

HENRI BUCHWALTER

DIAN JIÉ CHEN

**Une question d'extremum dans le problème des moments de Stieltjes  
issue d'une inégalité logarithmique de Weisser**

*Publications du Département de Mathématiques de Lyon*, 1984, fascicule 2A  
« Une question d'extremum dans le problème des moments de Stieltjes issue d'une inégalité logarithmique de Weisser », , p. 1-25

[http://www.numdam.org/item?id=PDML\\_1984\\_\\_2A\\_A1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PDML_1984__2A_A1_0)

© Université de Lyon, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**UNE QUESTION D'EXTREMUM DANS LE PROBLEME DES  
MOMENTS DE STIELTJES ISSUE D'UNE  
INEGALITE LOGARITHMIQUE DE WEISSLER**

\*

**BUCHWALTER Henri et CHEN Dian Jié (\*)**

On donne ici une légère amélioration technique dans la preuve d'une inégalité de Weisler sur le cercle, ce qui fait apparaître un problème général d'extrémum tronqué portant sur des mesures de Stieltjes.

**1. INTRODUCTION.**

Soit  $dv = \frac{d\theta}{2\pi}$  la probabilité de Haar sur le cercle unité  $U = \{z, |z| = 1\}$ . Pour démontrer que les estimations hypercontractives de Nelson conviennent au semi-groupe de Poisson et au semi-groupe de la chaleur sur  $U$ , WEISSLER [3] a tout d'abord prouvé l'inégalité de Sobolev suivante

$$(1) \quad \int f^2 \text{Log } f \, dv < \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n| |a_n|^2 + \|f\|_2^2 \text{Log} \|f\|_2$$

pour une fonction  $f \in L^2(v)$  telle que  $f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{in\theta} > 0$ . Cette inégalité de Sobolev a été améliorée dans le même article sous la forme suivante, que nous nommerons inégalité de Weisler dans la suite :

---

(\*) Travail effectué lors d'un séjour à l'Université LYON I, du 1er octobre 1982 au 30 juin 1983.

$$(2) \quad \int f^2 \text{Log } f \, dv < \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n |a_n|^2 + \|f\|_2^2 \text{Log} \|f\|_2$$

sous les mêmes hypothèses sur  $f$ , où les coefficients  $\beta_n$  sont définis par

$$\beta_{-n} = \beta_n, \quad \beta_0 = 0, \quad \beta_1 = 1, \quad \beta_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \quad \text{si } n \geq 2.$$

La méthode utilisée par Weissler est très indirecte. Sans la reprendre dès son début rappelons qu'elle se ramène à prouver l'inégalité  $G(r) \geq 0$  pour  $0 < r < 1$ , où la fonction  $G$  est définie par

$$(3) \quad \frac{1}{2} G(r) = \sum_{\ell=2}^{\infty} (\beta_{\ell}-1) |a_{\ell}|^2 r^{2\ell} + \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n (n-3)! \int \frac{x_r^n}{n!} \, dv$$

avec  $x_r(\theta) = \sum_{m \neq 0} a_m r^{|m|} e^{im\theta}$  et  $a_{-m} = \bar{a}_m$ . On a supposé ici

$\beta_{-n} = \beta_n$ ,  $\beta_0 = 0$  et  $\beta_1 = 1$  et la question intéressante reste la démonstration de l'inégalité  $G(r) \geq 0$  avec les constantes  $\beta_{\ell}$  les plus petites possibles. Plutôt que de suivre Weissler en utilisant la formule multinomiale pour expliciter  $x_r^n$ , effectuons un calcul direct élémentaire. On a successivement

$$x_r^n = \sum_{m_1, \dots, m_n \neq 0} a_{m_1} a_{m_2} \dots a_{m_n} r^{|m_1| + \dots + |m_n|} e^{i(m_1 + \dots + m_n)\theta}$$

$$\int x_r^n \, dv = \sum_{\substack{m_1 + \dots + m_n = 0 \\ m_k \neq 0}} a_{m_1} a_{m_2} \dots a_{m_n} r^{|m_1| + \dots + |m_n|}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{\substack{m_1 + \dots + m_p = n_1 + \dots + n_q \\ 1 < p, q ; p+q = n \\ m_i > 1, n_j > 1}} C_n^p a_{m_1} \dots a_{m_p} \overline{a_{n_1}} \dots \overline{a_{n_q}} r^{m_1 + \dots + m_p + n_1 + \dots + n_q} \\
 &= \sum_{\ell} \left[ \sum_{\substack{m_1 + \dots + m_p = n_1 + \dots + n_q = \ell \\ 1 < p, q ; p+q = n \\ m_i > 1, n_j > 1}} \frac{n!}{p!(n-p)!} a_{m_1} \dots a_{m_p} \overline{a_{n_1}} \dots \overline{a_{n_q}} \right] r^{2\ell}
 \end{aligned}$$

où le coefficient du binôme  $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$  est apparu par le fait qu'on a regroupé ensemble les coefficients  $a_m$  correspondant à  $m > 1$ .

Comme on peut mettre  $r$  en facteur dans le développement de  $x_r$ , on peut supposer  $2\ell > n$ . Par ailleurs les conditions  $m_i > 1$  et  $n_j > 1$  donnent  $p < \ell$  et  $q < \ell$ , d'où

$$\frac{1}{n!} \int x_r^n dv = \sum_{2\ell > n} \sum_{\substack{p=1 \\ p < \ell}}^{n-1} \left[ \sum_{\substack{m_1 + \dots + m_p = \ell \\ m_i > 1}} \sum_{\substack{n_1 + \dots + n_q = \ell \\ n_j > 1}} \frac{a_{m_1} \dots a_{m_p}}{p!} \frac{\overline{a_{n_1}} \dots \overline{a_{n_q}}}{q!} \right] r^{2\ell}$$

Posons alors pour simplifier

$$C(p, \ell) = \frac{1}{p!} \sum_{\substack{m_1 + \dots + m_p = \ell \\ m_i > 1}} a_{m_1} \dots a_{m_p} \quad 1 < p < \ell$$

de sorte que

$$(4) \quad \frac{1}{n!} \int x_r^n dv = \sum_{2\ell > n} \sum_p [\sum C(p, \ell) \overline{C(n-p, \ell)}] r^{2\ell}.$$

En reportant dans (3) on a

$$\frac{1}{2} G(r) = \sum_{\ell=2}^{\infty} (\beta_{\ell} - 1) |a_{\ell}|^2 r^{2\ell} + \sum_{\ell} \sum_{n=3}^{2\ell} (-1)^n (n-3)! \sum_{p=1}^{n-1} C(p, \ell) \overline{C(n-p, \ell)} r^{2\ell}.$$

