GILBERT PRIMET

Contractions de groupes de Lie semi-simples sur le groupe de Poincaré généralisé

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1983, fascicule 6D
« Contractions de groupes de Lie semi-simples sur le groupe de Poincaré généralisé », , p. 1-69
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1983___6D_A1_0>

CONTRACTIONS DE GROUPES DE LIE SEMI-SIMPLES
SUR LE GROUPE DE POINCARE GENERALISE

par Gilbert PRIMET

RESUME. - Après avoir redéfini le contracté d'un groupe de Lie semi-simple (dans le cas d'une paire symétrique), nous montrons que les représentations de masse positive du groupe de Poincaré généralisé $\mathbb{R}^{n+1} \odot SO_o(1,n)$ sont limites, en un sens que nous précisons, des représentations du groupe de Lorentz $SO_o(1,n+1)$. Nous donnons la liste des orbites de la représentation coadjointe de ce groupe. Puis nous montrons que les orbites de la représentation coadjointe du contracté d'un groupe semi-simple peuvent être approximées à l'aide des orbites de ce dernier groupe. Nous interprétons ce résultat en termes de représentations pour le groupe de Poincaré. Enfin, nous montrons que les représentations de masse imaginaire du groupe de Poincaré s'obtiennent comme limites de représentations de $SO_o(2,n)$.

*

INTRODUCTION.

Les déformations d'algèbres et de groupes de Lie, utilisées depuis longtemps par les physiciens, ont été peu étudiées mathématiquement, du fait d'une définition qui n'était guère pratique. Récemment, Dooley et Rice [4] en ont renouvelé la présentation et ont étudié les contractions d'un groupe de Lie semi-simple sur son groupe des déplacements de Cartan. (Cf. également Ricci [6]).

Nous nous intéressons dans cet article aux contractions d'un groupe semi-simple parallèlement à un sous-groupe non compact. Cette étude présente un intérêt physique : le paramètre servant à définir la contraction représente la valeur absolue de la courbure de l'univers dans le cas particulier de la contraction du groupe de De Sitter $SO_o(1,4)$ vers le groupe de Poincaré $\mathbb{R}^4 \odot SO_o(1,3)$, parallèlement au groupe de Lorentz.

Les principaux résultats obtenus sont les suivants,

- Nous montrons que les séries principales de $SO_o(1,n+1)$ se contractent vers les représentations de masse réelle de $\mathbb{R}^{n+1} \odot SO_o(1,n)$: Chap. II. [5]

- Nous donnons une liste exhaustive des orbites de la représentation coadjointe de $SO_o(1,n)$, ainsi qu'une paramétrisation simple de ces orbites : Chap. III. [3]

- Nous montrons qu'il est possible de déformer les orbites d'un groupe semi-simple pour obtenir toutes les orbites du groupe contracté : Chap. IV, [3] et que les résultats du chapitre II s'interprètent correctement à partir de la déformation des orbites : Chap. IV. [4] .

- Nous montrons enfin que les représentations de masse imaginaire de $\mathbb{R}^{n+1} \odot SO_o(1,n)$ s'obtiennent par contraction de certaines représentations de $SO_o(2,n)$: Ch. V.

SOMMAIRE.

*

I - DEFINITION DU GROUPE CONTRACTE.

1.1. Nous supposons que le couple (G,H) est une paire symétrique. Ceci signifie que G est un groupe de Lie semi-simple, connexe, H un sous-groupe fermé de G et qu'il existe un automorphisme involutif σ de G tel que $(H_\sigma)_o \subset H \subset H_\sigma$, où H_σ est l'ensemble des points fixes de σ et $(H_\sigma)_o$ la composante connexe de H_σ.

L'algèbre de Lie $\underline{H}$ du groupe H est alors l'ensemble des points fixes de $d\sigma$, qui est un automorphisme involutif de $\underline{G}$, algèbre de Lie du groupe G. Soit V l'ensemble des $x \in \underline{G}$ tels que $d\sigma(x) = -x$. On peut écrire $\underline{G} = \underline{H} \oplus V$. De plus V et $\underline{H}$ sont orthogonaux pour la forme de Killing de $\underline{G}$, dont la restriction à V et à $\underline{H}$ est donc non dégénérée, et on a les relations suivantes : $[\underline{H},V] \subset V$; $[V,V] \subset \underline{H}$; $[\underline{H},\underline{H}] \subset \underline{H}$. La décomposition $\underline{G} = \underline{H} + V$ généralise donc la décomposition de Cartan d'une algèbre de Lie.

1.2. On se place dans les hypothèses de 1.1. Lorsque le sous-espace V est stable par $Ad_{|H}$, on peut former le produit semi-direct $V \underset{Ad}{\odot} H$, où H agit sur l'espace V par Ad. Ce groupe est alors appelé le contracté de G suivant H.

1.3. Pour tout $r > 0$, on considère l'application suivante de $V \odot H$ dans G, notée π_r : $(v,h) \underset{\pi_r}{\longmapsto} (\exp rv)_G \,.\, h$ $(v \in V,\ h \in H$; on rappelle que $V \subset \underline{G})$. La différentielle à l'origine de l'application π_r est l'application $d\pi_r$ de $V \times \underline{H}$ dans $\underline{G} : (v,h) \longmapsto rv + h$. $(v \in V$; $h \in \underline{H})$.

Naturellement, $V \times \underline{H}$ s'identifie en tant qu'espace vectoriel à $\underline{G}$ et nous pourrons considérer que $d\pi_r$ est une application de $\underline{G}$ dans $\underline{G}$. On peut enfin définir l'application ${}^t(d\pi_r)$ qui va de $\underline{G}^*$ dans $V^* \times \underline{H}^*$, et que nous pourrons éventuellement considérer comme une application de $\underline{G}^*$ dans $\underline{G}^*$.

Pour plus de précisions, se reporter à DOOLEY et RICE [4].

II - CONTRACTION DES REPRESENTATIONS DE $SO_o(1, n+1)$ SUR CELLES DU GROUPE DE POINCARE $\mathbb{R}^{n+1} \odot SO_o(1,n)$.

$\boxed{1}$ NOTATIONS.

1.1. Le groupe $G = SO_o(1, n+1)$ est la composante connexe neutre groupe orthogonal de la forme quadratique Q de signature $(+,-,\ldots,-)$ définie pour $x = (x_o, x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2}$ par

$$Q(x) = x_o^2 - x_1^2 - \ldots - x_{n+1}^2 .$$

Pour cette forme, la base canonique $(e_o, \ldots, e_{n+1})$ vérifie

$$Q(e_o) = 1 \quad \text{et} \quad Q(e_i) = -1, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n+1 .$$

1.2. De même, le groupe $J = SO_o(1,n)$ est la composante connexe neutre du groupe orthogonal de la forme B de signature $(+,-,-,\ldots)$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$ définie pour $x = (x_o, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ par

$$B(x) = x_o^2 - x_1^2 - \ldots - x_n^2 .$$

Par commodité, nous noterons $(f_o, \ldots, f_n)$ la base canonique sur $\mathbb{R}^{n+1}$. Au besoin, nous noterons aussi B la forme bilinéaire symétrique associée.

(N.B. : Cette distinction des espaces $\mathbb{R}^{n+2}$ et $\mathbb{R}^{n+1}$ est nécessaire pour la clarté de la suite).

J est isomorphe à l'ensemble des matrices de G de la forme $\left(\begin{array}{c|c} j & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$, où $j \in SO_o(1,n)$, autrement dit au stabilisateur de e_{n+1} dans $SO_o(1, n+1)$. Nous noterons également J ce dernier ensemble.

1.3. La décomposition d'Iwasawa de $SO_o(1, n+1)$ s'écrit $SO_o(1, n+1) = KAN$ où :

- Le sous-groupe K est l'ensemble des matrices de la forme $\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & U \end{array}\right)$, où $U \in SO(n+1)$, évidemment isomorphe à $SO(n+1)$.

- Le sous-groupe A, isomorphe à $\mathbb{R}$, est l'ensemble des matrices de la forme :

$$a_t = \begin{pmatrix} \mathrm{cht} & & & \mathrm{sht} \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ \mathrm{sht} & & & \mathrm{cht} \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}) \quad .$$

- Le sous-groupe N, isomorphe à $\mathbb{R}^n$, est le groupe des matrices de la forme :

$$n_x = \begin{pmatrix} 1 + \frac{|x|^2}{2} & {}^t x & -\frac{|x|^2}{2} \\ x & \mathrm{Id} & -x \\ \frac{|x|^2}{2} & {}^t x & 1 - \frac{|x|^2}{2} \end{pmatrix}$$

où

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ et $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$, et ${}^t x$ désigne la matrice ligne transposée de x.

D'autre part, le commutant M de A dans K est l'ensemble des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{m} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad m \in SO(n) \; .$$

Il est évidemment isomorphe à SO(n).

$\boxed{2}$ SERIES PRINCIPALES DE $SO_o(1, n+1)$.

2.1. On vérifie que P = MAN est un sous-groupe de $SO_o(1, n+1)$. Pour $\lambda \in R$, l'application $a_t \xmapsto{\rho_\lambda} e^{it\lambda}$ est un caractère unitaire de A. Nous noterons $a_t^{i\lambda} = \rho_\lambda(a_t)$.

Soit u une représentation unitaire irréductible de M (On sait qu'en fait, toute représentation continue irréductible de M est unitarisable).

L'application $u \otimes \rho_\lambda$ définie par la formule man $\longmapsto a_t^{i\lambda}\, u(m)$ est une représentation unitaire de P. Les séries principales $U_{u,\lambda}$ de $SO_o(1, n+1)$, paramétrées par $u \in \hat{M}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, sont définies par :

$$U_{u,\lambda} = \mathrm{Ind}_P^G(u \otimes \rho_\lambda) .$$

2.2. Les séries principales peuvent être construites sur $L^2(G/_{MAN}, \mu)$, où μ est une mesure sur $G/_{MAN}$ quasi-invariante par l'action de G.

Le groupe G agit transitivement sur le demi-cône ouvert C_o^+ de $\mathbb{R}^{n+2}$ d'équation $\xi_o^2 - \xi_1^2 - \dots - \xi_{n+1}^2 = 0 \quad \xi_o > 0$. Il agit également transitivement sur $P(C_o^+)$, ensemble des raies de ce demi-cône. Le stabilisateur de la raie $\mathbb{R}^+(e_o + e_n)$ est $P = MAN$ et $G/_{MAN}$ est donc homéomorphe à $P(C_o^+)$. L'application

$$\mathbb{R}(x_o, x_1, \dots, x_{n+1}) \longmapsto (\xi_o, \dots, \xi_n) \text{ , où } \xi_o = \frac{x_o}{x_{n+1}}, \dots, \xi_n = \frac{x_n}{x_{n+1}}$$

est une bijection continue d'un ouvert partout dense de $P(C_o^+)$ sur l'hyperboloïde H_1 de $\mathbb{R}^{n+1}$ d'équation $x_o^2 - x_1^2 - \dots - x_n^2 = 1$. L'application réciproque est $(\xi_o, \dots, \xi_n) \longmapsto \mathbb{R}(\varepsilon\xi_o, \dots, \varepsilon\xi_n, \varepsilon)$, où $\varepsilon = \mathrm{sgn}\, \xi_o$.

2.3. L'action de G sur le cône se transporte en l'action presque partout définie sur l'hyperboloïde H_1 par :

Pour $g = (g_{ij})_{i,j}$, $g.(\xi_o, \dots, \xi_n) = (\xi'_o, \dots, \xi'_n)$, où

$$\xi'_i = \frac{g_{i,o}\xi_o + \dots + g_{i,n}\xi_n + g_{i,n+1}}{g_{n+1,o}\xi_o + \dots + g_{n+1,n}\xi_n + g_{n+1,n+1}} \qquad 0 \leq i \leq n .$$

Cette action est bien sûr continue quand elle est définie. Le groupe $J = SO_o(1,n)$, identifié à un sous-groupe de G, agit a priori de deux façons sur H_1. En fait, dans les deux cas, on obtient bien la même action, à savoir l'action canonique de J sur H_1.

2.4. Rappelons que H_1 possède deux composantes connexes, notées H_1^+ et H_1^-

$$H_1^+ = \{(\xi_o,\ldots,\xi_n) \in H_1 \,/\, \xi_o > 0\}$$

$$H_1^- = \{(\xi_o,\ldots,\xi_n) \in H_1 \,/\, \xi_o < 0\} .$$

Chacune de ces composantes possède une carte dans $\mathbb{R}^n$, notée respectivement Φ^+ ou Φ^-, qui est la restriction à H_1^+ ou H_1^- de l'application $(\xi_o,\ldots,\xi_n) \longmapsto (\xi_1,\ldots,\xi_n)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans $\mathbb{R}^n$.

