E. COMBET

2- I Inégalités faibles de Morse

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1984, fascicule 3B
« Séminaire de géométrie », , p. 21-32
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1984___3B_A3_0>

I

INEGALITES FAIBLES DE MORSE

On commence par rappeler les formules de calcul sur une variété riemannienne compacte (M,g) de dimension n (section A) ; ensuite on applique ces formules aux perturbations du laplacien provoquées par la donnée d'une fonction $h \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ (section B) et, suivant E. Witten, on en déduit les inégalités faibles de Morse (section C).

A. RAPPELS DE CALCUL RIEMANNIEN.

Pour simplifier on supposera que M est orientée.

On note $\Lambda^p T^*(M)$ le fibré vectoriel des p-formes alternées sur M, avec $0 \leqslant p \leqslant n$. On considère aussi les p-formes complexes $\Lambda^p T^*(M) \otimes \mathbb{C}$. On note ω la n-forme volume riemannien sur M :

$$\omega_x = e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$$

où $(e_1,\ldots,e_n)$ est une base quelconque orthonormée directe de $T_x^*(M)$.

Le produit scalaire défini par g sur $T(M)$ et $T^*(M)$ s'étend aux fibrés $\Lambda^p T^*(M) \otimes \mathbb{C}$ en posant :

$$(v_1 \wedge \ldots \wedge v_p, w_1 \wedge \ldots \wedge w_p) = \sum_\pi \varepsilon(\pi)(v_1,w_{\pi(1)})\ldots(v_p,w_{\pi(p)})$$

où la somme porte sur toutes les permutations π de la suite $(1,\ldots,p)$.

On en déduit un isomorphisme

$$* : \Lambda^p\, T_x^*(M) \otimes \mathbb{C} \simeq \Lambda^{n-p}\, T_x^*(M) \otimes \mathbb{C}$$

tel que l'on ait, pour λ et $\mu \in \Lambda^p\, T_x^*(M) \otimes \mathbb{C}$:

$$\lambda\Lambda(*\mu) = (\lambda,\mu)\omega_x$$

Sur le fibré $\Lambda^p T^*(M) \otimes \mathbb{C}$ on a :

$$** = (-1)^{p(n-p)} \quad .$$

On note $\langle\ ,\ \rangle$ le produit hermitien naturel sur les sections $C^\infty(\Lambda^p T^*(M) \otimes \mathbb{C})$:

$$\langle\phi,\psi\rangle = \int_M (\phi,\psi)_x \omega_x \quad .$$

On note $d : C^{\infty}(\Lambda^{p}T^{*}(M) \otimes \mathbb{C}) \to C^{\infty}(\Lambda^{p+1}T^{*}(M) \otimes \mathbb{C})$ la dérivation extérieure et d^{*} l'opération adjointe pour le produit hermitien précédent.

Pour ϕ de degré p-1, ψ de degré p on obtient, d'après la formule de Stokes :

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_M d(\phi \wedge(*\psi)) \\
&= \int_M d\phi \wedge(*\psi) + (-1)^{p-1} \int_M \phi \wedge d(*\psi) \\
&= \langle d\phi,\psi\rangle + (-1)^{(p-1)}(-1)^{(n-p+1)(p-1)} \int_M \phi \wedge ** \, d(*\psi) \\
&= \langle d\phi,\psi\rangle - \langle \phi,(-1)^{(p-1)(n-p+1)} * d *(-1)^{p}\psi \rangle ,
\end{aligned}
$$

ce qui montre que :

$$d_p^{*} = (-1)^{(p-1)(n-p+1)} * d *(-1)^{p}.$$

Etant donnée $v \in T_x^{*}(M)$ on définit le produit intérieur :

$$i_v : \Lambda^{p}T_x^{*}(M) \to \Lambda^{p-1}T_x^{*}(M)$$

en posant :

$$i_v(e_1 \wedge \dots \wedge e_p) = \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j+1} (v,e_j)e_1 \wedge \dots \wedge \hat{e}_j \wedge \dots \wedge e_p.$$

Pour λ de degré p-1 et μ de degré p, on obtient (en utilisant une base orthonormée) :

$$(v \wedge \lambda,\mu) = (\lambda,i_v(\mu))$$

d'où l'on déduit, pour des sections ϕ et ψ :

