PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

JACQUES RAYNAUD

Modules TTK-critiques et notions connexes

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1984, fascicule 4A
« Modules TTK-Critiques et notions connexes », , p. 1-33
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1984___4A_A1_0>

MODULES TTK-CRITIQUES ET NOTIONS CONNEXES

par Jacques RAYNAUD

INTRODUCTION.

L'objet de ce papier d'algèbre non nécessairement commutative est d'obtenir, pour certains anneaux et modules à partir du concept de TTK-dimension introduit par J.S. Golan (voir [2], [5], [21] et [22]), des résultats analogues à ceux obtenus par A.V. Jategaonkar dans [10] en utilisant le concept de dimension de Krull pour les modules sur un anneau noethérien complètement borné.

Dans le paragraphe 1, on donne les propriétés générales des modules TTK-critiques qui avaient été introduits (sous un nom légèrement différent) et partiellement étudiés dans [11]; ces modules sont les analogues pour la TTK-dimension des modules critiques définis à partir de la dimension de Krull ([9], [10]). Dans le deuxième paragraphe, on s'intéresse à la notion de suite TTK-basique d'un module (analogue des "basic series" de la dimension de Krull), et on donne un analogue du Théorème de Jordan Hölder pour un A-module non nul noethérien à droite qui possède une TTK-dimension avec A D-anneau à droite qui vérifie la condition (Min.) à droite ([19], [21], [22]) et nos résultats généralisent strictement ceux de [11] sur ce sujet (car dans [19], [21] et [22] on a donné un exemple d'anneau qui vérifie la condition (Min.) à droite et qui ne vérifie pas la condition (R) à droite utilisée dans [11]); on donne d'autres propriétés en particulier sur la séquence des TTK-dimensions d'un module analogue à celle de [10] sur la "Krull dimension sequence of a module". Enfin dans ce deuxième paragraphe on établit le lien précis entre la notion de suite TTK-basique et la notion générale de "T-composition series" développée et étudiée en détail par W.G. Lau dans sa thèse [12] où le lecteur pourra se reporter avec intérêt; à partir de [12] on considère la notion de TTK-radical d'un module et on démontre que le TTK-radical d'un anneau noethérien à droite qui vérifie la condition (Min.) à droite est nilpotent. Dans le troisième paragraphe, on s'intéresse à la notion de module TTK-lisse et à celle de suite des TTK-socles d'un module qui permet de caractériser, pour certains anneaux, les modules TTK-lisses; nos résultats sont inspirés de ceux de [10] sur les "smooth module" et "socle series of a module". Le dernier paragraphe est consacré aux modules injectifs indécomposables sur certains anneaux qui sont alors des modules TTK-lisses et on donne pour terminer un théorème de structure de ces modules injectifs indécomposables analogue en partie à un résultat bien connu de E. Matlis sur les modules injectifs indécomposables sur un anneau commutatif noethérien [13]; ce dernier résultat qui fait intervenir la suite des TTK-socles est bien plus précis et complet qu'un résultat du même type de [11] dont on s'est inspiré.

NOTATIONS ET TERMINOLOGIE.

Dans la suite, tous les anneaux, modules et morphismes considérés seront unitaires, et les anneaux non nécessairement commutatifs.

Pour tout anneau A, on désignera par Mod A la catégorie des A-modules à droite. Sauf mention expresse du contraire toutes les notions utilisées seront supposées à droite (c'est à dire, par A-module on entendra A-module à droite; idéal de A signifiera idéal à droite de A;...).

Nous appellerons *filtre localisant (à droite) d'un anneau* A, tout ensemble topologisant et idempotent d'idéaux de A défini par P. Gabriel dans [1].

Si $\mathscr{F}$ est un filtre localisant d'un anneau A, nous dirons qu'un A-module M est de $\mathscr{F}$-torsion (ou de torsion s'il n'y a pas de risque de confusion) si l'annulateur de tout élément de M appartient à $\mathscr{F}$. Tout A-module N possède un plus grand sous-module de $\mathscr{F}$-torsion noté $\mathscr{F}(N)$. Un A-module M sera dit sans $\mathscr{F}$-torsion (ou sans torsion) si on a $\mathscr{F}(M) = 0$.

D'autres terminologies sont utilisées par ailleurs. Pour plus de détails sur tout ce qui précède on pourra se reporter à [1], [7], [3] et [25].

L'ensemble des filtres localisants d'un anneau A est muni d'une structure de treillis complet brouwérien par la relation $\mathscr{F} \subset \mathscr{F}'$ (qu'on lit $\mathscr{F}'$ est plus fin que $\mathscr{F}$ et qu'on note aussi $\mathscr{F} \leqslant \mathscr{F}'$). Voir [21], [22] et [3] pour plus de détails sur cette structure.

Si M est un A-module, on désignera par $\xi(M)$ le plus petit filtre localisant de A tel que M soit de torsion, et on désignera par $\chi(M)$ le plus grand filtre localisant de A tel que M soit sans torsion.

Soit $\mathscr{F}$ un filtre localisant d'un anneau A. Nous dirons qu'un A-*module* M est *$\mathscr{F}$-cocritique* si M est non nul sans $\mathscr{F}$-torsion et si, pour tout sous-module non nul N de M, le module quotient M/N est de $\mathscr{F}$-torsion; un *idéal* I de A sera dit *$\mathscr{F}$-critique* si le A-module A/I est $\mathscr{F}$-cocritique. Un A-*module* M (resp. un *idéal* I de A) sera dit *cocritique* (resp. *critique*) s'il est $\chi(M)$-cocritique (resp. $\chi(A/I)$-cocritique). De tels modules ont été introduits dans [7] et considérés sous différents noms par la suite; la terminologie adoptée ici est celle de

[3].

Nous dirons qu'un *filtre localisant* $\mathcal{P}$ d'un anneau A est *premier* s'il existe un A-module cocritique M tel que $\mathcal{P} = \chi(M)$ (voir [7] où cette notion a été introduite). L'ensemble des filtres localisants premiers de l'anneau A sera appelé le *spectre (à droite)* de A et désigné par Speg(A).

Pour tout A-module M, l'ensemble Ass(M) des $\mathcal{P} \in$ Speg(A) tels que M ait un sous-module $\mathcal{P}$-cocritique est appelé l'*assassin* de M; l'ensemble Supp(M) des $\mathcal{P} \in$ Speg(A) tels que M ne soit pas de $\mathcal{P}$-torsion est appelé le *support* de M. (Voir [3] pour les propriétés analogues à celles du commutatif).

On dira qu'un anneau A est un D-*anneau à droite* si pour tout A-module non nul M on a Ass(M) $\neq \emptyset$. (Voir [3], [19], [20], [21] et [22] pour plus de détails sur ces anneaux). En particulier, les anneaux semi-noethériens à droite (c'est à dire les anneaux dont la dimension de Gabriel de la catégorie Mod A est définie; cf. [1] page 382) caractérisés dans [16] et [17], les anneaux ayant une dimension de Krull à droite (cf. [9]), et donc les anneaux noethériens à droite sont des D-anneaux à droite.

Nous dirons qu'un A-*module* cocritique M est *surcocritique* si on a la relation Supp(M) = $\{\mathcal{P} \in \mathrm{Speg}(A) \mid \mathcal{P} \leqslant \chi(M)\}$ et nous dirons qu'un *idéal* critique I de A est *surcritique* si le A-module A/I est surcocritique. Enfin nous dirons que l'*anneau* A *vérifie la condition* (Min.) *à droite* si tout A-module cocritique possède un sous-module surcocritique, et nous dirons que l'*anneau* A *vérifie la condition* (R) *à droite* si tout A-module cocritique est surcocritique (condition introduite en [16] et [17]). Voir [19], [20], [21] et [22] où ces notions sont introduites et étudiées en détail.

I. PRELIMINAIRES.

Soit A un anneau quelconque.

J.S. Golan a introduit, dans [2], l'application δ qui à toute partie Y de Speg(A) associe le filtre localisant $\delta(Y)$ de l'anneau A associé à la sous-catégorie localisante de Mod A caractérisée par les A-modules M qui vérifient $\emptyset \neq \mathrm{Ass}(M/N) \subset Y$ pour tout sous-module propre N de M (cf. proposition 2.1 de [2]). Pour tout ordinal ι, il a considéré le sous-ensemble U_ι de Speg(A) défini comme il suit :

.U_0 est l'ensemble des éléments minimaux de Speg(A);

.si ι n'est pas un ordinal limite alors

$U_\iota = \{ \mathscr{P}\in \mathrm{Speg}(A) \mid \mathscr{P}'\in \mathrm{Speg}(A) \text{ et } \mathscr{P}'<\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{P}'\in U_{\iota-1}\}$;

.si ι est un ordinal limite alors $U_\iota = \bigcup_{\kappa<\iota} U_\kappa$.

On dit alors, [2], qu'un A-module non nul M a une TTK-dimension κ et on écrit TTK-dim(M) = κ, si l'"ensemble" d'ordinaux $\{ \iota \mid M \text{ est de } \delta(U_\iota)\text{-torsion} \}$ est non vide et si κ est son plus petit élément. On pose aussi TTK-dim(0) = -1.

Notons que si A est un anneau qui vérifie la condition (Min.) à droite alors, d'aprés le théorème 3.9 de [22] (ou théorème 4.1 de [19], ou théorème 2.5.9 de [21]), un A-module M a une TTK-dimension si et seulement si M a une dimension de Gabriel et ces dimensions sont égales.