Toute application f de H_1 dans $\mathbb{C}$ (ou dans un espace vectoriel) s'écrit de manière unique $f = f^+ + f^-$ avec $\mathrm{supp}\, f^+ \subset H_1^+$, $\mathrm{supp}\, f^- \subset H_1^-$. H_1 possède une mesure dm_1, invariante pour l'action de J. Elle est définie par :

$$\int_{H_1} f(x)dm_1(x) = \sum_{\varepsilon=+,-} \int_{\mathbb{R}^n} f^{\varepsilon}\left[(\Phi_\varepsilon)^{-1}(\xi)\right] \frac{d\xi_1 \ldots d\xi_n}{\sqrt{1+\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2}} .$$

On montre que la mesure dm_1 est quasi-invariante par l'action de G de multiplicateur $\chi(g,\xi) = \left|g_{n+1,o}\xi_o + \ldots + g_{n+1,n+1}\right|^{-n}$,

($g_{i,j}$ matrice de g).

[Le multiplicateur est défini par

$$\int_{H_1} f(g^{-1}x)dm_1(x) = \int_{H_1} f(\xi)\chi(g,\xi)dm_1(\xi) \;] . \text{ (Cf. BOURBAKI [2]).}$$

Il est donc possible de construire $U_{u,\lambda}$ sur $L^2(H_1,dm_1,V_u)$, où V_u est l'espace de la représentation $u \in \hat{M}$.

2.5. Choix d'une section.

a) Pour l'action de G sur H_1, le stabilisateur de f_o est MAN [Rappel : on note la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$ $(f_o,\ldots,f_n)$]. Pour pouvoir écrire les représentations $U_{u,\lambda}$ sur $L^2(H_1,dm_1,V_u)$, il reste à préciser le choix d'une section borélienne de H_1 dans G, autrement dit, d'une application borélienne σ de H_1 dans G telle que $\sigma(\xi)f_o = \xi$ pour tout $\xi \in H_1$. On sait que H_1^+ est l'orbite de f_o pour l'action de J. Pour $\xi \in H_1^+$ on va donc pouvoir choisir $\sigma(\xi) \in J$. Pour cela, on utilise le fait que J admet la décomposition d'Iwasawa $J = A_1N_1M$, où $M \simeq SO(n)$ [Cf. 1.3],

$$A_1 = \left\{ a'_t = \begin{pmatrix} \mathrm{cht} & & \mathrm{sht} \\ & \mathrm{Id} & \\ \mathrm{sht} & & \mathrm{cht} \end{pmatrix} \in J\,, \quad t \in \mathbb{R} \right\}$$

et N_1, isomorphe à $\mathbb{R}^{n-1}$, est le groupe des matrices de la forme

$$n'_y = \begin{pmatrix} 1 + \frac{|y|^2}{2} & {}^t y & -\frac{|y|^2}{2} \\ y & \mathrm{Id} & -y \\ \frac{|y|^2}{2} & {}^t y & 1 - \frac{|y|^2}{2} \end{pmatrix} \quad \text{où } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-1} .$$

[Naturellement, tous ces éléments sont plongés canoniquement dans G par l'application

$$j \longmapsto \left(\begin{array}{c|c} j & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \quad] .$$

Comme M est le stabilisateur de f_o pour l'action de J, il est possible de prendre $\sigma(\xi)$, $\xi \in H_1^+$, à valeur dans A_1N_1.

On trouve, pour $\xi = (\xi_o,\dots,\xi_n) \in H_1^+$, $\quad \sigma_\xi = a'_{t(\xi)}\, n'_{y(\xi)}$
où $y(\xi) = (\xi_1,\dots,\xi_{n-1})$ et $e^{t(\xi)} = (\xi_o - \xi_n)^{-1}$.

Il reste à définir $\sigma(\xi)$ [On note aussi σ_ξ] pour $\xi \in H_1^-$. Dans ce cas, on pose

$$\sigma(\xi) = w\sigma(w\xi) \quad \text{où } w = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix} \in SO_o(1,\, n+1)$$

$(w.\xi = (-\xi_o,-\xi_1,\dots,-\xi_{n-1},+\xi_n)$, w échange donc H_1^+ et H_1^-).

L'application σ ainsi trouvée est C^∞ et vérifie bien pour tout $\xi \in H_1$: $\sigma(\xi)(f_o) = \xi$ [On utilise le fait que $w^2 = \mathrm{Id}$].

b) On pose pour $g \in G$, $g = \sigma(g.f_o)\theta(g)$.

L'application θ est presque partout définie [pour tous les éléments tels que $g_{n+1,o} + g_{n+1,n+1} \neq 0$] et est continue sur son domaine de définition [et même C^∞].

c) Si $h \in MAN$, h s'écrit de manière unique : $h = m \; a_t \; n$. On pose $\tilde{m}(h) = m$ et $\tilde{a}(h) = a_t$.

2.6. Ecriture des représentations $U_{u,\lambda}$ dans $L^2(H_1,V_u)$.

a) Nous obtenons l'écriture suivante de $U_{u,\lambda}$ (Cf. G. Arsac [1]) sur $L^2(H_1,V_u)$

$$U_{u,\lambda}(g)f(\xi) = \left|g_{n+1,o}\xi_o + \dots + g_{n+1,n+1}\right|^{-\frac{n}{2}} (u \otimes \rho_\lambda)\left[\left[\theta(g^{-1}\sigma_\xi)\right]^{-1}\right]f(g^{-1}.\xi)$$

($f \in L^2(H_1,V_u)$, $g \in G$, $\xi \in H_1$, $(g_{i,j})$ est maintenant la matrice de g^{-1}).

b) Il est possible de simplifier cette écriture. Pour cela, nous allons calculer $\tilde{a}([\theta(g^{-1}\sigma_\xi)]^{-1})$.

LEMME 1. - *Le diagramme suivant est commutatif pour tout* $\xi' \in H_1$:

$$\begin{tikzcd} H_1 \arrow[r, mapsto, "\sigma_{\xi'}"] \arrow[d, "\varphi"'] & H_1 \arrow[d, "\varphi"] \\ C^+ \arrow[r, mapsto, "\sigma_{\xi'}"'] & C^+ \end{tikzcd}$$

où φ *désigne l'application* $\varphi(\xi) = (\varepsilon\xi_o,\varepsilon\xi_1,\dots,\varepsilon)$ ($\varepsilon = \operatorname{sgn} \xi_o$).

PREUVE. - On utilise le fait que les éléments de J, et w, commutent avec φ.

LEMME 2. - *Posons* $\theta(g^{-1}\sigma_\xi) = n \; a_t \; m$.

Alors $e^t = \left|g_{n+1,o}\xi_o + \dots + g_{n+1,n+1}\right|$, *où* $g_{i,j}$ *est la matrice de* g^{-1}.

PREUVE. - Par définition, $g^{-1}.\sigma_\xi = \sigma(g^{-1}.\xi)\theta(g^{-1}.\sigma_\xi)$. D'après le lemme 1, $g^{-1}.\sigma_\xi(e_o + e_{n+1}) = g^{-1}.\varphi(\xi)$

$$[\varphi(f_o) = e_o + e_{n+1} \quad \text{et} \quad \xi = \sigma_\xi(f_o)] .$$

En se rappelant d'autre part que MN est le stabilisateur de $e_o + e_{n+1}$, dans G, on obtient :

$$\theta(g^{-1}\sigma_\xi)(e_o + e_{n+1}) = e^t(e_o + e_{n+1}) . \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Si $\theta(g^{-1}\sigma_\xi) = n\, a_t\, m$, alors $\theta^{-1}(g^{-1}\sigma_\xi) = m^{-1}\, a_{-t}\, n^{-1}$.

Ainsi, l'écriture définitive de $U_{u,\lambda}$ sur $L^2(H_1, V_u)$ est :

$$U_{u,\lambda}(g)F(\xi) = \left|g_{n+1,o}\xi_o + g_{n+1,1}\xi_1 + \dots + g_{n+1,n+1}\right|^{-\frac{n}{2} - i\lambda} u\left[\tilde{m}\left[\theta(g^{-1}\sigma_\xi)^{-1}\right]\right]F(g^{-1}.\xi).$$

2.7. <u>Ecriture sur</u> $L^2(H_p , V_u)$.

Nous considérons dans $\mathbb{R}^{n+1}$ l'hyperboloïde à 2 nappes H_p d'équation

$$\xi_o^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \dots - \xi_n^2 = p^2 \qquad [p > 0] .$$

Nous l'appellerons "hyperboloïde de masse p ".

Nous noterons :

$$H_p^+ = \{\xi \in H_p | \xi_o > 0\} \quad \text{et} \quad H_p^- = \{\xi \in H_p | \xi_o < 0\} ,$$

H_p est l'image de H_1 par le C^∞ difféomorphisme $\xi \overset{\varphi_p}{\longmapsto} p\xi$.

Par φ_p , nous transportons l'action de G de H_1 à H_p. Nous appelons d'autre part dm_p la mesure image de dm_1.

Si $\xi \in H_p$,

$$(g.\xi)_i = p\, \frac{g_{i,o}\frac{\xi_o}{p} + g_{i,1}\frac{\xi_1}{p} + \dots + g_{i,n+1}}{g_{n+1,o}\frac{\xi_o}{p} + g_{n+1,1}\frac{\xi_1}{p} + \dots + g_{n+1,n+1}} , \qquad 0 \leqslant i \leqslant n ,$$

d'autre part :

$$\int_{H_p} f(x)dm_p(x) = \int_{H_1} f(px)dm_1(x) .$$

Remarquons que la restriction à J de l'action de G sur H_p est l'action canonique de J sur H_p, pour laquelle la mesure m_p est invariante.

L'application : $L^2(H_p, V_u) \longrightarrow L^2(H_1, V_u)$
$f \longmapsto f_p(x) = f(px)$

est évidemment une isométrie et les représentations peuvent donc être réalisées sur $L^2(H_p, V_u)$ sous la forme : pour $g^{-1} = (g_{ij})$,

$$\boxed{U_{u,\lambda}(g)F(\xi) = \left|g_{n+1,o}\frac{\xi_o}{p} + \ldots + g_{n+1,n+1}\right|^{-\frac{n}{2}-i\lambda}u\left[\tilde{m}\left[\theta\left(g^{-1}\sigma\left(\frac{\xi}{p}\right)\right)^{-1}\right]\right] F(g^{-1}.\xi)}$$

$\boxed{3}$ CONTRACTION DE $SO_o(1, n+1)$ VERS $\mathbb{R}^{n+1} \odot SO_o(1,n)$.

Nous renvoyons au chap. I pour le détail. Nous écrivons $SO_o(1, n+1) = \underline{J} \oplus V$ où J est le stabilisateur de e_{n+1} et V est l'ensemble des éléments de $SO_o(1, n+1)$ dont la matrice est, dans la base $(e_o, e_1, \ldots, e_{n+1})$.

$$P_{x_o,x_1,\ldots,x_n} = \begin{pmatrix} & & & x_o \\ & 0 & & x_1 \\ & & & x_n \\ x_o & -x_1 & \ldots \; -x_n & 0 \end{pmatrix} .$$

On identifie V à $\mathbb{R}^{n+1}$.

L'espace V est stable par AdJ, et l'action de J sur V est l'action standard de J sur $\mathbb{R}^{n+1}$ ce qui permet de définir un produit semi-direct de V et de J que nous notons $V \odot J$ et qui s'identifie au groupe de Poincaré généralisé de $\mathbb{R}^{n+1}$. Désormais, lorsque nous parlerons de $\mathbb{R}^{n+1} \odot SO_o(1, n+1)$, il s'agira du groupe $V \odot J$ précédent.

On définit pour tout $r > 0$ l'application π_r de $V \odot J$ dans G par :

$$\pi_r(v,h) = \exp_G rv.h \qquad (v \in V,\ h \in H) .$$

$\boxed{4}$ REALISATION DES REPRESENTATIONS DE $\mathbb{R}^{n+1} \odot SO_o(1,n)$ SUR H_p^+ (RESP. H_p^-).

4.1. Les hyperboloïdes H_p dont il a été question en II $\boxed{2}$ peuvent être réalisés comme sous-variétés de $V \simeq \mathbb{R}^{n+1}$. Les nappes d'hyperboloïdes H_p^+ (resp. H_p^-) sont les orbites de pf_o (resp. $-pf_o$) et le stabilisateur de $\pm pf_o$ est M. Par application de la méthode de Mackey, on obtient une famille de représentations $\rho^{\varepsilon}_{p,u}$, associées à l'orbite H_p^{ε} et à l'élément $u \in \hat{M}$, en prenant la mesure dm_p sur H_p^{ε} invariante par l'action de J.