Dans la deuxième somme on a  $3 < n < 2\ell$ , donc  $\ell > 2$  et ainsi

$$\frac{1}{2} G(r) = \sum_{\ell=2}^{\infty} \theta_{\ell} r^{2\ell} \quad \text{avec}$$

$$\theta_{\ell} = (\beta_{\ell}-1) |a_{\ell}|^2 + \sum_{p=1}^{\ell} \sum_{\substack{n > 3 \\ p+q = n \\ q > 1}} (n-3)! D(p, \ell) \overline{D(q, \ell)}$$

où  $D(p, \ell) = (-1)^p C(p, \ell)$ . Par ailleurs  $C(1, \ell) = a_{\ell}$  et  $D(1, \ell) = -a_{\ell}$ , donc

$$\theta_{\ell} = \sum_{p=1}^{\ell} \sum_{q=1}^{\ell} A_{p,q} D(p, \ell) \overline{D(q, \ell)}$$

avec

$$(5) \quad A_{p,q} = \begin{cases} \beta_{\ell}-1 & \text{si } p=q=1 \\ (p+q-3)! & \text{si } p+q > 3 \quad \text{et } p, q \leq \ell \end{cases}$$

Alors la condition  $G(r) > 0$  sera vérifiée chaque fois que la matrice carrée  $[A_{p,q}]$  est de type positif. Le problème est donc ramené à déterminer la plus petite valeurs possible de la constante  $s = s(\ell) = \beta_{\ell}-1$  pour que ce soit vrai. Or la suite  $m_n = n!$  est la suite des moments de la mesure  $d\mu = e^{-t} dt$  sur  $[0, \infty)$ , et en revenant à (5) avec  $\ell > 2$ , on peut poser  $\ell = m+1$ ,  $p = i+1$ ,  $q = j+1$  et écrire que la matrice  $[a_{ij}]$ ,  $0 \leq i, j \leq m$ , est de type positif avec

$$(6) \quad \begin{cases} a_{00} = \beta_{m+1} - 1 \\ a_{ij} = m_{i+j-1} & i+j > 1 \end{cases}$$

où  $m_k = \int t^k d\mu(t)$ . Plutôt que d'utiliser la méthode des déterminants choisie par Weissler, on est en définitive ramené, en suivant GUENNOUN [1], au problème général que l'on va maintenant étudier.

2. UN PROBLEME D'EXTREMUM SUR LES MOMENTS DE STIELTJES.

Fixons une mesure positive  $\mu$  sur  $[0, \infty)$  ayant des moments de tous les ordres. En posant  $m_k = \int t^k d\mu$ , on sait que la matrice hermitienne infinie  $[m_{i+j}]$  est de type positif, donc elle l'est aussi à tout ordre  $n$ , c'est-à-dire pour  $0 \leq i, j \leq n$ . Mais que peut-on dire de la matrice  $A_n(s)$  définie par

$$\begin{cases} a_{00} = s \\ a_{ij} = m_{i+j-1} \quad \text{si } i, j \leq n \quad \text{et } i+j > 1 \end{cases}$$

pour  $n > 0$  fixé, et plus précisément comment choisir  $s = s(n)$  pour que  $A_n(s)$  soit de type positif? En introduisant le polynôme

$$P = \sum_{i=0}^n u_i X^i \quad \text{on voit que la somme } S = \sum_{i,j} a_{ij} u_i \bar{u}_j \quad \text{s'écrit}$$

$$S = s |P(0)|^2 + \sum_{i+j > 1} \int u_i \bar{u}_j t^{i+j-1} d\mu(t)$$

soit encore

$$S = s |P(0)|^2 + \int \frac{|P(t)|^2 - |P(0)|^2}{t} d\mu(t).$$

Pour que l'on ait  $S > 0$  pour tout polynôme  $P \in \mathcal{P}_n = \mathbb{C}[X]$ , il suffit que ce soit vrai avec  $P(0) = 1$  (car c'est évident si  $P(0) = 0$ ). Le problème se règle donc en paramétrant  $P$  sous la forme  $P = 1 - XQ$  avec  $Q \in \mathcal{P}_{n-1}$  et en considérant la fonction  $F$ , définie sur  $\mathcal{P}_{n-1}$  par

$$F(Q) = \int (Q + \bar{Q} - XQ\bar{Q}) d\mu$$

et le résultat s'obtient avec  $s \succ M_n$  où  $M_n$  est donnée par

$$(7) \quad M_n = \sup_{Q \in \mathcal{P}_{n-1}} F(Q).$$

Il est facile de voir qu'on peut supposer  $Q$  réel, donc supposer

$\mathcal{P}_{n-1} = \mathbf{R}_{n-1}[X]$ . Alors sur  $\mathcal{P}_{n-1}$  la fonction  $F$  est concave et de classe  $C^\infty$ , et sa différentielle  $dF_Q$  est l'application linéaire  $T \rightarrow 2 \int (1-XQ)Td\mu$ . Il est aussi facile de voir que

$$F(Q+T) - F(Q) = dF_Q(T) - \int XT^2d\mu$$

de sorte que tout polynôme  $Q \in \mathcal{P}_{n-1}$  vérifiant  $dF_Q = 0$  réalise le maximum  $M_n$  de  $F$ . Pour un tel polynôme  $Q$  on a  $\int (1-XQ)Qd\mu = 0$  et  $F(Q) = \int Qd\mu$ . Par ailleurs  $dF_Q = 0$  signifie que  $(1-XQ)$  est orthogonal à  $\mathcal{P}_{n-1}$  dans l'espace  $L^2(\mu)$ . Il s'agit donc de chercher un polynôme  $P_n = 1-XQ \in \mathcal{P}_n$  tel que  $P_n(0) = 1$ , qui soit orthogonal à  $\mathcal{P}_{n-1}$ .

Supposons maintenant  $\mu$  à support infini. Il existe alors un système de polynômes orthogonaux dans  $L^2(\mu)$ , soit  $(P_n)$  avec  $d^\circ P_n = n$ , que l'on peut normaliser par la condition  $P_n(0) = 1$ , car on sait que les zéros de  $P_n$  sont contenus dans l'intervalle  $]0, +\infty)$ . Ainsi  $Q \in \mathcal{P}_{n-1}$  est déterminé de façon unique par  $1-XQ = P_n$ , d'où le premier résultat :

THEOREME 1. - Soit  $\mu$  une mesure positive, à support infini contenu dans  $[0, \infty)$ , ayant des moments de tous les ordres. Alors les constantes  $M_n$  sont données par

$$M_n = \int \frac{1-P_n(t)}{t} d\mu(t)$$

où  $(P_n)$  est la suite orthogonale dans  $L^2(\mu)$  des polynômes de degré  $n$ , normalisée par la condition  $P_n(0) = 1$ .