LEMME 1.1.- [5]- *Pour tout* A-*module* M *et pour tout sous-module* N *de* M *on a* TTK-dim(M) = sup{TTK-dim(N), TTK-dim(M/N)}.

Le lemme suivant généralise le lemme 2.1 de [11] :

LEMME 1.2.- *Si* A *est un* D-*anneau à droite et si* M *est un* A-*module tel que* TTK-dim(M) = ι, *alors* ι *est le plus petit ordinal tel que* Supp(M) $\subset U_\iota$.

DEMONSTRATION.- D'aprés [22] (pages 84 à 88) on a la relation $\mathrm{Supp}(M) \subset U_\iota$. Si κ est un ordinal tel que $\mathrm{Supp}(M) \subset U_\kappa$ alors, pour tout sous-module propre N de M, on a $\emptyset \neq \mathrm{Ass}(M/N) \subset \mathrm{Supp}(M/N) \subset \mathrm{Supp}(M) \subset U_\kappa$ et par suite on obtient $\kappa \geqslant \iota$. Ceci démontre le résultat.∎

La notion suivante introduite dans [11] est directement inspirée de la notion de module α-critique de [9], [10] :

DEFINITION.- Si M est un module non nul sur un anneau A et si α est un ordinal, nous dirons que M est un *A-module* α-TTK-*critique* si TTK-dim(M) $= \alpha$ et si pour tout sous-module non nul N de M on a TTK-dim(M/N) $< \alpha$. Un A-*module* sera dit TTK-*critique* s'il est α-TTK-critique pour un certain ordinal α.

Comme dans [9] il vient :

PROPOSITION 1.3.- *Tout sous-module non nul d'un module* α-TTK-*critique est* α-TTK-*critique*.

DEMONSTRATION.- Elle est absolument identique à celle de la proposition 2.3 de [9] en utilisant notre lemme 1.1.∎

PROPOSITION.1.4.- *Tout module* TTK-*critique est cocritique*.

DEMONSTRATION.- Elle est identique à celle du corollaire 2.5 de [9] car la notion de "monoform module" coïncide avec celle de module cocritique (cela résulte du théorème 2.9 de [9]).∎

Les lemmes 1.5 et 1.6 généralisent les lemmes 2.3 et 2.4 de [11] :

LEMME 1.5.- *Soit* M *un* A-*module* α-TTK-*critique. Si* L *est un* A-*module qui possède une* TTK-*dimension, si* M *est un sous-module de* L *qui est essentiel dans* L *et si on a* TTK-dim(L/M) $< \alpha$, *alors* L *est un* A-*module* α-TTK-*criti-*

que.

DEMONSTRATION.- On a TTK-dim(L) = α d'aprés le lemme 1.1. Si L' est un sous-module non nul de L alors $L'\cap M$ est un sous-module non nul de M et $M/L'\cap M$ est isomorphe à $(L'+M)/L'$. En utilisant le lemme 1.1 et les hypothèses il vient :

$$\begin{aligned} \text{TTK-dim}(L/L') &= \sup\{\text{TTK-dim}(M/L'\cap M), \text{TTK-dim}(L/(L'+M))\} \\ &\leqslant \sup\{\text{TTK-dim}(M/L'\cap M), \text{TTK-dim}(L/M)\} \\ &< \alpha . \end{aligned}$$

D'où le résultat.■

LEMME 1.6.- *Si* A *est un* D-*anneau à droite et si* M *est un* A-*module* α-TTK-*critique qui possède un sous-module surcocritique* N, *alors* α *n'est pas un ordinal limite et on a* $\chi(M)\in U_\alpha$ *et* $\chi(M)\notin U_{\alpha-1}$.

DEMONSTRATION.- D'aprés la proposition 1.3 on a TTK-dim(N) = α et d'aprés le lemme 1.2 il vient $\text{Supp}(N)\subset U_\alpha$ ce qui implique que $\chi(N)$ appartient à U_α. Si α est un ordinal limite, il existe un ordinal $\kappa<\alpha$ tel que $\chi(N)$ appartient à U_κ ce qui entraîne $\text{Supp}(N)\subset U_\kappa$: contradiction avec le lemme 1.2. Donc α n'est pas un ordinal limite et on a $\chi(N)\in U_\alpha\setminus U_{\alpha-1}$ ce qui nous donne le résultat car on a $\chi(N) = \chi(M)$ d'aprés la proposition 1.4.■

PROPOSITION 1.7.- *Si* A *est un* D-*anneau à droite et si* M *est un* A-*module* α-TTK-*critique qui possède un sous-module surcocritique, alors* M *est un* A-*module* $\delta(U_{\alpha-1})$-*cocritique.*

DEMONSTRATION.- On a TTK-dim(M) = α et TTK-dim(M/N) $<$ α pour tout sous-module non nul N de M. D'aprés le lemme 1.6 et la proposition 1.3 le module M est sans $\delta(U_{\alpha-1})$-torsion. Le résultat est alors immédiat.■

PROPOSITION 1.8.- *Pour un ordinal* ι, *si* M *est un*

A-module $\delta(U_\iota)$-cocritique qui possède une TTK-dimension α, alors M est un A-module α-TTK-critique et $\alpha>\iota$.

DEMONSTRATION.- On a $\delta(U_\iota)(M) = 0$ et $\delta(U_\iota)(M/N) = M/N$ pour tout sous-module non nul N de M. Comme on a $\delta(U_\alpha)(M) = M$, il vient $\delta(U_\iota)\subset\delta(U_\alpha)$ et par suite $\iota<\alpha$. D'où M est un A-module α-TTK-critique.■

PROPOSITION 1.9.- *Si A est un D-anneau à droite et si M est un A-module surcocritique qui possède une TTK-dimension α, alors M est un A-module α-TTK-critique et α n'est pas un ordinal limite.*

DEMONSTRATION.- De TTK-dim(M) $= \alpha$ on déduit $Ass(M)\subset U_\alpha$ c'est à dire $\chi(M)\in U_\alpha$. Il existe alors un plus petit ordinal $\kappa\leqslant\alpha$ tel que $\chi(M)\in U_\kappa$ et κ n'est pas un ordinal limite. Si N est un sous-module non nul de M on a $Ass(M/N)\subset Supp(M/N)\subset Supp(M)=\{\mathscr{P}\in Speg(A) \mid \mathscr{P}\leqslant\chi(M)\}$. Comme le module quotient M/N est de $\chi(M)$-torsion il vient $\mathscr{P}<\chi(M)$ pour tout $\mathscr{P}\in Ass(M/N)$, et de $\chi(M)\in U_\kappa$ on déduit $\mathscr{P}\in U_{\kappa-1}$. Par suite on a $Ass(M/N)\subset U_{\kappa-1}$. Par conséquent M est un module α-TTK-critique et α n'est pas un ordinal limite d'aprés le lemme 1.6.■

Cette proposition 1.9 généralise, en particulier, le lemme 2.5 de [11].

COROLLAIRE 1.10.- *Soit A un anneau semi-noethérien à droite qui vérifie la condition* (Min.) *à droite. Si α est un ordinal, alors les A-modules α-TTK-critiques sont les A-modules $\delta(U_{\alpha-1})$-cocritiques.*

DEMONSTRATION.- D'aprés la démonstration du théorème 2.5.9 de [21] (ou du théorème 3.9 de [22]) la TTK-dimension des modules $\delta(U_\iota)$-cocritiques est $\iota+1$. Le résultat se déduit alors des propositions 1.7 et 1.8.■

II. SUITES TTK-BASIQUES D'UN MODULE.

Les notions suivantes introduites dans [11] sont directement inspirées des notions correspondantes de [10] (paragraphe 3) :

Soit A un anneau quelconque.

Si M est un A-module non nul dont l'ensemble des sous-modules TTK-critiques est non vide, on appellera *sous-module* TTK-*basique* de M tout sous-module non nul B de M qui est maximal parmi les sous-modules α-TTK-critiques de M où α est l'ordinal tel qu'il n'existe pas de sous-modules β-TTK-critiques de M avec $\beta<\alpha$. Une *suite* TTK-*basique* de M sera une chaîne finie

$$0 = B_0 \subset B_1 \subset \ldots \subset B_n = M$$

de sous-modules de M où le module quotient B_i/B_{i-1} est un sous-module TTK-basique de M/B_{i-1} pour $i=1,\ldots,n$; l'entier n sera appelé la *longueur* de la suite TTK-basique. Deux *suites* TTK-*basiques* $\{ B_i \mid i=1,\ldots,m \}$ et $\{ B'_j \mid j=1,\ldots,n \}$ de M seront dites *équivalentes* si $m = n$ et s'il existe une permutation π de $\{1,\ldots,n\}$ telle que $\chi(B_i/B_{i-1}) = \chi(B'_{\pi(i)}/B'_{\pi(i)-1})$ pour $i=1,\ldots,n$.

Evidemment un A-module qui possède une suite TTK-basique a une TTK-dimension.

THEOREME 2.1.- *Soit* A *un* D-*anneau à droite qui vérifie la condition* (Min.) *à droite. Considérons* M *un* A-*module non nul noethérien qui possède une* TTK-*dimension*. *Alors* M *possède une suite* TTK-*basique*.