Il nous reste à préciser des sections sur H_p^{ε} pour l'action de J. Sur H_p^+, nous choisissons naturellement l'application $\xi \longmapsto \sigma(\frac{\xi}{p})$. Sur H_p^-, nous prenons l'application $\xi \longmapsto \sigma_1(\xi) = w\sigma(\frac{w\xi}{p})\, w$ [Il faut que $\sigma_1(\frac{\xi}{p})(-pf_o) = \xi$].

4.2. Les représentations s'écrivent alors : (Cf. G. Arsac [1]).

$$\rho^{+}_{m,u}(v,h)g(\xi) = e^{iB(v,\xi)}u(\theta(h^{-1}\sigma(\frac{\xi}{p}))^{-1})g(h^{-1}.\xi) \text{ où } g \in L^2(H_p^+,V_u)$$
$$\text{et } (v,h) \in V \odot H .$$

$$\rho^{-}_{m,u}(v,h)g(\xi) = e^{iB(v,\xi)}u(\theta_1(h^{-1}\sigma_1(\frac{\xi}{p}))^{-1})g(h^{-1}.\xi) \text{ où } g \in L^2(H_p^-,V_u)$$

[où θ est l'application définie par : $h = \sigma(h.f_o)\theta(h)$
et θ_1 l'application définie par : $h = \sigma_1(-hf_o)\theta_1(h)$] .

$\boxed{5}$ CONTRACTION DES REPRESENTATIONS $U_{u,\lambda}$.

Toute application f de H_p dans un espace vectoriel s'écrit de manière unique $f = f^+ + f^-$ avec supp. $f^+ \subset H_p^+$ et supp. $f^- \subset H_p^-$.

THEOREME. - *Soit* $f \in L^2(H_p, V_u)$, *continue. Alors :*

$$\lim_{r \to o} U_{u,-\frac{p}{r}} \circ \pi_r(v,h)f(\xi) = \rho^+_{p,u}(v,h)f^+(\xi) + \rho^-_{p,u_1}(v,h)f^-(\xi)$$

où $h \in J$, $v \in V$.

(u_1 *est la représentation de* M *définie par :* $u_1(m) = u(wmw)$).
[*On vérifie que* $wmw \in M$ *pour tout* $m \in M$].

La limite est une limite simple presque partout, uniforme sur tout compact de $V \odot J$.

PREUVE.

a) Pour tout $h \in H$, on a :

$$U_{u,-\frac{p}{r}} \circ \pi_r(0,h)f(\xi) = \rho^+_{p,u}(0,h)f^+(\xi) + \rho^-_{p,u_1}(0,h)f^-(\xi) .$$

(On le voit en comparant les formules, du fait que $\pi_r(0,h) = h$).
Posons

$$f_1 = U_{u,\lambda}(h)f .$$

Alors , on vérifie que $f_1^+ = \rho^+_{p,u}(0,h)f^+$ et que $f_1^- = \rho^-_{p,u_1}(0,h)f^-$.
On a $(v,h) = (v,Id)(0,h)$.

Remarquons aussi que $\pi_r(v,h) = \pi_r(v,Id)\pi_r(0,h)$. On peut vérifier que si f est continue, f_1 l'est aussi. Pour cela il suffit de regarder l'expression de f_1, et d'utiliser le fait que l'application $\xi \longmapsto \theta(h^{-1}\sigma_\xi)$ est continue pour tout $h \in H$ (Ce ne serait pas vrai pour tout h de G).

On a :

$$U_{u,-\frac{p}{r}} \circ \pi_r(v,Id)f_1(\xi) =$$
$$= \left| g_{n+1,o}\frac{\xi_o}{p} + g_{n+1,1}\frac{\xi_1}{p} + \dots + g_{n+1,n+1} \right|^{-\frac{n}{2}+i\frac{p}{r}} u\left[\tilde{m}\left[\theta(g^{-1}.\sigma_\xi)^{-1}\right]\right]f_1(g^{-1}.\xi).$$

Dans cette écriture, $g = \exp(rv)$. Pour r suffisamment petit,

$$g = \begin{pmatrix} 1 & & & & rv_o \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & \ddots & & rv_n \\ rv_o & -rv_1 & \cdots & -rv_n & 1 \end{pmatrix} + o(r,\|v\|) \quad (\|\ \| \text{ est la norme euclidienne sur } \mathbb{R}^{n+1})$$

On peut montrer que pour $g = \exp rv$, l'application $r \longmapsto \theta(g^{-1}\sigma_\xi)^{-1}$ est encore continue. On a alors $\lim\limits_{r \to o} u[\widetilde{m}[\theta(g^{-1}\sigma_\xi)^{-1}]] = Id$, ceci uniformément sur tout compact par rapport à v.

De plus, on a, comme f_1 est continue,

$$\lim_{r \to o} f_1(\exp rv.\xi) = f_1(\xi),$$

ceci uniformément sur tout compact par rapport à v.

Enfin, on a

$$\lim_{r \to o} \left| g_{n+1,o}\frac{\xi_o}{p} + g_{n+1,1}\frac{\xi_1}{p} + \ldots + g_{n+1,n+1} \right|^{-\frac{n}{2}+i\frac{p}{r}}$$

$$= \lim_{r \to o} \left| 1 + rv_o\frac{\xi_o}{p} - rv_1\frac{\xi_1}{p} - \ldots - rv_n\frac{\xi_n}{p} + o(r, \|v\|) \right|^{-\frac{n}{2}+i\frac{p}{r}}$$

$$= e^{iB(v,\xi)} .$$

Cette limite est uniforme sur tout compact.

Donc :

$$\lim U_{u,-\frac{p}{r}} \circ \pi_r(v,Id)f_1(\xi) = e^{iB(v,\xi)} f_1(\xi) = e^{iB(v,\xi)} f_1^+(\xi) + e^{iB(v,\xi)} f_1^-(\xi)$$

Compte tenu de ceci, on en déduit que :

$$\lim U_{u,-\frac{p}{r}} \circ \pi_r(v,Id)f_1(\xi) = \rho^+_{p,u}(v,Id)f_1^+(\xi) + \rho^-_{p,u}(v,Id)f_1^-(\xi).$$

Enfin, en remplaçant f_1 par sa valeur, on obtient le théorème.

C.Q.F.D.

III - ORBITES DE LA REPRESENTATION COADJOINTE DE $SO_o(1,n)$.

Dans cette partie, nous allons paramétrer les orbites de la représentation coadjointe de $SO_o(1,n)$ en donnant un élément particulier de chaque orbite. Du fait que $SO_o(1,n)$ est semi-simple, on ramène le problème à la recherche des orbites de la représentation adjointe de $SO_o(1,n)$ [Cf. 1.3, ci-dessous]. On plonge alors $SO_o(1,n)$ dans $SU(1,n)$. On diagonalise (dans $SU(1,n)$) quand c'est possible, les éléments de $SO_o(1,n)$. Les éléments réguliers donnent des types d'orbites correspondant aux classes de conjugaison de sous-algèbres de Cartan de $SO_o(1,n)$. Les éléments non diagonalisables donnent des orbites exceptionnelles.

$\boxed{1}$ REPRESENTATION ADJOINTE, REPRESENTATION COADJOINTE D'UN GROUPE DE LIE. (Cf. WARNER [7]).

1.1. Représentation adjointe.

Nous la définissons ici dans le cas où G et un sous-groupe fermé de GL(V), V étant un espace vectoriel réel ou complexe, et où $\underline{G} \subset \mathscr{L}(V)$ est son algèbre de Lie. C'est l'application Ad de G dans $GL(\underline{G})$ définie par : $Ad(g)(u) = gug^{-1}$ (où $u \in \underline{G}$, $g \in G$).

1.2. Représentation coadjointe.

C'est l'application CoAd de G dans $GL(\underline{G}^*)$ définie par la relation :

$$\langle CoAd(g)(x), y \rangle = \langle x, Ad(g^{-1})y \rangle .$$

($\underline{G}^*$ est l'espace dual de $\underline{G}$; $x \in \underline{G}^*$, $y \in \underline{G}$, $g \in G$; $\langle \, , \, \rangle$ représente la dualité entre $\underline{G}$ et $\underline{G}^*$).

1.3. Cas où G est un groupe de Lie semi-simple.

On peut alors identifier $\underline{G}$ et $\underline{G}^*$ au moyen de la forme de Killing de $\underline{G}$ (notée K), qui est non dégénérée.

Si $x \in \underline{G}$, on appelle $\ell(x)$ l'élément de $\underline{G}^*$ tel que pour tout $y \in \underline{G}$, on ait : $\langle \ell(x), y \rangle = K(x,y)$. L'application ℓ est un isomorphisme de $\underline{G}$ sur $\underline{G}^*$. On sait d'autre part que quel que soit l'élément g de G, l'application $Ad(g)$ conserve la forme K. On obtient successivement :

$$\begin{aligned} \langle y, CoAd(g)(z) \rangle = \langle Ad(g^{-1})(y), z \rangle &= K[Ad(g^{-1})(y), \ell^{-1}(z)] \\ &= K(y, Ad(g)\ell^{-1}(z)) \ . \end{aligned}$$

(Dans cette relation $z \in \underline{G}^*$, $y \in \underline{G}$).

On en déduit que :

$$\ell^{-1}(CoAd(g)(z)) = Adg[\ell^{-1}(z)] \ .$$

Autrement dit, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \underline{G} \arrow[r, mapsto, "Adg"] \arrow[d, "\ell"'] & \underline{G} \arrow[d, "\ell"] \\ \underline{G}^* \arrow[r, mapsto, "CoAdg"'] & \underline{G}^* \end{tikzcd}$$

L'identification entre $\underline{G}$ et $\underline{G}^*$ par la forme de Killing nous ramène donc à la recherche des orbites de la représentation adjointe de G.

$\boxed{2}$ ORBITES DE LA REPRESENTATION ADJOINTE DANS LE CAS OU $G = SO(n)$ $(n \geqslant 1)$.

2.1. Nous traitons le cas où $G = SO(n)$ car nous aurons besoin des résultats obtenus pour la suite. Notons que le résultat est classique dans ce cas. En effet, il pourrait être obtenu comme conséquence des propriétés suivantes :

a) Dans un groupe compact, toutes les sous-algèbres de Cartan sont conjuguées.

b) Deux éléments d'une sous-algèbre de Cartan sont conjugués si et seulement si ils sont W-conjugués, W étant le groupe de Weyl associé à la sous-algèbre. (Cf. WARNER [7]).

2.2. $SO(n)$ est le groupe des isométries de déterminant 1 de $\mathbb{R}^n$ pour la forme bilinéaire : $b(x,y) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$. On plonge $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}^n$ et b se prolonge de manière unique à $\mathbb{C}^n$ en une forme hermitienne que l'on notera encore b. Le groupe $SO(n)$ se plonge alors canoniquement dans $SU(n)$, groupe des isométries de $\mathbb{C}^n$ pour la forme b, de déterminant 1.

L'algèbre de Lie $\underline{SO(n)}$ (resp. $\underline{SU(n)}$) est l'ensemble des $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ (resp. $\mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$) tels que l'on ait les deux relations :

$$\begin{cases} b(u(x),y) = -b(x,u(y)) \\ \operatorname{Tr} u = 0 . \end{cases}$$

(La première de ces relations signifie que u est antisymétrique dans le cas réel, antihermitienne dans le cas complexe).

2.3.

LEMME 1. - *Soit* $u \in \underline{SO(n)}$ *et* x *un vecteur propre de* u *de valeur propre associée* λ. *Alors* λ *est imaginaire pure* ($\lambda = i\lambda'$, $\lambda' \in \mathbb{R}$). *De plus, on peut trouver deux vecteurs orthogonaux et unitaires,* x_1 *et* x_2 *tels que* $u(x_1) = \lambda' x_2$ *et* $u(x_2) = -\lambda' x_1$.

PREUVE. - De $b(u(x),x) = -b(x,u(x))$, on déduit $\lambda b(x,x) = -\bar{\lambda} b(x,x)$ et donc $\lambda = -\bar{\lambda}$ (Car $b(x,x) \neq 0$). En écrivant $x = x_2 + ix_1$, on constate que x_2 et x_1 sont orthogonaux et que $b(x_2,x_2) = b(x_1,x_1)$, donc que x_1 et x_2 peuvent être choisis unitaires. De plus, u étant réel, on a $u(x_1) = \lambda' x_2$ et $u(x_2) = -\lambda' x_1$.

