PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

NEJIB ZAGUIA

Chapitre I Hauteur d'un ensemble bien fondé

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1983, fascicule 7D
« Chaînes d'idéaux et de sections initiales d'un ensemble ordonné », , p. 13-38
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1983___7D_13_0>

© Université de Lyon, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

CHAPITRE I

HAUTEUR D'UN ENSEMBLE BIEN FONDE

Résumé.

Nous prouvons qu'un treillis distributif de hauteur dénombrable contient une chaîne dont le type égale la hauteur. Avec une propriété supplémentaire sur le treillis le résultat reste valable pour une hauteur quelconque. Ceci s'applique en particulier au treillis $\underset{\sim}{I}(E)$ des sections initiales d'un belordre E et donne une nouvelle preuve d'un résultat de DE JONGH et PARIKH.

Nous construisons un belordre A dont le treillis $\underset{\sim}{I}(A)$ ne contient aucune chaîne passant par tous les niveaux de hauteur.

I - QUELQUES PROPRIETES ELEMENTAIRES DE LA HAUTEUR D'UN ENSEMBLE BIEN FONDE.

I-1. Hauteur d'un ensemble bien fondé.

Soit P un ensemble bien fondé. *La fonction hauteur* associe à tout élément x de P un ordinal $h(x,P)$ défini par induction comme suit :

$$h(x,P) = \sup\{h(y,P) \;/\; y \prec x \text{ dans } P\}.$$

Par exemple $h(x,P) = 0$ si et seulement si x est minimal.

Cette fonction partitionne l'ensemble P en parties disjointes P_α, où $P_\alpha = h^{-1}(\alpha,P)$, appelées *niveaux de hauteur*.

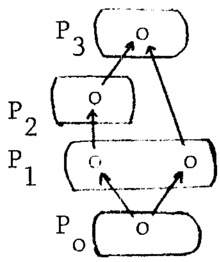
Ainsi P_o est l'ensemble des éléments minimaux de P, et plus généralement P_α est l'ensemble des éléments minimaux de $P \setminus \bigcup_{\alpha' < \alpha} P_{\alpha'}$.

La hauteur de P -que l'on note $h(P)$- est le plus petit ordinal α tel que $P_\alpha = \emptyset$. Elle vérifie $h(P) = \sup\{h(x,P)+1 \;/\; x \in P\}$. Soit $x \in P$, on note $(\leftarrow x[_P$, ou $(\leftarrow x[$, l'ensemble $\{y \;/\; y \in P \text{ et } y < x\}$ muni de l'ordre induit. On a $h((\leftarrow x[) = h(x,P)$.

La fonction hauteur ne peut être définie que sur les ensembles bien fondés ; deux ensembles bien fondés et isomorphes ont évidemment la même hauteur.

Exemples.

- Si P est l'ensemble ordonné illustré ci-dessous, alors $h(P) = 4$.



- Pour toute chaîne bien ordonnée C de type α, on a $h(C) = \alpha$.

I-2. Somme hessenbergienne.

Tout ordinal α s'écrit sous la forme $\alpha = \omega^{\gamma_1} n_1 + \ldots + \omega^{\gamma_k} n_k$ où les $n_1, \ldots, n_k$ sont des entiers, et les exposants sont des ordinaux satisfaisant $\gamma_1 > \gamma_2 \dots > \gamma_k$. Si $\alpha \neq 0$ et $n_i \neq 0$ pour tout $i \in \{1,\dots,k\}$ alors la décomposition est unique : *c'est la forme normale de CANTOR.*

On peut donc écrire tout ordinal α sous la forme d'une somme infinie $\alpha = \sum^*_{\gamma \in \theta} \omega^\gamma n_\gamma$, où les n_γ sont des entiers presque partout nuls et θ la classe des ordinaux, les coefficients n_γ étant entièrement déterminés par α.

Soit $\alpha = \sum^*_{\gamma \in \theta} \omega^\gamma n_\gamma$ et soit $\beta = \sum^*_{\gamma \in \theta} \omega^\gamma m_\gamma$, la *somme hessenbergienne* de α et β est l'ordinal $\alpha \oplus \beta = \sum^*_{\gamma \in \theta} \omega^\gamma (n_\gamma + m_\gamma)$.

Exemples.

$$- (\omega^4 2 + \omega^2 + \omega) \oplus (\omega^3 + \omega 3+4) = \omega^4 2 + \omega^3 + \omega^2 + \omega 4+4$$

Notons par contre que :

$$(\omega^4 2 + \omega^2 + \omega) + (\omega^3 + \omega 3+4) = \omega^4 2 + \omega^3 + \omega 3+4$$

- Dans l'écriture d'un ordinal sous la forme normale de CANTOR on peut remplacer la somme par la somme hessenbergienne. Ainsi :

$$\alpha = \omega^{\gamma_1} n_1 + \dots + \omega^{\gamma_k} n_k = \omega^{\gamma_1} n_1 \oplus \dots \omega^{\gamma_k} n_k$$

En particulier pour tout ordinal α et tout entier n on a $\alpha+n = \alpha \oplus n$.
La somme hessenbergienne généralise l'addition entre entiers : elle est commutative, associative et compatible avec l'ordre.

Les propriétés vis à vis de l'ordre sont réunies dans la proposition suivante :

I-2.1. PROPOSITION.

Soient α, α', β et β' des ordinaux.

a). si $\alpha \leqslant \alpha'$ et $\beta < \beta'$ alors $\alpha \oplus \beta < \alpha' \oplus \beta'$

b). $\alpha \oplus \beta = \sup\{\alpha \oplus \beta' \oplus 1 \ / \ \beta' < \beta\} \cup \{\alpha' \oplus \beta \oplus 1 \ / \ \alpha' < \alpha\}$

c). si $\beta < \omega^\alpha$ et $\beta' < \omega^\alpha$ alors $\beta \oplus \beta' < \omega^\alpha$

d). $\sup\{\alpha' \oplus \beta' \ / \ \alpha' < \alpha$ et $\beta' < \beta\} < \alpha \oplus \beta$

Preuve. Vérification de routine.

Pour le b) on distingue deux cas suivant que α et β sont limites ou que l'un d'eux est isolé.

Pour plus de détails sur ces questions voir par exemple E.KAMKE [6]. Le fait suivant nous sera très utile :

I-2.2. PROPOSITION.

Soient P et Q deux ensembles bien fondés non vides. On a :

a). $\forall\, x \in P$; $\forall\, y \in Q$, $h((x,y),\ P \times Q) = h(x,P) \oplus h(y,Q)$

b). $\sup\{h(P),\ h(Q)\} \leqslant h(P \times Q) < h(P) \oplus h(Q)$

c). $\sup\{h(P),\ h(Q)\} \leqslant h(P \cup Q) \leqslant h(P) \oplus h(Q)$.

Preuve.

a). On fait la preuve par induction sur $h((x,y),\ P \times Q)$.