Remarque 1. - La suite  $M_n$  est évidemment croissante comme il résulte de (7). Elle est même strictement croissante, car si  $M_n = M_{n+1}$  alors, avec  $P_n = 1 - XQ$ , on a pour  $\alpha$  réel quelconque

$$F(Q + \alpha X^n) = F(Q) + 2 \int (1 - XQ) \alpha X^n d\mu - \alpha^2 \int X^{2n+1} d\mu$$

et la fonction  $\alpha \rightarrow 2\alpha \int P_n X^n d\mu - \alpha^2 m_{2n+1}$  est négative, ce qui implique  $\int P_n X^n d\mu = 0$ , donc  $P_n$  est orthogonal à  $\mathcal{P}_n$ , ce qui est absurde. On a donc lorsque  $\text{supp } \mu$  est infini

$$(8) \quad 0 = M_0 < M_1 < M_2 < \dots < M_n < M_{n+1} < \dots$$

Remarque 2. - On a toujours l'inégalité

$$(9) \quad M_n < \int \frac{d\mu(t)}{t} < +\infty$$

car si  $s = \int \frac{d\mu(t)}{t} < +\infty$ , on introduit la mesure bornée  $d\nu = \frac{1}{t} d\mu$  et la matrice  $A_n(s)$  est construite à partir des moments de  $\nu$  donc est de type positif, de sorte que  $M_n < s$ .

Remarque 3. - Si la mesure  $\mu$  est à support fini de cardinal  $p > 1$ , on fait la même théorie en orthogonalisant jusqu'au degré  $(p-1)$ . On a alors

$$(10) \quad 0 = M_0 < M_1 < M_2 < \dots < M_{p-1} < M_p < +\infty$$

et  $M_n = M_p$  pour  $n > p$ , car tout polynôme  $Q \in \mathcal{P}_{n-1}$  est  $\mu$ -presque

partout égal à un polynôme  $\tilde{Q} \in \mathcal{P}_{p-1}$ . De plus on a

$$(11) \quad M_p = \int \frac{d\mu(t)}{t}$$

car la condition  $(1-XQ) \perp \mathcal{P}_{p-1}$  implique  $P_p = 1-XQ = 0$  puisque

$$\mathcal{P}_{p-1} = L^2(\mu), \text{ donc } M_p = \int Q d\mu = \int \frac{d\mu(t)}{t} .$$

Cas d'indétermination du problème de Stieltjes. - La mesure  $\mu$  étant supposée fixée, à support infini contenu dans  $[0, \infty)$ , il lui correspond un problème des moments de Stieltjes consistant à rechercher toutes les mesures  $\nu$ , à support contenu dans  $[0, \infty)$  ayant les mêmes moments que  $\mu$ . On sait que l'ensemble  $V_\mu$  de ces mesures  $\nu$  est structuré en convexe compact et que le cas d'indétermination est celui où l'on a  $V_\mu \neq \{\mu\}$ . Pour chaque  $\nu \in V_\mu$  les polynômes  $P_n$  sont évidemment les mêmes, et aussi les constantes  $M_n$ , de sorte que d'après (9) on a

$$(12) \quad \lim M_n = \sup_{\nu \in V_\mu} M_n < \inf_{\nu \in V_\mu} \int \frac{d\nu(t)}{t} .$$

En fait on a :

THEOREME 2. - Pour toute mesure  $\mu$  on a l'égalité

$$\lim M_n = \inf_{\nu \in V_\mu} \int \frac{d\nu(t)}{t} .$$

*Preuve.* - C'est vrai si  $\mu$  est à support fini d'après la remarque 3.

C'est vrai aussi si  $M = \lim M_n$  est infinie. Supposons donc  $M < +\infty$ .

Alors  $M > M_n$  signifie que toutes les matrices  $A_n(M)$  sont de type

positif. Posons donc

$$m'_0 = M, \quad m'_n = m_{n-1} \quad \text{si } n > 1$$

de sorte que  $m'_{i+j+1} = m'_{i+j}$ . Il suit de là que les deux matrices infinies  $[m'_{i+j}]$  et  $[m'_{i+j+1}]$  sont de type positif, ce qui implique d'après un critère classique ([4], p. 136) qu'il existe une mesure positive  $\lambda$  sur  $[0, \infty)$  telle que  $\int t^k d\lambda(t) = m'_k$  pour  $k \geq 0$ . Alors la mesure  $d\nu = t.d\lambda$  est telle que  $\int t^k d\nu = \int t^k d\mu = m'_k$ , donc  $\nu \in V_\mu$  et  $M = m'_0 = \int d\lambda = \int \frac{d\nu(t)}{t}$ .  $\square$

La preuve précédente montre même que la borne inférieure est atteinte. Il en résulte que l'ensemble convexe  $W_\mu$  des mesures  $\nu \in V_\mu$  telles que  $M = \int \frac{d\nu(t)}{t}$  est non vide. On a même mieux, en rappelant qu'on appelle face d'un convexe compact  $K$  toute partie fermée non vide  $F$  telle que la condition  $x, y \in K$  et  $\frac{x+y}{2} \in F$  implique  $[x, y] \subset F$  :

PROPOSITION 1. - Pour toute mesure  $\mu$  l'ensemble  $W_\mu$  est une face convexe de  $V_\mu$ .

*Preuve.* - Si  $M = +\infty$  alors  $W_\mu = V_\mu$ , de sorte qu'on peut supposer  $M < +\infty$ . Montrons d'abord que  $W_\mu$  est fermée. Si  $\nu_i \rightarrow \nu$  dans  $V_\mu$  avec  $\nu_i \in W_\mu$ , on a alors en posant  $f_n(t) = \text{Inf}(n, \frac{1}{t})$ , l'inégalité  $M = \int \frac{d\nu_i}{t} \geq \int f_n d\nu_i$ . Puisque  $f_n \in C_0([0, \infty))$  on peut passer à la limite et obtenir  $\int f_n d\nu \leq M$ , puis  $\int \frac{d\nu(t)}{t} \leq M$  avec la condition  $f_n(t) \uparrow \frac{1}{t}$ . Ainsi  $\nu \in W_\mu$  avec (12) et  $W_\mu$  est fermée. Pour voir que  $W_\mu$  est une face, fixons  $\lambda, \nu \in V_\mu$  telles que  $\frac{1}{2}(\lambda + \nu) \in W_\mu$ . On a alors

$$\int \frac{d\lambda}{t} + \int \frac{d\nu}{t} = 2M$$

ce qui, avec (12), donne aussitôt  $\int \frac{d\lambda}{t} = \int \frac{d\nu}{t} = M$  et  $\lambda, \nu \in W_\mu$ , d'où  $[\lambda, \nu] \subset W_\mu$  par convexité.  $\square$

Lorsque le problème des moments de Stieltjes associé à  $\mu$  est déterminé, c'est-à-dire lorsque  $V_\mu = \{\mu\}$ , on a évidemment  $W_\mu = \{\mu\}$ , d'où :

COROLLAIRE. - Lorsque le problème des moments de Stieltjes associé à la mesure  $\mu$  est déterminé, on a

$$\lim M_n = \int \frac{d\mu(t)}{t} < +\infty.$$

Calcul explicite des  $M_n$  dans quelques cas concrets.