LEMME 2.

1°) *Si* V *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^n$ *stable par* $u \in \underline{SO(n)}$, *alors* $V^\perp$ *est stable par* u *(et est un supplémentaire de* V*).*

2°) *Soient* $(e_1,\ldots,e_n)$ *et* $(f_1,\ldots,f_n)$ *deux bases orthonormées de* $\mathbb{R}^n$. *Alors, l'une des deux bases (et une seule)* $(f_1,\ldots,f_n)$ *et* $(f_1,\ldots,-f_n)$ *est l'image de* $(e_1,\ldots,e_n)$ *par un élément de* $SO(n)$.

2.4. On fixe une base orthonormée $(e_1,\dots,e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. On considère les éléments $e_{2p-1,2p} \in \underline{SO(n)}$ $(2 \leqslant 2p \leqslant n)$ définis par

$$\begin{cases} e_{2p-1,2p}(e_{2p-1}) = e_{2p} \\ e_{2p-1,2p}(e_{2p}) = -e_{2p-1} \\ e_{2p-1,2p}(e_i) = 0 & (i \notin \{2p-1,2p\}) \end{cases}$$

Le sous-espace vectoriel engendré par les éléments $e_{2p-1,2p}$ est une sous-algèbre de Cartan J de $\underline{SO(n)}$. On considère l'ensemble $T \subset J$ des éléments de J de la forme $\sum\limits_{2 \leqslant 2p \leqslant n} a_p\, e_{2p-1,2p}$, avec les relations $a_1 \geqslant a_2 \dots \geqslant |a_q|$ si $n = 2q$ et $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \dots \geqslant a_q \geqslant 0$ si $n = 2q+1$. On a alors,

2.5.

THEOREME. - *Soit* O *une orbite de la représentation adjointe de* SO(n). *Alors* O ∩ T *contient exactement un élément. (Les éléments de* T *paramétrisent donc l'ensemble des orbites).*

PREUVE. - Soit u un élément de O. En diagonalisant u (considéré comme élément de $\underline{SU(n)}$), on trouve de proche en proche, grâce au lemmes 1 et 2, une base orthonormée $(x_1,\dots,x_n)$ et des réels positifs $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \dots \geqslant \lambda_q \geqslant 0$ tels que $u = \lambda_1 x_{1,2} + \dots + \lambda_q\, x_{2q-1,2q}$ $(n-1 \leqslant 2q \leqslant n)$. Dans cette relation, $x_{2p-1,2p}$ est défini de la même manière que $e_{2p-1,2p}$. D'après le lemme 2, il existe $v \in SO(n)$ tel que : $v(e_i) = x_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ et tel que $v(e_n) = \varepsilon x_n$. On a alors les relations :

$$v e_{2p-1,2p}\, v^{-1} = x_{2p-1,2p} \quad \text{si} \quad 2p < n$$

et

$$v e_{2p-1,2p}\, v^{-1} = \varepsilon x_{2p-1,2p} \quad \text{si} \quad 2p = n\,.$$

Donc,

$$\mathrm{Ad}(v)u = \lambda_1 e_{1,2} + \dots + \lambda'_q\, e_{2q-1,2q}$$

et

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots \geqslant \lambda'_q \geqslant 0 \quad \text{si} \quad n = 2q+1 \qquad (\lambda'_q = \lambda_q)$$

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots \geqslant |\lambda'_q| \quad \text{si} \quad n = 2q \qquad (\lambda'_q = \varepsilon\lambda_q)\,.$$

$O \cap T$ contient donc un élément. Cet élément est unique. Pour le montrer, on raisonne par l'absurde en tenant compte du fait que deux éléments d'une même orbite ont les mêmes valeurs propres complexes, et qu'il y a une seule manière de ranger les modules de celles-ci dans l'ordre décroissant. On vérifie d'autre part que si $n = 2q$, $\lambda_1 e_{1,2} + \ldots + \lambda_q\, e_{2q-1,2q}$ et $\lambda_1 e_{1,2} + \ldots + \ldots -\lambda_q e_{2q-1,2q}$ ne sont pas dans la même orbite si $\lambda_q \neq 0$.

C.Q.F.D.

$\boxed{3}$ ORBITES DE LA REPRESENTATION COADJOINTE DE $SO_o(1,n)$.

3.1. (Rappels de notations).

Un élément de $\mathbb{R}^{n+1}$ est noté $x = (x_o, x_1, \ldots, x_n)$.
On utilisera parfois la notation $x = (x_o, \vec{X})$, où $\vec{X} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
On considère sur $\mathbb{R}^{n+1}$ la forme bilinéaire non dégénérée :

$$(x|y) = x_o y_o - x_1 y_1 - \ldots - x_n y_n \ .$$

On a,

$$(x|y) = x_o y_o - b(\vec{X},\vec{Y}) \qquad \text{(Cf. III-2.1)}.$$

On note $SO_o(1,n)$ la composante connexe de l'identité du groupe des isométries de $\mathbb{R}^{n+1}$ pour la forme $(\ |\ )$.

3.2. On plonge $\mathbb{R}^{n+1}$ dans $\mathbb{C}^{n+1}$ et $(\ |\ )$ se prolonge en une forme hermitienne sur $\mathbb{C}^{n+1}$, notée encore $(\ |\ )$. De même, b se prolonge en une forme hermitienne sur $\mathbb{C}^n$. On a alors $(x|y) = x_o \bar{y}_o - b(\vec{X},\vec{Y})$ $(x = (x_o,\vec{X})\ ,\ y = (y_o,\vec{Y}) \in \mathbb{C}^{n+1})$. Le groupe $SO_o(1,n)$ est donc plongé dans $SU(1,n)$, groupe des isométries de $\mathbb{C}^{n+1}$ pour la forme hermitienne $(\ |\ )$, de déterminant 1.

L'algèbre de Lie de $SO_o(1,n)$, notée $\underline{SO(1,n)}$ (resp. de $SU(1,n)$, notée $\underline{SU(1,n)}$) est l'ensemble des $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^{n+1})$ (resp. $\mathscr{L}(\mathbb{C}^{n+1})$) tels que $(u(x)|y) = (-x|u(y))$ et $\operatorname{tr} u = 0$. Si $u \in \underline{SO(1,n)}$ (resp. $\underline{(SU(1,n))}$), on a donc $u' = -u$, lorsque u' désigne l'adjoint d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^{n+1}$ (resp. $\mathbb{C}^{n+1}$), pour la forme $(\ |\ )$.

On dira qu'un vecteur x est du genre temps si $(x|x) > 0$. On dira que x est du genre espace si $(x|x) < 0$. On dira enfin que x est du genre lumière si $(x|x) = 0$.

3.3. On applique la même technique que pour $\underline{SO(n)}$ (Cf. III-2).

Il y a plusieurs différences.

a) Si $u \in \underline{SO(1,n)}$, toute valeur propre de u n'est pas nécessairement imaginaire pure. Plus précisément, on montrera que toute valeur propre de u est soit réelle, soit imaginaire pure. De plus, l'orthogonal d'un sous-espace n'étant plus nécessairement un supplémentaire de ce sous-espace (cas d'un vecteur propre de lumière), il y aura problème pour raisonner par récurrence.

b) On trouvera trois sortes d'orbites. Les deux premières correspondent aux éléments semi-simples, et lorsque n est pair, elles traduisent le fait qu'il y a deux classes de conjugaison de sous-algèbres de Cartan. La troisième correspond aux éléments non diagonalisables de $\underline{SO_o(1,n)}$.

3.4. Soit $u \in \underline{SO(1,n)}$; on étudie les valeurs propres et les vecteurs propres de u , et spécialement les vecteurs propres de lumière, qui nous permettront de classifier les orbites.

LEMME 1. - *Si* λ *est valeur propre complexe de* $u \in \underline{SO(1,n)}$, *alors* $\bar{\lambda}$, $-\bar{\lambda}$ *et* $-\lambda$ *le sont aussi.*

PREUVE. - Le fait que $\bar{\lambda}$ soit valeur propre provient de ce que u est réel.

Si $u \in \underline{SO_o(1,n)}$, on a $u' = -u$ (Cf. 3.1). On en déduit sucessivement que : $\det(u - \lambda I) = 0$, donc $\det(u' - \bar{\lambda} I) = 0$ et $\det(-u - \bar{\lambda} I) = 0$. Cette dernière égalité nous montre que $-\bar{\lambda}$ est aussi valeur propre de u. Enfin, en combinant les deux résultats précédents, on voit que $-\lambda = \overline{(-\bar{\lambda})}$ est aussi valeur propre.

C.Q.F.D.

LEMME 2. - *Il n'existe aucun sous-espace totalement isotrope de dimension* 2 *dans* $\mathbb{C}^{n+1}$ *(dimension* 2 *complexe) ou dans* $\mathbb{R}^{n+1}$ *(dimension* 2 *réelle).*

PREUVE. - (Pour le cas complexe). Dans l'hypothèse contraire, on pourrait trouver $(x_o,\vec{X})$ et $(y_o,\vec{Y})$ tels que :

$$\text{(I)} \qquad x_o\bar{y}_o - b(\vec{X},\vec{Y}) = 0 \ ,$$

$$\text{(II)} \qquad x_o\bar{x}_o - b(\vec{X},\vec{X}) = 0 \ ,$$

$$\text{(III)} \qquad y_o\bar{y}_o - b(\vec{Y},\vec{Y}) = 0 \ .$$

D'après ces trois égalités, on constate que $|b(\vec{X},\vec{Y})|^2 = b(\vec{X},\vec{X})b(\vec{Y},\vec{Y})$. Donc, il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\vec{X} = \alpha\vec{Y}$. On en déduit, à l'aide des égalités (I), (II) et (III) que $x_o = \alpha y_o$, donc que $(x_o,\vec{X}) = \alpha(y_o,\vec{Y})$. D'où le résultat.

Le cas réel se traite de manière identique.

Avant de continuer, remarquons que tous les éléments d'une orbite ont les mêmes valeurs propres avec la même multiplicité, et ont le même nombre de vecteurs propres du genre temps, espace ou lumière.

LEMME 3. - *Soit* $u \in \underline{SO(1,n)}$.

a) *Si* x *est vecteur propre non isotrope, de valeur propre associée* λ, *alors* $\lambda \in i\mathbb{R}$. *De plus, si* u *possède un vecteur propre* x *du genre temps* ($(x|x) > 0$), *alors la valeur propre associée est nécessairement* 0 *et l'on peut choisir* x *réel.*

b) *Si* u *possède un vecteur propre* x *du genre lumière, la valeur propre associée est réelle. On peut alors choisir* x *réel.*

PREUVE.

a) Si x est vecteur propre non isotrope, de la relation $(u(x)|x) = -(x|u(x))$, on déduit $\lambda(x|x) = -\bar{\lambda}(x|x)$ et donc $\lambda = -\bar{\lambda}$. Ainsi $\lambda \in i\mathbb{R}$. Si l'on suppose de plus $(x|x) > 0$, en écrivant

$x = x_1 + ix_2$ $(x_1 \in \mathbb{R}^{n+1}, x_2 \in \mathbb{R}^{n+1})$ et $u(x) = i\lambda' x$ $(\lambda' \in \mathbb{R})$, on obtient les relations $u(x_1) = -\lambda' x_2$ et $u(x_2) = \lambda' x_1$. Si λ' n'était pas nul, à l'aide de la relation $(u(x)|y) = -(x|u(y))$, on obtiendrait : $(x_1|x_2) = 0$ et $(x_1|x_1) = (x_2|x_2)$. Du fait que $(x|x) = (x_1|x_1) + (x_2|x_2)$ est positif, on aurait donc deux vecteurs de lumière orthogonaux x_1 et x_2, ce qui est absurde, la signature de $(|)$ étant $(+,-,- \ldots)$. C'est donc que $\lambda' = 0$, ce qui démontre la seconde partie de a).

b) Si x est vecteur propre de genre lumière pour la valeur propre λ, $\bar{x}$ est vecteur propre pour la valeur propre $\bar{\lambda}$ [Si $x = x_1 + ix_2$, on pose $\bar{x} = x_1 - ix_2$]. On a alors $(x|u(\bar{x})) = -(u(x)|\bar{x})$, d'où $\lambda(x|\bar{x}) = -\lambda(x|\bar{x})$. Si l'on a $(x|\bar{x}) \neq 0$, on en déduit que $\lambda = 0$ et alors, on peut choisir x réel (car $u(x_1 + ix_2) = 0$ entraîne que $u(x_1) = 0$ et $u(x_2) = 0$). Si l'on a $(x|\bar{x}) = 0$, alors x et $\bar{x}$ sont colinéaires, sinon, ils engendreraient un sous-espace totalement isotrope de dimension 2, ce qui est impossible d'après le lemme 2 de 3.3. Mais alors x et $\bar{x}$ ont la même valeur propre associée et donc $\lambda = \bar{\lambda}$, d'où $\lambda \in \mathbb{R}$. On peut donc à nouveau choisir x réel [$u(x_1 + ix_2) = \lambda(x_1 + ix_2)$ entraîne que $u(x_1) = \lambda x_1$ et $u(x_2) = \lambda x_2$]. Ceci termine la démonstration de la partie b) du lemme.