DEMONSTRATION.- On pose $B_0 = 0$. Comme M est non nul, on a $Ass(M) \neq \emptyset$ et, d'aprés la proposition 1.9, le module M possède des sous-modules TTK-critiques; on peut alors considérer B_1 un sous-module TTK-basique de M (il existe car M est noethérien). Si $B_1 \neq M$ alors on a $Ass(M/B_1) \neq \emptyset$ et.... . On construit ainsi une chaîne finie (car M est noethérien) de sous-modules de M qui est, par construction, une suite TTK-basique de M.■

Donc, sous les hypothèses du théorème précédant, on obtient qu'un module non nul noethérien possède une TTK-dimension si et seulement si il possède une suite TTK-basique.

Le lemme suivant analogue au lemme 3.2 de [10] généralise le lemme 2.6 de [11].

LEMME 2.2.- *Soit* A *un* D-*anneau à droite qui vérifie la condition* (Min.) *à droite. Si* M *est un* A-*module avec une* TTK-*dimension qui possède un sous-module* TTK-*basique* B, *alors pour tout sous-module* N *de* M *contenant* B *strictement on a :* TTK-dim(B) $\leqslant$ TTK-dim(N/B).

DEMONSTRATION.- Supposons que TTK-dim(N/B) $<$ TTK-dim(B). Alors si N contient un sous-module non nul N' tel que $N' \cap B = 0$ on a TTK-dim(N') $<$ TTK-dim(B) (car N' est isomorphe à un sous-module de N/B), et ceci est impossible d'aprés la proposition 1.9 puisque N' contient un sous-module surcocritique et puisque B est un sous-module TTK-basique; donc B est essentiel dans N et d'aprés le lemme 1.5 le sous-module N est α-TTK-critique avec α = TTK-dim(B) : il y a donc contradiction avec le fait que B est TTK-basique. En conséquence on a TTK-dim(B) $\leqslant$ TTK-dim(N/B).■

La proposition suivante généralise la proposition 2.7 de [11] et est l'analogue du lemme 3.3 de [10].

PROPOSITION 2.3.- *Soit* M *un* A-*module qui possède une* TTK-*dimension. Considérons* B *et* B' *deux sous-modules* TTK-*critiques maximaux de* M *tels que* $B' \cap B = 0$ *et* TTK-dim(B) = TTK-dim(B') = α. *Si* N *est un sous-module de* M *maximal par rapport aux propriétés suivantes :*

(i) $B \oplus B'$ *est essentiel dans* N*;*

(ii) TTK-dim($N/B \oplus B'$) $< \alpha$.

Alors N/B *et* N/B' *sont des sous-modules* α-TTK-*critiques maximaux de* M/B *et* M/B' *respectivement tels que l'on a*

$\chi(N/B) = \chi(B')$ *et* $\chi(N/B') = \chi(B)$.

DEMONSTRATION.- Si K est un sous-module de N tel que $K\cap(B\oplus B') = B$ et $K \neq B$ alors, comme le module quotient K/B est isomorphe à un sous-module de $N/B\oplus B'$, on a $\text{TTK-dim}(K/B) < \alpha$; comme on a $K\cap B' = 0$, il est immédiat de vérifier que K est uniforme et ainsi, d'aprés le lemme 1.5, on obtient que K est un module α-TTK-critique : contradiction avec le fait que B est TTK-critique maximal. Par suite $B\oplus B'/B$ est essentiel dans N/B. Comme B' est isomorphe à $B\oplus B'/B$ il résulte du lemme 1.5 que N/B est un module α-TTK-critique et on a $\chi(N/B)=\chi(B')$.

Soit X/B un sous-module TTK-critique de M/B contenant N/B strictement. Si Y est un sous-module de X tel que $Y\cap(B\oplus B') = 0$ alors on a $(Y+B)\cap(B\oplus B') = B$ et comme $B\oplus B'/B$ est essentiel dans X/B (d'aprés la proposition 1.4) on obtient $(Y+B)/B = 0$ c'est à dire $Y\subset B$; d'où $Y=0$. Par suite $B\oplus B'$ est essentiel dans X et comme on a $\text{TTK-dim}(X/B\oplus B') < \alpha$ (d'aprés la définition de X/B module TTK-critique et d'aprés la proposition 1.3) et N contenu strictement dans X : il y a contradiction avec la maximalité de N par rapport aux propriétés (i) et (ii). Donc N/B est un sous-module α-TTK-critique maximal de M/B et $\chi(N/B) = \chi(B')$.

De même pour N/B' ce qui achève la démonstration.■

La proposition suivante généralise le théorème 2.8 de [11], et elle complète le théorème 2.1.

PROPOSITION 2.4.- *Soit* A *un* D-*anneau à droite qui vérifie la condition* (Min.) *à droite. Considérons* M *un* A-*module qui possède une suite* TTK-*basique. Alors deux suites* TTK-*basiques de* M *sont équivalentes. De plus il n'existe pas de chaîne infinie strictement croissante de sous-modules de* M

$$0 = N_0 < N_1 < \dots < M$$

telle que N_i/N_{i-1} *soit un sous-module* TTK-*basique de* M/N_{i-1} *pour tout* $i=1,\ldots$.

DEMONSTRATION.- Soit n la plus petite longueur de toutes les suites TTK-basiques de M. Démontrons le résultat par récurrence sur n. Si $n = 1$, la proposition est évidente car M est TTK-basique. Soit $n > 1$, et supposons que le résultat est démontré pour tous les modules qui possèdent une suite TTK-basique dont la longueur est strictement inférieure à n.

Considérons $0 = B_0 \subset B_1 \subset \cdots \subset B_n = M$ une suite TTK-basique (B) de M de longueur n.

Alors M/B_1 possède une suite TTK-basique de longueur n-1 et il résulte de l'hypothèse de récurrence que toute suite TTK-basique de M dont le premier terme non nul est B_1 est équivalente à la suite (B).

Soit B' un sous-module TTK-basique quelconque de M tel que $B' \neq B_1$. Comme on a $\text{TTK-dim}(B_1) = \text{TTK-dim}(B')$, posons $\text{TTK-dim}(B') = \alpha$ et notons que α n'est pas un ordinal limite d'aprés la proposition 1.6. Montrons qu'on a $B' \cap B_1 = 0$: si $B' \cap B_1 \neq 0$ alors on a $\text{TTK-dim}((B'+B_1)/B') = \text{TTK-dim}(B_1/(B' \cap B_1)) < \alpha$ et il résulte du lemme 1.5 que B' n'est pas essentiel dans $B'+B_1$; donc il existe un sous-module non nul C de $B'+B_1$ tel que $B' \cap C = 0$ et, comme C est isomorphe à un sous-module de $(B'+B_1)/B'$, on a $\text{TTK-dim}(C) < \alpha$ ce qui d'aprés la proposition 1.9 nous donne une contradiction (car C contient un sous-module surcocritique qui est β-TTK-critique avec $\beta<\alpha$). On a donc $B' \cap B_1 = 0$. Comme α n'est pas un ordinal limite on peut, d'aprés le théorème de Zorn, considérer un sous-module N_2 de M maximal tel que $B' \oplus B_1$ soit essentiel dans N_2 et tel que $\text{TTK-dim}(N_2/B' \oplus B_1) < \alpha$. Ainsi d'aprés la proposition 2.3 et le lemme 2.2 le module quotient N_2/B_1 (resp. N_2/B') est un sous-module TTK-basique de M/B_1 (resp. de M/B')

tel que $\chi(N_2/B_1) = \chi(B')$ (resp. $\chi(N_2/B') = \chi(B_1)$).

Comme $0 \subset B_2/B_1 \subset \ldots \subset B_n/B_1 = M/B_1$ est une suite TTK-basique de M/B_1 de longueur n-1 et comme N_2/B_1 est un sous-module TTK-basique de M/B_1 il résulte de l'hypothèse de récurrence et du raisonnement qui précède qu'il existe une suite TTK-basique de M/B_1 de longueur n-1 de la forme $0 \subset N_2/B_1 \subset N_3/B_1 \subset \ldots \subset N_n/B_1 = M/B_1$ (en effet si $N_2/B_1 = B_2/B_1$ c'est immédiat, et si $N_2/B_1 \neq B_2/B_1$ alors on a d'aprés ce qui précède $(N_2/B_1) \cap (B_2/B_1) = 0$ d'où l'existence de N_3 tel que N_3/B_2 soit un sous-module TTK-basique de M/B_2, et comme M/B_2 a une suite TTK-basique de longueur n-2...).

Ainsi on obtient les suites TTK-basiques équivalentes de M de longueur n :

$$0 \subset B_1 \subset N_2 \subset N_3 \subset \ldots \subset N_n = M \qquad (N)$$

et

$$0 \subset B' \subset N_2 \subset N_3 \subset \ldots \subset N_n = M \qquad (N').$$

(En outre la dernière partie de la proposition résulte de l'hypothèse de récurrence et du fait que M/B' qui possède une suite TTK-basique de longueur n-1 ne possède pas de chaîne infinie strictement croissante...).

Par conséquent si on avait une suite TTK-basique (B') de M autre que (B) avec pour premier terme non nul B' différent de B_1 :

$$0 \subset B' \subset B'_2 \subset B'_3 \subset \ldots \subset B'_m = M \quad ,$$

on obtiendrait en utilisant l'hypothèse de récurrence que m=n, que les suites (N') et (B') sont équivalentes et que les suites (N) et (B) sont équivalentes.