- $h((x,y),\ P \times Q) = 0$. Dans ce cas (x,y) est minimal dans $P \times Q$ et donc x et y sont minimaux dans P et Q et l'égalité s'en

- $h((x,y),\ P \times Q) = \alpha$.

On a $h((x,y),\ P \times Q) = \sup\{h((x',y'),\ P \times Q) + 1 \ /\ (x',y') < (x,y)\}$ ce qui vaut $\sup\{h((x,y'),\ P \times Q) + 1 \ /\ y' < y\} \cup \{h((x',y),\ P \times Q) + 1 \ /\ x' < x\}$.
D'après l'hypothèse inductive, cela vaut :
$\sup\{(h(x,P) \oplus h(y',Q)) + 1 \ /\ y' < y\} \cup \{(h(x',P) \oplus h(y,Q)) + 1 \ /\ x' < x\}$.
D'après le b) de la proposition I-2.1. (et les propriétés de commutation) c'est $h(x,P) \oplus h(y,Q)$.

b). La première égalité est évidente (P et Q sont respectivement isomorphes à deux parties de $P \times Q$).

Pour la seconde utilisons le a) : On a :

$$h(P \times Q) = \sup\{h(x,P) \oplus h(y,Q) + 1 \ /\ (x,y) \in P \times Q\}$$

Disinguons deux cas :

- $h(P)$ ou $h(Q)$ est limite. Alors l'inégalité résulte du d) de la proposition I-2.1.

- $h(P)$ et $h(Q)$ sont isolés. Alors on a $h(P \times Q) + 1 = h(P) \oplus h(Q)$ d'où l'inégalité annoncée. En effet, dans ce cas il existe x' dans P et y' dans Q de hauteurs maximales et donc $h(P \times Q) = h(x', P) \oplus h(y', Q') + 1$. D'où résulte que :

$$h(P \times Q) + 1 = (h(x', P) + 1) \oplus (h(y', Q) + 1) = h(P) \oplus h(Q).$$

c). La première inégalité est évidente. On prouve la seconde inégalité par induction sur $h(P \cup Q)$.

Si $h(P \cup Q) = 0$ c'est évident.

Sinon, soit $x \in P \cup Q$. On a $h((\leftarrow x[_{P \cup Q}) = h(x, P \cup Q) < h(P \cup Q)$. Donc, d'après l'hypothèse inductive : $h(\leftarrow x[_{P \cup Q}) \leqslant h((\leftarrow x[_P) \oplus h((\leftarrow x[_Q)$ c'est-à-dire $h(x, P \cup Q) \leqslant h(x,P) \oplus h(y,Q)$.

Or $h(x,P) \oplus h(y,Q) < h(P) \oplus h(Q)$. D'où le résultat.

Q.E.D.

II - UNE FORMULE DE MAJORATION DE LA HAUTEUR D'UN TREILLIS DISTRIBUTIF.

II-1. Hauteur de l'ensemble des sections initiales finiment engendrées d'un ensemble bien fondé.

Soit P un ensemble ordonné. Etant donnée une partie A de P l'ensemble $(\leftarrow A]$ formé des x de P tels que $x \leqslant y$ pour au moins un y de A est la plus petite section initiale contenant A ; nous disons qu'elle est engendrée par A. Nous disons qu'une section initiale est *finiment engendrée* si elle est engendrée par un ensemble fini. Nous notons $I_o(P)$ l'ensemble ordonné par inclusion des sections initiales finiment engendrées de P.

Toute section initiale finiment engendrée I est engendrée par une antichaîne finie (formée de l'ensemble des éléments maximaux de I)

et donc $I_o(P)$ est isomorphe à l'ensemble des antichaînes finies de P muni de l'ordre de majoration (i.e. $\{x_o ,\ldots, x_n\} \leqslant \{y_o ,\ldots, y_m\}$ lorsque pour tout x_i, il existe y_j tel que $x_i \leqslant y_j$ dans P).

Il est évident que si l'ensemble $I_o(P)$ est bien fondé, alors P l'est aussi. Un résultat classique de G.BIRKHOFF [1] nous donne la réciproque :

II-1.1. THEOREME.

Soit P un ensemble ordonné. Si P est bien fondé alors $I_o(P)$ l'est aussi.

On en déduit que la hauteur de P est définie si et seulement si celle de $I_o(P)$ est définie. Il est intéressant dans ce cas, de donner un rapport entre la hauteur de ces deux ensembles bien fondés. On a :

II-1.2. THEOREME.

Soit P un ensemble bien fondé. Alors $h(I_o(P)) \leqslant \omega^{h(P)}$.

Cette inégalité est la meilleure possible :
pour chaque α il existe P tel que $h(I_o(P)) = \omega^{\alpha}$ et $h(P) = \alpha$.

Pour la preuve du théorème II-1.2., on a besoin des faits suivants :

II-1.3. LEMME.

Soit P un ensemble bien fondé et soit I dans $I_o(P)$.
Si $I = I_1 \cup I_2$ avec $I_1 , I_2 \in I_o(P)$ alors :
$$h(I, I_o(P)) \leqslant h(I_1 , I_o(P)) \oplus h(I_2 , I_o(P)).$$

En particulier, si les éléments maximaux dans I sont $\{x_o ,\ldots, x_n\}$, on obtient $h(I, I_o(P)) \leqslant h((\leftarrow x_o], I_o(P)) \oplus \ldots \oplus h((\leftarrow x_n], I_o(P))$.

Preuve.

On la fait par induction sur la hauteur des éléments de $I_o(P)$. Si $h(I, I_o(P)) = 0$, l'inégalité est évidente. Soit J dans $I_o(P)$ tel que $J \underset{\neq}{\subset} I$. Soit M l'ensemble des éléments maximaux de J ; soient $I'_1 = (\leftarrow I_1 \cap M]$ et $I'_2 = (\leftarrow I_2 \cap M]$. On a $J = I'_1 \cup I'_2$, avec $I'_1 \subseteq I_1$ et $I'_2 \subseteq I_2$, l'une des deux inclusions étant stricte. Donc, d'après l'hypothèse d'induction $h(J, I_o(P)) \leqslant h(I'_1, I_o(P)) \oplus h(I'_2, I_o(P))$ d'où $h(J, I_o(P)) < h(I_1, I_o(P)) \oplus h(I_2, I_o(P))$, puisque $h(I'_1, I_o(P)) < h(I_1, I_o(P))$ ou $h(I'_2, I_o(P)) < h(I_2, I_o(P))$. On en déduit que :

$$h(I, I_o(P)) \leqslant h(I_1, I_o(P)) \oplus h(I_2, I_o(P)).$$

Q.E.D.

II-1.4. LEMME.

Soit P un ensemble bien fondé. Pour tout x dans P, on a :

$$h((\leftarrow x], I_o(P)) \leqslant \omega^{h(x,P)}$$

Preuve.

On la fait par induction sur $h(x,P)$.