3.5. Classification des orbites.

Nous allons préciser la classification des orbites par le théorème suivant.

THEOREME. - *Soit* $u \in \underline{SO(1,n)}$. *On a une et une seule des trois possibilités suivantes :*

(A) *L'application* u *possède un vecteur propre réel du genre temps (valeur propre associée nulle).*

(B) *L'application* u *possède deux vecteurs propres de lumière associés respectivement à* λ *et à* $-\lambda$ $(\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0)$.

(C) *L'application* u *possède une unique direction propre du genre lumière, qui est alors associée à* $\lambda = 0$.

Avant de démontrer le théorème, remarquons que si un élément u est dans l'un des cas (A), (B) ou (C), tout élément de l'orbite de u est dans le même cas. On peut donc poser la définition suivante.

DEFINITION. - *On dit qu'un orbite est de type* A *(resp.* B, C*) si n'importe lequel de ses éléments est dans le cas* (A) *(resp.* (B), (C)*) du théorème.*

DEMONSTRATION DU THEOREME.

a) Montrons d'abord que les trois cas exposés recouvrent la totalité des cas possibles. On a forcément un vecteur propre du genre lumière ou temps. Dans le cas contraire, en réemployant la technique utilisée pour <u>SO(n)</u>, on construirait une suite de sous-espace réels orthogonaux de dimension 1 ou 2, stables par u, et où la restriction de $(\mid)$ serait définie négative. On en déduirait que $(\mid)$ est définie négative, ce qui est absurde.

Si u possède un vecteur propre du genre temps, on est dans le cas (A) [$\lambda = 0$ d'après le lemme 3]. Si u possède un vecteur propre du genre lumière associé à une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$ non nulle, on est dans le cas (B). En effet, si y est un vecteur propre de valeur associée $-\lambda$, y est forcément du genre lumière d'après le a) du lemme 3. Enfin, si u possède une direction propre (réelle) du genre lumière pour la valeur propre 0, on est dans le cas (C) si cette direction est l'unique direction propre pour la valeur propre 0. Dans le cas contraire, si $\mathbb{R}x_1$ et $\mathbb{R}x_2$ sont deux telles directions distinctes, $\mathbb{R}x_1 + \mathbb{R}x_2$ possède un vecteur du genre temps et on est dans le cas (A). [Compte tenu de $(x_1 | x_2) \neq 0$ (lemme 2), l'une des deux directions $\mathbb{R}(x_1 + x_2)$ ou $\mathbb{R}(x_1 - x_2)$ est du genre temps].

Ceci achève la démonstration de la première partie du théorème.

b) Montrons maintenant que les trois cas (A), (B), (C) s'excluent deux à deux.

Tout d'abord, le cas (B) exclut les cas (A) et (C) car si x et y sont des vecteurs propres de lumière pour les valeurs propres λ et $-\lambda$ respectivement, comme $(x|y) \neq 0$ (lemme 2), la restriction de $(\mid)$

au sous-espace $\mathbb{R}x + \mathbb{R}y$ est non dégénérée et de signature $(+,-)$ [en effet $(x+y|x+y)$, $(x-y\mid x-y)$ sont non nuls et opposés]. La restriction de $(\mid)$ à l'orthogonal de ce sous-espace est donc définie négative et les vecteurs propres complexes restants sont du genre espace, ce qui exclut les cas (A) ou (C).

Montrons ensuite que le cas (A) exclut le cas (C), ce qui achèvera la démonstration.

Si a est un vecteur du genre temps tel que $u(a) = 0$, et si x est vecteur propre du genre lumière pour la valeur propre λ, $(u(x)|a) = \lambda(x|a) = 0$ et donc $\lambda = 0$ [car $(x|a) \neq 0$]. Alors $a - \frac{(a|a)}{2(x|a)}x$ est aussi vecteur propre du genre lumière pour la valeur propre 0, ce qui exclut le cas (C) où l'on a une unique direction propre du genre lumière.

C.Q.F.D.

Dans la suite, nous allons chercher un élément particulier de chaque orbite. Pour cela, nous décomposons $\mathbb{R}^{n+1}$ en sous-espaces, orthogonaux stables par un élément u de $\underline{SO(1,n)}$ donné [comme dans le cas de $\underline{SO(n)}$]. Le seul cas difficile est le cas (C). Le lemme suivant traite ce cas.

3.6.

LEMME 4. - *Supposons que* u *soit de type* (C). *Soit* u *un vecteur de lumière réel tel que* $u(x) = 0$. *Il existe un sous-espace* H *de dimension* 3, *où la restriction de* $(\mid)$ *est de signature* $(+,-,-)$, *qui contient* x, *et qui est stable par* u. *L'application* $u_{|H}$ *possède* $\mathbb{R}x$ *comme unique direction propre.*

PREUVE.

(I) Les directions propres complexes de u autres que $\mathbb{R}x$ sont du genre espace.

(Sinon, on retomberait dans le cas (A)). Chaque fois que l'on a une telle direction, on peut trouver un sous-espace de dimension 1 ou 2, stable par u, et où $(\mid)$ est définie négative. Plus précisément :

(a) Si $u(z) = i\lambda z$ avec $z = x_1 + ix_2$ et $\lambda \neq 0$, on prend $\mathbb{R}x_1 + \mathbb{R}x_2$;

(b) Si $u(y) = 0$ avec $(y|y) < 0$, on prend $\mathbb{R}y$.

(II) Le vecteur x est toujours dans l'orthogonal [qui est aussi un supplémentaire], d'un tel sous-espace.

Dans le cas (I)(a), ceci ce voit aisément car $u_{|\mathbb{R}x_1 + \mathbb{R}x_2}$ est bijective et l'on utilise la relation $(u(x)|t) = -(x|u(t))$. Dans le cas (I)(b), si l'on n'avait pas $y \perp x$, alors $y - \frac{(y|y)}{2(y|x)}x$ serait un vecteur propre de lumière pour $\lambda = 0$, ce qui est impossible.

Compte tenu des propriétés (I) et (II) ci-dessus, il existe donc un sous-espace H de $\mathbb{R}^{n+1}$ contenant x, où $(\ |\ )$ est de signature $(+,-,-,\dots)$, stable par u, et tel que x soit l'unique vecteur propre de l'application $u_{|H}$.

Montrons que H est de dimension 3.

Dans la suite du raisonnement, on appellera orthogonal d'un sous-espace son orthogonal dans H. Nous allons raisonner par l'absurde. On voit facilement que la dimension de H est au moins égale à 3.

Supposons $\dim H \geqslant 4$. Posons $\dim H = p+1$; alors $p \geqslant 3$. Nous allons construire une direction propre de l'application $u_{|H}$ autre que $\mathbb{R}x$, ce qui sera contradictoire.

En considérant une base orthonormée de H $(f_o,\dots,f_p)$ $[b(f_o,f_o) = 1 \quad b(f_i,f_i) = -1 \quad \text{si} \quad i \neq 1]$ on écrit $x = x_of_o + x_1f_1 + \dots + x_pf_p$. On pose $x^1 = x_of_o$ et $x^2 = x_1f_1 + \dots + x_pf_p$. On a les relations $x = x^1 + x^2$ et $(x^1|x^1) > 0$, $(x^2|x^2) < 0$, $(x^1|x^2) = 0$, $(x^1|x^1) = -(x^2|x^2)$. On considère le sous-espace $W = (\mathbb{R}x^1 + \mathbb{R}x^2)^\perp$. C'est un sous-espace de dimension p-1, donc au moins de dimension 2. De plus, la signature de la restriction de $(\ |\ )$ à $\mathbb{R}x_1 + \mathbb{R}x_2$ étant $(+,-)$, la restriction de $(\ |\ )$ à W est définie négative. Le sous-espace $x^\perp$ est alors la somme directe $\mathbb{R}x \oplus W$. Comme x est vecteur propre, ce sous-espace est stable par u. On peut donc trouver une forme linéaire α sur W et un endomorphisme h de W tel que pour tout $z \in W$, on ait : $u(z) = \alpha(z)x + h(z)$. On vérifie immédiatement la relation $(h(z)|z') = -(z|h(z'))$ valable pour tout z de W. L'application h appartient donc à l'algèbre de Lie $\underline{SO(p-1)}$ du groupe $O(p-1)$ des isométries de W pour la forme $(\ |\ )$. Si l'application h est nulle, comme il existe $z \in W$ tel que $\alpha(z) = 0$, z est vecteur propre de u, contrairement à notre hypothèse. Si h n'est pas nulle, il existe un vecteur propre complexe de h, $w \in W \otimes \mathbb{C}$, associé à la valeur propre non nulle λ.

Alors, $w + \frac{\alpha(w)}{\lambda} x$ est vecteur propre de u, ce qui contredit l'hypothèse. Donc on ne peut avoir dim $W \geqslant 2$, et donc dim $H = 3$.

C.Q.F.D.

Le lemme suivant précise la structure de $u_{|H}$ lorsque l'on est dans les conditions du lemme 4.

LEMME 5. - *Soit* H *un espace quadratique de dimension* 3 *et de signature* (+,-,-). *On considère le groupe* $SO_o(1,2)$ *et l'algèbre de Lie* $\underline{SO(1,2)}$ *associés à* H. *Soit* u *un élément de* $\overline{SO_o(1,2)}$ *ayant une direction propre isotrope unique. Soit* (e_o,e_1,e_2) *une base orthonormée de* H *(*$(e_o|e_o) = 1$ $(e_1|e_1) = (e_2|e_2) = -1$*) et* j_ε *l'élément ayant pour matrice dans* (e_o,e_1,e_2) *:*

$$\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 0 & -\varepsilon \\ 0 & \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \qquad (\varepsilon = \pm 1)\ .$$

Alors u *est conjugué par l'action de* $SO_o(1,2)$ *à un et un seul des éléments* j_ε.

PREUVE. - Soit x le vecteur propre isotrope (valeur propre 0). Il existe $v \in SO_o(1,2)$ tel que $v(x) = \varepsilon(e_o + e_2)$. En remplaçant u par vuv^{-1} qui est dans la même orbite, on peut supposer que $x = \varepsilon(e_o + e_2)$. En appliquant plusieurs fois la relation $(u(x)|y) = -(x|u(y))$, on trouve que la matrice de u dans la base (e_o,e_1,e_2) est nécessairement de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

Enfin, si w_t est l'élément de $SO_o(1,2)$ de matrice

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}t & 0 & \operatorname{sh}t \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sh}t & 0 & \operatorname{ch}t \end{pmatrix},$$

on a

$$\mathrm{Adw}_t(u) = \begin{pmatrix} 0 & e^t\alpha & 0 \\ e^t\alpha & 0 & -e^t\alpha \\ 0 & e^t\alpha & 0 \end{pmatrix},$$

donc l'un des deux éléments j_ε est bien dans l'orbite de u. Il y en un seul, car si un élément

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & -c \\ b & +c & 0 \end{pmatrix} \text{ (matrice dans la base } (e_o, e_1, e_2)\text{)}$$

est dans l'orbite d'un élément j_ε, on voit aisément que c ne peut s'annuler. (Sinon, il y aurait un vecteur propre du genre espace pour la valeur propre 0).

Le groupe $SO_o(1,2)$ étant connexe, le signe de c est donc constant sur une orbite. Les éléments j_{+1} et j_{-1} sont donc sur deux orbites distinctes.

C.Q.F.D.

$\boxed{4}$ PARAMETRISATION DES ORBITES.

