmes variétés et les fermetures de leurs ensembles d'accessibilités sont égales (la fermeture est dans la topologie de leurs variétés orbites).*

PROPOSITION 1.8. : *Soit* F *une famille de champs de vecteurs* C^∞ *et complets sur* M *alors :*

1°) $co(F) = \{ \Sigma\, \alpha i\, X^i \ \ \alpha i \geqslant 0 \ \ X^i \in F\}$ *est équivalent à* F

2°) si $\pm X$, $\pm Y \in F$ *on a :* $\{[X,Y]\} \cup F$ *est équivalent à* F

3°) si $\pm x \in F$ *alors* $\bigcup_{s \in \mathbb{R}} (X_s)_*(F)$ *est équivalent à* F.

4°) si X *compact* $\in F$ *alors* $\{\pm X\} \cup F$ *est équivalent à* F.

La proposition se déduit des rappels suivants :

$$(X+Y)_t(x) = \lim_{n \to +\infty} (X_{t/n} \circ Y_{t/n})^n(x)$$

$$[X,Y]_t = \lim_{n \to +\infty} (Y_{-\sqrt{t/n}} \circ X_{-\sqrt{t/n}} \circ Y_{+\sqrt{t/n}} \circ X_{t/n})^n(x)$$

et le champ de vecteurs $(X_s)_*Y$ est le champ dont les trajectoires sont

$t \mapsto X_s Y_t X_{-s}\,(.)$.

PROPOSITION 1.9. : *Si* F *est un système invariant à droite sur un groupe de Lie* G *alors* $S(F) = G \iff \overline{S(F)} = G$ et $Lie(F) = Lie(G)$.

DEMONSTRATION : Le système F est analytique, donc $S(F)$ est une variété de dimension la dimension de $Lie(F)$ donc $S(F) = G \Rightarrow Lie(F) = Lie(G)$. Réciproquement, F est analytique donc $\overset{\circ}{\overline{S(F)}} = \overset{\circ}{S(F)}$ [ ] dans l'orbite $G(F)$ et puisque $Lie(F) = Lie(G)$ alors $G = G(F)$ et donc $S(F) = G$.

REMARQUE : On a besoin de Lie(F) = Lie(G) (le cas de l'hélice qui est dense dans le tore).

Un critère de transitivité des systèmes invariants à droite.

Soit F une famille de champs de vecteurs invariants sur un groupe de Lie G, on définit LS(F) par LS(F) = Sat(F) $\cap$ Lie(F) où Sat(F) est le plus grand système équivalent à F.

PROPOSITION 1.10 :

a) Si $F_1 \subset F_2$ *alors* $LS(F_1) \subset LS(F_2)$.

b) Pour chaque famille F , LS(F) *est un cône fermé.*

c) si $\pm X$, $\pm Y$ *dans* LS(F) *alors* $\{ \pm[X,Y] \subset LS(F)$

d) si $\pm X \in LS(F)$ *alors* $e^{adX}(LS(F) \subset LS(F)$.

e) si $X \in F$ *et* X *est compact alors* $\mathbb{R}X \subset LS(F)$.

PROPOSITION 1.11 :

Soit F *une famille de champs de vecteurs invariants à droite sur un groupe de Lie* G *connexe alors* F *est transitive seulement si* LS(F) = Lie(G).

CHAPITRE II.

Controlabilité sur SL(2,$\mathbb{R}$)

Soit F un système de champs de vecteurs invariants à droite sur SL(2,$\mathbb{R}$) autrement dit F est un sous-ensemble de sL(2,$\mathbb{R}$).

On note par S(F) le semi-groupe engendré par $\{X_t, t \geqslant 0 , X \in F\}$ et par S(F)(g) , $g \in SL(2,\mathbb{R})$. L'ensemble d'accessibilité de F à partir de g par l'invariance à droite S(F) (g) est la multiplication à droite de S(F) par g.

DEFINITION 2.1. : *On dit qu'un système* F *est transitif sur* SL(2,$\mathbb{R}$) *si pour tout* $g \in SL(2,\mathbb{R})$. $S(F)(g) = SL(2,\mathbb{R})$

Au cause de l'invariance à droite F est transitif sur SL(2,$\mathbb{R}$) si et seulement si $S(F).I = S(F) = SL(2,\mathbb{R})$.

Dans ce chapitre je donne une condition nécessaire et suffisante de complète controlabilité (ou transitivité) des systèmes invariants à droite sur SL(2,$\mathbb{R}$). Un corollaire de ce résultat est que une famille de matrices de trace nulle est transitive sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ si et seulement si elle est transitive sur SL(2,$\mathbb{R}$). Autrement dit il n'existe pas de semi-groupe propre de SL(2,$\mathbb{R}$) transitif sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$.

Donc ce chapitre est consacré à établir le résultat suivant :

THEOREME 2.2 : *Soit* F *une famille de champs de vecteurs invariants à droite sur* SL(2,$\mathbb{R}$) *et contenant au moins deux éléments indépendants. Alors*

a) si $co(F) = co(-F)$, F *est transitif si et seulement si* $Lie(F) = sL(2,\mathbb{R})$.

b) si $co(F) \neq co(-F)$, F *est transitif si et seulement si* co(F) *contient un compact.*

a) est évident, et est là uniquement pour être complet seul b) est original et intéressant.

Il est clair que l'on peut étudier les systèmes F à une conjugaison près.

La démonstration de ce théorème est composée de plusieurs lemmes et propositions.

Je commence par étudier les systèmes F qui vérifient la condition "cône (F) ne contient pas de compact".

Je distingue deux cas suivant le fait que co(F) ait un bord ou non. Par définition le bord d'un cône est l'espace vectoriel $co(F) \cap co(-F)$. Dans sL(2,$\mathbb{R}$) le bord de ces cônes ne peut être que de dimension 1.

Si ce bord est engendré par un élément nilpotent alors F ne vérifie pas la condition du rang, si il est engendré par un élément hyperbolique alors un conjugué de F est contenu dans P^+.

Si co(F) n'a pas de bord, alors un conjugué de F est contenu dans P^+ dans tous les cas F n'est pas transitif et donc la condition du théorème est nécessaire.

La proposition montre que la condition est suffisante.

DEFINITION 2.3. :

Soit F *un système de champs de vecteurs invariants à droite sur* $SL(2,\mathbb{R})$. *On dit que* F *vérifie la condition (I) si et seulement si* $co(F) = \{\Sigma \alpha_i X^i \ , \ X^i \in F \ , \ \alpha_i \geqslant 0\}$ *ne contient pas de compacts.*

REMARQUE, Puisque l'ensemble des éléments compacts est un ouvert alors "co(F) ne contient pas de compacts" équivaut à " $\overline{co(F)}$ ne contient pas de compacts".

PROPOSITION 2.4 :

Soit $F = \{X^i, i \in I\}$, *une famille de champs de vecteurs invariants à droite sur* $SL(2,\mathbb{R})$, *si* F *vérifie la condition (I) alors :*

a) $\forall i \in I \ , \quad \chi(X^i,X^i) \geqslant 0.$

b) pour tout i *et* j *dans* $\chi(X^i,Y^j) \geqslant 0$ ou $\chi(X^i,Y^j)^2 \leqslant$

$\chi(X^i,X^i)\,\chi(X^j,X^j)$. *(* χ *étant la forme de Killing sur* $sL(2,\mathbb{R})$/

DEMONSTRATION :

a) évident.

b) Soit $X = \alpha X^i + \beta X^j$ on a $\chi(X,X) = \alpha^2 \chi(X^i,X^i) + 2\,\alpha\beta\,\chi(X^i,X^j)$ $+ \ \beta^2 \chi(X^j,X^j)$ la condition (I) implique que $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^{+2}$,$\forall$ i,j $\in$ I on a $\chi(X,X) \geqslant 0$ alors si $\chi(X^i,X^i)\ \chi(X^j,X^j) = 0$ le fait que $\chi(X,X) \geqslant 0$ pour tout $\alpha, \beta \geqslant 0$ est équivalent à $\chi(X^i,X^j) \geqslant 0$.