Comme les suites (N) et (N') sont équivalentes on en déduit que les suites (B) et (B') sont aussi équivalentes. Ceci achève la démonstration.■

On obtient l'analogue du théorème 3.1 de [10] :

THEOREME 2.5.- *Soit* A *un anneau noethérien à droite qui vérifie la condition* (Min.) *à droite. Alors tout*

A-*module non nul de type fini* M *possède au moins une suite* TTK-*basique, et deux suites* TTK-*basiques de* M *sont équivalentes*.

DEMONSTRATION.- Cela résulte du théorème 2.1 et de la proposition 2.4.■

REMARQUE.- [11]- Si A est un anneau commutatif dont la dimension de Krull est supérieure ou égale à 1 et si P et Q sont deux idéaux premiers de A tels que P soit strictement contenu dans Q, alors le A-module $M = A/P + A/Q$ possède une suite TTK-basique mais il ne possède pas de $\chi(A/P)$-chaîne au sens de Goldman [8].

Si A est un D-anneau à droite qui vérifie la condition (Min.) à droite et si M est un A-module qui possède une suite TTK-basique $0 = B_0 \subset B_1 \subset \ldots \subset B_n = M$ alors d'aprés la proposition 2.4 la longueur de toutes les suites TTK-basiques de M sont égales et cet entier sera noté $l(TTK(M))$. D'autre part si, pour tout $i=1,\ldots,n$, on pose $\alpha_i = \text{TTK-dim}(B_i/B_{i-1})$ il est immédiat d'aprés la proposition 2.4 et le lemme 1.6 que la séquence $\{ \alpha_i \mid i=1,\ldots,n \}$ est indépendante de la suite TTK-basique utilisée pour la définir. Cette séquence sera appelée la *séquence des* TTK-*dimensions* de M (ceci par analogie avec [10] page 114).

On a les propriétés suivantes dans lesquelles le théorème 2.6 est l'analogue du théorème 3.4 de [10].

THEOREME 2.6.- *Soit* A *un* D-*anneau à droite qui vérifie la condition* (Min.) *à droite et considérons un* A-*module* M *qui possède une suite* TTK-*basique* $0 = B_0 \subset B_1 \subset \ldots \subset B_n = M$. *Alors on a :*

(i) la séquence $\{ \alpha_i \mid i=1,\ldots,n \}$ *des* TTK-*dimensions de* M *est croissante et* TTK-dim(M) *est égal à* α_n *le n-ième terme de cette séquence;*

(ii) une chaîne croissante $0 = B'_0 \subset B'_1 \subset \ldots \subset B'_n = M$ *est une suite* TTK-*basique de* M *si et seulement si, pour tout* $i=1,\ldots,n$, *le module quotient* B'_i/B'_{i-1} *est* TTK-*critique et la séquence* $\{ \text{TTK-dim}(B'_i/B'_{i-1}) \mid i=1,\ldots,n \}$ *est croissante;*

(iii) si M *contient un sous-module* α-TTK-*critique, il existe* $i=1,\ldots,n$ *tel que* $\alpha = \alpha_i$; *si de plus* A *est un anneau dont toutes les localisations à droite sont stables par enveloppes injectives alors un ordinal* α *appartient à la séquence des* TTK-*dimensions de* M *si et seulement si* M *contient un sous-module* α-TTK-*critique*.

DEMONSTRATION.- (i) résulte du lemme 2.2, et $\text{TTK-dim}(M) = \alpha_n$ s'obtient alors avec le lemme 1.1.
(ii) il suffit de démontrer que si $0=B'_0 \subset B'_1 \subset \ldots \subset B'_n = M$ est une chaîne croissante telle que B'_i/B'_{i-1} est TTK-critique pour tout $i=1,\ldots,n$ et telle que la séquence $\{ \text{TTK-dim}(B'_i/B'_{i-1}) \mid i=1,\ldots,n \}$ est croissante alors $0=B'_0 \subset B'_1 \subset \ldots \subset B'_n = M$ est une suite TTK-basique de M. Démontrons-le par induction sur n :
.si $n=1$ c'est trivial.
.si $n>1$, posons $\alpha'_i = \text{TTK-dim}(B'_i/B'_{i-1})$ pour $i=1,\ldots,n$. Par l'hypothèse d'induction, $0 \subset B'_2/B'_1 \subset \ldots \subset B'_n/B'_1$ est une suite TTK-basique de M/B'_1. Si c'est possible considérons B un sous-module β-TTK-critique de M tel que $\beta < \alpha'_1$; alors, d'aprés la proposition 1.3, on a $B \cap B'_1 = 0$ ce qui implique que M/B'_1 contient un sous-module β-TTK-critique : ceci est impossible car B'_2/B'_1 est un sous-module TTK-basique de M/B'_1 et $\beta < \alpha'_1 \leqslant \alpha'_2$. Par suite, avec la proposition 1.9, α'_1 est la plus petite TTK-dimension possible d'un sous-module non nul de M. Donc si B'_1 n'est pas un sous-module TTK-basique de M il existe un sous-module α'_1-TTK-critique C de M qui contient strictement B'_1 : mais cela est impossible car on a $\text{TTK-dim}(C/B'_1) < \alpha'_1 \leqslant \alpha'_2$ et C/B'_1 contiendrait, d'aprés

la proposition 1.9, un sous-module β-TTK-critique avec $\beta<\alpha_2'$ ce qui serait en contradiction avec le fait que B_2'/B_1' est un sous-module TTK-basique de M/B_1'. Donc B_1' est un sous-module TTK-basique de M et $0=B_0'\subset B_1'\subset\ldots\subset B_n'=M$ est une suite TTK-basique de M.

(iii) .Considérons N un sous-module α-TTK-critique de M. Si $\alpha=\alpha_1$, c'est terminé. Sinon on a $\alpha_1<\alpha$ ce qui implique $N\cap B_1=0$ et ainsi M/B_1 contient un sous-module α-TTK-critique. Par suite comme la séquence des TTK-dimensions de M/B_1 est $\{\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$ un raisonnement par induction nous donne $\alpha=\alpha_i$ pour un certain i.

.Si A est un anneau dont toutes les localisations à droite sont stables par enveloppes injectives, il nous reste à montrer que M contient un sous-module α_i-TTK-critique pour tout $i=1,\ldots,n$. Si $n=1$, le résultat est trivial. Si $n>1$, puisque tout sous-module TTK-basique de M est α_1-TTK-critique, considérons un i tel que $\alpha_i>\alpha_1$. Par induction : M/B_1 contient un sous-module N_i/B_1 qui est α_i-TTK-critique; comme on a TTK-dim(B_1) égale à α_1 et $\alpha_i>\alpha_1$, on obtient que B_1 n'est pas essentiel dans N_i (puisque $\delta(U_{\alpha_1})$ est stable par enveloppes injectives) ce qui entraîne l'existence d'un sous-module C_i de N_i tel que $C_i\cap B_1=0$ et par suite C_i est un sous-module α_i-TTK-critique (d'aprés la proposition 1.3) de M. Ceci termine le raisonnement par induction, et le théorème est démontré.■

PROPOSITION 2.7.- *Soit* A *un* D-*anneau à droite qui vérifie la condition* (Min.) *à droite. Considérons un* A-*module* M *qui possède une suite* TTK-*basique de longueur* n *supérieure ou égale à* 2 *et* $\{\alpha_i \mid i=1,\ldots,n\}$ *la séquence des* TTK-*dimensions de* M. *Alors on a :*

(i) si $\alpha_1\neq\alpha_2$, *le module* M *possède un unique sous-module* TTK-*basique;*

(ii) si la séquence des TTK-*dimensions de* M *est*

strictement croissante avec n *termes distincts, le module* M *possède une unique suite* TTK-*basique*.

DEMONSTRATION.- (i) Soient B et B' deux sous-modules TTK-basiques de M. Il vient TTK-dim(B)=TTK-dim(B')=α_1. Si on a B $\neq$ B' alors, comme dans la démonstration de la proposition 2.4, on montre que $B \cap B' = 0$ et qu'il existe un sous-module N de M maximal tel que $B \oplus B'$ soit essentiel dans N et tel que TTK-dim($N/B\oplus B'$) $< \alpha_1$; de plus N/B (resp. N/B') est un sous-module TTK-basique de M/B (resp. de M/B'). Il résulte alors de la proposition 2.3 qu'on a TTK-dim(N/B) = TTK-dim(N/B') = α_1. Par suite si B est le premier terme de la suite TTK-basique de M alors $\{\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$ est la séquence des TTK-dimensions de M/B et on a donc TTK-dim(N/B) = α_2 puisque N/B est un sous-module TTK-basique de M/B. D'où $\alpha_1 = \alpha_2$: contradiction. Donc on a B = B'.

(ii) résulte immédiatement de (i).■

PROPOSITION 2.8.- *Soit* A *un anneau quelconque et considérons un* A-*module* M *qui possède une suite* TTK-*basique* $0 = B_0 \subset B_1 \subset \ldots \subset B_n = M$. *Alors* Ass(M) *est un ensemble fini et on a* $\mathrm{Ass}(M) \subset \{ \chi(B_i/B_{i-1}) \mid i=1,\ldots,n \}$.