Exemple 1. Polynômes de Laguerre. On choisit pour  $\mu$  la mesure  $d\mu = t^{\alpha-1} e^{-t} dt$  avec  $\alpha > 0$ . On obtient pour  $P_n$  les polynômes de Laguerre normalisés par la condition  $L_n^\alpha(0) = 1$  soit

$$L_n^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1)} \frac{x^k}{k!}$$

d'où

$$\begin{aligned} M_n^\alpha &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{C_n^k}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1)} \int_0^\infty t^{k+\alpha-2} e^{-t} dt \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{C_n^k}{k+\alpha-1} \Gamma(\alpha). \end{aligned}$$

On vérifie aisément l'égalité

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{C_n^k}{k+\alpha-1} = \int_0^1 t^{\alpha-2} [1-(1-t)^n] dt$$

et on distingue alors deux cas suivant que  $\int \frac{d\mu}{t} < +\infty$ , soit  $\alpha > 1$ ,

ou  $\int \frac{d\mu}{t} = +\infty$ , soit  $\alpha < 1$ .

a)  $\alpha > 1$ . On a immédiatement par un calcul simple

$$(13) \quad M_n^\alpha = \Gamma(\alpha-1) \left[ 1 - \frac{n!}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)} \right] \quad n > 1$$

et  $\lim M_n^\alpha = \Gamma(\alpha-1) = \int \frac{d\mu}{t}$ , ce qui rejoint le corollaire puisque le problème des moments est ici déterminé.

b)  $0 < \alpha < 1$ . En écrivant

$$\int_0^1 t^{\alpha-2} [1-(1-t)^n] dt = \int_0^1 \frac{1-u^n}{1-u} (1-u)^{\alpha-1} du$$

on aboutit aisément à l'expression

$$M_n^\alpha = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k! \Gamma(\alpha)}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1)}$$

qui se précise, pour  $\alpha=1$  (cas des polynômes de Laguerre classiques) en

$$(14) \quad M_n^1 = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

En écrivant  $\Gamma(\alpha-1) = \frac{\Gamma(\alpha)}{\alpha-1}$  dans (13), on peut jouer sur l'analyticité par rapport à la variable  $\alpha$  pour voir que les deux membres de (13) restent égaux pour  $\alpha < 1$ . Ceci donne une autre expression de  $M_n^\alpha$  pour  $\alpha < 1$ , selon,

$$(15) \quad M_n^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha)}{1-\alpha} \left[ \frac{n!}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)} - 1 \right]$$

permettant de voir que l'on a, quand  $n \rightarrow +\infty$

$$M_n^\alpha \sim \frac{\Gamma^2(\alpha)}{1-\alpha} n^{1-\alpha}.$$

Par ailleurs il est facile de vérifier que la suite  $(M_n^\alpha)$  est concave pour tout  $\alpha > 0$ .

Exemple 2. Polynômes de Legendre. On prend pour  $\mu$  la mesure  $d\mu = dt$  sur  $[0,1]$ , de sorte que les polynômes  $P_n$  s'obtiennent à partir des polynômes de Legendre  $\tilde{P}_n$  sur  $[-1,+1]$  selon  $P_n(t) = \tilde{P}_n(1-2t)$  avec  $\tilde{P}_n(1) = 1$ . D'où

$$M_n = \int_0^1 \frac{1-P_n(t)}{t} dt = \int_{-1}^{+1} \frac{1-\tilde{P}_n(x)}{1-x} dx.$$

Le calcul peut se faire avec la fonction génératrice

$$(1-2tx + t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_0^{\infty} \tilde{P}_n(x)t^n$$

et conduit à la formule

$$(16) \quad M_n = 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad n > 1.$$

Exemple 3. Polynômes de Tchebycheff. - Ici  $\mu$  est la mesure  $d\mu = [t(1-t)]^{-1/2} dt$  sur  $[0,1]$  et les polynômes  $P_n$  sont liés aux polynômes de Tchebycheff  $T_n$  sur  $[-1,+1]$  par  $P_n(t) = T_n(1-2t)$  avec  $T_n(1) = 1$ . Avec  $x = 1-2t = \cos \theta$ , on a  $T_n(x) = \cos n\theta = P_n(t)$ . En remarquant que  $t = \frac{1-\cos \theta}{2} = \sin^2 \frac{\theta}{2}$  et en posant  $\varphi = \frac{\theta}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}]$  on obtient

$$P_n(t) = \cos 2n\varphi \quad \text{avec } t = \sin^2 \varphi \text{ et } \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

d'où

$$M_n = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2n\varphi}{\sin^2 \varphi} d\varphi = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 n\varphi}{\sin^2 \varphi} d\varphi$$

soit enfin, par le noyau de Cesaro-Féjer

$$(17) \quad M_n = 2n\pi.$$

Exemple 4. Polynômes ultrasphériques. - On prend pour  $\mu$  la mesure  $d\mu = [t(1-t)]^{1/2} dt$  sur  $[0,1]$ . Avec  $x=1-2t = \cos \theta$  et  $\varphi = \frac{\theta}{2}$ , on obtient  $P_n(t) = U_n(x)$ , où  $U_n$  est tel que

$$U_n(\cos \theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{(n+1)\sin \theta}$$

pour vérifier la condition  $U_n(1) = 1$ . Il suit facilement de là que

$$\begin{aligned} M_n &= \int_0^{\pi/2} 2 \cos^2 \varphi \left[ 1 - \frac{\sin 2(n+1)\varphi}{(n+1)\sin 2\varphi} \right] d\varphi \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{K_{n+1}}{n+1} \quad \text{avec} \quad K_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2n\varphi}{\sin \varphi} \cos \varphi d\varphi. \end{aligned}$$

Or  $K_1 = \frac{\pi}{2}$  et un calcul immédiat montre que  $K_{n+1} = K_n$  pour  $n \geq 1$ , donc en résumé

$$(18) \quad M_n = \frac{\pi}{2} \frac{n}{n+1} .$$

### 3. LES POLYNOMES DE JACOBI.

Les exemples 2, 3, 4 constituent des cas particuliers du cas général où  $\mu$  est la mesure de Jacobi  $d\mu = t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt$  sur  $[0,1]$  avec  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$ , liée aux polynômes de Jacobi. Avec  $x = 1-2t$ ,

on obtient précisément les polynômes de Jacobi  $J_n^{\alpha, \beta}(x)$ , exprimés à partir de la fonction hypergéométrique

$$\begin{aligned} F(a,b,c,x) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+k-1)b(b+1)\dots(b+k-1)}{c(c+1)\dots(c+k-1) k!} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k k!} x^k \end{aligned}$$