Si $\chi(X^i,X^i)\ \chi(X^j,X^j) \neq 0$ et supposons que $\chi(X^i,X^j) < 0$.

$\chi(X,X)$ est un polynôme en α de déterminant $\Delta = \beta^2(\chi(X^i,X^j)^2-\chi(X^i,X^i)\chi(X^j,X^j))$
si $\Delta > 0$, il est clair qu'il existe $\alpha_0 > 0$ pour lequel $\chi(X,X) < 0$
donc dire $\chi(X,X) > 0$ pour tout α, β positifs $\chi(X^i,X^J)^2 \leqslant \chi(X^i,X^i)\ \chi(X^j,X^j)$

LEMME 2.5. : *Si* F *vérifie la condition (I), alors il existe au plus deux nilpotents indépendants dans* F.

Ce lemme se déduit directement du lemme suivant.

LEMME 2.6. : *Soit* A, B, C *trois éléments de* $sL(2,\mathbb{R})$ *nilpotents et indépendants alors* cône $(\{A,B,C\})$ *contient un compact.*

DEMONSTRATION. J'écris les 3 vecteurs dans la base propre de A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & -a_2 \end{bmatrix} \quad \text{avec } a_i^2 + b_i c_i = 0 \text{ pour } i = 1,2$$

le fait que les trois vecteurs sont indépendants implique :

$$a_1c_2 - a_2c_1 \neq 0 \quad , \ c_1c_2 \neq 0 \quad \text{et} \quad b_1 \neq 0 \quad \text{ou} \quad b_2 \neq 0 .$$

Alors si $c_1 < 0$ ou $c_2 < 0$, il est clair par la proposition 2.4 que le cône $(\{A,B,C\})$ contient un compact.

Supposons que $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$ alors on a $b_1 < o$ ou $b_2 < 0$ de plus :

$$b_i = \frac{a_i^2}{c_i} \quad \text{pour } i = 1,2 \quad \text{et} \quad \chi(B,C) = 4 \quad (2a_1a_2 + b_1c_2 + b_2c_1)$$

$$= -\frac{4}{C_1C_2}(a_1c_2-a_2c_1)^1 < 0$$

et par la proposition 2.4, je conclus C.Q.F.D.

PROPOSITION 2.7. : *Soit* F *un système invariant à droite sur* $SL(2,\mathbb{R})$ *et soit* $W = co(F) \cap co(-F)$ si $co(F) \neq co(-F)$ et si F *vérifie la condition (I) alors*

a) W *est une droite ou nulle*

b) si W *est une droite, elle est engendrée par un élément de* F .

DEMONSTRATION.

a) En effet puisque F vérifie la condition (I), W ne peut être q'un plan une droite, ou nulle, et puisque $co(F) \neq co(-F)$. W ne peut pas être un plan, sinon, il existe $X \in co(F)$ et $X \notin W$ $W \neq co(F)$ et $co(X,W)$ est un demi-espace, de plus W est un plan qui sépare les deux cônes compacts K_1 et K_2 et donc $co(X,W)$ contient K_1 ou K_2 ce qui contredit la condition (I)

b) Soit $W = \mathbb{R}A$ avec $A = \sum \alpha_i X^i$ $\alpha_i > 0$ $X^i \in F$ alors si $\forall \alpha \neq 0$ $\alpha A \notin F$, il existe i_o, i_1 tels que $\alpha_{i_o} \alpha_{i_1} \neq 0$ et X^{i_o} et A sont indépendants.

Or $-\alpha_{i_o} X^{i_o} = -A + \sum_{i \neq i_o} \alpha_i X^i \in co(F)$, ce qui implique que $X^{i_o} \in W$ contradiction avec a) C.Q.F.D.

Par la suite, je considère la famille $F = \{X^i, i \in I\}$ de champs de vecteurs invariant à droite sur $SL(2,\mathbb{R})$ et je suppose que $\forall i \in I$, $X^i \notin co(F) - \{X^i\}$ D'après les techniques d'extensions, cette hypothèse est naturelle, en fait, je ne considère que les éléments extrémaux engendrant le convexe.

PROPOSITION 2.8. : *Soit* $F = \{X^i, i \in I\}$ *, on suppose que* F *vérifie la condition (I) et que* $W = co(F) \cap co(-F)$ *est non nulle et que* $co(F) \neq co(-F)$ *donc* $W = \mathbb{R}\,\mathbb{B}$ *avec* $B \in F$ *alors on a deux cas*

a) si B *est nilpotent* F *est de la forme* $\{A, \pm B\}$

b) si B *est hyperbolique, un conjugué de* F *est contenu dans* P^+.

DEMONSTRATION.

Soit $X^o = B$ et $W = \mathbb{R}B$, j'écris les X^i dans la base propre de B

a) si B est nilpotent $B = \begin{pmatrix} o & 1 \\ o & o \end{pmatrix}$, $X^i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & -a_i \end{pmatrix}$.

Alors puisque $\pm B \in co(F)$, la condition (I) implique que $c_i = 0$ pour tout i et puisque X^i et B sont indépendants alors $a_i \neq o$ pour tout i et

$X^i = \left(bi - \frac{b_1 a^1}{a_i} \right) B + \frac{a_i}{a_1} X^1$, alors $a_i a_1 > 0$ sinon $-X^i \in co(F)$ et W sera un plan et puisque $a_i \neq 0$ $\forall i$ et $X^i \in co(F) - \{X^i\}$ on a $b_i - \frac{a_1 a^1}{a_i} = o$ et $a_1 = a_i$.

ce qui implique que $\forall i \neq 0$ $X^i = X^1$ donc $F = \{A, \pm B\}$ avec $A = X^1$

b) si B est hyperbolique $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ o & -1 \end{pmatrix}$ et $X^i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & -a_i \end{pmatrix}$ puisque $\pm B \in$ ço(F), la condition (I) implique que $b_ic_i \geqslant 0$. De plus tous les b_i et les c_j sont de mêmes signes. En effet puisque pour tout $i \neq j$ (B, X^i, X^j) sont indépendants on a : $b_ic_j - b_jc_i \neq 0$.

Et soit $X^i = \begin{pmatrix} 0 & b_i \\ c_i & 0 \end{pmatrix}$ et $X^j = \begin{pmatrix} 0 & b_j \\ c_j & 0 \end{pmatrix}$ alors X^i et X^j sont dans co(F).

Maintenant je suppose par exemple que $b_i, c_i > 0$ et $b_j, c_j < 0$ alors $b_ic_j + b_jc_i < 0$; c'est-à-dire que $\chi(X^i,X^j) < 0$, alors la condition (I) implique que $\chi(X^i,X^j)^2 \leqslant \chi(X^i,X^i)\ \chi(X^j,X^j)$ (proposition 2.4) ce qui est équivalent à $b_i^2c_j^2 + b_j^2c_i^2 + b_ic_ib_jc_j \leqslant 0 \Leftrightarrow b_ic_j = b_jc_i = 0$ et ceci contredit l'indépendance des trois vecteurs. On conclut que $F \subset P^+$ ou $F \subset -P^+$.

C.Q.F.D.

LEMME 2.9. : *Soit* $F = \{A, \pm B\}$ *avec* B *nilpotent et* F *vérifie la condition (I) alors :*

i) F *n'est contenu dans aucun conjugué de* P^+

ii) F *n'est pas transitif.*

DEMONSTRATION : soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix}$ avec $a \neq 0$

i) s'il existe $g = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x' \end{pmatrix}$ inversible tel que $\pm gBg^{-1} \in P^+$

ceci équivalent à dire $\pm \begin{bmatrix} -xz & xx' \\ -z^2 & zu' \end{bmatrix} \in P^+$ donc $xx' = z^2 = 0$ donc $\det g = xx' - zy = 0$ contradiction.

ii) $[A,B] = 2aB$ et donc F ne vérifie pas la condition du rang donc F n'est pas transitif.

