PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

E. COMBET

2 Inégalités de Morse d'après E. Witten

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1984, fascicule 3B
« Séminaire de géométrie », , p. 15-20
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1984___3B_A2_0>

© Université de Lyon, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

2

INEGALITES DE MORSE

d'après E. WITTEN

Exposés de E. COMBET

(3-10-17 novembre 1983)

INTRODUCTION.

Ces exposés sont consacrés à l'étude d'une partie d'un article de E. Witten [6] . Il s'agit de donner une interprétation "physique" des inégalités de Morse. Une approche analogue des formules géométriques se trouve aussi dans un article récent de L. Alvarez-Gaumé [1].

Ce qui est nouveau dans ces articles c'est le type de formules considérées : inégalités de Morse, formule de Lefschetz, formule de Gauss-Bonnet, théorème de l'indice de Atiyah-Singer etc.

La méthode consiste à trouver un effet quantique qui représente la formule donnée, et permet de la "redémontrer".

Ceci donne les correspondances suivantes :

Effet quantique		Formule géométrique
Limite quasi-classique de l'effet tunnel en présence de supersymétries	———>	Inégalités de Morse [6]
Invariant supersymétrique de Witten		
- avec champ magnétique	———>	Formule de Lefschetz [1] [7]
- aux grandes températures	———>	Théorème de l'indice [1]

On utilise donc essentiellement dans cette méthode la théorie quantique des champs supersymétriques.

On voit apparaître ainsi deux aspects physiques fondamentaux des formules considérées :

(1) une théorie supersymétrique qui traduit le fait que le système se partage en bosons et fermions qui se distinguent à l'aide de l'opérateur de Witten $(-1)^F$. Il se trouve que la trace de cet opérateur est un invariant topologique du système qui ne dépend que des états de base (c'est-à-dire d'énergie nulle) [7] .

(2) un calcul de perturbation par rapport à un petit paramètre (la constante h, une constante de couplage, l'inverse d'une "température" etc.) Ce calcul fait apparaître un fait physique caractéristique des milieux stochastiques : la diffusion s'agglutine avec une grande probabilité autour des diverses singularités du système : les "configurations constantes", les "états classiques d'énergie nulle", les "instantons" qui joignent ces états etc. [4].

Par exemple en théorie quantique supersymétrique on a l'égalité :

$$\mathrm{Tr}(-1)^F = \mathrm{Tr}(-1)^F \, e^{-\beta H}$$

où H est l'hmiltonien et β l'inverse de la "température". Le membre de gauche est un invariant topologique : le membre de droite, calculé quand $\beta \to 0$ fait apparaître les singularités géométriques de H. On conçoit que cela puisse conduire au théorème de l'indice. Le but est atteint moyennant l'usage de divers "théorèmes" de physique mathématique concernant :

(a) les propriétés asymptotiques du spectre d'un opérateur perturbé,
(b) l'analyse des instantons,
(c) l'analyse des instantons en présence de supersymétries.

A propos de certains de ces "théorèmes" on peut se poser des problèmes de formalisation mathématique.

Dans le contexte physique considéré ici la démarche la plus naturelle pour établir ces résultats consiste à utiliser l'intégration fonctionnelle qui traduit "automatiquement" le processus de quantification considéré. On obtiendra ainsi, dans les cas les plus simples, les phénomènes de concentration décrits plus haut. Cependant sous son aspect général utilisé en quantification des champs de jauge l'intégration fonctionnelle est elle-même en cours (rapide) de formalisation et, comme nous l'avons annoncé, nous nous bornerons ici aux inégalités de Morse d'après Witten.

Les inégalités de Morse sont liées à l'effet tunnel en mécanique quantique.

Rappelons rapidement en quoi consiste cet effet.

On considère une particule de masse m soumise à un force F qui dérive d'une fonction potentielle V indépendante du temps :

$$F = - \operatorname{grad} V.$$

L'hamiltonien de ce système est l'opérateur

$$H = - \frac{h^2}{2m} \Delta + V$$

où Δ est le laplacien usuel

$$\Delta = \frac{\partial^2}{(\partial x_1)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial x_2)^2} + \dots$$

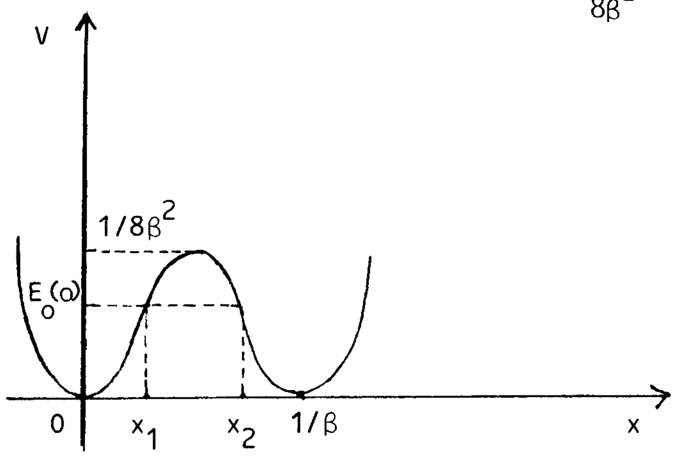
Les états quantiques fondamentaux du système sont les solutions de l'équation de Schrödinger réduite :

$$H\psi = E\psi \quad , \; E \in \mathbb{R}$$

Si l'on suppose que $V \in C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, $V \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}^n$ et que $V(x) \to +\infty$ quand $\| x \| \to +\infty$ alors H admet un spectre discret pur et la première valeur propre E_0 est non-dégénérée positive ([5], Th. XIII...)