DEMONSTRATION.- On a $\mathrm{Ass}(M) \subset \mathrm{Ass}(B_{n-1}) \cup \mathrm{Ass}(M/B_{n-1}) \subset \mathrm{Ass}(B_{n-2}) \cup \mathrm{Ass}(B_{n-1}/B_{n-2}) \cup \mathrm{Ass}(M/B_{n-1}) \subset \ldots$. Comme, d'aprés la proposition 1.4, le module quotient B_i/B_{i-1} est cocritique on a $\mathrm{Ass}(B_i/B_{i-1}) = \{ \chi(B_i/B_{i-1}) \}$. D'où le résultat.■

Nous allons maintenant établir que la notion de suite TTK-basique d'un A-module, où A est un D-anneau à droite qui vérifie la condition (Min.) à droite, est en fait un cas particulier de la notion trés générale de "T-composition series" introduite et étudiée en détail par W.G. Lau dans sa thèse [12].

Soit A un D-anneau à droite qui vérifie la condition

(Min.) à droite et considérons un A-module M qui possède une suite TTK-basique $0 = B_0 \subset B_1 \subset \ldots \subset B_n = M$. Pour tout $i=1,\ldots,n$ posons $\alpha_i = \text{TTK-dim}(B_i/B_{i-1})$ et considérons la séquence des TTK-dimensions $\{ \alpha_i \mid i=1,\ldots,n \}$ qui est en fait formée de m ordinaux distincts $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ tels que $\beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_m$ (d'aprés le théorème 2.6). Désignons par n_j, pour $j=1,\ldots,m$, le nombre de quotients B_i/B_{i-1} de la suite TTK-basique qui sont β_j-TTK-critiques. Posons $\mathcal{F}_j = \delta(U_{\beta_j - 1})$ et $\mathcal{F}_{m+1} = \delta(U_{\beta_m})$.

PROPOSITION 2.9.- *Soit* A *un* D-*anneau à droite qui vérifie la condition* (Min.) *à droite et considérons un* A-*module* M *qui possède une suite* TTK-*basique* $0 = B_0 \subset B_1 \subset \ldots \subset B_n = M$. *Alors, avec les notations ci-dessus, on a :*

$$\mathcal{F}_1(M) = 0 \text{ et } \mathcal{F}_{j+1}(M) = B_{n_1+n_2+\ldots+n_j} \text{ pour } j=1,\ldots,m.$$

DEMONSTRATION.- Posons $s = 0$ pour $\mathcal{F}_{j+1} = \mathcal{F}_1$ et $s = n_1+n_2+\ldots+n_j$ pour $j=1,\ldots,m$.

.D'aprés la proposition 1.7 et le théorème 2.6, pour $i=s+1,\ldots,n$, le module quotient B_i/B_{i-1} est sans $\mathcal{F}_{j+1}$-torsion. Comme on a les suites exactes :

$$0 \to B_{s+1}/B_s \to B_{s+2}/B_s \to B_{s+2}/B_{s+1} \to 0$$

$$0 \to B_{s+2}/B_s \to B_{s+3}/B_s \to B_{s+3}/B_{s+2} \to 0$$

$$\vdots$$

$$0 \to B_{n-1}/B_s \to M/B_s \to M/B_{n-1} \to 0$$

on déduit de la première que B_{s+2}/B_s est sans $\mathcal{F}_{j+1}$-torsion d'où l'on déduit avec la seconde suite exacte que B_{s+3}/B_s est aussi sans $\mathcal{F}_{j+1}$-torsion,... . Ainsi on obtient que le module M/B_s est sans $\mathcal{F}_{j+1}$-torsion.

.Pour $\mathcal{F}_{j+1} = \mathcal{F}_1$ on a $s = 0$ et ainsi on a bien $\mathcal{F}_1(M) = 0$.

.Pour $j = 1$ on a $s = n_1$, et comme on a $\mathcal{F}_2(B_s) = B_s$

(car TTK-dim(B_s) = β_1 d'aprés le lemme 1.1 et $\beta_1 < \beta_2$), on obtient, d'aprés la proposition 1.3 de [7] et d'aprés le premier point, le résultat $\mathscr{F}_2(M) = B_{n_1}$.

Donc par induction, pour j=1,...,m-1, on obtient le résultat général $\mathscr{F}_{j+1}(M) = B_{n_1+...+n_j}$.

.On a $\mathscr{F}_{m+1}(M) = M$ car d'aprés le théorème 2.6 on a $\beta_m = \alpha_n$ = TTK-dim(M).■

Il est à noter que cette proposition 2.9 précise l'assertion (ii) de la proposition 2.7.

Sous les hypothèses et notations précédentes, nous poserons $\mathscr{K}(M) = \{ \mathscr{F}_j \mid j=1,...,m+1 \}$ et nous appellerons $\mathscr{K}(M)$ *la* TTK-*séquence des filtres localisants (à droite) de* M. Alors :

PROPOSITION 2.10.- *Soit* A *un* D-*anneau à droite qui vérifie la condition* (Min.) *à droite et considérons un* A-*module* M *qui possède une suite* TTK-*basique* $0 = B_0 \subset B_1 \subset ... \subset B_n = M$. *Alors la* TTK-*séquence* $\mathscr{K}(M)$ *des filtres localisants de* M *est une "torsion theory sequence for* M*" au sens de* Lau [12] *(page 17), et la suite* TTK-*basique de* M *est une "*T-*composition series of* M*" au sens de* Lau [12] *(page 22).*

DEMONSTRATION.- Comme on a $\mathscr{F}_1 < \mathscr{F}_2 < ... < \mathscr{F}_{m+1}$ car $\beta_1 < \beta_2 < ... < \beta_m$ et comme, d'aprés la proposition 2.9, on a $0 = \mathscr{F}_1(M) < \mathscr{F}_2(M) <....< \mathscr{F}_{m+1}(M) = M$ la première partie de la proposition est démontrée. Pour tout i=1,...,n il existe j=1,...,m tel que $\alpha_i = \beta_j$ ce qui donne $n_1+...+n_{j-1} < i \leqslant n_1+...+n_j$; par suite B_i/B_{i-1} est un module β_j-TTK-critique et on a, d'aprés la proposition 2.9, $\mathscr{F}_j(M) < B_i \leqslant \mathscr{F}_{j+1}(M)$ ce qui nous donne, avec les notations du corollaire 2.2 de [12], $t_{B_i} = \mathscr{F}_j$. En conséquence, d'aprés la proposition 1.7, le module quotient B_i/B_{i-1} est $\mathscr{F}_j$-cocritique c'est à dire t_{B_i}-cocritique. La deuxième partie de la proposition résulte donc du corollaire 2.2 de [12].■

Le lien précis avec [12] étant établi, le lecteur pourra donc se reporter à [12] pour obtenir des résultats complémentaires sur les suites TTK-basiques d'un module (par exemple la proposition 2.4 qui concerne les suites TTK-basiques d'un sous-module d'un module possédant une suite TTK-basique; le corollaire 2.5 qui complète (iii) de notre théorème 2.6;...).

Soient A un D-anneau à droite qui vérifie la condition (Min.) à droite et M un A-module qui possède une suite TTK-basique. Si $\mathscr{K}(M)$ est la TTK-séquence des filtres localisants de M, considérons comme W.G. Lau à la page 73 de [12], pour $\mathscr{F}\in\mathscr{K}(M)$, le sous-module $K_{\mathscr{F}}(M)$ qui est l'intersection de tous les sous-modules N de M tels que le module quotient M/N soit $\mathscr{F}$-cocritique, et posons

$$K_{\mathscr{K}}(M) = \cap \{ K_{\mathscr{F}}(M) \mid \mathscr{F}\in\mathscr{K}(M) \} .$$

Alors nous appellerons $K_{\mathscr{K}}(M)$ le TTK-*radical de* M. Si le TTK-radical de M est nul, nous dirons que M est un A-*module* TTK-*semiprimitif*. (Voir le chapitre 5 de [12] pour plus de détails sur ces notions).

En particulier si M = A, alors, d'aprés le corollaire 5.12 de [12], le TTK-radical à droite $K_{\mathscr{K}}(A)$ de A (c'est à dire le TTK-radical du A-module à droite A) est l'idéal bilatère de A constitué de tous les éléments de A qui annulent tous les A-modules (cycliques) $\mathscr{F}$-cocritiques où $\mathscr{F}$ parcourt $\mathscr{K}(A)$. Il vient :

THEOREME 2.11.- *Si* A *est un anneau noethérien à droite qui vérifie la condition* (Min.) *à droite, alors le* TTK-*radical à droite de* A *est un idéal bilatère nilpotent.*

DEMONSTRATION.- D'aprés les théorèmes 2.1 ou 2.5, considérons $0 = I_0 \subset I_1 \subset \ldots \subset I_n = A$ une suite TTK-basique du A-module à droite A et $\mathscr{K}(A)$ la TTK-séquence des filtres localisants de A. D'aprés la proposition 1.7, pour tout $i=1,\ldots,n$ le module quotient I_i/I_{i-1} est un A-module $\mathscr{F}$-cocritique pour un certain $\mathscr{F}\in\mathscr{K}(A)$. Donc, d'aprés le corollaire 5.12 de [12] cité précédemment, on obtient $I_i K_{\mathscr{K}}(A) \subset I_{i-1}$ pour tout $i=1,\ldots,n$. Il en résulte qu'on a $K_{\mathscr{K}}(A)^n = 0$.■

COROLLAIRE 2.12.- *Si* A *est un anneau premier noethérien à droite qui vérifie la condition* (Min.) *à droite, alors* A *est un anneau* TTK-*semiprimitif à droite (c'est à dire le* TTK-*radical à droite de* A *est nul).*

DEMONSTRATION.- Résulte immédiatement du théorème 2.11.■

COROLLAIRE 2.13.- *Si* A *est un anneau premier noethérien à droite qui vérifie la condition* (Min.) *à droite, alors* A *est un produit sous-direct d'anneaux* $K_{\mathscr{K}}(A)$-*primitifs (c'est à dire d'anneaux* R *tels qu'il existe un* R-*module fidèle et* $\mathscr{F}$-*cocritique pour* $\mathscr{F}\in\mathscr{K}(A)$*).*

DEMONSTRATION.- C'est une conséquence du corollaire 5.9 de [12] et du corollaire 2.12.■

Pour des exemples d'anneaux noethériens qui vérifient la condition (Min.) ou même des conditions plus fortes voir [19], [21], [22], [6], [24], [14].