Si $h(x,P) = 0$, c'est-à-dire si est minimal dans P, on a $(\leftarrow x] = \{x\}$ donc $h(\{x\}, I_o(P)) = 1$ $(\emptyset \in I_o(P))$ et on a le résultat. Supposons que $h(x,P) = \alpha$ et soit $I \subsetneq (\leftarrow x]$ dans $I_o(P)$. Puisque $I \in I_o(P)$, il existe une antichaîne $\{x_o, \ldots, x_n\}$ telle que $I = (\leftarrow x_o] \cup \ldots \cup (\leftarrow x_n]$. Donc d'après le lemme II-1.3. :

$$h(I, I_o(P)) \leqslant h((\leftarrow x_o], I_o(P)) \oplus \ldots \oplus h((\leftarrow x_n], I_o(P)).$$

Or pour tout $i = 0, \ldots, n$, on a $h(x_i, P) < h(x,P)$. Donc d'après l'hypothèse d'induction $h(x_i, P) < \omega^\alpha$, d'où on en déduit que $h(I, I_o(P)) < \omega^\alpha$, donc $h((\leftarrow x], I_o(P)) \leqslant \omega^\alpha$.

Q.E.D.

Preuve du théorème II-1.2.

Soit I dans $I_o(P)$, alors il existe une antichaîne $\{x_o, \ldots, x_n\}$ telle que $I = (\leftarrow x_o] \cup \ldots \cup (\leftarrow x_n]$. D'après le lemme II-1.3., on a :

$$h(I, I_o(P)) \leqslant h((\leftarrow x_o], I_o(P)) \oplus \ldots \oplus h((\leftarrow x_n], I_o(P))$$

donc, d'après le lemme II-1.4, $h(I, I_o(P)) \leqslant \omega^{h(x_o , P)} \oplus \ldots \oplus \omega^{h(x_n , P)}$.

Or pour tout $i = 0 ,\ldots, n$ on a $h(x_i , P) < h(P)$ d'où $\omega^{h(x_i , P)} < \omega^{h(P)}$.

Donc $h(I, I_o(P)) < \omega^{h(P)}$, ce qui nous donne $h(I_o(P)) \leqslant \omega^{h(P)}$.

Q.E.D.

II-2. Hauteur d'un treillis distributif et de l'ensemble de ses éléments sup-irréductibles.

Soit T un treillis, on dit qu'un élément x de T est *sup-irréductible* si pour toute écriture $x = x_1 \vee x_2$, on a $x = x_1$ ou $x = x_2$. On note $T^{\vee}$ l'ensemble des éléments sup-irréductibles de T.

Si T est un treillis bien fondé alors tout élément de T est le supremum d'un nombre fini d'éléments sup-irréductibles. C'est-à-dire pour tout x dans T, $x = x_o \vee \ldots \vee x_n$ avec $x_i \in T^{\vee}$ pour $i = 0 ,\ldots, n$.

Donc, on peut associer à tout élément de T au moins une antichaîne finie de $T^{\vee}$.

Si l'on suppose de plus que le treillis T est distributif, alors l'antichaîne finie de $T^{\vee}$ associée à un élément est unique. C'est en substance le théorème suivant de G.BIRKHOFF [1] :

II-2.1. THEOREME.

Soit T un treillis distributif bien fondé. Alors T est isomorphe à $I_o(T^{\vee})$.

(Pour plus de détails, voir e.g. G.BIRKHOFF [1] ; G.GRATZER [5]).

La collection des ensembles ordonnés de la forme $I_o(P)$ avec P bien fondé englobe donc celle des treillis distributifs bien fondés. Naturellement pour qu'un $I_o(P)$ soit un treillis distributif il faut et il suffit que l'intersection de deux sections initiales finiment engendrées soit finiment engendrée.

Une conséquence immédiate des théorèmes II-1.2. et II-2.1. est la suivante :

II-2.2. PROPOSITION.

Soit T un treillis distributif bien fondé. Alors $h(T) \leq \omega^{h(T^{\vee})}$.

Application au treillis $\underset{\sim}{I}(P)$ des sections initiales d'un belordre :

Considérons un ensemble ordonné P; dans le treillis $\underset{\sim}{I}(P)$ des sections initiales de P ordonné par inclusion, les éléments sup-irréductibles sont exactement les idéaux de P. Si donc on suppose $\underset{\sim}{I}(P)$ bien fondé, c'est-à-dire P belordonné, on a alors $\underset{\sim}{I}(P) \cong I_0(\underset{\sim}{J}(P))$ où $\underset{\sim}{J}(P)$ est l'ensemble des idéaux de P d'où :

II-2.3. COROLLAIRE.

Soit P un ensemble belordonné. Alors $h(\underset{\sim}{I}(P)) \leq \omega^{h(\underset{\sim}{J}(P))}$.

III - TYPE D'ORDRE DES CHAINES D'UN TREILLIS DISTRIBUTIF.

Nous considérons un treillis distributif bien fondé. Nous distinguons deux cas suivant que la hauteur est dénombrable ou non.

III-1. Treillis distributif de hauteur dénombrable.

On a le résultat suivant :

III-1.1. THEOREME.

Soit T un treillis distributif bien fondé de hauteur α dénombrable. Alors T contient une chaîne de type α.

La preuve utilise les deux lemmes suivants qui sont valables quelque soit la cardinalité de la hauteur de T.

III-1.2. LEMME.

Soit T un treillis distributif bien fondé. Soit $x \in T$, alors $h(T) \leq h((\leftarrow x[) \oplus h([x \rightarrow))$.

Preuve.

On utilise le fait (e.g. cf. G.GRATZER [5]) que T est isomorphe à une partie du produit direct $(\leftarrow x] \times [x \rightarrow)$. Pour le voir, soit $\varphi : T \longrightarrow (\leftarrow x] \times [x \rightarrow)$ l'application définie par $\varphi(y) = (y \wedge x, y \vee x)$, alors φ est un isomorphisme sur son image.

En effet, il est clair que si $y_1 \leqslant y_2$ dans T, alors $\varphi(y_1) \leqslant \varphi(y_2)$.

Supposons maintenant que $\varphi(y_1) \leqslant \varphi(y_2)$.

On a $y_1 = y_1 \wedge (y_1 \vee x) \leqslant y_1 \wedge (y_2 \vee x)$, car $y_1 \vee x \leqslant y_2 \vee x$. Or T est distributif, donc :

$y_1 \wedge (y_2 \vee x) = (y_1 \wedge y_2) \vee (y_1 \wedge x) \leqslant (y_1 \wedge y_2) \vee (y_2 \wedge x) = y_2 \wedge (y_1 \vee x)$.

On a donc $y_1 \leqslant y_2 \wedge (y_1 \vee x) \leqslant y_2 \wedge (y_2 \vee x) = y_2$, puisque $y_1 \vee x \leqslant y_2 \vee x$.

Donc $y_1 \leqslant y_2$.