PROPOSITION 2.10. : *Soit* $F = \{X^i, i \in I\}$, *si* F *vérifie la condition (I) et si* W *est nulle alors un conjugué de* F *est contenu dans* P^+.

DEMONSTRATION : Je démontre la proposition en deux étapes :

1ère étape : F est une paire de champ de vecteurs $F = \{A,B\}$

J'écris A et B dans la base propre de A.

i) si $\chi(A,A) = \chi(B,B) = 0$ on a : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ avec $a^2+bc = 0$.

La condition (I) implique que $c > 0$ et l'indépendance des deux vecteurs implique que $c \neq 0$ donc on a $c > 0$.

Soit $g = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ alors $gAg^{-1} = A$ et $gBg^{-1} = CQ$ $(c > 0)$. Donc $gFg^{-1} \subset P^+$.

ii) si $\chi(A,A) \neq 0$ ou $\chi(B,B) \neq 0$, je suppose par exemple que $\chi(A,A) \neq 0$ alors $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ avec $a^2+bc = 0$ ou 1 .

La condition (I) implique que $a > -1$ et l'indépendance des deux vecteurs $\Rightarrow$ $(b;c) \neq (gg)$.

Si $bc \geqslant 0$ on a : $F \subset P^+$ ou $F \subset (-P^+)$.

Si $bc < 0$ alors on a $a > 0$ et je suppose par exemple que $c > 0$ et $b < 0$

Soit $g = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $y = \dfrac{a+\sqrt{a^2+bc}}{c} < 0$ on a

$$gAg^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in P^+ \quad \text{et} \quad gBg^{-1} = \begin{pmatrix} y' & 0 \\ c & -y' \end{pmatrix} \in P^+$$

avec $y' = a+cy$ et donc $gFg^{-1} \subset P^+$.

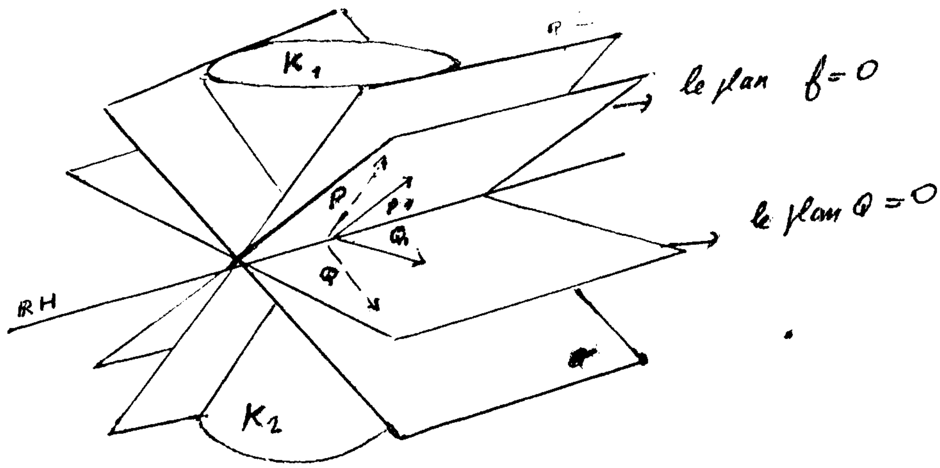
<u>2ème étape</u> : Je suppose que F n'est pas contenu dans un plan.

Puisque $co(F) \cap K_1 = \emptyset$ et $co(F) \cap K_2 = \emptyset$, d'après le théorème de séparations des cônes, il existe deux formes bilinéaires symétriques f et g sur $sL(2,\mathbb{R})$ tel que $co(F) \subset (f \geqslant 0)$, $K_1 \subset (f < 0)$ et $co(F) \subset (g \geqslant 0)$ et $K_2 \subset (g < 0)$ la proposition se déduit de la proposition 2.8 et du lemme suivant.

<u>LEMME 2.11</u> :

$(f=0) \cap (g=0)$ *est une droite engendrée par un élément hyperbolique.*

En effet puisque $(f \geqslant 0) \cap (g \geqslant 0)$ est un cône qui ne contient pas de compact et qui n'est pas plane, par la proposition 2.8, on déduit le lemme 2.11 et la proposition 2.10. (voir figure).



PROPOSITION 2.12 : *Soit* F *un système de champs de vecteurs invariants à droite sur* $SL(2,\mathbb{R})$ *et* F *contient au moins deux éléments indépendants.*
si co(F) *contient un compact on a :*

a) $\mathrm{Lie}(F) = sl(2,\mathbb{R})$

b) F *est transitif sur* $SL(2,\mathbb{R})$

a) Comme $\mathrm{Lie}(co(F)) = \mathrm{Lie}(F)$: il suffit de montrer que $\mathrm{Lie}(co(F)) = sL(2,\mathbb{R})$ soit A un compact $\in co(F)$ et $X \in co(F)$ avec X et A indépendants. J'écris A et X dans la base propre de A : on a

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \qquad \text{alors} \qquad [A,X] = \begin{pmatrix} b+c & -2a \\ -2a & -b-c \end{pmatrix}$$

$\det\ (A,X,\ [A,X]\ ) = 4a^2 + (b+c)^2 \neq 0$ donc $\mathrm{Lie}(co(F)) = sl(2,\mathbb{R})$.

b) Pour montrer b) je montre que $\forall X \in F \quad \{-X\} \cup F \simeq F$.

Soit A un compact $\in co(F)$ soit $X \in F$, puisque $K_1 \cup K_2$ est un ouvert, donc co(A,X) contient un autre compact B indépendant de A et dans les techniques d'extensions on a : $\mathrm{plan}(A,B) \subset \mathrm{Sat}(F) \cap sl(2,\mathbb{R})$ et puisque $\pm X \in \mathrm{plan}(A,B)$ alors $\{\pm X\} \cup F \simeq F$ et la condition du rang donne le résultat.

THEOREME 2.13 :

Soit F *un ensemble de matrices de traces nulles sur* $\mathbb{R}^2$, *alors* F *est transitif sur* $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ *si et seulement si il est transitif sur* $SL(2,\mathbb{R})$

DEMONSTRATION DU THEOREME : Puisque $SL(2,\mathbb{R})$ agit transitivement sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, alors si F est transitif sur $SL(2,\mathbb{R})$, elle est transitif sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$.

Réciproquement, si F n'est pas transitif sur $SL(2,\mathbb{R})$, alors il y a deux cas possibles ou bien F ne vérifie pas la condition du rang et donc F n'est pas transitif sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, ou bien un conjugué de F est contenu dans P^+ donc $\overline{S(F)} \subset SL(2,\mathbb{R})^+$ et il est clair que $SL(2,\mathbb{R})^+$ n'est pas transitif sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$.

CHAPITRE III.

Ensembles d'accessibilité de systèmes non transitifs.

Ce chapitre est composé de deux paragraphes.

Dans le paragraphe 1, j'étudie les systèmes non transitifs dont le cône ait un bord. Je commence par classer des tels types de systèmes. Je trouve 4 types (proposition 3.1) . Ceci me permet de déterminer la fermeture de leurs ensembles d'accessibilité, je montre que $\overline{S(F)} = \exp \text{có}(F)$ (proposition 3.3), aussi de leurs plus systèmes invariants à droits équivalents (proposition 3.4).

Dans le paragraphe 2, j'étudie le système $F = \{A,B\}$. Deux cas qui se présentent : si un conjugué de F est contenu dans co(H,P), je montre que $\overline{S(F)} = \exp co(F)$ et que $LS(F) = co(F)$ (proposition) dans l'autre je montre que $\overline{S(F)} = \exp \mathbb{R}^+A \exp \mathbb{R}^+B \exp \mathbb{R}^+A$

X_1 : Etude des systèmes non transitifs dont le cône ait un bord

PROPOSITION 3.1 : *Soit* F *un système invariant à droite sur* $SL(2,\mathbb{R})$ *contenant au moins deux éléments indépendants, non transitif et* $W = co(F) \cap co(-F)$ *n'est pas nulle alors* F *est équivalent à l'un des conjugués des systèmes suivants :* $F_1 = \{\pm H, \pm P\}$, $F_2 = \{H, \pm P\}$, $F_3 = \{\pm H, P\}$ et $F_4 = \{\pm H, P, Q\}$.