(1) $\quad \langle v \wedge \phi,\psi\rangle = \langle \phi,i_v(\psi)\rangle$;

enfin, pour $f \in C^{\infty}(M)$ réelle on a :

$$
\begin{aligned}
\langle \phi,d^{*}(f\psi)\rangle &= \langle d\phi,f\psi\rangle \\
&= \langle fd\phi,\psi\rangle \\
&= \langle d(f\phi),\psi\rangle - \langle df \wedge \phi,\psi\rangle \\
&= \langle \phi,fd^{*}\psi\rangle - \langle \phi,i_{df}\psi\rangle
\end{aligned}
$$

et ainsi :

(2) $\quad d^{*}(f\psi) = fd^{*}\psi - i_{df}\,\psi.$

Nous utiliserons aussi dans la section suivante des formules à indices bien connues en géométrie riemannienne [10] . Etant donné le tenseur covariant χ de rang p, sa dérivée covariante $\nabla\chi$ est le tenseur covariant de rang p+1 de composantes :

$$(\nabla_i \chi)_{i_1 \dots i_p} = \partial_i \, \chi_{i_1 \dots i_p} - \sum_{\nu=1}^{p} \Gamma^{\alpha}_{i_\nu i} \; \chi_{i_1 \dots i_{\nu-1} \, \alpha \, i_{\nu+1} \dots i_p}$$

où les Γ^{α}_{ji} sont les symboles de Christoffel dans le système de coordonnées utilisées (ou bien dans le champ de co-repères considérés) :

$$\Gamma^{\alpha}_{ji} = \frac{1}{2} \, g^{\alpha\beta} \, (\partial_i \, g_{\beta j} + \partial_j \, g_{\beta i} - \partial_\beta \, g_{ji}),$$

les sommations étant effectuées sur les indices répétés.

Pour une p-forme alternée χ l'usage de la dérivation covariante ∇ permet d'exprimer $d\chi$ et $d^*\chi$ et l'on a en particulier :

(3) $$(d^*\chi)_{k_1 \dots k_{p-1}} = - (\nabla^i \chi)_{i k_1 \dots k_{p-1}} \, .$$

B. PERTURBATION DU LAPLACIEN.

(M,g) est une variété riemannienne compacte.

On considère sur M la fonction $h \in C^\infty(M,\mathbb{R})$.

On définit

$$d_t = e^{-ht} \, d \, e^{ht} \quad , \quad d_t^* = e^{ht} \, d^* \, e^{-ht}$$

On a immédiatement :

$$d_t^2 = (d_t^*)^2 = 0$$

$$\langle d_t\phi, \psi\rangle = \langle e^{-ht} \, d \, e^{ht} \, \phi, \psi\rangle = \langle \phi, e^{ht} \, d^* \, e^{-ht} \, \psi\rangle$$

donc d_t^* est l'adjoint de d_t.

On a aussi la formule :

(4) $$\begin{aligned} d_t\phi &= e^{-ht} d(e^{ht}\phi) \\ &= e^{-ht}(d(e^{ht}) \wedge \phi + e^{ht} d\phi) \\ &= t \, dh \wedge \phi + d\phi \end{aligned}$$

On considère enfin le laplacien perturbé :

$$H_t = d_t\, d_t^* + d_t^*\, d_t.$$

En notant d_t^p la restriction de d_t à $C^\infty(\Lambda^p T^*(M) \otimes \mathbb{C})$ on peut définir le nombre de Betti :

$$B_p(t) = \dim\, (\mathrm{Ker}\, d_t^p \,/\, \mathrm{Im}\, d_t^{p-1})\ ;$$

mais l'application : $\psi \to e^{-th}$ définit un isomorphisme :

$$\mathrm{Ker}\, d^p \Big/ \mathrm{Im}\, d^{p-1} \simeq \ker d_t^p \Big/ \mathrm{Im}\, d_t^{p-1}$$

et l'on a :

$$\dim \mathrm{Ker}\, H_t^p = B_p(t) = B_p = \dim \mathrm{Ker}\, H^p$$

où H^p est le laplacien sur les p-formes.

Nous allons maintenant effectuer le calcul effectif de H_t afin d'obtenir la formule de E. Witten.