On en déduit que $h(T) \leqslant h((\leftarrow x] \times [x \rightarrow))$. D'après la proposition I-3.1. on a $h((\leftarrow x] \times [x \rightarrow)) < h((\leftarrow x]) \oplus h([x \rightarrow))$.

Et puisque $h((\leftarrow x]) = h((\leftarrow x[) + 1$, on en déduit que :

$$h(T) \leqslant h((\leftarrow x[) \oplus h([x \rightarrow)) .$$

Q.E.D.

III-1.3. COROLLAIRE.

Soit T un treillis distributif et soit $\alpha_o > \dots > \alpha_k > 0$ des ordinaux tels que $h(T) = \omega^{\alpha_1} + \dots + \omega^{\alpha_k}$. Alors pour tout $i=0,\dots,k$ et tout x tel que $h(x,T) = \sum_{j < i} \omega^{\alpha_j} + \delta$ avec $\delta < \omega^{\alpha_k}$, on a $h([x\,,\rightarrow)) = \sum_{i \leqslant j'} \omega^{\alpha_{j'}}$.

En particulier si $h(T) = \omega^{\alpha}$ alors, pour tout x dans T, on a :

$$h([x \ \rightarrow)) = \omega^{\alpha}.$$

.../...

Preuve.

On pose $\beta' = h([x \rightarrow))$ et $\beta = \sum_{i \leq j'} \omega^{\alpha_{j'}}$. On peut écrire β' sous la forme $\beta' = \sum_{i \leq \ell \leq n} \omega^{\beta'_\ell}$ tel que $\beta'_i \geq \dots \geq \beta'_n$.

Supposons que $\beta' < \beta$, donc il existe un plus petit entier m, tel que $\beta'_m \neq \alpha_m$ et $\beta'_m < \alpha_m$. On en déduit que :

$$\left(\sum_{j < i} \omega^{\alpha_j} + \delta\right) \oplus \beta' < \sum_{j < m} \omega^{\alpha_j} \leq h(T)$$

ce qui est contradictoire avec le fait que $h(T) \leq h((\leftarrow x[) \oplus h([x \rightarrow))$ (lemme II-3.2.). Donc $h([x \rightarrow)) = \sum_{j \geq i} \omega^{\alpha_{j'}}$.

Q.E.D.

Ce corollaire va nous permettre d'obtenir par induction la preuve du théorème, lorsque la hauteur n'est pas de la forme ω^α ou $\omega^\alpha + 1$.

III-1.4. LEMME.

Soit T un treillis distributif bien fondé, et un élément x de T tel que $h(x,T)$ soit un ordinal indécomposable, alors x est sup-irréductible et donc $(\leftarrow x[$ est un treillis.

Preuve.

On suppose que $x = x_1 \vee x_2$, avec $x_1 \neq x$ et $x_2 \neq x$. Alors on considère l'application $\varphi : (\leftarrow x] \longrightarrow (\leftarrow x_1] \times (\leftarrow x_2]$ définie par $\varphi(y) = (y \wedge x_1 \,;\, y \wedge x_2)$. On prouve que c'est un isomorphisme sur son image, en effet soient y et y' dans $(\leftarrow x]$ tels que $\varphi(y) \leq \varphi(y')$ c'est-à-dire : $y \wedge x_1 \leq y' \wedge x_1$ et $y \wedge x_2 \leq y' \wedge x_2$

On a $y = y \wedge (x_1 \vee x_2) = (y \wedge x_1) \vee (y \wedge x_2)$ d'après la distributivité de T. Or :

$$(y \wedge x_1) \vee (y \wedge x_2) \leq (y' \wedge x_1) \vee (y' \wedge x_2) = y' \wedge (x_1 \vee x_2) = y'$$

D'où $y \leq y'$.

On en déduit, d'après la proposition I-2.2. b) que :

$$h((\leftarrow x]) < h((\leftarrow x_1]) \oplus h((\leftarrow x_2])$$

ce qui veut dire $h(x,T)+1 < (h(x_1, T)+1) \oplus (h(x_2, T)+1)$, donc

$$h(x,T) < h(x_1, T) \oplus h(x_2, T)+1$$

d'où $h(x,T) \leq h(x_1, T) \oplus h(x_2, T)$.

Supposons maintenant que $h(x,T) = \omega^{\alpha}$, donc $h(x_1, T) < \omega^{\alpha}$ et $h(x_2, T) < \omega^{\alpha}$. D'après l'inégalité ci-dessus on a $h(x,T) < \omega^{\alpha}$: contradiction.

Q.E.D.

Preuve du théorème.

On procède par induction sur l'ordinal $\alpha = h(T)$.

1er cas.

α n'est pas indécomposable, c'est-à-dire qu'il s'écrit sous la forme $\alpha = \alpha' + \alpha''$ avec $0 < \alpha'' < \alpha$.

1er sous-cas.

Il existe au moins une telle décomposition avec $\alpha'' \neq 1$, c'est-à--dire que α ne s'écrit pas sous la forme $\alpha = \alpha' + 1$, avec α' indécomposable.

Ecrivons $h(T) = \omega^{\alpha_o} + \omega^{\alpha_1} + \ldots + \omega^{\alpha_k}$ avec $\alpha_o > \alpha_1 \ldots > \alpha_k > 0$.

Soit x dans T, tel que $h(x,T) = \omega^{\alpha_o}$, d'après le corollaire III-1.3. on a $h([x \rightarrow)) = \omega^{\alpha_1} + \ldots + \omega^{\alpha_k}$. Donc d'après l'hypothèse d'induction $[x \rightarrow)$ contient une chaîne C" de type $\omega^{\alpha_1} + \ldots + \omega^{\alpha_k}$. Et puisque $h((\leftarrow x]) = h(x,T)+1 = \omega^{\alpha_o}+1$, alors $(\leftarrow x]$ contient une chaîne C' de type ω^{α_o}.

La réunion C' + C" est une chaîne de type α dans T.

2ème sous-cas.

$\alpha = \omega^\beta + 1$. Dans ce cas T contient un plus grand élément que l'on note x. On a $h(x,T) = \omega^\beta$, donc d'après le lemme III-1.4., $(\leftarrow x[$ est un treillis distributif bien fondé. D'après l'hypothèse d'induction $(\leftarrow x[$ contient une chaîne C de type ω^β, d'où $C + \{x\}$ est de type α dans T.

2ème cas.

$\alpha = \omega^\beta$ indécomposable.

Soit $(\alpha_i)_{i < \omega}$ une suite strictement croissante d'ordinaux tel que $\alpha_o = 0$ et $\sup_{i<\omega} \alpha_i = \alpha$.

On construit par induction sur n, une suite strictement croissante $(x_n)_{n<\omega}$ dans T, et une suite $(C_n)_{n<\omega}$ de chaînes dans T avec C_n de type supérieur ou égal à α_n pour tout $n < \omega$.

On note x_o l'élément minimum de T et $C_o = \{x_o\}$.

Supposons construits $\{x_o, x_1, \dots, x_n\}$ et $\{C_o, C_1, \dots, C_n\}$.