4.1. La base $(e_{i,j})$, avec $0 \leqslant i < j \leqslant n$ de $\underline{SO_o(1,n)}$ est définie de la manière suivante :

$$e_{i,j}(e_i) = e_j \ , \quad e_{i,j}(e_j) = \varepsilon_i \, e_i \qquad (\varepsilon_o = 1 \ , \quad \varepsilon_i = -1 \text{ si } i > 0).$$

4.2. Le sous-espace engendré par les éléments $e_{2p,2p+1}$ $(0 \leqslant 2p < n)$ est une sous-algèbre de Cartan non compacte. On note T^+ l'ensemble des éléments $u \in \underline{SO_o(1,n)}$ qui s'écrivent :

$$u = a_o e_{o,1} + a_1 e_{2,3} + \dots + a_q e_{2q,2q+1} \quad \text{avec} \quad n-1 \leqslant 2q+1 \leqslant n \ ,$$

avec les conditions suivantes :

$$a_o > 0 \ ; \quad \text{si} \quad n = 2q \ : \quad a_1 \geqslant a_2 \dots \geqslant |a_q| \ ;$$

$$\text{si } n = 2q+1 \ : \quad a_1 \geqslant a_2 \geqslant \dots \geqslant a_q \geqslant 0 \ .$$

- Le sous-espace engendré par les éléments $e_{2p-1,2p}$, où $2 \leqslant 2p \leqslant n$ est une sous-algèbre commutative compacte. En particulier, si n est pair, c'est une sous-algèbre de Cartan compacte. <u>On note T^- l'ensemble des $u \in SO_o(1,n)$ qui s'écrivent :</u>

$u = a_1 e_{1,2} + a_2 e_{3,4} + \dots + a_q e_{2q-1,2q}$ où $n-1 \leq 2q \leq n$

et :

$a_q \geq a_{q-1} \geq \dots \geq |a_1|$ si $n = 2q$; $a_q \geq a_{q-1} \geq \dots \geq a_1 \geq 0$ si $n = 2q-1$.

- Soit $j = e_{o,1} + e_{1,2}$

<u>Soit T_o l'ensemble des $u \in SO_o(1,n)$ qui s'écrivent : $(n > 2)$.</u>

$u = j + a_1 e_{3,4} + \dots + a_{q-1} e_{2q-1,2q}$

avec les conditions suivantes :

$n-3 \leq 2q \leq n-2$ et $a_{q-1} \geq \dots \geq a_1 \geq 0$ si $n = 2q+1$;
si $n = 2q$: $a_{q-1} \geq \dots \geq |a_1|$.

- Si $n = 2$, on pose $T_o = \{\pm j\}$.

Les ensembles T_o, T^+, T^- sont évidemment disjoints deux à deux. Nous allons montrer que $T_o \cup T^+ \cup T^-$ paramètre l'ensemble des orbites.

4.3. Le principal résultat de notre étude est le théorème suivant.

THEOREME. - *Tout orbite* O *coupe l'ensemble* $T^+ \cup T^- \cup T_o$ *en un élément exactement, noté* $p(O)$.

- *Si* O *est du type* (A) *(Cf.* 3.5*)*, $p(O)$ *appartient à* T^-.
- *Si* O *est du type* (B), *l'élément* $p(O)$ *appartient à* T^+.
- *Si* O *est du type* (C), *l'élément* $p(O)$ *appartient à* T_o.

PREUVE. - Nous allons d'abord montrer l'existence de $p(O)$, puis son unicité.

<u>Existence.</u>

a) On suppose O du type (A). Soit u un élément de O.

Soit $\mathbb{R} x_o$ la direction propre du genre espace $((x_o|x_o) = 1)$ de l'application u. En remplaçant au besoin x_o par $-x_o$, il existe

$v \in SO_o(1,n)$ tel que $v(e_o) = x_o$. En remplaçant u par vuv^{-1} qui est dans la même orbite, on se ramène au cas où le vecteur propre de lumière est e_o. Le sous-espace $e_o^{\perp} = \mathbb{R} e_1 + \ldots + \mathbb{R} e_n$ est stable par u et la restriction de u à ce sous-espace est un élément de SO(n). D'après l'étude faite pour SO(n), il existe donc dans l'orbite, pour l'action de SO(n), de $u_{|e_o^{\perp}}$ un élément qui s'écrit $a_1 e_{1,2} + a_2 e_{2,3} + \ldots + a_q e_{2q,2q+1}$, avec les conditions indiquées en 4.2 dans la définition de T^-. Comme $u_{|e_o}$ est nul, on voit que l'élément ci-dessus est dans l'orbite de u pour la représentation adjointe de $SO_o(1,n)$, et donc que cette orbite contient un élément de T^-.

b) On suppose l'orbite O de type (B) et soit u un élément de O. D'après le b) de la démonstration du théorème III-3.5, il existe deux vecteurs x_o et x_1 tels que $u(x_o) = \lambda_o x_1$ et $u(x_1) = -\lambda_o x_o$, où λ_o est l'unique valeur propre réelle positive de u. On peut trouver $v \in SO_o(1,n)$ tel que $v(e_o) = x_o$ et $v(e_1) = x_1$ (en changeant au besoin x_o en $-x_o$ et x_1 en $-x_1$). On peut donc, sans changer d'orbite, supposer λ_o positif et $u(e_o) = \lambda_o e_1$, $u(e_1) = -\lambda_o e_o$. On peut donc écrire $u_{|\mathbb{R} e_o + \mathbb{R} e_1} = \lambda_o e_{o,1}$. En considérant alors la restriction de u à l'orthogonal du sous-espace engendré par e_o et e_1, qui est $\mathbb{R} e_2 + \mathbb{R} e_3 + \ldots + \mathbb{R} e_n$, et en utilisant les résultats sur SO(n-1) comme en a), on voit qu'il existe dans l'orbite de u un élément de l'ensemble T^+.

c) Si l'orbite O est de type (C), il existe un sous-espace stable par l'élément u où (|) est de signature (+,-,-). On montre aisément que $SO_o(1,n)$ agit transitivement sur de tels sous-espaces, et donc, que sans changer d'orbite, on peut supposer le sous-espace $\mathbb{R} e_o + \mathbb{R} e_1 + \mathbb{R} e_2$ stable par u.

- Si n = 2, conformément au lemme 5, on voit que u est dans l'orbite de j_ε pour $\varepsilon = \pm 1$.

- Si $n > 2$, en appliquant au besoin Adv, où v est l'application de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ dont la matrice dans la base $(e_o,\dots,e_n)$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix},$$

on peut supposer que $u_{|\mathbb{R}e_1+\mathbb{R}e_2+\mathbb{R}e_3} = j_+$.

En utilisant les résultats sur <u>SO(n-2)</u>, on montre alors qu'il existe dans l'orbite de u un élément de T_o.

C.Q.F.D.

<u>Unicité</u>.

Il suffit évidemment de montrer que deux éléments de T_o (resp. T^+,T^-) ne peuvent être dans la même orbite.

a) Soient deux éléments de T^+, u et v, qui sont dans la même orbite. Alors, il existe $w \in SO_o(1,n)$ tel que $u = wvw^{-1}$. On constate alors que u et v ont les mêmes valeurs propres complexes avec la même multiplicité, et en particulier les mêmes valeurs propres réelles. L'éléments w de $SO_o(1,n)$ stabilise donc le sous-espace $\mathbb{R}e_o+\mathbb{R}e_1$. Du fait que $SO_o(1,1)$ est commutatif on en déduit que $u_{|\mathbb{R}e_o+\mathbb{R}e_1} = v_{|\mathbb{R}e_o+\mathbb{R}e_1}$. De plus w stabilise le sous-espace $\mathbb{R}e_2+\dots+\mathbb{R}e_n$. D'après les résultats obtenus sur <u>SO(n-1)</u> et compte tenu de la manière dont s'écrivent $u_{|\mathbb{R}e_2+\dots+\mathbb{R}e_n}$ et $v_{|\mathbb{R}e_2+\dots+\mathbb{R}e_n}$, on en déduit que $u_{|\mathbb{R}e_2+\dots+\mathbb{R}e_n} = v_{|\mathbb{R}e_2+\dots+\mathbb{R}e_n}$. Par suite, on a $u = v$.

C.Q.F.D.

b) Dans le cas de deux éléments de T_o ou T^-, on utilise une procédure analogue.

IV - DEFORMATION DES ORBITES DE $SO_o(1, n+1)$ VERS LES ORBITES DE $\mathbb{R}^{n+1} \odot SO_o(1,n)$.

L'objet de cette partie est de montrer que l'on peut approcher, en un sens que nous préciserons, les orbites de la représentation coadjointe de $\mathbb{R}^{n+1} \odot SO_o(1,n)$ par les orbites de la représentation coadjointe de $SO_o(1,n+1)$. En fait, nous établissons ce résultat dans la situation plus générale exposée en I, c'est-à-dire lorsqu'on considère une paire symétrique (G,H) et le contracté $V \odot H$ du groupe semi-simple G.

Pour finir, nous interprétons, par $G = SO_o(1,n+1)$ et $H = SO_o(1,n)$, les résultats en termes de représentations.

$\boxed{1}$ GENERALITES ET NOTATIONS.

1.1. Soit $V \odot H$ un groupe, produit semi-direct des groupes V et H, où V, abélien distingué, est un espace vectoriel réel de dimension finie et H opère linéairement sur V. L'algèbre de Lie du groupe $V \odot H$ s'identifie, en tant qu'espace vectoriel, au produit $V \times \underline{H}$ des algèbres de Lie de V et H, ou encore à $V \times \underline{H}$ (car on peut identifier $\underline{V}$ à V en tant qu'espaces vectoriels). L'espace $(V \times \underline{H})^*$ s'identifie à $V^* \times \underline{H}^*$.

Si $k \in V^*$ et $X \in H$, on note $X \cdot k$ l'élément de V^* tel que pour tout x de V, on ait la relation $\langle x, X \cdot k \rangle = \langle X^{-1} \cdot x, k \rangle$. Lorsqu'on identifie $\hat{V}$, groupe dual de V, à V^*, ceci représente l'action de Mackey de H sur V^*.

1.2. Si le groupe $V \odot H$ est le contracté du groupe G (Cf. Chap. I), on peut identifier, en tant qu'espaces vectoriels, $\underline{G}$ et $\underline{V \odot H}$, donc $\underline{G}$ et $V \times \underline{H}$. Nous noterons donc les éléments de $\underline{G}$ sous la forme (a,A) ($a \in V$, $A \in \underline{H}$), et ceux de $\underline{G}^*$ sous la forme (k,K) ($k \in V^*$, $K \in \underline{H}^*$). Sauf indication contraire, les crochets seront pris dans $\underline{G}$.

$\boxed{2}$ ORBITES DE LA REPRESENTATION COADJOINTE DANS LE CAS D'UN PRODUIT SEMI-DIRECT $V \odot H$.

Nous nous plaçons dans les hypothèses de 1.1 (indépendamment de 1.2).

2.1. La représentation coadjointe du groupe $V \odot H$ est l'application de $V \odot H$ dans $GL(\underline{(V \odot H)^*}) \simeq GL(V^* \times \underline{H}^*)$ définie par :

$$\langle (a,A), \operatorname{CoAd}(x,X)(k,K) \rangle = \langle a, X.k \rangle + \langle A.x, X.k \rangle + \langle A, \operatorname{CoAd}_H(X)(K) \rangle .$$

Dans cette relation :

$$(x,X) \in V \odot H, \ (a,A) \in V \times \underline{H}, \ (k,K) \in V^* \times \underline{H}^* .$$

De plus, CoAd_H désigne la représentation coadjointe du groupe H et est donc une application de H dans $GL(\underline{H}^*)$.

2.2. Rappelons maintenant comment sont caractérisées les orbites de la représentation coadjointe du groupe $V \odot H$ (que nous appellerons aussi les $V \odot H$-orbites). Une $V \odot H$-orbite est une sous-variété de $V^* \times \underline{H}^*$, dont la projection sur V^* est une orbite O' pour l'action de Mackey de H sur V^*. Pour déterminer totalement cette $V \odot H$-orbite, il suffit de choisir $k \in O'$, puis une orbite Ω de la coadjointe de H_k, stabilisateur de k dans H. Pour qu'un élément de $V^* \times \underline{H}^*$ s'écrivant sous la forme (k,K) appartienne à $O_{k,\Omega}$, il faut et il suffit que $q(K)$ (où q est la projection canonique de $\underline{H}^*$ sur $\underline{H}_k^*$, c'est-à-dire la restriction) appartienne à Ω.