(avec la notation condensée  $(a)_0 = 1$ ,  $(a)_k = a(a+1)\dots(a+k-1)$  si  $k \geq 1$ )  
selon

$$(19) \quad J_n^{\alpha, \beta}(x) = F(-n, n+\alpha+\beta-1, \alpha, \frac{1-x}{2})$$

pour obtenir la condition  $J_n^{\alpha, \beta}(1) = 1$ . On aura donc en fait

$$(20) \quad P_n(t) = P_n^{\alpha, \beta}(t) = F(-n, n+\theta-1, \alpha, t)$$

avec  $\theta = \alpha + \beta$ , ce qui donne la formule condensée

$$(21) \quad M_n = M_n^{\alpha, \beta} = \int_0^1 \frac{1-F(-n, n+\theta-1, \alpha, t)}{t} d\mu(t).$$

On fait maintenant quelques transformations permettant une meilleure  
approche de  $M_n$ . Par développement on a

$$\begin{aligned} -M_n &= \sum_{k=1}^n \frac{(-n)_k (n+\theta-1)_k}{(\alpha)_k k!} \int_0^1 t^{k+\alpha-2} (1-t)^{\beta-1} dt \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{(-n)_k (n+\theta-1)_k}{(\alpha)_k k!} \frac{\Gamma(\alpha+k-1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\theta+k-1)} \quad \theta = \alpha + \beta \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\theta)} \sum_{k=1}^n \frac{(-n)_k (n+\theta-1)_k}{(\theta)_k k!} \frac{\theta+k-1}{\alpha+k-1} \end{aligned}$$

avec  $(\alpha+k-1)\Gamma(\alpha+k-1) = \Gamma(\alpha)(\alpha)_k$  et la même formule avec  $\theta$ . D'où

$$-M_n = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\theta)} \sum_{k=1}^n \frac{(-n)_k (n+\theta-1)_k}{(\theta)_k k!} \left[ 1 + \frac{\beta}{\alpha+k-1} \right].$$

Or on sait, avec [2], p. 239-240, comme conséquence de la théorie  
des fonctions hypergéométriques contiguës, que

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (n+\theta-1)_k}{(\theta)_k k!} = F(-n, n+\theta-1, \theta, 1) = 0$$

ce qui permet d'écrire

$$(22) \quad M_n = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\theta)} \left[ 1 - \beta \sum_{k=1}^n \frac{(-n)_k (n+\theta-1)_k}{(\theta)_k k!} \frac{1}{\alpha+k-1} \right].$$

On introduit alors la fonction  $G_\theta(t)$

$$(23) \quad G_\theta(t) = - \sum_{k=1}^n \frac{(-n)_k (n+\theta-1)_k}{(\theta)_k k!} t^{k-1} = \frac{1-F(-n, n+\theta-1, \theta, t)}{t}$$

qui vérifie  $G_\theta(1) = 1$ , et qui permet d'exprimer  $M_n$  sous la forme

$$(24) \quad M_n = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\theta)} \left[ 1 + \beta \int_0^1 G_\theta(t) t^{\alpha-1} dt \right]$$

l'avantage de cette formulation étant qu'elle sépare assez bien les influences respectives de  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\theta = \alpha + \beta$ .

Maintenant il est facile de vérifier, par développement, que l'on a

$$\begin{aligned} G_\theta(t) &= - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-n)_{k+1} (n+\theta-1)_{k+1}}{(\theta)_{k+1} k!} \frac{t^k}{k+1} \\ &= \frac{n(n+\theta-1)}{\theta} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-n+1)_k (n+\theta)_k}{(\theta+1)_k k!} \frac{t^k}{k+1} \end{aligned}$$

de sorte que  $G_\theta$  vérifie l'équation différentielle

$$(25) \quad [tG_\theta(t)]' = \frac{n(n+\theta-1)}{\theta} F(-n+1, n+\theta, \theta+1, t).$$

De là on tire par intégration par parties, compte tenu que  $G_\theta(1) = 1$ , la relation

$$(26) \quad \frac{n(n+\theta-1)}{\theta} \int_0^1 F(-n+1, n+\theta, \theta+1, t) t^{\alpha-1} dt = 1-(\alpha-1) \int_0^1 G_\theta(t) t^{\alpha-1} dt$$

ce qui donne une nouvelle expression de  $M_n$ , valable pour  $\alpha \neq 1$

$$(27) \quad M_n = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{(\alpha-1)\Gamma(\theta)} \left[ \theta-1 - \frac{\beta n(n+\theta-1)}{\theta} \int_0^1 F(-n+1, n+\theta, \theta+1, t) t^{\alpha-1} dt \right].$$

L'expression de  $M_n$  va alors s'obtenir avec le lemme suivant :

LEMME. - Pour  $\alpha > 0$  et  $\theta > 0$  on a l'égalité

$$(28) \quad \int_0^1 F(-n, n+\theta, \theta, t) t^{\alpha-1} dt = \frac{n! (\theta-\alpha)_n}{(\alpha)_{n+1} (\theta)_n}.$$

*Preuve.* - Un calcul élémentaire pour  $n = 0, 1, 2$  donne la forme présumée de l'intégrale, de sorte que nous démontrerons l'égalité en identifiant les deux termes. Considérons l'intégrale comme une fonction  $H(\alpha)$ ,  $\theta$  étant lu comme un paramètre. Par développement on a

$$H(\alpha) = \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (n+\theta)_k}{(\theta)_k k!} \frac{1}{k+\alpha}$$

ce qui fournit la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle  $H(\alpha)$ . Maintenant si  $P$  est un polynôme de degré au plus égal à  $n$ , on peut aussi décomposer la fonction rationnelle

$$K(\alpha) = \frac{P(\alpha)}{(\alpha)_{n+1}} = \sum_{k=0}^n \frac{A_k}{k+\alpha}$$

et calculer aisément les coefficients  $A_k$  par

$$A_k = \frac{(-1)^k P(-k)}{k! (n-k)!}.$$

En appliquant ceci au polynôme  $P(\alpha) = \frac{n!}{(\theta)_n} (\theta - \alpha)_n$  on obtient l'égalité

$$A_k = \frac{n!}{(\theta)_n} \frac{(-1)^k (\theta+k)_n}{k! (n-k)!}$$

et on vérifie immédiatement que  $A_k$  s'écrit aussi

$$A_k = \frac{(-n)_k (n+\theta)_k}{(\theta)_k k!}$$

ce qui fournit bien l'égalité  $K(\alpha) = H(\alpha)$ .  $\square$

En revenant à (27), il suffit d'utiliser le lemme en changeant  $n$  en  $n-1$  et  $\theta$  en  $\theta+1$  pour obtenir la valeur de  $M_n$  pour  $\alpha \neq 1$ . Ainsi