Puisque $h([x_n \rightarrow)) = \alpha$ (corollaire III-1.3.), on choisit x_{n+1} dans $[x_n, \rightarrow)$ tel que $h(x_{n+1}, [x_n \rightarrow)) \geqslant \alpha_{n+1}$, d'où $h([x_n, x_{n+1}]) \geqslant \alpha_{n+1}$.

$[x_n, x_{n+1}]$ étant un treillis distributif bien fondé, d'après l'hypothèse d'induction, il contient une chaîne C_{n+1}, de type supérieur ou égal à α_{n+1}.

Il est clair que $C = \bigcup_{n<\omega} C_n$ est une chaîne de type α dans T.

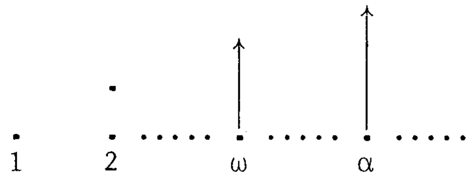
Q.E.D.

Concluons en notant qu'un treillis distributif de hauteur dénombrable n'est pas forcément dénombrable : considérer par exemple l'ensemble $\kappa^{<\omega}$, des parties finies de κ, ordonné par inclusion, où κ est un cardinal non dénombrable.

III-2. Types d'ordre des chaînes dans un treillis distributif de hauteur quelconque.

Dans le cas général l'énoncé du théorème III-1.1. est faux :

Considérons l'ensemble ordonné $X = \coprod_{\alpha < \omega_1} X_\alpha$ somme directe des chaînes X_α de type α.



pour $\alpha < \omega_1$

L'ensemble $I_o(X)$ ordonné par inclusion, des sections initiales de X qui sont finiment engendrées est un treillis distributif bien fondé. Or toute chaîne dans $I_o(X)$ est de type strictement inférieur à ω_1 bien que $h(I_o(X)) = \omega_1$.

Dans cette partie nous présentons une condition suffisante pour avoir le théorème en toute cardinalité :

Soit P un ensemble ordonné et soit κ un cardinal. Une κ-*suite extraite* de P est une application de κ dans P ; un cas usuel est celui d'une ω-suite ou d'une suite indexée par les entiers.

On dit que P *vérifie la condition* $\mathcal{P}(\kappa)$ si, pour toute κ-suite $(x_i)_{i < \kappa}$ extraite de P, on peut extraire une κ-sous-suite croissante. Par exemple P vérifie la condition $\mathcal{P}(\omega)$ veut dire qu'il est belordonné, ou encore qu'il est bien fondé et fini-libre (i.e. sans antichaîne infinie). Dans ce cas particulier il résulte du théorème de partition de BEN DUSHNIK et MILLER [4] que, de toute κ-suite extraite de P, on peut extraire une κ-sous-suite croissante, c'est-à-dire P vérifie $\mathcal{P}(\kappa)$ pour tout κ infini.

L'observation suivante nous sera très utile.

III-2.1. LEMME.

Soient P, Q deux ensembles ordonnés et κ un cardinal infini.

a). si P vérifie $\mathcal{P}(\kappa)$ et si Q est isomorphe à une partie de P ou image de P par une surjection croissante alors Q vérifie $\mathcal{P}(\kappa)$.

b). Si P et Q vérifient $\mathcal{P}(\kappa)$ alors $P \times Q$ aussi.

En particulier si P vérifie $\mathcal{P}(\kappa)$, le produit $P^n = P \times \ldots \times P$ (n fois) aussi.

Preuve.

Le a) est immédiat : pour le b) on procède ainsi.

Soit $((x_i, y_i))_{i < \kappa}$ une κ-suite extraite de $P \times Q$. Puisque P vérifie $\mathcal{P}(\kappa)$, alors on peut extraire de $(x_i)_{i < \kappa}$ une κ-sous-suite croissante $(x_j)_{j \in M}$ telle que $M \subset \kappa$ et $|M| = \kappa$. Donc $(x_i, y_j)_{j \in M}$ est une κ-suite dans $P \times Q$.

De même, Q vérifie $\mathcal{P}(\kappa)$ donc on peut extraire de $(y_j)_{j \in M}$ une κ-sous-suite croissante $(y_k)_{k \in N}$ tel que $N \subset M$ et $|N| = \kappa$. D'où on obtient une κ-sous-suite $(x_k, y_k)_{k \in N}$ croissante dans $P \times Q$.

Q.E.D.

III-2.2. LEMME.

Soit P un ensemble belordonné et soit κ un cardinal régulier indénombrable $(\kappa > \omega)$.

Alors $\underset{\sim}{I}(P)$ vérifie la condition $\mathcal{P}(\kappa)$.

Preuve.

Soit $(I_i)_{i < \kappa}$ une κ-suite extraite de $I(P)$ et soit $i < \kappa$. On note M_i l'ensemble des éléments minimaux de $P \setminus I_i$; évidemment $|M_i|$ est fini pour tout $i < \kappa$. Pour tout entier k, on note C_k la classe des M_i

tel que $|M_i| = k$. Puisque κ est régulier, il existe alors une classe, soit C_n, de cardinalité κ. Après réindexation, soit $C_n = (N_j)_{j < \kappa}$, une κ-sous-suite de $(M_i)_{i < \kappa}$. Donc pour tout $j < \kappa$, $N_j = \{x_i^j, \ldots, x_n^j\}$, d'où on peut considérer $(N_j)_{j < \kappa}$, comme une κ-suite extraite de $P \times \ldots \times P$ (n fois). Or P est un belordre donc il vérifie $\mathcal{P}(\kappa)$, et il en est de même pour $P \times \ldots \times P$ (lemme III-2.1.). On peut alors extraire une κ-sous-suite $(N'_\ell)_{\ell < \kappa}$ croissante.

Il est clair que la κ-sous-suite de sections initiales, correspondantes à $(N'_\ell)_{\ell < \kappa}$ est croissante.

Q.E.D.

Le résultat principal est le suivant :

III-2.3. THEOREME.

Soit T un treillis distributif.

Si T vérifie la condition $\mathcal{P}(\kappa)$ pour tout cardinal régulier κ tel que $\omega < \kappa$, alors T contient une chaîne de type $h(T)$.

Preuve.

On la fait par induction sur $h(T) = \alpha$.

1er cas.

α est décomposable.

La preuve faite dans le théorème III-1.1. concernant les hauteurs dénombrables décomposables, reste valable dans le cas général.

2ème cas.

$\alpha = \omega^\beta$ indecomposable.

1er sous-cas.

$cf(\beta) \leqslant \omega$.

On fait exactement la même preuve que pour les hauteurs indécomposables dénombrables.

2ème sous-cas.

$cf(\beta) = \kappa > \omega$, donc κ est régulier.

Soit $(\beta_i)_{i<\kappa}$ une κ-suite strictement croissante d'ordinaux telle que $\sup\limits_{i<\kappa} \omega^{\beta_i} = \omega^{\beta}$.