Soit maintenant un élément $k_1 = X.k$ de O' $(X \in H)$. Pour que l'élément (k_1,K_1) appartienne à $O_{k,\Omega}$, il faut et il suffit qu'il existe un élément K de $\underline{H}^*$ tel que l'élément (k,K) appartienne à $O_{k,\Omega}$ et que l'on ait la relation :

$$K_1 = \operatorname{CoAd}_H(X)(K) .$$

2.3. Nous notons $O(k,K)$ la $V \odot H$-orbite de l'élément (k,K) de $V^* \times \underline{H}^*$.

Le parallèle entre la description des orbites et la méthode de Mackey est immédiat : Si $O_{k,\Omega}$ est une orbite (Cf. 2.2), l'orbite Ω de la coadjointe de H_k détermine, sous certaines conditions, une représentation du groupe H_k. Il est donc possible d'envisager la méthode des orbites comme une combinaison de la méthode de Mackey et de la méthode des orbites appliquée au groupe H_k. (Cf. Rawnsley [5]).

$\boxed{3}$ APPROXIMATIONS DES ORBITES DE $V \odot H$ PAR LES ORBITES DE G.

Les éléments de $V \odot H$ s'écrivant sous forme de couples (x,X), l'élément $CoAd(x,X)$ désigne l'image de (x,X) par la représentation coadjointe de $V \odot H$, alors que l'élément $CoAd\,Y$ désigne l'image de l'élément Y de G par la représentation coadjointe de G.

Nous nous plaçons dans les hypothèses et notations du Chapitre I et du $\boxed{1}$ du présent chapitre.

3.1. Les sous-variétés $O_r(k,K)$.

Considérons une $V \odot H$-orbite O et un élément particulier (k,K) de cette orbite. A tout réel positif r, nous associons une sous-variété $O_r(k,K)$ de la manière suivante : Nous appelons $O'_r(k,K)$ la G-orbite (orbite par la représentation coadjointe de G) de $[{}^t(d\pi_r)]^{-1}(k,K)$. L'ensemble $O_r(k,K)$ est l'image de cette orbite par l'application ${}^t(d\pi_r)$. (Remarquons que $O_r(k,K)$ dépend effectivement du choix de l'élément (k,K)).

Dans la suite, nous allons montrer que lorsque r tend vers 0, les sous-variétés $O_r(k,K)$ réalisent une approximation ponctuelle de l'orbite O, c'est-à-dire que pour chaque point M de O, il existe une suite M_r de points de $O_r(k,K)$ qui converge vers M. Nous dirons que les sous-variétés $O_r(k,K)$ "ont pour limite" l'orbite O. Naturellement, les sous-variétés $O_r(k,K)$ peuvent avoir pour limite la réunion de plusieurs orbites. C'est le cas lorsque $G = SO_o(1,n+1)$ et $H = SO_o(1,n)$.

3.2. Base et fibres d'une $V \odot H$-orbite.

A tout couple (x,k) de $V \times V^*$, on associe l'élément $x \wedge k$ de $\underline{H}^*$ défini par : $\langle A, x \wedge k \rangle = -\langle A.x, k \rangle$. La notation A.x est justifiée par le fait que $\underline{H}$ opère sur V par la restriction de $ad_{\underline{G}}$ [Ad_G et $ad_{\underline{G}}$ sont respectivement les représentations adjointes de G et de $\underline{G}$]. Si $A \in \underline{H}$ et $x \in V$, on a donc $A.x = [A,x]$.

La représentation coadjointe de $V \odot H$ s'écrit alors :

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{CoAd}(x,X)(k,K) = (X.k,\ \mathrm{CoAd}_H(X)(K) - x \wedge X.k) \\ ((x,X) \in V \odot H,\ (k,K) \in V^* \times \underline{H}^*,\ (a,A) \in V \times \underline{H}) . \end{array}}$$

En particulier, on a les relations :

$$\mathrm{CoAd}(x,0)(k,K) = (k,\ K - x \wedge k)$$

$$\mathrm{CoAd}(0,X)(k,K) = (X.k,\ \mathrm{CoAd}_H(X)(K)) .$$

DEFINITION. - *Etant donné un élément* (k,K) *et* $O(k,K)$ *sa* $V \odot H$-*orbite, nous appelons* base *de* $O(k,K)$ *l'ensemble des éléments de* $O(k,K)$ *qui s'écrivent* $\mathrm{CoAd}(0,X)(k,K)$, $(X \in H)$. *Si* (k_1,K_1) *appartient à la base de* $O(k,K)$, *nous appelons* fibre *au-dessus de* (k_1,K_1) *l'ensemble des éléments qui s'écrivent* $\mathrm{CoAd}(x,\mathrm{Id})(k_1,K_1)$. *Naturellement, les définitions de la fibre et de la base dépendent de l'élément* (k,K).

REMARQUE. - La réunion des fibres de $O(k,K)$ est égale à l'orbite toute entière.

LEMME 1. - *Soit un élément* (k,K) *de* $V^* \times \underline{H}^*$. *Pour tout* $r > 0$, *la base de* $O(k,K)$ *est incluse dans l'ensemble* $O_r(k,K)$.

PREUVE. - Il suffit de vérifier que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} V^* \times \underline{H}^* \arrow[r, mapsto, "\mathrm{CoAd}(X)"'] \arrow[d, "{}^t(d\pi_r)"'] & V^* \times \underline{H}^* \arrow[d, "{}^t(d\pi_r)"] \\ V^* \times \underline{H}^* \arrow[r, mapsto, "\mathrm{CoAd}(0,X)"'] & V^* \times \underline{H}^* \end{tikzcd} \qquad (X \in H)$$

LEMME 2. - *Soit* (k_1,K_1) *appartenant à la base de* $O(k,K)$. *Alors*

$$O_r(k_1,K_1) = O_r(k,K) \ .$$

PREUVE. - On utilise le même argument qu'au lemme 1.

3.3. Soit (k,K) un élément de $V^* \times \underline{H}^*$ et (t,T) un élément de la $V \odot H$ - orbite $O(k,K)$. Alors,

$$(t,T) = \mathrm{CoAd}(x,X)(k,K) = \mathrm{CoAd}(x,\mathrm{Id}) \circ \mathrm{CoAd}(0,X)(k,K) = \mathrm{CoAd}(x,\mathrm{Id})(k_1,K_1),$$

l'élément (k_1,K_1) appartenant à la base de $O(k,K)$.

PROPOSITION (Notations ci-dessus). - *Soit* (t,T) *un élément de* $O(k,K)$. *Considérons la suite de points*

$$M_r = {}^t(d\pi_r) \circ \mathrm{CoAd}(\exp_G rx) \circ ({}^t(d\pi_r)^{-1})(k_1,K_1) \ .$$

Alors, pour tout $r > 0$, $M_r \in O_r(k,K)$ *et l'on a,*

$$\lim_{r \to o} M_r = (t,T) \ ,$$

(pour la topologie de $\underline{G}^* \simeq V^* \times \underline{H}^*$*)* .

PREUVE. - Le fait que M_r appartienne à $O_r(k,K)$ provient du lemme 2. Montrons que $\lim_{r \to o} M_r = (t,T) = \mathrm{CoAd}(x,0)(k_1,K_1)$.

On a,

$$\langle (a,A),({}^t d\pi_r)^{-1}(k_1,K_1) \rangle = \langle \frac{a}{r}, k_1 \rangle + \langle A,K_1 \rangle$$

$$(a \in \underline{V},\ \ A \in \underline{H},\ \ k_1 \in V^*,\ K_1 \in \underline{H}^*) \ ,$$

et,

$$(\mathrm{I}) \ : \ \langle (a,A),\mathrm{CoAd}(\exp rx) \circ d\pi_r^{-1}(k_1,K_1) \rangle = \langle \mathrm{Ad}(\exp - rx)(a,A), {}^t d\pi_r^{-1}(k_1,K_1) \rangle .$$

D'autrepart, si $B \in \underline{G}$, on a,

$$\mathrm{Ad}(\exp - rx)B = B + [-rx,B] + O(r^2 \| B \|) \ .$$

(Ici, $\| \ \ \|$ désigne une norme arbitraire sur $\underline{G}$).

Maintenant, en supposant que B = (a,A) ($a \in V$, $A \in \underline{H}$), on peut écrire :

$$Ad(\exp -rx)(a,A) = (a - r[x,A],\ A - r[x,a]) + o(r^2)$$
$$= (a + rA.x,\ A - r[x,a]) + o(r^2)\ .$$

D'après (I), on en déduit que :

$$\langle (a,A), CoAd(\exp rx) \circ {}^t d\pi_r^{-1}(k_1,K_1) \rangle = \langle (\frac{a}{r} + A.x,\ A - r[x,a]), (k_1,K_1) \rangle +$$
$$+ o(r^2 \| a,A \|)\ .$$

D'où,

$$\langle (a,A), M_r \rangle = \langle (a + A.x, A), (k_1,K_1) \rangle + o(r)$$
$$= \langle (a,A), CoAd(x,o)(k_1,K_1) \rangle + o(r)\ .$$

On voit alors que,

$$\lim_{r \to o} \langle (a,A), M_r \rangle = \langle (a,A), CoAd(x,o)(k_1,K_1) \rangle$$
$$= \langle (a,A), (t,T) \rangle\ .$$

D'où $\lim M_r = (t,T)$, (car sur $V^* \times \underline{H}^*$, de dimension finie, toutes les topologies compatibles avec la structure d'espace vectoriel sont équivalentes).

C.Q.F.D.

<u>En conclusion</u>. - On a montré une sorte de convergence ponctuelle des variétés $o_r(k,K)$ vers $o(k,K)$. Mais le théorème ne dit rien sur plusieurs points. Ainsi, les variétés $o_r(k,K)$ et $o(k,K)$ ont-elles même dimension ? Et est-ce que "toute" la variété $o_r(k,K)$ converge vers $o(k,K)$. A ces deux questions, on peut en général répondre par la négative.

Ainsi, si l'on prend G = SO(3) et H = SO(2), $V \odot H$ est isomorphe au groupe M(2) des déplacements du plan. On constate que l'orbite de (o,K), où $K \in \underline{SO(2)}^*$, est réduite à un point, alors que la variété $o_r(o,K)$ est un ellipsoïde de dimension 2 qui s'allonge et a pour limite, quand $r \to o$, l'ensemble des points de la forme (o,H), $H \in \underline{SO(2)}^*$.

Dans le cas $G = SO_o(1, n+1)$ et $H = SO_o(1,n)$, on verra que certaines variétés $O_r(k,K)$ ont pour limite deux orbites de $\mathbb{R}^{n+1} \odot SO_o(1,n)$.

3.4. REMARQUE. - Soit H' le normalisateur de H dans G. Alors les sous-espaces $\underline{H}$ et V de $\underline{G}$ sont stables par la restriction de la représentation adjointe de G à H'. Par suite, le groupe H' opère sur les espaces V^* et $\underline{H}^*$ de la manière suivante : si $k \in V^*$, $K \in \underline{H}^*$, $L \in \underline{H}$ et $X \in H'$, les éléments X.k de V^* et $CoAd_H(X)(K)$ sont définis par les relations :

(I) $(X.k, v) = (k, X^{-1}(v))$ et (II) $\langle CoAd_H(X)(K), L\rangle = \langle K, X^{-1}LX\rangle$.

(La notation CoAd est un abus d'écriture, si $X \notin H$. Naturellement, si $X \in H$, rien n'est changé).

Considérons maintenant l'orbite T d'un élément (k,K) de $V^* \times \underline{H}^*$ par l'action de H'. Cette orbite se décompose en une ou plusieurs orbites par l'action de H, en particulier, l'une de ces orbites est ce que nous avons appelé la base de O(k,K). Les autres orbites ne sont pas dans O(k,K), mais peuvent être considérées comme les bases de $V \odot H$ - orbites $O(w.k, CoAd_H(w).K)$, $w \in H'$. Il est aisé de vérifier que T est entièrement contenue dans $O_r(k,K)$, et que l'on a donc $O_r(k,K) = O_r(w.k, CoAd_H(w).K)$. Par suite, la "limite" de $O_r(k,K)$ contient toutes les $V \odot H$ orbites $O(w.k, CoAd_H(w).K)$ et donc en général plusieurs $V \odot H$ - orbites (autant qu'il y a de H-orbites dans T). Ceci a lieu dans le cas que nous étudions, où $G = SO_o(1, n+1)$, $H = SO_o(1,n)$ et $H' = SO(1,n)$.

$\boxed{4}$ APPLICATIONS AUX REPRESENTATIONS DANS LE CAS $G = SO_o(1, n+1)$ ET $H = SO_o(1,n)$ $(n \geqslant 1)$.