DEMONSTRATION . Je distingue deux cas suivant dim Lie(F) .

i) dim Lie(F) = 2 , alors Lie(F) est l'une des sous-algèbres $\mathbb{R}H + \mathbb{R}P$ ou $\mathbb{R}H + \mathbb{R}Q$. Ainsi si dim W = 2 alors F est équivalent à un conjugué de F_1 , si dim W = 1 F est équivalent à un conjugué de F_2 ou F_3.

ii) dim Lie(F) = 3 , d'après la démonstration du théorème. W est une droite engendrée par un élément hyperbolique B de F, et on peut supposer que B = H et que $F \subset P^+$, alors il existe $X \in co(F)$ avec $X = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$ et $b > 0$, $c > 0$.

Je vais montrer maintenant que $\{P,Q\} \cup F$ est équivalent à F . En effet, puisque $\pm H \in co(F)$ on a : $e^{tH} \times e^{-tH} \in LS(F)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ or $e^{tH} \times e^{-tH} = \begin{pmatrix} 0 & be^{2t} \\ ce^{-2t} & 0 \end{pmatrix}$

et $\lim\limits_{t \to \infty} \frac{1}{b} (e^{-2t} e^{tH} \times e^{-tH}) = P \in LS(F)$, et $\lim\limits_{t \to -\infty} \frac{1}{c} e^{2t} e^{tH} \times e^{-tH} = Q \in LS(F)$.

donf F est équivalent à un conjugué de F_4.

DEFINITION 3.2 : *Je désigne par :*

a) $S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1/x \end{pmatrix} \quad x \geqslant 1 \ , \ y \in \mathbb{R} \right\}$

b) $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1/x \end{pmatrix} \quad x \geqslant 0 \ , \ y \in \mathbb{R}^+ \right\}$.

PROPOSITION 3.3 : *Les ensembles* S_1, S_2 *et* $S_1 \cup S_1^{-1}$ *sont des semi-groupes fermés et on a :*

1) $S_1 = \overline{S(F_2)} = \exp co(F_2)$

2) $S_2 = \overline{S(F_3)} = \exp co(F_2)$

3) $S_1 \cup S_1^{-1} = \overline{S(F_1)} = \exp co(F_2)$.

REMARQUE : $S_1 \cup S_1^{-1}$ est un sous groupe de Lie de $SL(2,\mathbb{R})$ et co(F) est une sous-algèbre de Lie de $sl(2,\mathbb{R})$.

DEMONSTRATION : Les 3 cas se démontrent de la même manière. Je vais démontrer seulement a).

$$F_2 = \{H, \pm P\} \quad , \text{ on a : } e^{tH} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e^{tP} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et $e^{tH} \in S_1$ pour tout $t > 0$ et $e^{tP} \in S_1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ceci montre que $\overline{S(F_2)} \subset S_1$. De plus soit $g = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1/n \end{pmatrix} \in D_1$, trace $g = n + 1/n \geqslant 2$ donc

$$\operatorname{Log} g = \alpha \begin{pmatrix} \frac{x-1/n}{2} & y \\ 0 & \frac{-x+1/n}{2} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad > 0. \quad \text{et} \quad \operatorname{Log} g = \underbrace{\frac{\alpha}{2}\,(x-1/n)}_{\geqslant 0}H + \alpha yP \in co(F_2).$$

donc gt exp $co(F_2)$ et ceci implique que $S_1 \subset \exp co(F_2) \subset S(F_2)$ d'où l'égalité.

PROPOSITION 3.4 : *Soit* F *un système invariant à droite sur* $SL(2,\mathbb{R})$ *non transitifs et* $W = co(F) \cap co(-F)$ *n'est pas nulle , alors* $LS(F)$ *est* $co(F)$.

DEMONSTRATION. Si F est une droite le résultat est évident. Si F contient au moins deux éléments indépendants de la proposition 3.1, on peut supposer que F est l'un des systèmes $\{\pm H, \pm P\}$, $\{\pm H,P\}$, $\{\pm P,H\}$ ou $\{\pm H,P,Q\}$.

Par exemple $F = \{\pm H,P\}$. Alors comme F n'est pas transitif donc LS(F) non transitif et donc $LS(F) \subset \mathbb{R}H + \mathbb{R}P$, et il est clair que $-P \in L(S(F))$ (de la proposition 3.3) car $e^{-tP} = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin S_2 = \overline{S(F_2)}$ donc

$L(S(F)) = \mathbb{R}H + \mathbb{R}^+P = co(F)$.

C.Q.F.D.

X_2 : Etude du système non transitif $F = \{A,B\}$.

Soit $F = \{A,B\}$ et F vérifie la condition (I). Deux cas se présentent.

Premier cas : $\chi(A,A) \neq$ ou $\chi(B,B) \neq 0$, c'est-à-dire que l'un au moins des deux champs est hyperbolique.

Deuxième cas : $\chi(A,A) = \chi(B,B) = 0$ c'est-à-dire les deux champs sont nilpotents.

L'étude est organisée comme suit :

Je commence par l'étude du premier cas et par la suite je suppose que : $\chi(A,A) > 0$. Puis j'écris A et B dans la base propre A, on obtient :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ et d'après les techniques d'extensions je peux prendre $K(B) = 1$ dans le cas où B est hyperbolique, je distingue deux sous-cas

i) $bc = 0$, je montre que $\overline{S(F)} = \exp(\text{cône}(F))$ et que $LS(F) = \text{cône}(F)$.

ii) $bc \neq 0$, je montre que $\overline{S(F)} = \exp \mathbb{R}^+A \ \exp \mathbb{R}^+B \ \exp \mathbb{R}^+A$

pour le deuxième cas je montre que $\overline{S(F)} = \exp \mathbb{R}^+A \ \exp \mathbb{R}^+B \ \exp \mathbb{R}^+A$.

PROPOSITION 3.5 : *Soit* $F = \{A,B\}$ *qui vérifie la condition (I) avec* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ *alors si* $bc = 0$ *on a*

1) $\overline{S(F)} = \exp \text{co}(F)$

2) $LS(F) = \text{cône}(F)$

La démonstration de la proposition se fait en deux étapes.

1ère étape : $\chi(B,B) = 0$

2ème étape : $\chi(B,B) = 1$

1ère étape $\chi(B,B) = 0 \Longleftrightarrow a^2+b^2 = 0$ et puisque $bc = 0$ alors $a = 0$. Donc $B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$.

La démonstration est la même dans les deux cas : je vais montrer le cas où $B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Et par une conjugaison je peux prendre $b > 0$.

LEMME 3.6 :

Soit $G_1 = \{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1/x \end{pmatrix} x \geqslant 1 \quad , \quad y \geqslant 0 \}$, *alors* G_1 *est un semi-groupe-fermé et* $\overline{S(F)} = G_1 = \exp co(F)$.

Il est simple de vérifier que G_1 est un semi-groupe fermé. De plus pour $t \geqslant 0$ $e^{tA} = \begin{pmatrix} et & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \in G$ et $e^{tB} = \begin{pmatrix} 1 & bt \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_1$ donc $\overline{S(F)} \subset G_1$

Soit $g = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1/x \end{pmatrix} \in G_1$, il est clair que log(g) existe et :

$$\text{Log}(g) = \alpha \begin{bmatrix} 1/2(x-1/x) & y \\ 0 & 1/2(-x+1/x) \end{bmatrix} \quad \text{avec } \alpha > 0.$$

$$= \alpha \left(\frac{1}{2}(x-1/x)\right)A + \frac{\alpha y}{b} B \quad \text{donc} \quad g \in \text{expco}(F) \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

et maintenant, il est simple de voir que LS(F) = co(F).

REMARQUE. Pour le cas de $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$: $\overline{S(F)} = G_1' = \{\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1/x \end{pmatrix} x \geqslant 1, yc \geqslant 0\}$.