On déduit de (^{1}) et de (^{4}) :

$$d_t^*\psi = t\, i_{dh}\, \psi + d^*\, \psi.$$

Pour une q-forme χ on obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
d_t^* d_t \chi &= t\, i_{dh}(t\, dh \wedge \chi + d\chi) + d^*(t\, dh \wedge \chi + d\chi) \\
&= d^* d\chi + t^2 i_{dh}(dh \wedge \chi) + t(i_{dh}\, d\chi + d^*(dh \wedge \chi)), \\
d_t d_t^* \chi &= t\, dh \wedge (t\, i_{dh} \quad + d^*\chi) + d(t\, i_{dh}\, \chi + d^*\chi) \\
&= dd^*\chi + t^2\, dh \wedge (i_{dh}\chi) + t(dh \wedge d^*\chi + d(i_{dh}\chi)), \\
H_t \chi &= H\chi + t^2[i_{dh}(dh \wedge \chi) + dh \wedge (i_{dh}\chi)] \\
&\quad + t[i_{dh} d\chi + d(i_{dh}\chi) + d^*(dh \wedge \chi) + dh \wedge d^*\chi].
\end{aligned}$$

On a, par définition des produits intérieur et extérieur :

$$i_{dh}(dh \wedge \chi) = i_{dh}(dh))\chi = dh \wedge (i_{dh}(\chi)),$$

donc :

$$i_{dh}(dh \wedge \chi) + dh \wedge (i_{dh}\chi) = (dh)^2\, \chi$$

où l'on pose

$$(dh)_x^2 = (dh_x, dh_x).$$

Il reste maintenant à calculer

$$P_{dh}(\chi) = i_{dh}(d\,\chi) + d(i_{dh}\,\chi) + d^*(dh \wedge \chi) + dh \wedge d^*\,\chi.$$

Pour $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$, compte tenu de (^{2}).

$$\begin{aligned}
P_{dh}(f\chi) &= i_{dh}(df \wedge \chi + f\,d\chi) + df \wedge i_{dh}\,\chi + f\,d(i_{dh}\,\chi) \\
&\quad + f\,d^*(dh \wedge \chi) - i_{df}\,(dh \wedge \chi) + f\,dh \wedge d^*\chi - dh \wedge i_{df}\,\chi \\
&= (dh,df)\chi - df \wedge i_{dh}\chi + f\,i_{dh}\,d\chi + df \wedge i_{dh}\chi + f\,d(i_{dh}\chi) \\
&\quad + f\,d^*(dh \wedge \chi) - (df,dh)\chi + dh \wedge i_{df}\,\chi = f\,dh \wedge d^*\chi - dh \wedge i_{df}\,\chi. \\
&= f\,[i_{dh}(d\chi) + d(i_{dh}\,\chi) + d^*(dh \wedge \chi) + dh \wedge d^*\chi\,] \\
&= f\,P_{dh}(\chi).
\end{aligned}$$

Ceci montre que P_{dh} est un opérateur différentiel d'ordre zéro sur les fibrés de formes. Il suffit d'évaluer $P_{dh}\,(dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^p)$ dans un système de coordonnées quelconques.

On prend, au voisinage d'un point fixé x_0 de M un système de coordonnées normales géodésiques. On a dans ces coordonnées :

$$g_{ij}(x_0) = \delta_{ij}$$

$$\Gamma^i_{k\ell}(x_0) = 0$$

$$d(g^{ij})(x_0) = 0$$

$$d^*(dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^q)(x_0) = 0$$

$$\nabla_i\,\nabla_j\,h(x_0) = \partial_i\,\partial_j\,h(x_0) \text{ etc.}$$

Il vient ainsi, au point x_0 :

$$P_{dh}(dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^p) = d(i_{dh}(dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^p) + d^*(dh \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^p)$$

$$= \sum_k \left[d\left(\frac{\partial h}{\partial x^k}\; i_{dx^k}(dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^p)\right) + d^*\left(\frac{\partial h}{\partial x^k}\; dx^k \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^p\right) \right]$$

$$= \sum_{k,} \frac{\partial^2 h}{\partial x^k \partial x^\ell}\; dx^\ell \wedge i_{dh^k}(dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^p) + \sum_k \frac{\partial h}{\partial x^k}\; d(i_{dx^k}(dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^p))$$

$$+ \sum_k \frac{\partial h}{\partial x^k}\, d^*(dx^k \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^p) - i_{\sum \frac{\partial^2 h}{\partial x^\ell \partial x^k} dx^\ell}(dx^k \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^p).$$

Dans cette dernière expression, les 2-ème et 3-ème termes sont nuls au point x_0 et l'on obtient :

$$P_{dh}(dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^p) = \sum_{k,\ell} \frac{\partial^2 h}{\partial x^\ell \partial x^k} (dx^\ell \wedge i_{dx^k} - i_{dx^k} dx^\ell \wedge)(dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^p).$$

On trouve de cette façon la formule donnée par E. Witten [12] dans un champ de co-repères orthonormés $(\theta^1, \ldots, \theta^n)$.