Pour tout $i < \kappa$, on choisit x_i dans T tel que $h(x_i , T) = \omega^{\beta_i}$. Puisque T vérifie la condition $\mathcal{P}(\kappa)$ on peut extraire de la κ-suite $(x_i)_{i<\kappa}$ une κ-sous-suite croissante. Donc, après renumérotation de cette κ-sous-suite, on obtient une κ-suite $(y_j)_{j<\kappa}$ strictement croissante (puisque tous les x_i sont différents) telle que pour tout $j < \kappa$,

$$h(y_j , T) = \omega^{\beta'_j} \quad \text{et} \quad \sup_{j<\kappa} \omega^{\beta'_j} = \omega^{\beta}.$$

Maintenant on construit, par induction sur i, une κ-suite de chaînes de T soit $(C_i)_{i<\kappa}$.

- On a $h(y_o , T) = \omega^{\beta'_o}$ donc, d'après le lemme III-1.4., $(\leftarrow y_o[$ est un treillis, en plus $(\leftarrow y_o[$ vérifie la condition $\mathcal{P}(\kappa)$ pour tout κ régulier donc d'après l'hypothèse d'induction $(\leftarrow y_o[$ contient une chaîne C_o de type $\omega^{\beta'_o}$.

- Supposons construites les chaînes $(C_i)_{i<\mu}$ avec $\mu < \kappa$.

$*$ Si $\mu = \delta+1$, on a $h(y_\delta , T) = \omega^{\beta'_\delta}$ et $h(y_\mu , T) = \omega^{\beta'_\mu}$. Or $y_\delta \in (\leftarrow y_\mu[$ et, d'après le lemme III-1.4., $(\leftarrow y_\mu[$ est un treillis distributif bien fondé. Donc d'après le lemme III-1.2.,

$$h((\leftarrow y_\mu[) \leq h((\leftarrow y_\delta[) \oplus h([y_\delta , y_\mu])$$

d'où $h([y_\delta , y_\mu]) = \omega^{\beta'_\mu}$. D'après l'hypothèse d'induction $[y_\delta , y_\mu]$ contient une chaîne C'_μ de type $\omega^{\beta'_\mu}$. On pose $C_\mu = C_\delta + C'_\mu$.

* Si μ est limite, on pose $C_\mu = \bigcup_{\delta < \mu} C_\delta + \{y_\mu\}$.

Il est clair que la chaîne $C = \bigcup_{i < \kappa} C_i$ est de type ω^β dans T.

Q.E.D.

Application au treillis $\underset{\sim}{I}(P)$ des sections initiales d'un belordre P.

Comme conséquence du théorème III-2.3. et du lemme III-2.2., on obtient :

III-2.4. THEOREME.

Soit P un ensemble belordonné, alors l'ensemble $\underset{\sim}{I}(P)$ des sections initiales de P contient une chaîne de type $h(\underset{\sim}{I}(P))$.

Ceci est une version équivalente au résultat suivant, dû à D.DE JONGH et R.PARIKH [3], et en fournit une nouvelle preuve :

III-2.5. THEOREME.

Soit P un ensemble belordonné. Parmi les extensions linéaires de P, l'une d'elles a un type d'ordre maximum.

Pour le voir utilisons le résultat classique (cf. R.BONNET et M.POUZET [2]) suivant :

III-2.6. THEOREME.

Soit P un ensemble ordonné.

a). si $\overline{P}$ est une extension linéaire de P alors $\underset{\sim}{I}(\overline{P})$ est une chaîne maximale de $\underset{\sim}{I}(P)$.

b). Si C est une chaîne maximale de $\underset{\sim}{I}(P)$, alors il existe une unique extension linéaire $\overline{P}$ de P telle que $C = \underset{\sim}{I}(\overline{P})$.

L'ensemble P étant belordonné, $\underset{\sim}{I}(P)$ contient au moins une chaîne de type d'ordre maximum, qui est la hauteur de $\underset{\sim}{I}(P)$. Une chaîne maximale C la contenant a le même type d'ordre et l'extension linéaire correspondant est de type d'ordre maximum.

Réciproquement si $\overline{P}$ est une extension linéaire de type maximum de P, alors un raisonnement par induction n'utilisant pas notre résultat montre que $\underset{\sim}{I}(\overline{P})$ a pour type la hauteur de $\underset{\sim}{I}(P)$.

Commentaire.

La condition $\mathcal{P}(\kappa)$, imposée dans l'énoncé du théorème III-2.3. est probablement trop forte : elle n'est pas forcément satisfaite lorsque la hauteur de T est dénombrable alors que la conclusion du théorème reste valable. Une condition plus intéressante semble être celle-ci : P vérifie la condition $\mathcal{P}^*(\kappa)$ si pour toute κ-suite $(x_i)_{i<\kappa}$, avec $(h(x_i, P))_{i<\kappa}$ strictement croissante, on peut extraire une κ-sous-suite croissante.

Il a été prouvé par E.C.MILNER et N.SAUER [7], ainsi que M.POUZET [8], que tout P (treillis ou non) vérifiant $\mathcal{P}^*(\omega)$ contient une chaîne de type d'ordre h(P). Nous ignorons si un treillis distributif satisfaisant $P^*(\kappa)$ pour tout $\kappa > \omega$ a la même propriété.

IV - CHAINES PASSANT PAR TOUS LES NIVEAUX DE HAUTEUR.

Nous venons de voir que si P est un ensemble belordonné alors l'ensemble $\underset{\sim}{I}(P)$ des sections initiales de P contient une chaîne de type $h(\underset{\sim}{I}(P))$.

Il est naturel de se demander si, plus fortement, $\underset{\sim}{I}(P)$ contient une chaîne C qui passe par tous les niveaux : c'est-à-dire une chaîne C telle que pour tout $\alpha < h(\underset{\sim}{I}(P))$, il existe J dans C avec $h(J, \underset{\sim}{I}(P)) = \alpha$.

En terme d'extension linéaire cela correspondrait à une extension linéaire $\overline{P}$ de type d'ordre maximum, dont la restriction à toute section initiale de $\overline{P}$ serait encore de type maximum.

La réponse est négative, comme le montre l'exemple que nous construisons ci-dessous.

IV-1. Construction de l'exemple.

Etant donné un entier $n \geqslant 1$, soit A_n l'ensemble défini comme suit :

$$A_n = \{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n \text{ tel que } \sum_{1 \leqslant i < n} k_i + (n-1) \leqslant k_n\}$$

ordonné par la relation :

$$(k_1, \dots, k_n) \leqslant (\ell_1, \dots, \ell_n) \text{ lorsque } \begin{cases} (k_1, \dots, k_{n-1}) \leqslant (\ell_1, \dots, \ell_{n-1}) \\ \text{lexicographiquement, et} \\ k_n \leqslant \ell_n. \end{cases}$$

Par exemple :

A_1 est l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers muni de l'ordre usuel

A_2 est l'ensemble $[\mathbb{N}]^2 = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ i < j\}$ ordonné suivant les composantes i.e. $(i,j) \leqslant (i', j')$ lorsque $i \leqslant i'$ et $j \leqslant j'$ (cf. figure 1). La structure de A_3 est un peu plus compliquée, mais dans tous les cas les chaînes dans A_n sont de type au plus ω, et pour tout x dans A_n, la section initiale principale $(\leftarrow x]$ est finie.