2e étape : $K(B) = 1 \iff a^2 = 1 \iff a = 1$ ou $a = -1$.

Donc B est égale à $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$

Je vais démontrer que les deux cas $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(b \neq 0)$ la démonstration des deux cas est analogue :

LEMME 3.7 : *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *et soit*

$G_2 = \{ \begin{pmatrix} x & by \\ 0 & 1/x \end{pmatrix} / \ x \geqslant 1 \quad$ *et* $\quad 0 \leqslant y < \dfrac{x - \frac{1}{x}}{2} \}$ *alors* G_2 *est un semi-fermé et* $\overline{S(F)} = G_2 = \exp co(A,B)$.

Montrons que G_2 est un semi-groupe :

Soit $g_1 = \begin{pmatrix} x_1 & by_1 \\ 0 & 1/x_1 \end{pmatrix}$ et $g_2 = \begin{pmatrix} x_2 & by_2 \\ 0 & 1/x_2 \end{pmatrix}$ deux éléments de G_2

alors $g_1 g_2 = \begin{pmatrix} x_1x_2 \, , & b\left(\frac{y_1}{x_2} + x_1y_2\right) \\ 0 & \frac{1}{x_1x_2} \end{pmatrix}$, on doit vérifier que

$\frac{y_1}{x_2} + x_1y_2 \leqslant \frac{1}{2}\left(x_1x_2 - \frac{1}{x_1x_2}\right)$. Or $y_1 \leqslant \frac{1}{2}\left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right) \Rightarrow \frac{y_1}{x_2} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{x_2} - \frac{1}{x_1x_2}\right)$

$$y_2 \leqslant \frac{1}{2}\left(x_2 - \frac{1}{x_2}\right) \Rightarrow x_1y_2 \leqslant \frac{1}{2}\left(x_1x_2 - \frac{x_1}{x_2}\right)$$

d'où $\frac{y_1}{x_2} + x_1y_2 \leqslant \frac{1}{2}\left(x_1x_2 - \frac{1}{x_1x_2}\right)$.

Donc G_2 est un semi-groupe fermé et $e^{tA} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \in G_2$ pour tout $t \geqslant 0$.

De plus $e^{tB} = \begin{pmatrix} e^t \, ; & b\left(\frac{e^t-e^t}{2}\right) \\ 0 \, ; & e^{-t} \end{pmatrix} \in G_2$ pour tout $t \geqslant 0$. Ceci implique que $\overline{S(F)} \subset G_2$.

Maintenant soit $g = \begin{pmatrix} x & by \\ 0 & 1/x \end{pmatrix} \in G_2$ alors $g \in SL(2,\mathbb{R}) \cap A^*$ donc Log(g) existe

et $\mathrm{Log}(g) = \alpha \begin{pmatrix} \frac{x - \frac{1}{x}}{2} & by \\ 0 & -\frac{x-\frac{1}{x}}{2} \end{pmatrix}$ avec $\alpha \geqslant 0$. Ce qui donne que

$\mathrm{Log}(g) = \alpha\left(\frac{x-\frac{1}{x}}{2} - y\right) A + \alpha y\, B \in co(A,B)$, $g = \exp\mathrm{Log}(g) \in \exp co(A,B) \subset \overline{S(F)}$.

C.Q.F.D.

<u>LEMME 3.8</u> : *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et soit* $G_3 =$

$\begin{pmatrix} x & by \\ 0 & 1/x \end{pmatrix}$ $x > 0$, $y \geqslant 0$ et $y + \frac{x-\frac{1}{x}}{2} >$

alors G_3 *est semi-groupe fermé et* $\overline{S(F)} = G_3 = \exp co(F)$.

La démonstration est analogue à celle du lemme 3.7.

Résumé $F = \{A,B\}$.

A	B	$\overline{S(F)}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\overline{S(F)} = G_1$
"	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$	$\overline{S(F)} = G'_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ cy & 1/x \end{pmatrix} \quad y \geqslant 0 \quad , \quad x \geqslant 1 \right\}$
"	$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\overline{S(F)} = G_2$
"	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}$	$\overline{S(F)} = G'_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ cy & 1/x \end{pmatrix} x \geqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant \frac{x - \frac{1}{x}}{2} \right\}$
"	$\begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\overline{S(F)} = G_3$
"	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$	$\overline{S(F)} = G'_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ cy & 1/x \end{pmatrix} x > 0 \ ; \ y \geqslant 0 \text{ et } y + \frac{x - \frac{1}{x}}{2} \geqslant 0 \right\}$

ETUDE DU CAS $bc \neq 0$.

THEOREME 3.9 : *Soit* $F = \{A,B\}$ *avec* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ *avec* $bc \neq 0$ *et* F *vérifie la condition (I) alors* $\overline{S(F)} = \exp \mathbb{R}^+ A \exp \mathbb{R}^+ B \exp \mathbb{R}^+ A$.

La démonstration du théorème se fait en deux étapes :

1ère étape : B nilpotent : 3 lemmes.

LEMME 3.10 : *Soit* $S = \left\{ \begin{pmatrix} x & bz \\ cy & x' \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})\right.$ *et vérifiant :*

$$\left.\begin{array}{llll} ① & x - ay \geq 1 & ④ & x' + az \geq 0 \\ ② & x - az \geq 1 & ⑤ & x-x'-a(y+z) \geq 0 \\ ③ & x' + ay \geq 0 & ⑥ & y = 0 = z \quad \text{ou } y,z > 0 \end{array}\right\} .$$

alors S *est un semi-groupe fermé et* $\overline{S(F)} \subset S$.

REMARQUE. La condition (I) et la condition $bc \neq 0 \Rightarrow a > 0$.

Montrons que S est un semi-groupe.

Soit $g_1 = \begin{pmatrix} x_1 & by_1 \\ cy_1 & x'_1 \end{pmatrix}$ et $g_2 = \begin{pmatrix} xg_1 & by_2 \\ cz_2 & x'_2 \end{pmatrix}$ deux éléments de S

$$g_1 g_2 = \begin{pmatrix} X & bY \\ cZ & X' \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} X = x_1 x_2 + bc\, y_1 z_1 \\ Y = x_1 y_2 + y_1 x'_2 \\ Z = x_2 z_1 + x'_1 z_2 \\ X' = bc\, z_1 y_2 + x'_1 x'_2 \end{cases} \quad \text{et } bc = -a^2 .$$

① $X - aY = x_2(x_1 - ay_1) + ay_1(x_2 - az_2 - x'_2) - ax_1 y_2$ de ⑤ on a $x_2 - az_2 - x'_2 \geq ay_2$.

donc $X - aY \geq x_2\,(x_1 - ay_1) - ay_2(x_1 - ay_1) = (x_1 - ay_1)(x_2 - ay_2) \geq 1$ de même on vérifie

② $X - aZ \geq 1$.

③ $X' + aY = x_1'x_2' - a^2y_2z_1 + ax_1y_2 + ay_1x_2'$

$$= ay_2(x_1 - az_1) + x_2'(ay_1 + x_1')$$

De ⑤ on a : $x_1 - az_1 \geqslant ay_1 + x_1'$ donc :

$$X' + aY \geqslant (ay_1 + x_1')\ (ay_2 + x_2') \geqslant 0$$

De même on vérifie ④ $X' + aZ \geqslant 0$.

⑤ $X - X' - aY - aZ = (x_1-ay_1)(x_2-ay_2)-(x_1'+ay_1)(x_2'+az_2) \geqslant 0$

⑥ $Y = x_1\ y_2 + x_2'y_1 \geqslant y_1 + y_1(ay_2 + x_2') \geqslant 0$

$Z = x_2z_1 + x_1'z_2 \geqslant z_1 + z_2\ (az_1 + x_1') \geqslant 0$

alors $Y = 0 \Longleftrightarrow y_2 = y_1 = 0 \Longleftrightarrow z_2 = z_1 = 0 \Longleftrightarrow Z = 0$.