On pose :

$$a^k \psi = i_{\theta^k} \psi$$

$$a^{k*} \psi = \theta^k \wedge \psi \; ;$$

alors il vient :

$$P_{dh}(\chi) = \sum_{i,j} \nabla_i \nabla_j h \, [a^{i*}, a^j] \, (\chi)$$

En conclusion, nous obtenons :

$$H_t \chi = H\chi + t^2 (dh)^2 \chi + t \sum_{i,j} \nabla_i \nabla_j h \, [a^{i*}, a^j] \, (\chi).$$

C. INEGALITES FAIBLES DE MORSE.

(a) Le spectre du laplacien perturbé :

Ayant considéré une fonction $h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, nous avons introduit le laplacien perturbé

$$H_t = d_t \, d_t^* + d_t^* \, d_t$$

où :

$$d_t = e^{-th} \, d \, e^{th} \; ;$$

nous avons vu que

$$\dim \operatorname{Ker} H_t^p = \dim \operatorname{Ker} H^p$$

c'est-à-dire :

$B_p(t) = B_p$ (le p-ème nombre de Betti de M)

(nous avons posé ici :

$H \equiv H_0 = dd^* + d^*d$).

Nous avons aussi montré dans la section précédente qu'en un point x de M on a :

(6) $$H_t = dd^* + d^*d + t^2(dh)^2 + \sum_{i,j} t\, \nabla_i\nabla_j\, h\, [a^{i*}, a^j]$$

où $a^k\psi = i_{\theta^k}\psi$, $a^{k*}\psi = \theta^k \wedge \psi$, $(\theta^1,\ldots,\theta^n)$ étant un co-repère orthonormé en x.

On note $L^2(\Lambda T^*M \otimes \mathbb{C})$ l'espace de Hilbert obtenu en complétant $C^\infty(\ T^*M \otimes \mathbb{C})$ pour le produit pré-hilbertien $\langle , \rangle$ de la section A ci-dessus.

La restriction H_t^p de H_t à $\Lambda^p\, T^*M \otimes \mathbb{C}$ est alors un opérateur différentiel elliptique admettant un spectre discret :

$$0 \leqslant \lambda_p^1\,(t) \leqslant \lambda_p^2(t) \leqslant \lambda_p^3\,(t) \leqslant \ldots$$

D'après l'égalité (5) il s'agit de calculer le nombre de valeurs propres $\lambda_p^k(t)$ égales à 0 : ce nombre est égal à B_p ; il est indépendant de t.

Nous allons effectuer ce calcul sous l'hypothèse que h est une fonction de Morse sur M.

HYPOTHESE :

Dans toute la suite on suppose que $h \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ est une fonction de Morse non dégénérée sur M c'est-à-dire que $dh = 0$ en un nombre fini de points et en chacun de ces points critiques, le hessien $(\nabla_i\nabla_j h)$ est non-dégénéré. On note $M_p(h)$, ou M_p, le nombre de points critiques de h dont l'indice de Morse est égal à p (cet indice est le nombre de valeurs propres négatives du hessien ∇dh, pour $p = 0,1,\ldots,n$).

Le calcul de B_p est effectué dans la suite à l'aide de deux résultats inspirés du rappel (i) concernant l'effet tunnel donné plus haut dans l'introduction.

Ces résultats peuvent se résumer de la façon suivante :

1°) Soit $\lambda_p^k(t)$ la k-ième valeur propre de H_p^t . Alors $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\lambda_p^k(t)}{t}$ existe.

2°) Cette limite A_p^k est l'une des valeurs propres des approximations euclidiennes de H_t^p au voisinage des points critiques de h.

Nous allons préciser ces énoncés en donnant des références précises.

(b) : Analyse asymptotique du spectre :

On trouve les résultats (1°) et (2°) dans les articles [9] , [11].

On peut aussi les obtenir par la méthode d'encadrement utilisée en [8] pour un problème analogue de localisation de l'indice d'un opérateur elliptique.