III. MODULES TTK-LISSES ET SUITE DES TTK-SOCLES.

Soient A un anneau quelconque et α un ordinal.

Par analogie avec [10], nous dirons qu'un A-*module* M est α-TTK-*lisse* si tout ordinal de la séquence des TTK-dimensions de tout sous-module non nul de type fini de M possédant une suite TTK-basique est α. (Si A est un anneau noethérien à droite qui vérifie la condition (Min.) à droite alors α n'est pas un ordinal limite d'aprés les résultats du paragraphe 1). On dira qu'un

A-*module* est TTK-*lisse* s'il est α-TTK-lisse pour un ordinal α.

Les deux résultats qui suivent sont l'analogue du théorème 3.5 de [10] :

PROPOSITION 3.1.- *Soit* A *un* D-*anneau à droite qui vérifie la condition* (Min.) *à droite et considérons un* A-*module non nul de type fini* M *qui possède une suite* TTK-*basique. Alors* M *est un* A-*module* α-TTK-*lisse si et seulement si chaque terme de la séquence des* TTK-*dimensions de* M *est égal à* α.

DEMONSTRATION.- D'aprés la proposition 2.10 et d'aprés [12] (page 26), la séquence des TTK-dimensions d'un sous-module non nul de M est un sous-ensemble de la séquence des TTK-dimensions de M. D'où le résultat.■

PROPOSITION 3.2.- *Si* A *est un* D-*anneau à droite dont toutes les localisations à droite sont stables par enveloppes injectives, alors un* A-*module* E *extension essentielle d'un* A-*module* α-TTK-*lisse* M *est un* A-*module* α-TTK-*lisse*.

DEMONSTRATION.- Considérons N un sous-module non nul de type fini de E possédant une suite TTK-basique. Alors $N\cap M$ est un A-module non nul α-TTK-lisse. Comme $N\cap M$ est essentiel dans N, on déduit de (iii) du théorème 2.6 que tout ordinal de la séquence des TTK-dimensions de N est α. Donc E est α-TTK-lisse.■

Soient A un anneau et α un ordinal.

Désignons par $\mathscr{F}^{\alpha}$ le filtre localisant de A associé à la sous-catégorie localisante de Mod A engendrée par les A-modules β-TTK-critiques avec $\beta<\alpha$; c'est à dire $\mathscr{F}^{\alpha}$ est la borne supérieure des filtres localisants $\xi(M)$ de A où M parcourt les A-modules β-TTK-critiques avec $\beta<\alpha$.

Pour un A-module M désignons par $S^{\alpha}(M)$ la somme de tous les sous-modules α-TTK-critiques de M; on pose $S^{\alpha}(M) = 0$ si M ne contient pas de sous-module α-TTK-critique.

De manière analogue à [10], nous définissons la *suite* $(K_n^{\alpha}(M))$ *des* α-TTK-*socles d'un* A-*module* M par induction comme suit :

. $K_0^{\alpha}(M) = \mathscr{F}^{\alpha}(M)$;

. $K_{n+1}^{\alpha}(M)/K_n^{\alpha}(M)$ est la $\mathscr{F}^{\alpha}$-fermeture de $S^{\alpha}(M/K_n^{\alpha}(M))$ dans le module $M/K_n^{\alpha}(M)$, pour tout entier n.

On a donc $K_0^{\alpha}(M) \subset K_1^{\alpha}(M) \subset \ldots \subset K_n^{\alpha}(M) \subset \ldots \subset M$.

Il est à noter que si A est un D-anneau à droite qui vérifie la condition (Min.) à droite et si α n'est pas un ordinal limite alors on a en fait $\mathscr{F}^{\alpha} = \delta(U_{\alpha-1})$: en effet il est immédiat qu'on a $\mathscr{F}^{\alpha} \leqslant \delta(U_{\alpha-1})$ et comme, d'aprés le théorème 3.5 de [22] (ou théorème 2.5.4 de [21], ou théorème 3.4 de [19]), tout filtre localisant de A est caractérisé par les idéaux surcritiques qui lui appartiennent il résulte de la proposition 1.9 qu'on a $\delta(U_{\alpha-1}) \leqslant \mathscr{F}^{\alpha}$; d'où l'égalité $\mathscr{F}^{\alpha} = \delta(U_{\alpha-1})$.

Le lemme suivant est l'analogue du lemme 4.1 de [10].

LEMME 3.4.- *Soient* A *un* D-*anneau à droite qui vérifie la condition* (Min.) *à droite et* α *un ordinal qui possède un prédécesseur. Si* M *est un* A-*module tel que* $K_0^{\alpha}(M) = 0$ *alors, pour tout sous-module* N *de* M, *on a* $K_1^{\alpha}(N) = N \cap K_1^{\alpha}(M)$.

DEMONSTRATION.- Analogue à celle du lemme 4.1 de [10]. En effet :

. si $K_1^{\alpha}(M) = M$; considérons L un sous-module complément de N dans M (donc $L \cap N = 0$ et $L \oplus N$ est essentiel dans M) et soit K un sous-module α-TTK-critique de $L \oplus N$. Si K n'est contenu ni dans L ni dans N alors, comme on a $K_0^{\alpha}(M) = 0$, il est immédiat que les images de K par les projections canoniques de $L\oplus N$ sur L et sur N sont des modules α-TTK-critiques. Par suite on a $S^{\alpha}(L\oplus N) = S^{\alpha}(L)\oplus S^{\alpha}(N)$.

Soit V un sous-module α-TTK-critique de M. Alors on a $V\cap(L\oplus N) \neq 0$ et $V\cap(L\oplus N)$ est un module α-TTK-critique d'aprés la proposition 1.3; par suite on a $0 \neq V\cap(L\oplus N) = V\cap S^{\alpha}(L\oplus N)$. Donc le module quotient $(V+S^{\alpha}(L\oplus N))/S^{\alpha}(L\oplus N)$ a une TTK-dimension strictement inférieure à α et est de $\delta(U_{\alpha-1})$-torsion. Il en résulte que le module quotient $S^{\alpha}(M)/S^{\alpha}(L\oplus N)$ est de $\delta(U_{\alpha-1})$-torsion. Comme le module $M/S^{\alpha}(M)$ est de $\delta(U_{\alpha-1})$-torsion (puisque $M = K_1^{\alpha}(M)$) on en déduit que le module $M/S^{\alpha}(L\oplus N)$ est aussi de $\delta(U_{\alpha-1})$-torsion ce qui implique que son sous-module $(L\oplus N)/S^{\alpha}(L\oplus N)$ est de $\delta(U_{\alpha-1})$-torsion. Comme on a $S^{\alpha}(L\oplus N) = S^{\alpha}(L)\oplus S^{\alpha}(N)$ et comme les modules $(L\oplus N)/S^{\alpha}(L\oplus N)$ et $(L/S^{\alpha}(L))\oplus(N/S^{\alpha}(N))$ sont isomorphes on obtient que $N/S^{\alpha}(N)$ est un module de $\delta(U_{\alpha-1})$-torsion ce qui nous donne $N = K_1^{\alpha}(N)$.

.si $K_1^{\alpha}(N) = N$, alors $N/S^{\alpha}(N)$ est de $\delta(U_{\alpha-1})$-torsion et, comme on a $S^{\alpha}(N) \subset N\cap S^{\alpha}(M)$, on obtient que $(N+S^{\alpha}(M))/S^{\alpha}(M)$, qui est isomorphe à $N/N\cap S^{\alpha}(M)$, est de $\delta(U_{\alpha-1})$-torsion ce qui donne $N \subset K_1^{\alpha}(M)$.

.venons-en à la démonstration du lemme : il est clair qu'on a $S^{\alpha}(N) \subset N\cap K_1^{\alpha}(M)$. De plus $N\cap K_1^{\alpha}(M)$ est $\delta(U_{\alpha-1})$-fermé dans N puisque $N/N\cap K_1^{\alpha}(M)$ est isomorphe à un sous-module du module sans $\delta(U_{\alpha-1})$-torsion $M/K_1^{\alpha}(M)$. Par suite on a $K_1^{\alpha}(N) \subset N\cap K_1^{\alpha}(M)$. Réciproquement comme on a $K_1^{\alpha}(K_1^{\alpha}(M)) = K_1^{\alpha}(M)$ on déduit du premier point qu'on a $K_1^{\alpha}(N\cap K_1^{\alpha}(M)) = N\cap K_1^{\alpha}(M)$, et d'aprés le deuxième point il vient $N\cap K_1^{\alpha}(M) \subset K_1^{\alpha}(N)$. D'où le résultat.■

La proposition suivante est l'analogue de la proposition 4.2 de [10].