THEOREME 2. - Pour  $\alpha \neq 1$  les constantes  $M_n^{\alpha, \beta}$  de Jacobi sont données, avec  $\theta = \alpha + \beta$ , par

$$(29) \quad M_n^{\alpha, \beta} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{(\alpha-1)\Gamma(\theta)} \left[ \theta-1 - \frac{(\beta)_n}{(\alpha)_n} \frac{n! (n+\theta-1)}{(\theta)_n} \right]$$

et pour  $\theta \neq 1$ , par la forme simplifiée

$$(30) \quad M_n^{\alpha, \beta} = \frac{\theta-1}{\alpha-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\theta)} \left[ 1 - \frac{(\beta)_n}{(\alpha)_n} \frac{n!}{(\theta-1)_n} \right].$$

Remarque 4. - Le problème des moments de Jacobi étant évidemment déterminé, on doit retrouver les résultats prouvés en 2. En effet, pour  $\alpha > 1$  (donc  $\theta > 1$ ) on a

$$M_n \rightarrow \frac{\theta-1}{\alpha-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\theta)} = \int \frac{d\mu(t)}{t}$$

et pour  $\alpha < 1$

$$M_n \sim \frac{\Gamma^2(\alpha)}{1-\alpha} n^{2(1-\alpha)} \rightarrow \int \frac{d\mu(t)}{t} = +\infty$$

comme conséquence de l'équivalence

$$\frac{(n+\theta-1)n!\Gamma(\alpha)\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(n+\alpha)\Gamma(n+\theta)} \sim \Gamma(\alpha)n^{2(1-\alpha)}.$$

Le cas des polynômes ultrasphériques généraux, correspondant à  $\beta=\alpha$ , se règle aussitôt.

THEOREME 3. - Pour  $\alpha \neq 1$  les constantes  $M_n^{\alpha,\alpha}$  ultrasphériques sont données par

$$(31) \quad M_n^{\alpha,\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha)^2}{(\alpha-1)\Gamma(2\alpha)} \left[ 2\alpha-1 - \frac{n!}{(2\alpha)_{n-1}} \right].$$

A titre de vérification on retrouve  $M_n = 2n\pi$  pour le cas  $\alpha = \frac{1}{2}$  des polynômes de Tchebycheff et  $M_n = \frac{\pi}{2} \frac{n}{n+1}$  pour le cas  $\alpha = \frac{3}{2}$  traité directement, en accord avec (17) et (18).

Le cas limite  $\alpha=1$ . - La valeur  $\alpha=1$  est évidemment particulière puisque c'est la valeur qui sépare les deux conditions  $\int \frac{d\mu}{t} < +\infty$  et  $\int \frac{d\mu}{t} = +\infty$ . Le calcul de  $M_n^{1,\beta}$  se fait alors par passage à la limite, compte tenu que l'expression (24) garantit la continuité par rapport à  $\alpha$ . En partant de (29) on a

$$M_n^{\alpha,\beta} = \Gamma(\alpha) \frac{1}{\alpha-1} \left[ \frac{(\theta-1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\theta)} - \frac{(n+\theta-1)\Gamma(n+\beta)n!\Gamma(\alpha)}{\Gamma(n+\alpha)\Gamma(n+\theta)} \right]$$

$$= \Gamma(\alpha) \frac{R(\alpha)}{\alpha - 1} \quad \text{avec } R(1) = 0.$$

On a donc  $M_n^{1,\beta} = R'(1)$  en dérivant par rapport à  $\alpha$ . Le calcul donne sans difficulté

$$R'(1) = \frac{1}{\beta} - \frac{1}{n+\beta} + \frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} - \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} + \frac{\Gamma'(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\beta+1)} - \frac{\Gamma'(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1)}$$

et compte tenu que la fonction  $\Phi = \frac{\Gamma'}{\Gamma}$  vérifie l'équation fonctionnelle  $\Phi(x+1) - \Phi(x) = \frac{1}{x}$ , on obtient :

THEOREME 4. - Pour le cas limite  $\alpha=1$  les constantes de Jacobi sont données par

$$(32) \quad M_n^{1,\beta} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta+1} + \dots + \frac{1}{\beta+n-1}.$$

Pour  $\beta=1$ , qui est le cas des polynômes de Legendre, on retrouve la valeur (16). Pour le cas  $\beta=3$  on a, de façon plus condensée

$$(33) \quad M_n^{1,3} = 2\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) - \frac{3}{2} + \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}.$$

Remarque 5. - On sait que les polynômes de Laguerre peuvent s'obtenir comme cas limite des polynômes de Jacobi. Ainsi en introduisant la mesure  $dv_k = t^{\alpha-1} \left(1 - \frac{t}{k}\right)^{k-1} dt$  sur l'intervalle  $[0,k]$ , on voit facilement que

$$M_n(v_k) = k^{\alpha-1} M_n^{\alpha,k}$$

et que  $M_n(v_k)$  tend, quand  $k \rightarrow \infty$ , vers les constantes de Laguerre  $M_n^\alpha$  calculées en (13), (14) et (15). On donne ainsi une vérification de

la formule (15), qui avait été obtenue par prolongement analytique.

Remarque 6. - Convexité et concavité. Par quelques calculs on peut voir que la différence seconde  $\Delta_2(M_n^{\alpha, \beta}) = M_n + M_{n+2} - 2M_{n+1}$  est du signe opposé à celui du trinôme  $An^2 + 2Bn + C$  avec

$$A = 2(2\alpha - 1)$$

$$B = (2\alpha - 1)(\theta + 1) \quad \theta = \alpha + \beta$$

$$C = \alpha\theta(\theta + 1) - 2\beta$$

trinôme dont le discriminant  $\Delta$  se calcule aisément

$$\Delta = (2\alpha - 1)(\alpha - \beta + 1)(\theta - 1).$$

Il suit de là que, si  $\Delta < 0$ , le signe du trinôme est celui de  $2\alpha - 1$ . Si  $\Delta > 0$ , les deux racines  $n_1 < n_2$  sont telles que  $n_1 < 0$ , de sorte que la suite  $\Delta_2(M_n)$  ne garde un signe constant que si  $n_2 < 0$ . La condition  $n_2 < 0$  n'est autre que  $AC > 0$ , et cette dernière condition incorpore la condition  $\Delta < 0$ . Ainsi lorsque  $AC > 0$ , la suite  $(M_n^{\alpha, \beta})$  est concave si  $2\alpha > 1$ , et convexe si  $2\alpha < 1$ . Lorsque  $AC < 0$  la suite  $(M_n^{\alpha, \beta})$  n'est ni concave, ni convexe. Le cas limite  $C=0$  introduit la cubique  $\Gamma$  d'équation