Donc S est un semi-groupe fermé. De plus

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \in S \quad \text{et} \quad e^{tB} + \begin{pmatrix} 1+at & bt \\ e^t & 1-at \end{pmatrix} \in S \text{ pour tout } t \geqslant 0.$$

Donc $\overline{S(F)} \subset S$.

<u>LEMME 3.11</u> : *Soit* $g = \begin{pmatrix} x & by \\ cz & x' \end{pmatrix} \in \overline{S(F)}$ *alors*

i) $y(x-az)-z(x'+ay) \geqslant 0$

ii) $z(x-ay)-y(x'+az) \geqslant 0$.

Il est simple de vérifier que e^{tA} et e^{tB} vérifient i) et ii) pour tout $t \geqslant 0$.

Je montre l'affirmation suivante :

Soit $g \in S(F)$ et g vérifiant i) et ii) alors pout tout $t \geqslant 0$, $e^{tA}g$ et $e^{tB}g$ vérifient i) et ii).

Soit $g = \begin{pmatrix} x & by \\ cz & x' \end{pmatrix}$ vérifiant i) et ii) alors :

$$e^{tA}g = \begin{pmatrix} xe^t & ; & bye^t \\ cze^{-t} & ; & x'e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & ; & bY \\ cZ & ; & X' \end{pmatrix} .$$

Je suppose par exemple que $Y \leqslant Z$.

i) $Y(X - aZ) - z(X'+ aY) = xye^{2t} - ayz - zx'e^{-2t}-ayz$

$$= f(t)$$

$f'(t) = 2e^{2t}xy + 2zx'e^{-2t}$ de (3) et (6) du lemme. On a : $x'z \geqslant -ayz$ donc $f'(t) \geqslant 2e^{-2t}y(x-az) \geqslant 0$. Donc f est croissante et pour tout $t \geqslant 0$

$f(t) \geqslant f(0) = y(x-az)-z'(x'+ay) \geqslant 0$.

ii) $Z(X-aY)-Z(X'+aY) \geqslant Z\ (aX-aY-X'-aZ) \geqslant 0$ (lemme 3-10).

$$e^{tB}g = \begin{pmatrix} X & bY \\ cZ & X' \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} X = (1+at)x - a^2tz \\ Y = (1+at)y + tx' \\ Z = tx + (1-at)z \\ X' = -a^{2t}y + (1-at)x' \end{cases}$$

i) $X - aZ = x-az \qquad aY + X' = ay+x'$

$Y(X -aZ)-Z(X' + aY) = y(x-az)-z(ay+x') \geqslant 0$

ii) $Z(X - aY) - Y(X' + aZ) \geqslant Y(X - aY - X' - aZ) \geqslant 0$ Lemme (3.10).

De même et en utilisant les lemmes 3.10, 3.11 on montre le lemme suivant :

<u>LEMME 3.12</u> : *Soit* $g = \begin{pmatrix} x\ ; & by \\ cz\ ; & x' \end{pmatrix} \in \overline{S(F)}$ *alors*

i) $y(x-az)^2 - z \geqslant 0$

ii) $z(x-ay)^2 - y \geqslant 0$.

<u>Démonstration du théorème</u> : pour $\chi(B,B) = 0$.

soit $g = \begin{pmatrix} x & bz \\ cz & x' \end{pmatrix}$ du lemme 3.10 si $y = 0$ alors $z = 0$ et $x \geqslant 1$

et $g = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1/x \end{pmatrix} = e^{tA}$ avec $t = \mathrm{Log}(x) \geqslant 0$.

si $yz \neq 0$ soit $t_2 = \sqrt{yz} \geqslant 0$

Du lemme 3.12 on a : $\dfrac{yx}{\sqrt{yz} + ayz} \geqslant 1$ et $\dfrac{zx}{\sqrt{yz} + ayz} \geqslant 1$

Soit $t_1 = \mathrm{Log}\, \dfrac{yx}{\sqrt{yz} + ayz}$ et $t_3 = \mathrm{Log}\, \left(\dfrac{yx}{\sqrt{yz} + ayz} \right)$ et on vérifie facilement

que $e^{t3A}\, e^{t2B}\, e^{t1A} = g$.

On vient de montrer que $\overline{S(F)} \subset \exp \mathbb{R}^+ A \exp \mathbb{R}^+ B \exp \mathbb{R}^+ A$.

<u>2ème étape</u> : $K(B) = 1$ c'est-à-dire $a^2+bc = 1$:

Les conditions (I) et $bc \neq 0$ implique que $a \in\,]-1,1[\, \cup\,]1,+\infty[$.

<u>LEMME 3.13</u> : *Soit* S *l'ensemble des* $g = \begin{pmatrix} x & by \\ cz & x' \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$ *et vérifiant :*

(1) $x - (1+a)y \geqslant 0$ (4) $x' + (1+a)z \geqslant 0$

(2) $x - (1+a)z \geqslant 0$ (5) $x-x' - (1+a)y + (1-a)z \geqslant 0$

(3) $x' + (1+a)y \geqslant 0$ (6) $x-x' - (1+a)z+y(1-a)z \geqslant 0$

(7) $y = z = 0$ ou $y,z > 0$.

Alors S *est semi-groupe fermé et* $\overline{S(F)} \subset S$.

Montrons que S est un semi-groupe :

Soit $g_1 = \begin{pmatrix} x_1 ; & by_1 \\ cz_1 & x_1' \end{pmatrix}$ et $g_2 = \begin{pmatrix} x_2 & by_2 \\ cz_2 & x_2' \end{pmatrix}$ dans S.

alors $g_1 g_2 = \begin{pmatrix} X & bY \\ cZ & X' \end{pmatrix}$ avec : $\begin{cases} X = x_1x_2 + bcy_1z_2 \\ Y = x_1y_2 + x_2'y_1 \\ Z = x_2z_1 + x_1'z_2 \\ X' = bcz_1y_2 + x_1'x_2' \end{cases}$ et $bc = 1-a^2$

Je vérifie (1) (3) (5) et (7) les autres sont analogues.

① $X - (1+a)Y = x_2(x_1-(1+a)y_1) + (1+a)y_1(x_2+(1-a)z_2-x_2') - (1+a)x_1y_2$

or $x_2 - x_2' + (1-a)z_2 > (1+a)y_2 \geqslant 0$. Donc $X - (1+a)Y \geqslant (x_1-(1+a)y_1)(x_2 - (1+a)y_2) \geqslant 0$.

③ $X' + (1+a)Y = (1+a)y_2\ (x_1 + (1-a)z_1) + x_2'(x_1' + (1+a)y_1)$. Or $x_2' \geqslant - (1+a)y_2$.

Donc $X' + (1+a)Y \geqslant (1+a)y_2\ (x_1 + (1-a)z_1 - x_1' - (1+a)y_1) \geqslant 0$.

⑤ $X - X' - (1+a)Y + (1-a)Z = (x_1+(1-a)z_1)(x_2-(1+a)y_2) - (x_1'+(1+a)y_1)(x_2'-(1-a)z_2)$

Or $x_2 - (1+a)y_2 \geqslant x_2' - (1-a)z_2$.

Donc $X - X' - (1+a)Y + (1-a)Z \geqslant (x_2-(1+a)y_2)(x_1+(1-a)z_1-x_1'-(1+a)y_1) \geqslant 0$.

⑦ $Y = x_1y_2 + x_2'y_1 \geqslant y_1((1+a)y_2 + x_2') \geqslant 0$ et $Y \geqslant y_2(x_1-(1+a)y_1) \geqslant 0$.

De même pour $Z \geqslant z_2((1+a)z_1+x_1') \geqslant 0$ et $Z \geqslant z_1(x_2-(1+a)z_2) \geqslant 0$.

Donc $Y = 0 \Longleftrightarrow y_1 = y_2 = 0 \Longleftrightarrow z_1 = z_2 = 0 \Longleftrightarrow Z = 0$.

Maintenant, il est simple de vérifier que pour tout $t \geqslant 0$, e^{tA} et e^{tB} appartiennent à S.

C.Q.F.D.