PROPOSITION 3.5.- *Soient* A *un* D-*anneau à droite qui* *vérifie la condition* (Min.) *à droite et* α *un ordinal qui possède un prédécesseur. Alors, pour tout sous-module* N *d'un* A-*module* M *et pour tout entier naturel* n, *on a :* $K_n^\alpha(N) = N \cap K_n^\alpha(M)$.

DEMONSTRATION.- Analogue à celle de la proposition 4.2 de [10] : en effet si $n = 0$ le résultat est trivial ; supposons $n > 0$ et supposons qu'on a $K_{n-1}^\alpha(N) = N \cap K_{n-1}^\alpha(M)$. Considérons la surjection canonique p qui applique M sur $M/K_{n-1}^\alpha(M)$. Alors on a $K_0^\alpha(p(M)) = 0$ et $p(N) = N/K_{n-1}^\alpha(N)$. Par suite il vient en utilisant le lemme 3.4 :

$$\begin{aligned} p(K_n^\alpha(N)) &= K_n^\alpha(N)/K_{n-1}^\alpha(N) = K_1^\alpha(N/K_{n-1}^\alpha(N)) = K_1^\alpha(p(N)) \\ &= p(N) \cap K_1^\alpha(p(M)) = p(N) \cap p(K_n^\alpha(M)) \\ &= p[(N+K_{n-1}^\alpha(M)) \cap K_n^\alpha(M)] = p(N \cap K_n^\alpha(M)) \ . \end{aligned}$$

Par suite on obtient le résultat.■

PROPOSITION 3.6.- *Soient* A *un anneau noethérien à droite qui vérifie la condition* (Min.) *à droite et* α *un ordinal qui possède un prédécesseur. Alors, si* M *est un* A-*module* α-TTK-*lisse, on a* $K_0^\alpha(M) = 0$ *et* $M = \cup_{n \geqslant 0} K_n^\alpha(M)$.

DEMONSTRATION.- En effet si N est un sous-module non nul de type fini de M alors, d'aprés le théorème 2.5, il existe une suite TTK-basique de N et la séquence des TTK-dimensions de N est réduite à un élément α. On a $K_0^\alpha(N) = 0$ (d'aprés la proposition 2.9) et TTK-dim(N)=α (d'aprés le théorème 2.6). Puisque N vérifie la condition de chaîne ascendante il existe $n > 0$ tel que $K_n^\alpha(N) = K_{n+1}^\alpha(N) = \ldots$. Si l'on considère le module quotient $N/K_n^\alpha(N)$: il ne peut contenir de module β-TTK-critique avec $\beta<\alpha$ car $K_n^\alpha(N)$ est $\delta(U_{\alpha-1})$-fermé dans N; il ne peut contenir de module α-TTK-critique car on a $K_n^\alpha(N) = K_{n+1}^\alpha(N)$ et il ne peut contenir de module γ-TTK-critique avec $\gamma>\alpha$ puisqu'on a TTK-dim(N) = α. Donc on a nécessairement $N = K_n^\alpha(N)$ (avec les hypothèses et la proposition 1.9). D'aprés la proposition 3.5 il vient $N \subset K_n^\alpha(M)$. Par suite on a $K_0^\alpha(M) = 0$ et $M = \cup_{n\geqslant 0} K_n^\alpha(M)$.■

Le résultat suivant est l'analogue du théorème 4.3 de [10].

THEOREME 3.7.- *Soient* A *un anneau noethérien à droite dont toutes les localisations à droite sont stables par enveloppes injectives et* α *un ordinal qui possède un prédécesseur. Alors un* A*-module* M *est* α-TTK*-lisse si et seulement si on a* $K_0^\alpha(M) = 0$ *et* $M = \cup_{n\geqslant 0} K_n^\alpha(M)$.

DEMONSTRATION.- Supposons qu'on a $K_0^\alpha(M) = 0$ et $M = \cup_{n\geqslant 0} K_n^\alpha(M)$. Si L est un sous-module non nul de type fini de M qui est β-TTK-critique on a $\beta \geqslant \alpha$ et il existe un entier n tel que $L \subset K_n^\alpha(M)$. D'aprés la proposition 3.5 on a donc $L = K_n^\alpha(L)$ et ainsi L possède un sous-module α-TTK-critique ce qui, d'aprés la proposition 1.3, implique qu'on a $\beta = \alpha$. D'aprés les théorèmes 2.5 et 2.6 on en déduit que M est un module α-TTK-lisse. La réciproque nous est donnée par la proposition 3.6.■

IV. MODULES INJECTIFS INDECOMPOSABLES.

PROPOSITION 4.1.- *Soit* A *un anneau noethérien à droite qui vérifie la condition* (R) *à droite. Si* E *est un* A*-module injectif indécomposable et si* M *est le sous-module atomique de* E *associé au filtre localisant premier* $\chi(E)$ *(voir* [26]*) alors on a* $K_0^\alpha(E) = 0$ *et* $K_1^\alpha(E) = M$ *où* α = TTK-dim(M).

DEMONSTRATION.- M le plus grand sous-module cocritique de E est surcocritique (à cause de la condition (R) à droite) et donc, d'aprés la proposition 1.9, le module M est α-TTK-critique. Avec la proposition 1.4 on obtient donc $S^\alpha(E) = M$. D'aprés la proposition 18.2 de [3] le module M est égal à son propre localisé par rapport au filtre localisant $\chi(M) = \chi(E)$ et donc le module quotient E/M est sans $\chi(M)$-torsion ce qui implique que E/M est sans $\delta(U_{\alpha-1})$-torsion puisque, d'aprés le corollaire 1.10 le module M étant $\delta(U_{\alpha-1})$-cocritique, on a $\delta(U_{\alpha-1}) \leqslant \chi(M)$. Comme on a $K_0^{\alpha}(E) = 0$, car $\delta(U_{\alpha-1}) \leqslant \chi(E)$, on en déduit le résultat $M = K_1^{\alpha}(E)$.■

PROPOSITION 4.2.- *Soit* A *un anneau noethérien à droite dont toutes les localisations à droite sont stables par enveloppes injectives. Si* E *est un* A-*module injectif indécomposable et si* α = TTK-dim(E) *alors* E *est un* A-*module* α-TTK-*lisse et on a* $K_0^{\alpha}(E) = 0$ *et* $E = \cup_{n\geqslant 0} K_n^{\alpha}(E)$.

DEMONSTRATION.- Si N est un sous-module non nul de E on a évidemment TTK-dim(N) = TTK-dim(E) (d'aprés le lemme 1.1 et d'aprés l'hypothèse que toute localisation est stable par enveloppes injectives). Si M est le sous-module atomique de E associé à $\chi(E)$ alors on a vu, dans la démonstration de la proposition 4.1, que M est α-TTK-critique et donc que M est α-TTK-lisse. Ainsi, d'aprés la proposition 3.2, le module E est α-TTK-lisse et, d'aprés la proposition 3.6, on a les relations $K_0^{\alpha}(E) = 0$ et $E = \cup_{n\geqslant 0} K_n^{\alpha}(E)$.■

Cette proposition 4.2 est l'analogue d'une partie du théorème 5.3 de [10].

Le résultat suivant donne une structure des modules injectifs indécomposables analogue à un résultat de [13] (cf. le théorème 3.4 de [13]) relatif aux modules injectifs indécomposables sur un anneau commutatif noethérien. Ce résultat est plus précis et plus complet que le théorème 3.1 de [11] dont on s'est en partie inspiré.

THEOREME 4.3.- *Soit* A *un anneau noethérien à droite dont toutes les localisations à droite sont stables par enveloppes injectives. Considérons* E *un* A-*module injectif indécomposable tel que le filtre localisant premier*

$\chi(E)$ soit exact. Posons $\mathscr{P} = \chi(E)$ et α = TTK-dim(E). Alors la suite des α-TTK-socles de E

$$0 = K_0^\alpha(E) < K_1^\alpha(E) \leqslant \ldots \leqslant K_n^\alpha(E) \leqslant \ldots \leqslant E$$

est une chaîne unique de sous-modules $\mathscr{P}$-injectifs de E *telle que l'on a les propriétés suivantes :*

(i) le module quotient de deux termes successifs de la suite $K_{i+1}^\alpha(E)/K_i^\alpha(E)$, pour tout $i \geqslant 0$, est une somme directe maximale de A*-modules $\mathscr{P}$-injectifs indécomposables $\mathscr{P}$-cocritiques, et ce module quotient est un* A*-module classiquement coprimaire $\mathscr{P}$-injectif.*

(ii) pour tout $i \geqslant 0$, le A*-module $E/K_i^\alpha(E)$ est sans $\mathscr{P}$-torsion.*

(iii) $E = \cup_{n\geqslant 0} K_n^\alpha(E)$.

DEMONSTRATION.- Si N est un A-module, nous désignerons par $E_{\mathscr{P}}(N)$ l'enveloppe $\mathscr{P}$-injective de N. Nous allons donner d'abord le procédé général de construction de la chaîne et montrer à la fin qu'on obtient en fait la suite des α-TTK-socles de E.

1) On a vu dans la démonstration de la proposition 4.1 que si M est le sous-module atomique de E associé à $\chi(E)$ alors M est α-TTK-critique et on a $\delta(U_{\alpha-1}) \leqslant \chi(E)$.

Donc si N est un A-module $\chi(E)$-cocritique, N est isomorphe à un sous-module de M (cf. [26]) et ainsi N est α-TTK-critique (d'aprés la proposition 1.3).