$$(34) \quad \alpha\beta^2 + (2\alpha^2 + \alpha - 2)\beta + \alpha^2(\alpha + 1) = 0$$

qui coupe la droite  $D = \{\alpha = \frac{1}{2}\}$  aux points  $\beta = \frac{1}{2}$  et  $\beta = \frac{3}{2}$ . Avec  $\Gamma$  et  $D$  on construit une division du quadrant  $\{\alpha > 0, \beta > 0\}$  en cinq régions, dont une est région de concavité (contenue dans le demi-plan  $\alpha > \frac{1}{2}$ ), une autre est région de convexité (contenue dans la bande

$0 < \alpha < \frac{1}{2}$  ), et les trois dernières sont régions de non-concavité et non-convexité.

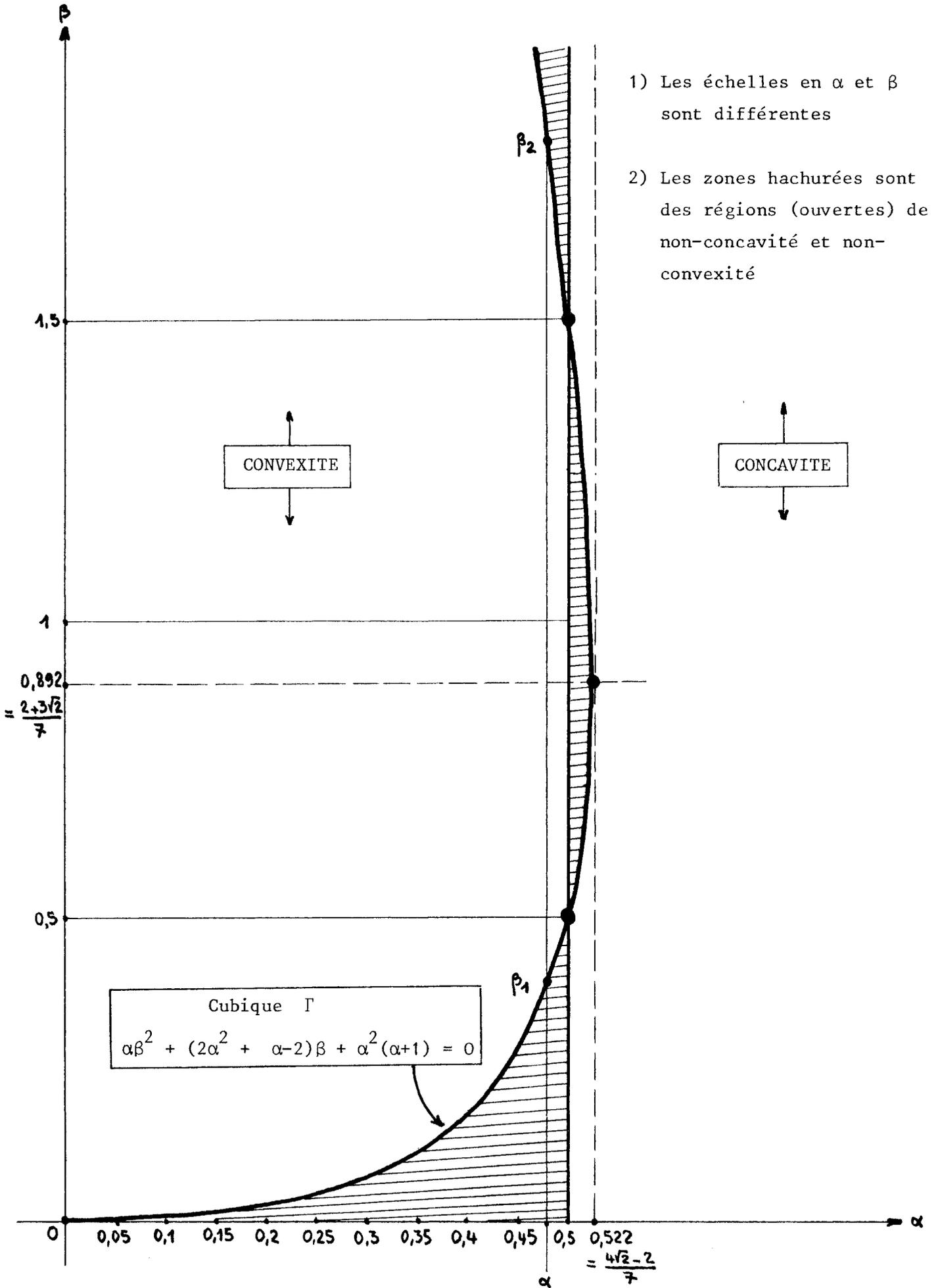
L'examen de la cubique  $\Gamma$  montre que l'on a le tableau