De même et en utilisant le lemme précédent, on montre les lemmes suivants :

<u>LEMME 3.14</u> : *Soit* $g = \begin{pmatrix} x & by \\ cz & x' \end{pmatrix} \in \overline{S(F)}$ *alors*

i) $y(x - az) - z(x' + ay) \geqslant 0$

ii) $z(x - ay) - y(x' + az) \geqslant 0$.

<u>LEMME 3.15</u> : *Soit* $g = \begin{pmatrix} x & by \\ cz & x' \end{pmatrix} \in \overline{S(F)}$ *alors*

i) $y(x - (1+a)z)(x - (a-1)z) - z \geqslant 0$.

ii) $z(x - (1+a)y)(x-(a-1)-z \geqslant 0$.

Le principe de la démonstration des deux lemmes est le suivant : On vérifie que pour tout $t \geqslant 0$ e^{tA} et e^{tB} vérifient i) et ii) des deux lemmes. Puis étant donné g vérifiant i) et ii), on montre que $e^{tA}g$ et $e^{tB}g$ vérifient i) et ii) pour tout $t \geqslant 0$.

DEMONSTRATION DU THEOREME :

$$\text{Soit } g = \begin{pmatrix} x & by \\ cz & x' \end{pmatrix} \subset \overline{S(F)} \quad \text{et } yz \neq 0.$$

$$\text{Alors } \alpha = \sqrt{\frac{xy}{\sqrt{yz}\ (\sqrt{yz+1} + a\sqrt{yz}}} \geqslant 1 \quad \text{(Lemme 3.15)},$$

$$\text{et } \beta = \sqrt{\frac{xz}{\sqrt{yz}\ (\sqrt{yz+1} + a\sqrt{yz}}} \geqslant 1.$$

De même $\gamma = \sqrt{1+yz} + \sqrt{yz} \geqslant 1$.

Soit $t_1 = \log \alpha \geqslant 0$, $t_2 = \log \beta \geqslant 0$ et $t_3 = \log \beta \geqslant 0$. Alors $g = e^{t_1 A}\ e^{t_2 B}\ e^{t_3 A}$

donc $\overline{S(F)} \subset \exp \mathbb{R}^+ A \ \exp \mathbb{R}^+ B \ \exp \mathbb{R}^+ A$.

C.Q.F.D.

Il me reste à étudier le cas nilpotent c'est-à-dire $\chi(A,A) = \chi(B,B) = 0$.

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \qquad \text{avec } a^2+bc = 0.$$

La condition (I) implique que $c \geqslant 0$ et l'indépendance des deux champs implique que $c \neq 0$ donc $c > 0$ et $b \leqslant 0$.

REMARQUE. Par les techniques d'extensions je peux prendre $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & -a \end{pmatrix}$

PROPOSITION 3.16 : *Soit* $F = \{A,B\}$ *avec* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & -a \end{pmatrix}$ *et* $a^2+b = 0$

alors $\overline{S(F)} = \exp \mathbb{R}^+ A \ \exp \mathbb{R}^+ B \ \exp \mathbb{R}^+ A$.

LEMME 3.17 : *Soit S l'ensemble des* $g = \begin{pmatrix} x & y \\ z & x' \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$ *et vérifiant :*

① $x - 1 - az \geq 0$ ② $x' - 1 + az \geq 0$.

③ $y + a(x-x') - a^2 z \geq 0$ ④ $z = 0$ alors $x = x' = 1$ ou $z > 0$.

Alors S est un semi-groupe fermé et $\overline{S(F)} \subset S$.

REMARQUE. En effet on va montrer que $\overline{S(F)} = S$.

La démonstration de ce lemme est technique, il est simple de vérifier que S est semi-groupe et que e^{tA} et e^{tB} sont dans S pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION. Soit $g = \begin{pmatrix} x & y \\ z & x' \end{pmatrix} \in \overline{S(F)}$. Si $z = 0$ alors $x = x' = 1$ et $y \geq 0$ (3 du lemme). et $g = e^{yA}$. Si $z \neq 0$ soit

$$t_1 = \frac{x' - 1+az}{z} \geq 0$$

$$t_2 = z > 0$$

$$t_3 = \frac{x - 1 - xz}{z} \geq 0$$

et on a : $g = e^{t_3 A} \; e^{t_2 B} \; e^{t_1 A}$, donc $S \subset \exp \mathbb{R}^+ A \exp \mathbb{R}^+ B \exp \mathbb{R}^+ A \subset \overline{S(F)}$.

C.Q.F.D.

CHAPITRE IV.

Application à la théorie des semi-groupes.

Dans ce chapitre je vais énoncer quelques conséquences des résultats du chapitre précédent dans le cadre de la théorie des semi-groupes du groupe de Lie SL(2,$\mathbb{R}$) et plus particulièrement pour les semi-groupes intégraux et divisibles.

Tout d'abord je vais commencer par donner une classification de l'ensemble des générateurs infinitésimaux d'un semi-groupe dont on sait l'importance fondamentale HOFMANN [ ].......

Puis je vais donner une classification des semi-groupes intégraux et une caractérisation des semi-groupes divisibles.

Soit G un groupe de Lie, d'algèbre de Lie $\underline{g}$ et soit S un semi-groupe de G contenant l'unité.

DEFINITION 4.1 : *On appelle ensemble des générateurs infinitésimaux de* S *noté* L(S) *, l'ensemble de tous les éléments* X *de* $\underline{g}$ *pour lesquels* $\exp tX \in \overline{S}$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}^+$.

PROPOSITION 4.2 :

1) L(S) est un cône fermé

2) si $\pm X \in L(S)$ *alors* $e^{\mathrm{ad}X} L(S) \subset L(S)$

3) si $\pm X$, $\pm Y \in L(S)$ *alors* $[X,Y] \in L(S)$.

THEOREME 4.3 : *Soit* S *un semi-groupe de* $SL(2,\mathbb{R})$ *et soit* $W = LS \cap -L(S)$.

1) Si W *n'est pas nulle alors* L(S) *est*

a) $SL(2,\mathbb{R})$ *ou*

b) un conjugué de P^+ , $\mathbb{R}H + \mathbb{R}P$, $\mathbb{R}H + \mathbb{R}^+P$ ou $\mathbb{R}^+H + \mathbb{R}P$ *ou*

c) une droite

2) si W *est nulle un conjugué de* L(S) *est contenu dans* P^+.

Le théorème 4.3 se déduit de la proposition 3.1, la proposition 2.10 et du lemme suivant.

LEMME 4.4 : *Soit S un semi-groupe de* $SL(2,\mathbb{R})$ *et soit le système* $F = L(S)$ $F = LS(F)$.

En effet par définition de L(S), on a quelque soit $X \in LS(F)$, $\exp tX$ appartient à tout semi-groupe fermé contenant S(F) or $S(F) = S(L(S) \subset \overline{S}$, d'où le lemme.

DEFINITION 4.5 : *On dit qu'un semi-groupe fermé d'un groupe de Lie est intégral, si c'est le plus petit semi-groupe fermé contenant* $\exp L(S)$.

THEOREME 4.6 : *Soit* S *un semi-groupe intégral de* SL(2,$\mathbb{R}$) *alors* S *a exclusivement l'une des possibilités suivantes :*

a) S = SL(2,$\mathbb{R}$)

b) S *est l'un des conjugués de* S_1 , $S_1 \cup S_1^{-1}$, S_2 ou SL(2,$\mathbb{R}$)$^+$

c) S *est l'un des conjugués de* exp $\mathbb{R}$ H , exp $\mathbb{R}$ P ou exp $\mathbb{R}$(P-Q)

d) un conjugué de S *est contenu dans* P^+.

Le théorème se déduit directement du théorème 4.3, proposition 3.3. proposition 1.6 et du lemme suivant :

LEMME 4.7 : *Soit* S *un semi-groupe intégral et soit le système* F = L(S) *alors* S *est intégral si et seulement si* S = $\overline{S(F)}$.

COROLLAIRE 4.8 : *Soit* S *un semi-groupe de* SL(2,$\mathbb{R}$) *contenant un groupe circulaire et dont* L(S) *n'est pas une droite alors* S = SL(2,$\mathbb{R}$).