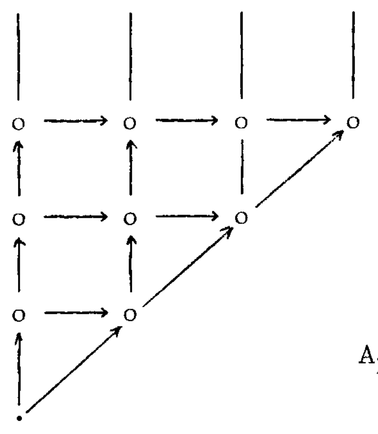


figure 1

A_2 $A_2 \cup \{(i,i)/i \in \mathbb{N}\}$

On pose $A = \bigcup_{n \geqslant 1} A_n$ que l'on ordonne comme suit :

$(k_1, \dots, k_n) \leqslant (\ell_1, \dots, \ell_m)$ si et seulement si :

$$\begin{cases} n = m \text{ et } (k_1, \dots, k_n) \quad (\ell_1, \dots, \ell_n) \text{ dans } A_n \\ \text{ou} \\ n < m \text{ et } k_n < m-1. \end{cases}$$

Cet ensemble est représenté par la figure 2 :

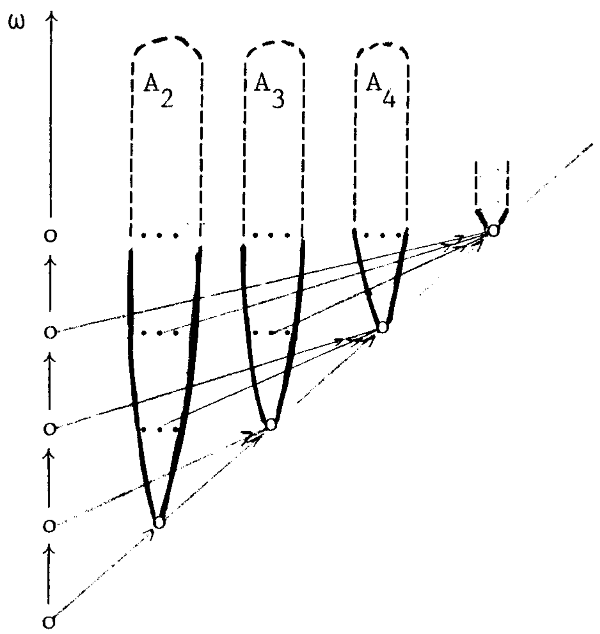


Figure 2

IV-2. Hauteur de $\underset{\sim}{I}(A)$.

Pour calculer la hauteur de A dans $\underset{\sim}{I}(A)$, on a besoin des faits suivants :

IV-2.1. LEMME.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, l'ensemble A_n est belordonné et $h(A_n, \underset{\sim}{I}(A_n)) = \omega^n$.

Preuve.

Si $n = 1$ alors $A_1 = \mathbb{N}$ muni de l'ordre naturel sur les entiers.

Si $n > 1$ alors A_n est une partie du produit direct $\mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{N}$, avec $\mathbb{N}^{n-1}$ ordonné lexicographiquement (donc c'est une chaîne bien ordonnée de type ω^{n-1}) et $\mathbb{N}$ muni de l'ordre naturel sur les entiers. Donc A_n est belordonné.

En plus $h(A_n, \underset{\sim}{I}(A_n)) \leqslant \omega^n$ puisque le type maximum des extensions linéaires de $\mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{N}$ est ω^n, et si on ordonne les n-uplets de A_n lexicographiquement on obtient une extension linéaire de A_n de type ω^n.

Donc $h(A_n, \underset{\sim}{I}(A_n)) = \omega^n$.

Q.E.D.

IV-2.2. LEMME.

Soit I une section initiale propre de A. Alors il existe un entier k tel que $I \cap A_n = \emptyset$, pour tout $n > k$.

En particulier, si I est un idéal alors il existe un entier ℓ tel que $I \subset \tilde{A}_\ell$ avec $\tilde{A}_\ell = (\leftarrow A_\ell]$.

Preuve.

Supposons que $I \cap A_n \neq \emptyset$ pour tout $n \in M$, avec M partie infinie de $\mathbb{N}$. Soit $(\ell_1, \ldots, \ell_i)$ dans A ; il existe $k \in M$ tel que $k-1 > \mathrm{Max}\{(\ell_i, i\}$. Donc $(\ell_1, \ldots, \ell_i) \leqslant (0, \ldots, 0, k-1)$, ou $(0, \ldots, 0, k-1)$ est plus petit élément de A_k, et $I \cap A_k \neq \emptyset$. D'où $(\ell_1, \ldots, \ell_i) \in I$ et $I = A$. Donc il existe un entier k tel que

$$I \subset A_1 \cup \ldots \cup A_k = \tilde{A}_1 \cup \ldots \cup \tilde{A}_k.$$

En particulier, si I est un idéal alors il est contenu dans l'une de ces sections initiales, soit $\tilde{A}_\ell$.

Q.E.D.

IV-2.3. PROPOSITION.

L'ensemble A est belordonné et $h(A, \underset{\sim}{I}(A)) = \omega^\omega$.

Preuve.

Supposons que A contienne une suite infinie $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'éléments deux à deux incomparables. D'après le lemme IV-2.2., la section initiale engendrée par les éléments de $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est contenue dans une réunion finie $A_1 \cup \ldots \cup A_k$. Donc il existe i dans $\{0, \ldots, k\}$, tel que A_i contient une antichaîne infinie, ce qui contredit le lemme IV-2.1..

En utilisant le même raisonnement, il est clair que A est bien fondé.

Puisque A est un belordre, $\underset{\sim}{I}(A)$ est bien fondé et on peut définir la hauteur de $\underset{\sim}{I}(A)$. Soit I une section initiale propre de A, il existe un entier k tel que $I \subset A_1 \cup \ldots \cup A_k$, d'où $h(I, \underset{\sim}{I}(A)) < \omega^k$ et $h(A, \underset{\sim}{I}(A)) \leq \omega^\omega$. Or si on considère les sections initiales $\widetilde{A}_i$, on a $h(\widetilde{A}_i, \underset{\sim}{I}(A)) \geq \omega^i$, d'où $h(A, \underset{\sim}{I}(A)) = \omega^\omega$.

Q.E.D.

IV-3. Propriété de $\underset{\sim}{I}(A)$.

IV-3.1. THEOREME.

$\underset{\sim}{I}(A)$ ne contient pas de chaîne qui passe par tous les niveaux.