Citons ici le th. 1.1 de [11] (nous le simplifions légèrement) :

<< On considère sur $\mathbb{R}^n$ l'opérateur $H(t) = -\Delta + t^2 f + tg$ où Δ est le laplacien scalaire, f et g sont C^∞ , g est bornée inférieurement, $f \geqslant 0$, $f(x) \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$, f a un nombre fini de zéros, $\{x^{(a)}\}_{1 \leqslant a \leqslant k}$ en chacun desquels la matrice

$$A_{ij}^{(a)} \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (x^{(a)})$$

est strictement définie-positive. On pose :

$$K^a = -\Delta + tg(x^{(a)}) + t^2 \sum_{i,j} A_{ij}^a x_i x_j$$

Soient $te_1 \leqslant te_2 \leqslant te_3 \leqslant \ldots$ l'ensemble ré-ordonné des valeurs propres des opérateurs K^a pour $a = 1,\ldots,k$ (on voit que t est en facteur dans toutes ces valeurs propres en faisant le changement de variables $x \to xt^{-1/2}$).

Alors pour chaque entier $k > 0$, si l'on note $E^k(t)$ la k-ième valeur propre de H(t) on a :

$$\lim_{t \to +\infty} E^k(t)/t = e_k.$$

On a donc ramené le calcul de $\lim \frac{E^k(t)}{t}$ à une approximation euclidienne de H(t) autour d'un point critique de f>>.

Ce théorème est démontré en [11] par des méthodes relativement élémentaires.

Il est étendu dans cet article [11] aux laplaciens sur les formes d'une variété riemannienne compacte. C'est sous cette forme qu'il sera utilisé ici.

(c) Cas du laplacien sur les formes :

On reprend ici la fonction de Morse h sur M.

Soit 0 un point critique de h. Alors on peut choisir un système de coordonnées normales géodésiques en 0 où l'on a :

$$h(x) = h(0) + \frac{1}{2} \Sigma \lambda_i (x^i)^2 + 0(\|x\|^3).$$

On a une approximation euclidienne de H_t en 0 à l'aide de l'opérateur $\bar{H}_t$ défini sur les formes de $\mathbf{R}^n$ de la façon suivante :

$$\bar{H}_t = \sum_i H_i + t \sum_j \lambda_j K_j$$

$$H_i = - \frac{\partial^2}{(\partial x_i)^2} + t^2 \lambda_i^2 (x^i)^2$$

$$K_j = [a^{j*}, a^j] = \theta^j \wedge i_{\theta^j} - i_{\theta^j} \theta^j \wedge \quad .$$

Chaque H_i peut être considéré comme l'hamiltonien de l'oscillateur harmonique sur $\mathbf{R}$. Ses valeurs propres sont égales à

$$t \, |\lambda_i| \, (1+2N_i)$$

$N_i = 0,1,2,\ldots,$. Soit ϕ_{N_i} la fonction propre correspondante, alors $t\,|\lambda_i|\,(1+2N_i)$ est aussi valeur propre de H_i sur $L^2(\Lambda^p T^* \mathbf{R}^n \otimes \mathbb{C})$ avec la fonction propre $\phi_{N_i}(x_i)\,\chi$ où $\chi \in \Lambda^p T^* \mathbf{R}^n$ est une p-forme quelconque.

Puisque K_j est un opérateur d'ordre zéro sur les champs de p-formes, il suffit de le considérer sur l'espace vectoriel $\Lambda^p T^* \mathbf{R}^n$. Cet espace admet la base naturelle $(\theta^{i_1} \wedge \ldots \wedge \theta^{i_p})_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n}$.

On calcule $K_j(\theta^{i_1} \wedge \ldots \wedge \theta^{i_p})$ suivant deux cas :

<u>1er cas</u> : j figure dans la suite $i_1,\ldots,i_p$: $\theta^{i_1} \wedge \ldots \wedge \theta^{i_p} = \theta^j \wedge \phi$, on obtient dans ces conditions :

$$K_j(\theta^{i_1} \wedge \ldots \wedge \theta^{i_p}) = \theta^j \wedge i_{\theta^j} (\theta^j \wedge \phi) = \theta^j \wedge \phi = \theta^{i_1} \wedge \ldots \wedge \theta^{i_p} \quad .$$

<u>2ème cas</u> : j ne figure pas dans cette suite :

$$K_j(\theta^{i_1} \wedge \ldots \wedge \theta^{i_p}) = - i_{\theta^j} (\theta^j \wedge \theta^{i_1} \wedge \ldots \wedge \theta^{i_p})$$
$$= - \theta^{i_1} \wedge \ldots \wedge \theta^{i_p} \; .$$

On voit ainsi que les opérateurs K_j se diagonalisent simultanément sur les vecteurs de base avec les valeurs propres $\pm$ 1.