DEFINITION 4.9 : *On dit qu'un semi-groupe* S *d'un groupe de Lie est divisible si pour tout* $n \in \mathbb{N}^+$ *et tout* $y \in S$, *il existe* $x \in S$ *tel que* $x^n = y$.

PROPOSITION 4.10 : S *est divisible si et seulement si* S = exp L(S).

PROPOSITION 4.11 : *Soit* S *un semi-groupe propre de* SL(2,$\mathbb{R}$).S *est divisible si et seulement si* L(S) *est le contenu d'un conjugué de* $\mathbb{R}$H + $\mathbb{R}$P ou L(S) = P^+.

Cette proposition se déduit des propositions 3.3, 3.5, 3.16 et du théorème 3.9.

CHAPITRE IV.

Controlabilité sur $GL^+(2,\mathbb{R})$, S^1 et $\mathbb{R}^2 - \{0\}$.

I. CONTROLABILITE SUR $GL^+(2,\mathbb{R})$.

Le groupe de Lie $GL^+(2,\mathbb{R})$ est l'ensemble de toutes les matrices carrées réelles de déterminant strictement positif. Son algèbre de Lie est $gL(2,\mathbb{R})$ l'espace vectoriel de toutes les matrices carrées réelles.

$gL(2,\mathbb{R})$ s'ecrit comme la somme directe de $\mathbb{R}id$ et $sl(2,\mathbb{R})$.

$$gL(2,\mathbb{R}) = \mathbb{R}id \oplus sL(2,\mathbb{R}).$$

Considérons les deux projections $\Pi_1 : gL(2,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}id$ et $\Pi_2 : gL(2,\mathbb{R}) \to sl(2,\mathbb{R})$.

COROLAIRE 5.1 : *Soit* F *un système de champs de vecteurs invariants à droite sur* $GL^+(2,\mathbb{R})$ *alors* F *est transitif si et seulement si*

i) $\Pi_1(CO(F)) = \mathbb{R}id$

ii) $\Pi_2(CO(F))$ *contient un compact et* $\Pi_2(F)$ *contient deux éléments indépendants où* $\Pi_2(CO(F))$ *est symétrique et* Lie $\Pi_2(F) = sL(2,\mathbb{R})$.

Ce résultat est un corollaire du théorème 2.2 et du théorème suivant (B.J.K.S.) référence : [5]

THEOREME 5.2 : *Soit* F *un système de champs de vecteurs invariants à droite sur* $GL^+(n,\mathbb{R})$ F *est transitif si et seulement si*

i) $\Pi_1(CO(F)) = \mathbb{R}id$

ii) $\Pi_2(CO(F))$ *est transitif sur* $SL(n,\mathbb{R})$.

II. CONTROLABILITE SUR S^1.

S^1 désigne le cercle :

Soit $F \subset cl(2,\mathbb{R})$, on dit que F est transitif sur S^1 si sa projection radiale qui est $\Pi_2(F)$ est transitive sur S^1.

THEOREME 5.3 : *Soit* F *une famille de matrices et* CO(F) *non symétrique alors* F *est transitif sur* S^1 *si et seulement si* $\Pi_2(CO(F))$ *contient un compact.*

DEMONSTRATION. Il est évident que la condition est suffisante. Supposons que $\Pi_2(CO(F))$ ne contient pas de compact alors deux cas possibles.

1er cas : $\Pi_2(CO(F))$ contient $\mathbb{R}H + \mathbb{R}P$ donc l'ensemble d'accessibilité de $\Pi_2(CO(F))$ est contenu dans $S_1 \cup S_1^{-1} = \{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1/x \end{pmatrix} x > 0 \, , \, y \in \mathbb{R} \}$ qui laisse invariant la droite $y = 0$ implique F n'est pas transitif sur S^1.

2ème cas : $\Pi_2(CO(F)) \subset P^+$ donc son ensemble d'accessibilité est contenu dans $SL^+(2,\mathbb{R})$ qui laisse invariant le 1/4 du plan $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Donc F n'est pas transitif sur S^1.

C.Q.F.D.

III. CONTROLABILITE DES SYSTEMES PLANS SUR $\mathbb{R}^2 - \{0\}$

Considérons le système suivant

(1) $\dot{x} = (A + uD)x \qquad u \in \mathbb{R} \, , \quad x \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ A et D deux matrices non nulles.

Le système (1) est équivalent au système $F = \{A, \pm D\}$.

THEOREME 5.4 : *Le système (1) est transitif sur* $\mathbb{R}^2-\{0\}$ *si et seulement si*

i) si D *non compact* $\Pi_2(CO(A,\pm D))$ *contient un compact*

ii) si D *est compact* $\chi(AD,AD) > 0$

REMARQUE : i) et i)) assurent l'indépendance de A et D.

Démonstration du théorème.

i) se déduit directement du théorème et du théorème suivant :

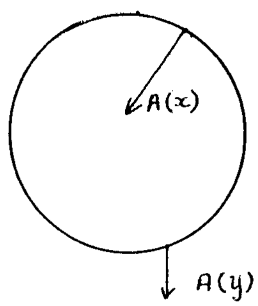
THEOREMME 5.5 : *Soit* F *une famille de matrice alors :* F *est transitif sur* $\mathbb{R}^n - \{0\}$ *si et seulement si*

a) F *est transitif sur les directions*

b) S(F) *et* S(-F) *non bornée.*

Alors le fait que D est non compact b) est vérifié et puisque $\Pi_2(CO(A,\pm D))$ contient un compact et d'après le théorème a) est assurée.

ii) si D est compact : alors la trajectoire de D est un cercle pour avoir la complète controlabilité, il faut avoir un vecteur sortant et un vecteur rentrant.



Ceci équivaut à dire que A(x).x change de signe.

J'écris A et D dans la base propre de D. On a :

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \text{et soit } x = (\alpha, \beta).$$

$$A(x) = \begin{pmatrix} a\alpha + b\beta) \\ c\alpha + d\beta \end{pmatrix} \qquad \text{et } A(x).x = a\alpha^2 + (b+c)\,\beta\alpha + d\beta^2 \;.$$

C'est une forme bilinéaire, elle change de signe si et seulement si $\Delta = (b+c)^2 - 4ad$ est strictement positif or $\Delta = \frac{1}{2}\,\chi(AD,AD)$.

C.Q.F.D.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] HILGERT J. et K.H. HOFMANN, The SL(2,$\mathbb{R}$), Hand-Book I. II and III.

[2] HOFMANN K.H. et LAWSON J.D., Divisible subsimigroups of Lie groupe. J. of London Math. Soc. (2) 27 (1983) p. 427-434.

[3] J. HILGERT et HOFMANN K.H., Semigroups in Lie groupe. Lie semi algebra in Lie algebras. Preprint Nr 779 Technische Hochschule Darmstadt, Oktober 1983.

[4] J. HILGERT et HOFMANN K.H., Old and New on SL(2,$\mathbb{R}$), Preprint Nr 810, März 1984.

[5] BONARD B. , JURDJEVIC V., KUPKA H. , G. SALLET, Transitivity of families of vector field on semi direct products of Lie groupes. J. Rons. Amer. Math. Soc. 271 (2° (1982).

[6] JURDEJEVIC V. et KUPKA I., Control systems subordinated to a group action J. Diff. Equations 39 (1982).

[7] JURDJEVIC V. et KUPKA I., Control systems on semi simple Lie groups and their homogenous spaces. Ann. Inst. Fourier 31 fasc. 3 (1981).

[8] G. SALLET, Controllability of pair of vecteurs fields on semi simple Lie groups.

[9] SALLET G., Sur la structure de l'ensemble d'accessibilité de certains systèmes Applications à l'équivalence des systèmes.

[10] KUPKA I. et SALLET G., A sufficient condition for the transivity of prends semi groups. Applications on systeme theory. J. Differential equations.

[11] LOBRY C., Bases mathématiques de la théorie du contrôle. Cours de 3ème cycle. Multigraphié Bordeau (1978).