Le cas classique est donné pour n=1, par l'oscillateur harmonique où l'on prend $V(x) = x^2$.

On obtient l'effet tunnel en prenant par exemple $V(x) = x^2(1 - \beta x)^2$ qui se réduit à l'oscillateur harmonique pour $\beta = o$. Il y a dans ce cas deux puits de potentiel $x = o$, $x = \frac{1}{\beta}$ qui sont séparés par la barrière de potentiel $\frac{1}{8\beta^2}$.



On note $E_0(\beta)$ la première valeur propre de $H(\beta) = -\frac{h^2}{2m}\Delta + x^2(1-\beta x)^2$; elle est simple et la fonction propre associée peut être choisie strictement positive pour tout x (la particule a une probabilité non nulle de traverser la barrière $1/8\beta^2$). Les calculs sont effectués asymptotiquement quand $\beta \to 0^+$. On obtient alors les caractéristiques de l'effet tunnel :

(i) il y a dégénérescence asymptotique de l'énergie de base (c'est-à-dire que le calcul asymptotique donne une valeur propre minimale double (voir par exemple [5] , XII. 3, exemple 6) ; ce point correspond à un dédoublement asymptotique de l'oscillateur harmonique aux points 0 et $\frac{1}{\beta}$.

(ii) les deux premières valeurs propres $E_0(\beta)$, $E_1(\beta)$ tendent vers $E_0(0)$ et $E_0(\beta) - E_1(\beta)$ est de l'ordre

$$\exp\left(- c \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{x^2(1-\beta x)^2 - E_0(0)}\, dx\right) \quad ([2])$$

(ceci correspond à un calcul "d'instantons" c'est-à-dire un calcul qui fait intervenir la droite joignant les points où $x^2(1-\beta x)^2$ traverse $E_0(0)$).

Un calcul aussi classique d'effet tunnel concerne les premières valeurs propres de l'opérateur

$$H = -\frac{h^2}{2m}\Delta + (1-x^2)^2$$

considéré asymptotiquement quand $h \to 0$ (c'est ce qu'on appelle le calcul asymptotique quasi-classique). On retrouve dans ce cas les deux caractéristiques (i) (ii) rappelées ci-dessus, avec un effet instanton du type

$$\exp\left(- c \int_{-1}^{+1} \sqrt{(1-x^2)^2}\, dx\right)$$

où c est une constante numérique ([3] §5). On trouvera dans l'article [4] une analyse physique assez générale de ce type d'effet.

Ce sont ces divers problèmes que nous allons considérer dans ces exposés à travers les inégalités de Morse en nous plaçant au point de vue de la formalisation mathématique. Le plan suivi est celui de E. Witten [6] :

I. Calculs riemanniens et perturbation du laplacien par une fonction de Morse $h \in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$. Analyse asymptotique du laplacien perturbé, "augmentation asymptotique" des états de base et inégalités faibles de Morse : $B_p(M) < M_p(h)$.

II. Introduction au calcul des instantons dans $\mathbb{R}^n$. Le petit modèle cohomologique associé aux inégalités fortes de Morse. Calcul des matrices de ce petit modèle (instantons).

On s'est efforcé de rendre aussi rigoureuses que possible ces nouvelles preuves des inégalités de Morse. Nous verrons que ceci est possible pour la partie I de ces exposés. Malheureusement des lacunes subsistent dans la partie II et nous les signalerons soigneusement car nous n'avons pas toujours réussi à les combler.

La bibliographie est signalée à la fin de cette introduction et de chaque partie.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] L. ALVAREZ-GAUME, *Supersymmetry and the Atiyah-Singer Index theorem,* Commun. Math. Phys. 90, 161-173 (1983).

[2] E.M. HARREL, *On the rate of Asymptotic Eigenvalue Degeneracy,* Commun. Math. Phys. 60, 73-95 (1978).

[3] G. JONA-LASINIO, F. MARTINELLI and E. SCOPPOLA, *New approach to the semi-classical limit of quantum mechanics I.* Commun. Math. Phys. 80, 223-254 (1981).

[4] R. JACKIW, *Quantum meaning of classical field theory,* Rev. of Mod. Physics 49, 681-705 (1977).

[5] M. REED / B. SIMON, *Analysis of operators IV,* Academic Press 1978.

[6] E. WITTEN, *Supersymmetry and Morse theory.* J. Differential Geometry 17 (1982) 661-692.

[7] E. WITTEN, *Constraints on supersymmetry breaking,* Nuclear Physics, B 202 253-316 (1982).