Ainsi on a, au point critique 0 de h sur M :

$$\overline{H}_t = \sum_i H_i + t \sum_j \lambda_j K_j$$

où les opérateurs H_i, K_j commutent deux à deux. Leurs formes propres peuvent s'écrire

$$\phi(x)\, \theta^{i_1} \wedge \ldots \wedge \theta^{i_p}$$

où $\phi(x) = \phi(x^i)$ pour H_i et $\phi(x) = 1$ pour K_j et où $(\theta^{i_1} \wedge \ldots \wedge \theta^{i_p})_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n}$ est une base de $\Lambda^p T^* \mathbb{R}^n$.

On déduit de ceci que les formes propres de $\overline{H}_t$ sont égales à :

$$\phi_{N_1}(x^1) \ldots \phi_{N_n}(x^n)\, \theta^{i_1} \wedge \ldots \wedge \theta^{i_p}$$

et que les valeurs propres de $\overline{H}_t$ sont égales à

$$t \sum_{i=1}^{n} \left(|\lambda_i| (1+2N_i) + \lambda_i n_i \right)$$

avec $N_i = 0, 1, 2, \ldots$ et avec $n_i = \pm 1$, le nombre de n_i égaux à + 1 étant, lui, égal à p (on considère dant tout cela la restriction de $\overline{H}_t$ à $L^2(\Lambda^p T^* \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{C})$).

(d) Les inégalités faibles de Morse :

D'après le "principe de localisation" rappelé en (b), on obtient pour l'une quelconque des valeurs propres $\lambda_p^k(t)$ de H_t^p le fait que la limite A_p^k de $\frac{\lambda_p^k(t)}{t}$ existe quand $t \to +\infty$ et est égale à l'un des nombres précédents :

$$\sum_{i=1}^{n} \left(|\lambda_i| (1+2N_i) \right) + \lambda_i n_i \qquad (7)$$

où $N_i \in \mathbb{N}$ et $n_i = \pm 1$ (le nombre de n_i égaux à + 1 étant égal à p).

D'autre part si $\lambda_p^k(t) = 0$ on a évidemment $A_p^k = 0$ donc d'après le rappel (a), le nombre de Betti B_p de M est inférieur ou égal au nombre d'expressions (7) qui sont nulles. Mais l'expression (7) est nulle si et seulement si :

. $N_i = 0$,

. Chacun des n_i qui égale 1 correspond à un $\lambda_i < 0$; Comme il a p de ces n_i dans l'expression (7), ceci donne un point critique d'indice de Morse égal à p. On a donc

$$\boxed{B_p(M) < M_p(h)}$$

Conclusion : cette inégalité faible de Morse est une conséquence du fait qù'il y a augmentation asymptotique des états d'énergie nulle du laplacien sur les p-formes quand ce laplacien est perturbé par un potentiel déduit d'une fonction de Morse.

On peut dire aussi que le nombre de Betti B_p de M est une borne inférieure pour le nombre "d'états classiques" d'énergie nulle ($(dh)^2 = 0$), d'indice de M sur p, dans le potentiel $t^2(dh)^2$. Une caractéristique globale de M (le nombre de Betti) exerce ainsi une contrainte sur des propriétés locales de h.

******

BIBLIOGRAPHIE.

[8] E. COMBET, *Perturbations singulières et formules de localisation.* CRAS (série I) 297 (1983) 59-61.

[9] B. HELFFER, J. SJÖSTRAND, *Puits multiples pour l'équation de Schrödinger,* Saint-Jean- de Monts juin 1983.

[10] A. LICHNEROWICZ, *Théorie globale des connexions.* Dunod 1955.

[11] B. SIMON, *Semi-classical of low lying eigenvalues,* Annales IHP. (A) vol. XXXVIII, 1983 , 295-307.

[12] E. WITTEN, *voir l'introduction, réf.* [6] .

******