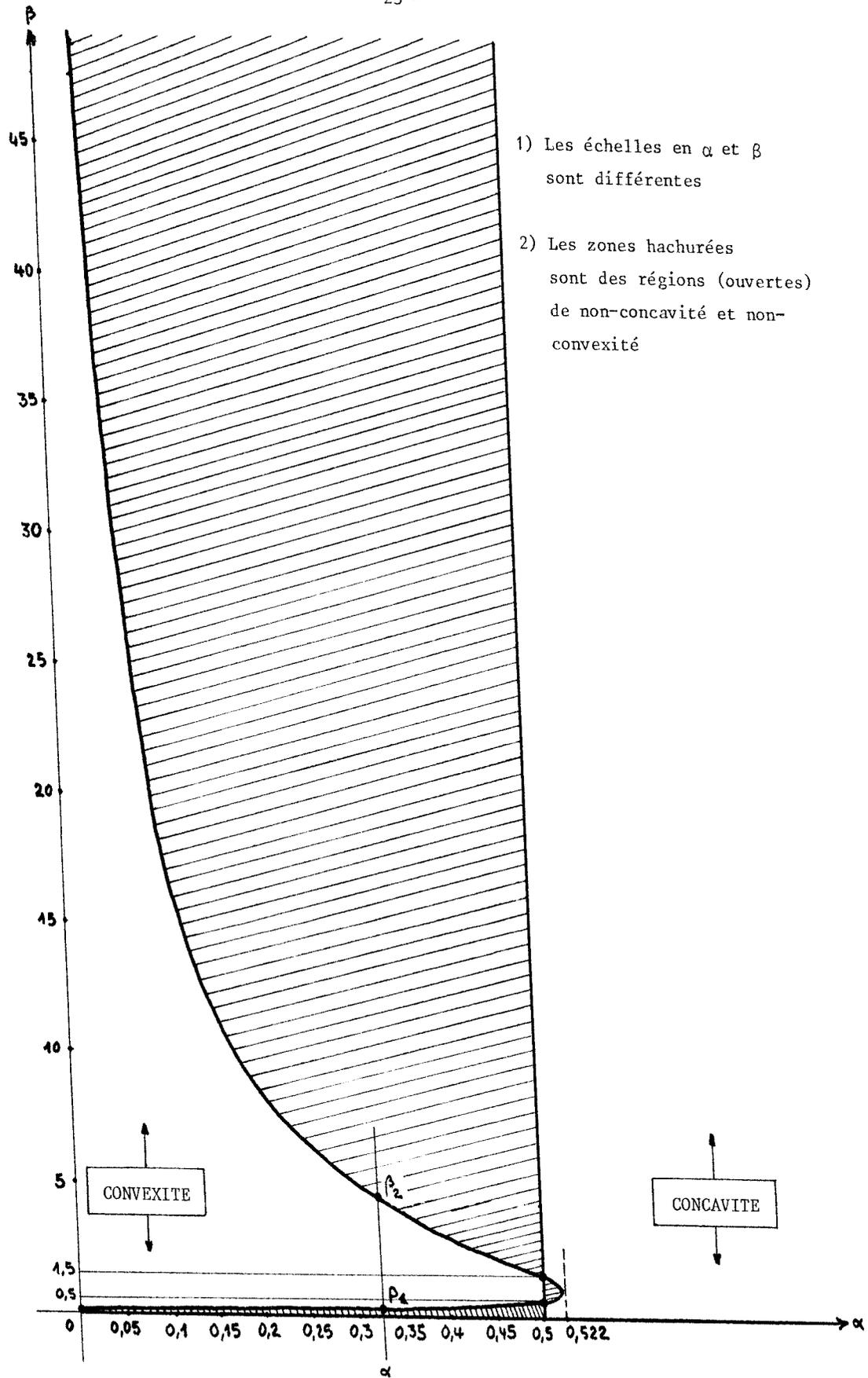
$\alpha > 0$	$\beta > 0$	$M_n^{\alpha, \beta}$
$\alpha > \frac{4\sqrt{2}-2}{7}$	quelconque	concave.
$\frac{1}{2} < \alpha < \frac{4\sqrt{2}-2}{7}$	$\beta \notin ]\beta_1, \beta_2[$	concave
	$\beta \in ]\beta_1, \beta_2[$	ni concave, ni convexe
$\alpha = \frac{1}{2}$	$\beta \notin ]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$	concave
	$\beta \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$	convexe
$0 < \alpha < \frac{1}{2}$	$\beta \in [\beta_1, \beta_2]$	convexe
	$\beta \notin [\beta_1, \beta_2]$	ni concave, ni convexe

avec

$$\beta_1 = \frac{1}{2\alpha} \left[ (2-\alpha - 2\alpha^2) - (4-4\alpha - 7\alpha^2)^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2\alpha} \left[ (2-\alpha - 2\alpha^2) + (4-4\alpha - 7\alpha^2)^{\frac{1}{2}} \right]$$





- 1) Les échelles en  $\alpha$  et  $\beta$  sont différentes
- 2) Les zones hachurées sont des régions (ouvertes) de non-concavité et non-convexité

Le cas particulier  $\alpha = \frac{1}{2}$  est intéressant car il fait apparaître l'ensemble des deux points  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  et  $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$  comme zone de contact entre la région de convexité et celle de concavité. Pour ces deux points on a donc nécessairement une expression de  $M_n$  linéaire en  $n$ . De fait avec (17) et (30) on vérifie

$$M_n^{1/2, 1/2} = M_n^{1/2, 3/2} = 2n\pi.$$

En résumé l'intérêt de la remarque tient surtout au fait qu'on donne ici des exemples concrets où la suite  $(M_n)$  n'est ni convexe ni concave. C'est le cas du point  $\alpha = \frac{1}{3}$ ,  $\beta = \frac{1}{12}$ . Par ailleurs on remarquera aussi que la suite  $(M_n^{\alpha, \beta})$  est toujours concave lorsque  $\alpha > \frac{4\sqrt{2}-2}{7} = 0,522\dots$ , en particulier lorsqu'elle est bornée ( $\alpha > 1$ ).

#### 4. RETOUR AU PROBLEME DE WEISSLER.

La méthode de majoration des constantes  $(\beta_n)$  de Weisler par utilisation des constantes  $M_n$  a déjà été utilisée par GUENNOUN [1], p. 79-81, qui, suivant de très près les calculs de Weisler basés sur la formule multinomiale, obtient  $\beta_{n+1} = 1 + M_n$ ,  $n > 1$ , où les  $M_n$  sont associées aux polynômes classiques de Laguerre.

Avec le calcul que nous avons mené en 1., et qui est plus direct et plus compréhensible que celui basé sur la formule multinomiale, les valeurs  $\beta_{n+1} = 1 + M_n$  obtenues sont aussi associées à la mesure de Laguerre classique. On améliore ainsi légèrement, d'un point de vue technique, la preuve de l'inégalité de Weisler telle qu'elle est donnée à la fois dans [3] et [1], sans pour autant améliorer la valeur des constantes  $\beta_n$ .

Le progrès n'est évidemment pas considérable et les meilleures constantes ne sont sans doute pas obtenues. Toutefois l'étude a permis de poser et de résoudre à peu près complètement un problème d'extrémum tronqué à l'ordre  $n$ , intéressant en lui-même dans la théorie des moments de Stieltjes.

\*

BIBLIOGRAPHIE

- [1] O. GUENNOUN, *Inégalités logarithmiques de Gross-Sobolev et hypercontractivité*, Thèse 3ème cycle, Université LYON 1 (1980), 90 pages.
- [2] G. VALIRON, *Equations fonctionnelles*, Masson, Paris, (1950).
- [3] F.B. WEISSLER, *Logarithmic Sobolev inequalities and hypercontractive estimates on the circle*, J. Funct. Anal., 37, (1980), 218-234.
- [4] D.V. WIDDER, *The Laplace transform*, Princeton University Press, Princeton, (1946).

Institut de Technologie de  
KUNMING (REPUBLIQUE POPULAIRE  
DE CHINE)

Laboratoire d'Analyse Fonctionnelle  
U.E.R. de Mathématiques  
UNIVERSITE CLAUDE-BERNARD-LYON 1  
43, bd du 11 novembre 1918  
69622 VILLEURBANNE CEDEX