Preuve.

Prouvons tout d'abord, que pour tout entier i, l'ensemble $\widetilde{A}_i / A_i$ est de cardinal fini. Soit $(k_1, \ldots, k_n)$ dans $\widetilde{A}_i / A_i$, donc on a $\sum_{j<n} k_j + (n-1) \leq k_n$ et $k_n < i-1$, d'où $\sum_{j \leq n} k_j < 2\,(i-1)$. L'ensemble de tels éléments est évidemment fini.

Prenons deux entiers différents i et i'. On a :

$$\widetilde{A}_i \cap \widetilde{A}_{i'} = (\widetilde{A}_i \setminus A_i) \cap (\widetilde{A}_{i'} \setminus A_{i'})$$

d'où $|\widetilde{A}_i \setminus \widetilde{A}_{i'}|$ est fini.

Revenons à la preuve du théorème, et supposons que $\underset{\sim}{I}(A)$ contient une chaîne $(I_\alpha)_{\alpha < \omega^\omega}$ qui passe par tous les niveaux de hauteurs.

Donc $h(I_\alpha, \underset{\sim}{I}(A)) = \alpha$ pour tout $\alpha < \omega^\omega$, en particulier $h(I_\omega, \underset{\sim}{I}(A)) = \omega$.

Or une section initiale de hauteur indécomposable est un idéal (lemme III-1.4.) donc d'après le lemme IV-2.2., il existe un entier i tel que $I_\omega \subset \widetilde{A}_i$.

Prenons un entier $j > i$, on a $h(I_{\omega^j}, \underset{\sim}{I}(A)) = \omega^j > \omega^i$, donc $I_{\omega^j} \not\subset \widetilde{A}_i$; par contre il existe un entier i' tel que $I_{\omega^j} \subset \widetilde{A}_{i'}$. Or $|\widetilde{A}_i \cap \widetilde{A}_{i'}|$ est fini, donc $|I_\omega \cap I_{\omega^j}|$ est fini, ce qui contredit les faits que $I_\omega \subset I_{\omega^j}$ et I_ω est infini.

Q.E.D.

IV-3.2. Problème.

Est-il vrai que tout belordre P contient une partie isomorphe à A dès que $\underset{\sim}{I}(P)$ ne contient pas de chaînes passant par tous les niveaux ?

Commentaires.

a). D'après la généralisation du lemme de KOENIG, tout ensemble belordonné contient une chaîne qui passe par tous les niveaux. Donc pour tout ensemble P vérifiant la même propriété que A l'ensemble $\underset{\sim}{I}(P)$ est non belordonné (en particulier pour $\underset{\sim}{I}(A)$, l'ensemble des $\tilde{A}_n$ forme une antichaîne infinie).

Les ensembles belordonnés dont l'ensemble des sections initiales n'est pas belordonné peuvent être complètement caractérisés au moyen de l'ensemble R, dû à RADO, défini comme suit :

$$R = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 , i < j\} \text{ ordonné par la relation :}$$

$$(i,j) \leqslant (i' , j') \text{ lorsque } \begin{cases} i = i' \text{ et } j \leqslant j' \\ \text{ou} \\ j < i'. \end{cases}$$

(cf. figure 3).

La caractérisation dûe à R.LAVER est la suivante : *soit* P *un ensemble belordonné ,* $\underset{\sim}{I}(P)$ *est non belordonné si et seulement si* P *contient une partie isomorphe à* R.

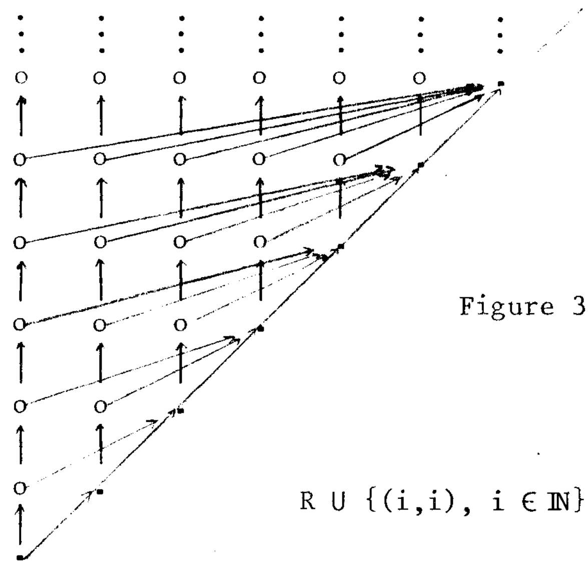


Figure 3.

$R \cup \{(i,i), i \in \mathbb{N}\}$

Notre exemple consiste à remplacer dans l'ensemble de RADO les chaînes verticales par les ensembles A_n.

b). L'exemple A prouve aussi que l'ensemble $\underset{\sim}{J}(P)$ des idéaux d'un belordre P, ne contient pas nécessairement de chaînes dont le type d'ordre est égal à $h(\underset{\sim}{J}(P))$.

En effet, si l'on considère pour tout entier $n \geqslant 1$, et pour tout n-uplet $(i_1, \ldots, i_n)$ l'idéal $L_{(i_1, \ldots, i_n)}$ de A_{n+1} engendré par $\{(i_1, \ldots, i_n, k), \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} i_j) + n \leqslant k\}$. Alors $L_{(i_1, \ldots, i_n)} \subset L_{(i'_1, \ldots, i'_n)}$ si et seulement si $(i_1, \ldots, i_n) \leqslant (i'_1, \ldots, i'_n)$ lexicographiquement.
Ce qui nous donne une chaîne d'idéaux de type ω^n dans A_{n+1}.
Donc $h(\underset{\sim}{J}(A)) = \omega^\omega$, sans que A contienne une chaîne d'idéaux de type ω^ω.

BIBLIOGRAPHIE.

[1]. G.BIRKHOFF :

Lattice Theory,

A.M.S. Colloquium publications, Vol.15.

[2]. R.BONNET - M.POUZET :

Linear extensions of ordered sets ;

Ordered Sets, I.RIVAL (Ed.), p.125-170, (1982), REIDEL C^{ie}.

[3]. D.H.J. DE JONGH - R.PARIKH :

Well partial Ordering and Hierarchies,

Indagationes Mathematicae (1977), Vol.39, p.195-206.

[4]. B.DUSHNIK - E.W.MILLER :

Partially Ordered Sets,

Amer. J. Math. 63, (1941), p.600-610.

[5]. G.GRATZER :

General lattice theory,

(1978), Academic Press, NEW-YORK.

[6]. E.KAMKE :

Theorie des ensembles,

(1964), DUNOD, PARIS.

[7]. E.C.MILNER - N.SAUER :

On chains and antichains in well founded partially ordered sets,

J. London. Math. Soc. (2), 24, (1981), p.15-33.

[8]. M.POUZET :

Sur les chaînes d'un ensemble partiellement bien ordonné ;

Publ. Dépt. Math. (Lyon I), 16, (1979).