2) Considérons E' un sous-module propre de E tel que E/E' soit un module sans $\chi(E)$-torsion.

.Si V/E' est un sous-module cocritique de E/E' alors V/E' est un module $\chi(E)$-cocritique : en effet V/E' est un module surcocritique et, comme on a $\mathrm{Hom}(V,V/E') \neq 0$, on obtient avec le théorème 2 de [15] qu'on a $\chi(E) \leqslant \chi(E/E') \leqslant \chi(V/E') \leqslant \chi(V) = \chi(E)$ ce qui implique que V/E' est $\chi(E)$-cocritique.

Comme $\chi(E)$ est exact et comme E', V et V/E' sont des modules sans $\chi(E)$-torsion, on déduit de la suite exacte

$0 \to E' \to V \to V/E' \to 0$ qu'on a $E_{\mathcal{P}}(V/E') = E_{\mathcal{P}}(V)/E'$ et ainsi avec la proposition 18.2 de [3] on obtient que $E_{\mathcal{P}}(V/E')$ est un sous-module de E/E' qui est $\chi(E)$-cocritique et $\chi(E)$-injectif.

.Considérons E'' le sous-module de E tel que E''/E' soit une somme directe maximale de sous-modules $\chi(E)$-cocritiques et $\chi(E)$-injectifs de E/E'. D'aprés la proposition 21.1 de [3] on a $\mathrm{Ass}(E''/E') = \{ \chi(E) \}$ et donc E''/E' est un A-module classiquement coprimaire d'aprés le théorème 4.14 et la proposition 4.7 de [22] (ou théo-rème 2.5 et proposition 2.2 de [20], ou propositions 2.7.16 et 2.7.7 de [21]). De plus E''/E' est un module $\chi(E)$-injectif d'aprés le théorème 4.4 de [7].

Le module E/E'' est sans $\chi(E)$-torsion et le module E'' est $\chi(E)$-injectif : en effet si on pose $\mathcal{P}(E/E'') = F/E''$ on déduit de la suite exacte
$0 \to E''/E' \to F/E' \to F/E'' \to 0$ et de la proposition 3.4 de [7] qu'on a $E'' = F$; comme E/E'' est sans $\chi(E)$-torsion, la suite exacte $0 \to E'' \to E \to E/E'' \to 0$ et la proposition 3.3 de [7] entraînent que E'' est $\chi(E)$-injectif.

Tout sous-module $\chi(E)$-cocritique U/E' de E/E' est contenu dans E''/E' : en effet d'aprés la maximalité de E''/E' on a $(U/E')\cap(E''/E') \neq 0$ ce qui implique qu'il existe un sous-module $\chi(E)$-cocritique et $\chi(E)$-injectif V/E' de E''/E' tel que $(U/E')\cap(V/E') \neq 0$ ce qui entraîne qu'on a $V/E' = E_{\mathcal{P}}(V/E') = E_{\mathcal{P}}[(V/E')\cap(U/E')] = E_{\mathcal{P}}(U/E')$ d'où l'on déduit $U/E' \leqslant E_{\mathcal{P}}(U/E') = V/E' \leqslant E''/E'$. Cette dernière propriété montre l'unicité de E''.

.D'aprés la proposition 1.4 et d'aprés le premier point de 2), tout sous-module α-TTK-critique de E/E' est $\chi(E)$-cocritique et est donc d'aprés ce qui précède un sous-module de E''/E'; comme E''/E' est une somme directe de sous-modules $\chi(E)$-cocritiques de E/E' qui sont α-TTK-critiques d'aprés 1), on obtient $S^{\alpha}(E/E') = E''/E'$.

On a $\delta(U_{\alpha-1}) \leqslant \chi(E)$ (voir 1)). Comme on a supposé que E/E' est sans $\chi(E)$-torsion et comme on a démontré que E/E'' est sans $\chi(E)$-torsion, on obtient $K_1^\alpha(E/E') = E''/E'$.

3) Démontrons le théorème :

D'aprés les propositions 4.1 et 4.2 on a $K_0^\alpha(E) = 0$, $E = \bigcup_{n\geqslant 0} K_n^\alpha(E)$ et $K_1^\alpha(E)$ est le sous-module atomique de E associé à $\chi(E)$.

Il est immédiat qu'on a $K_1^\alpha(E/K_i^\alpha(E)) = K_{i+1}^\alpha(E)/K_i^\alpha(E)$.

Comme on a vu dans la démonstration de la proposition 4.1 que $E/K_1^\alpha(E)$ est un module sans $\chi(E)$-torsion, on obtient d'aprés 2) le module $K_2^\alpha(E)$ car $K_1^\alpha(E/K_1^\alpha(E)) = K_2^\alpha(E)/K_1^\alpha(E)$, et d'aprés 2) le module quotient $E/K_2^\alpha(E)$ est sans $\chi(E)$-torsion..... . Ainsi par induction on obtient la suite des α-TTK-socles de E qui vérifie les assertions du théorème.■

Dans le résultat précédant si on localise par rapport au filtre localisant premier $\mathscr{P}$ les termes de la suite des α-TTK-socles du A-module injectif indécomposable E alors il est immédiat que ces termes sont invariants et donnent ainsi les termes de la suite des socles du $A_{\mathscr{P}}$-module injectif indécomposable E.

Notons pour terminer que l'on a donné pages 172 et 173 de [6] des exemples d'anneaux noethériens à droite dont toutes les localisations à droite sont stables par enveloppes injectives et dont toutes les localisations premières sont exactes.

REFERENCES

[1] P. Gabriel, *Des catégories abéliennes*. Bull. Soc. Math. France, 90, (1962), 323-448.

[2] J.S. Golan, *A Krull-like dimension for noncommutative rings*. Israël J. Math., 19, (1974), 297-304.

[3] J.S. Golan, *Localization of noncommutative rings*.

Marcel Dekker, New-York, 1975.

[4] J.S. Golan, *Structure sheaves over a noncommutative ring*. Lecture notes in Pure and Applied Math., 56, Marcel Dekker, New-York, 1980.

[5] J.S. Golan et J. Raynaud, *Dimension de Gabriel et TTK-dimension de modules*. C. R. Acad. Sci. Paris, série A, 278, (1974), 1603-1606.

[6] J.S. Golan and J. Raynaud, *Derived functors of the torsion functor and local cohomology of noncommutative rings*. J. Austral. Math. Soc., (series A), 35, (1983), 162-177.

[7] O. Goldman, *Rings and modules of quotients*. J. Algebra, 13, (1969), 10-47.

[8] O. Goldman, *Elements of noncommutative arithmetic I*. J. Algebra, 35, (1975), 308-341.

[9] R. Gordon and J.C. Robson, *Krull Dimension*. Memoir Amer. Math. Soc., 133, (1973).

[10] A.V. Jategaonkar, *Jacobson's conjecture and modules over fully bounded noetherian rings*. J. Algebra, 30, (1974), 103-121.

[11] N.S. Khatib and S. Singh, *A generalization of torsion theories on commutative noetherian rings*. Preprint 1981.

[12] W.G. Lau, *Torsion theoretic generalizations of semisimple modules*. Ph. D. Thesis, University of Wisconsin-Milwaukee, 1980.

[13] E. Matlis, *Injective modules over noetherian rings*. Pacific J. Math., 8, (1958), 511-528.

[14] G. Maury et J. Raynaud, *Ordres maximaux au sens de K. Asano*. Lecture notes in Math., 808, Springer

Verlag, Berlin, 1980.

[15] Z. Papp, *Semi-stability and topologies on R-sp.*. Comm. Algebra, 4, (1976), 793-809.

[16] J. Raynaud, *Localisations stables à droite et anneaux semi-noethériens à droite*. C. R. Acad. Sci. Paris, série A, 275, (1972), 13-16.

[17] J. Raynaud, *Localisations et anneaux semi-noethériens à droite*. Publ. Dép. Math. (Lyon), 8, 3-4, (1971), 77-112.

[18] J. Raynaud, *Quelques propriétés des localisations*. Comm. Algebra, 2, (1974), 261-277.

[19] J. Raynaud, *Localisations et topologie de Stone*. C. R. Acad. Sci. Paris, série A, 282, (1976), 1335 -1338.

[20] J. Raynaud, *Localisations stables par enveloppes injectives*. C. R. Acad. Sci. Paris, série A, 282, (1976), 1407-1410.

[21] J. Raynaud, *Localisations et spectres d'anneaux*. Thèse de Doctorat d'Etat ès Sciences, Université Claude Bernard - Lyon I, N°76-40, (21 septembre 1976).

[22] J. Raynaud, *Localisations premières et copremières. Localisations stables par enveloppes injectives*. in Ring Theory : Proc. of the 1977 Antwerp Conference (ed. by F. Van Oystaeyen), Lecture notes in Pure and Applied Math., 40, Marcel Dekker, New-York, (1978), pages 81-111.

[23] J. Raynaud, *Profondeur, hauteur et localisations*. C. R. Acad. Sci. Paris, sér. I, 295, (1982), 39-42.

[24] J. Raynaud, *Profondeur, hauteur et localisations en algèbre non commutative*. J. Pure Appl. Algebra,

à paraître en 1984.

[25] B. Stenstrom, *Rings of Quotients*. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 217, Springer Verlag, Berlin, 1975.

[26] H. Storrer, *On Goldman's primary decomposition*. In Lecture notes in Math., 246, Springer Verlag, Berlin, 1972.