4.1. Nous avons déjà parlé de la contraction de $SO_o(1, n+1)$ sur $\mathbb{R}^{n+1} \odot SO_o(1,n)$ en II-$\boxed{3}$. Pour mémoire, les éléments de $G = SO_o(1, n+1)$ sont identifiés avec leur matrices dans une base "orthonormée" $(e_o, e_1, \ldots, e_{n+1})$ $((e_i|e_j) = 0$ si $i \neq j$; $(e_o|e_o) = 1$; $(e_i|e_i) = -1$ si $i > 0)$. Le groupe $H = SO_o(1,n)$ est alors le stabilisateur du vecteur e_{n+1} dans G. On appelle V le sous-espace vectoriel des éléments de $\underline{G}$ dont la matrice s'écrit :

$$\begin{pmatrix} & & & & & x_o \\ & & & & & x_1 \\ & & 0 & & & x_2 \\ & & & & & \vdots \\ & & & & & x_n \\ x_o & -x_1 & -x_2 & \cdots & -x_n & 0 \end{pmatrix}$$

Bien entendu, on identifie V à $\mathbb{R}^{n+1}$ par l'application

$$x \longmapsto x_o e_{o,n+1} - x_1 e_{1,n+1} \cdots - x_n e_{n,n+1} .$$

Plus généralement, on pourrait prendre $G = SO_o(p,q)$ et $H = SO_o(p-1,q)$.

4.2. Dans la suite G, H et V désignent respectivement $SO_o(1, n+1)$, $SO_o(1,n)$ et $\mathbb{R}^{n+1}$ construits comme ci-dessus. Beaucoup de démonstrations seraient encore valables dans un cas plus général. Rappelons que $\underline{G}$ possède une base "canonique" $(e_{i,j})$ $(0 \leqslant i < j \leqslant n+1)$, l'élément $e_{i,j}$ étant défini par les relations : $e_{i,j}(e_i) = e_j$; $e_{i,j}(e_j) = \varepsilon_i\, e_i$ $[\varepsilon_i = 1$ si $i = 0$; $\varepsilon_i = -1$ sinon$]$ et $e_{i,j}(e_k) = 0$ $(k \notin \{i,j\})$. Sur $\underline{G}$, on peut définir la forme quadratique $(|)$ par les relations suivantes $(e_{i,j}|e_{i,j}) = \varepsilon_i$; $(e_{i,j}|e_{k,\ell}) = 0$ si $(i,j) \neq (k,\ell)$. La forme $(|)$ est, à une constante multiplicative près, la forme de Killing de $\underline{G}$. Elle est donc invariante par Ad_G et sa restriction à $\underline{H}$ est naturellement invariante par Ad_H (si $n > 1$, cette restriction est à une constante multiplicative près la forme de Killing de H). Désormais, nous utiliserons la forme $(|)$ à la place de la forme de Killing de $\underline{G}$, et nous l'appellerons encore forme de Killing par abus de langage.

Grâce à la forme $(|)$, nous identifions $\underline{G}$ et $\underline{G}^*$, H et $\underline{H}^*$ et $\underline{V \odot H}$ à $\underline{V \odot H}^*$. (Rappelons que du point de vue espaces vectoriels, $\underline{G} = \underline{V \odot H}$. Naturellement, la forme $(|)$ n'est pas invariante par le crochet de $\underline{V \odot H}$).

4.3. Remarquons que la restriction de la forme $(\,|\,)$ à V est l'application $(x_o,x_1,\ldots,x_n) \longmapsto x_o^2 - x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2$. Il s'agit donc précisément de la forme quadratique conservée par le groupe H lorsqu'il agit sur V. Après identification de V^* à V, l'action de Mackey de H sur V^* devient l'action de H sur V.

On sait qu'après identification de $\underline{G}$ et $\underline{G}^*$, la représentation CoAd(G) devient la représentation Ad(G).

De même, la représentation CoAd($V \odot H$) devient une représentation de $V \odot H$ dans $\underline{G}$, que nous noterons Ad^*. La représentation coad($V \odot H$) devient une représentation de $\underline{V \odot H}$ dans $\underline{G}$, notée ad^*.

LEMME. - *Soit* $(x,X) \in V \odot H$; $(k,K) \in \underline{G}$; $(b,B) \in \underline{G}$.

On a les formules suivantes :

$$Ad^*(x,X)(k,K) = (X.k,\ Ad(X)(K) - [x,X.k]) \qquad (I)$$

$$\dot{ad}^*(b,B)(k,K) = (B.k,\ [B,K] - [b,k]) \qquad (II)$$

(Les crochets sont des crochets dans $\underline{G}$*).*

PREUVE. - On se sert de la formule $CoAd_{(x,X)}(\ell,L) = (X.\ell, CoAd_H(x)L - x \wedge X.\ell)$.

Etudions ce que devient la forme linéaire sur H : $x \wedge X.\ell$ après identification. Par définition, si $\Phi \in \underline{H}$: $\langle \Phi, x \wedge \ell \rangle = \langle \Phi(x), \ell \rangle$.

Soient k et K les éléments de V et $\underline{H}$ tels que : $(.|(k,K)) = (\ell,L)$.
On a alors :

$$\langle \Phi(x),\ell \rangle = (\Phi(x)|k) = ([\Phi,x],k) = -(\Phi,[x,k]) .$$

D'où

$$\langle \Phi,\ x\wedge\ell \rangle = (\Phi|[x,k]) .$$

Autrement dit, par identification, $x\wedge\ell$ devient l'élément $[x,\ell]$ de $\underline{H}$ et $x\wedge X.\ell$ devient $[x,X.k]$. On montre alors aisément la formule (I). La formule (II) est alors obtenue par dérivation (car la dérivation commute à l'identification de $\underline{G}$ et $\underline{G}^*$). C.Q.F.D.

Remarquons enfin que la représentation adjointe de l'algèbre de Lie $\underline{G}$ peut s'écrire

$$ad(b,B)(k,K) = ([b,K] + [B,k],\ [b,k] + [B,K]) .$$

4.4. Stabilisateur d'un élément (k,K) de $\underline{G}$ pour $\underline{ad}^*$.

L'espace tangent à la $V \odot H$ - orbite de (k,K) est l'ensemble des (b,B) de $\underline{G}$ tels que $ad^*(b,B)(k,K) = 0$. Nous allons remplacer cette condition par des conditions équivalentes sous certaines hypothèses.

Le lemme suivant va nous permettre de restreindre les hypothèses sur (k,K).

LEMME 1. - *Soit un élément* (k,K) *tel que la restriction de* $(\ |\ )$ *à* $\underline{H}_k$ *est non dégénérée. Il existe alors dans la* Ad^**-orbite de* (k,K) *un élément* (k,K') *tel que* $K'.k = 0$.

Montrons tout d'abord que l'image de l'application $x \longmapsto [x,k]$ est l'ensemble $\underline{H}_k^{\perp}$ (orthogonal de $\underline{H}_k$ dans $\underline{H}$). En effet, on vérifie que les applications

$$\begin{array}{ccc} V \xrightarrow{\ \alpha\ } \underline{H} & \quad\text{et}\quad & \underline{H} \xrightarrow{\ \beta\ } V \\ x \longmapsto -[x,k] & & A \longmapsto A.k \end{array}$$

sont adjointes l'une de l'autre (pour la forme $(\,|\,)$). Par suite

$(\mathrm{Ker}\ \beta)^{\perp} = \mathrm{Im}\ \alpha$ (car $(\,|\,)$ est non dégénérée). Donc $\mathrm{Im}\ \alpha = \underline{H}_k^{\perp}$ et l'assertion ci-dessus est vraie. Ensuite, comme $H = \underline{H}_k \oplus \underline{H}_k^{\perp}$ et que $Ad^*(x,Id)(k,K) = (k, K - [x,k])$, on peut choisir x tel que $K - [x,k] \in \underline{H}_k$ et on a le résultat annoncé. C.Q.F.D.

Le fait que la restriction de $(\,|\,)$ à $\underline{H}_k$ soit non dégénérée signifie que la forme $(\,|\,)$ permet l'identification de $\underline{H}_k$ à $\underline{H}_k^*$. lorsque la restriction de $(\,|\,)$ à $\underline{H}_k$ est dégénérée, il faudra trouver une sous-algèbre $\underline{H}_k'$ que $(\,|\,)$ mette en dualité avec $\underline{H}_k^*$.

Rappelons que pour le cas qui nous intéresse ($G = SO_o(1, n+1)$), on a $H_k \simeq SO_o(1,n-1)$ si $(k|k) > 0$, $H_k \simeq SO(n)$ si $(k|k) < 0$, $H_k \simeq \mathbb{R}^{n-1} \odot SO(n-1)$ si $(k|k) = 0$ $(k \neq 0)$, et enfin $H_o \simeq SO_o(1,n)$. Pour que la restriction de $(\,|\,)$ à $\underline{H}_k$ soit non dégénérée, il faut et il suffit que k ne soit pas un vecteur isotrope.

REMARQUE 1. - Si l'on avait pris une décomposition de Cartan $\underline{G} = \underline{f} + p$ la condition du lemme aurait été automatiquement remplie (puisque $(\underline{f},\underline{f}) < 0$ et $(p|p) > 0$).

REMARQUE 2. - Comme on s'intéresse aux représentations, étudier $O(k,K)$, avec $K.k = 0$ (lorsque $(\,|\,)_{H_k}$ est non dégénérée) est suffisant, puisqu'il y a un tel élément sur chaque orbite.

LEMME 2. - *Soit* $(k,K) \in \underline{G}$ *tel que la restriction de* $(\,|\,)$ *à* H_k *soit non dégénérée et tel que* $K.k = 0$. *Alors le stabilisateur de* (k,K) *pour* ad^* *est l'ensemble des* (b,B) *de* $\underline{G}$ *tels que :*

$$\text{(I)} \quad [b,k] = 0 \qquad \text{(II)} \quad B \in \underline{H}_k \qquad \text{(III)} \quad [B,K] = 0 .$$

(Autrement dit, B *est dans le stabilisateur de* K *par* $ad|_{\underline{H}_k}$*).*

PREUVE. - D'après la relation (II), de 4.3 (expression de ad^*), il faut que $B.k = 0$ et $[B,K] + [b,k] = 0$. On a donc $B \in H_k$, et donc $[B,K] \in \underline{H}_k$. Comme $[b,k] \in H_k^{\perp}$, on en tire $[B,K] = 0$ et $[b,k] = 0$.

C.Q.F.D.

4.5. Espace tangent en un point à $O_r(k,K)$.

Examinons maintenant ce que deviennent par identification les variétés $O_r(k,K)$. L'application ${}^t d\pi_r$ devient l'application $d\pi_r(k,K) = (rk,K)$ et l'application ${}^t d\pi_r^{-1}$ devient donc l'application $d\pi_{\frac{1}{r}}(k,K) = (\frac{k}{r}, K)$.

La variété $O_r(k,K)$ est l'image par $d\pi_r$ de la variété $O'_r(k,K)$, qui est l'orbite par Ad de $(\frac{k}{r}, K)$. L'espace tangent en (k,K) à $O_r(k,K)$ est donc l'image par $d\pi_r$ de l'espace tangent en $(\frac{k}{r}, K)$ à $O'_r(k,K)$. Nous allons étudier ce dernier espace, qui dans de "bonnes conditions" est l'espace tangent à $O(k,K)$. Sans remplacer une preuve formelle (que nous ne possédons pas dans tous les cas), le fait que $O(k,K)$ et $O_r(k,K)$ aient même dimension peut nous permettre d'envisager l'approximation des représentations de $V \odot H$ provenant de $O(k,K)$ à l'aide des représentations de G provenant de $O'_r(k,K)$.

LEMME 1. - *Soit* (k,K) *un élément de* $\underline{G}$ *tel que* $K.k = 0$ *: C'est un opérateur sur* $\mathbb{R}^{n+2}$ *. Alors* $(k|k)^{1/2}$ *et* $-(k|k)^{1/2}$ *(racines carrées complexes) sont valeurs propres de cet opérateur. Lorsque* $(k|k) \neq 0$*, les autres valeurs propres de cet opérateur sont les valeurs propres de* K *considéré comme opérateur sur* V.

PREUVE. - Rappelons que (k,K) est représenté par la matrice d'ordre $(n+2)$:

$$\left(\begin{array}{c|c} K & \begin{matrix} k_o \\ k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} k_o & -k_1 & \cdots & -k_n \end{matrix} & 0 \end{array}\right)$$

On voit par un simple calcul que les vecteurs de $\mathbb{C}^{n+2}$ dont les coordonnées sont $(k_o,\dots,k_n, \varepsilon(k|k)^{1/2})$, $(\varepsilon = \pm 1)$, sont vecteurs propres pour la valeur propre $\varepsilon(k|k)^{1/2}$. Lorsque $(k|k) \neq 0$, d'après notre étude sur <u>SO(1, n+1)</u> (Cf. III), les vecteurs propres restants sont dans l'orthogonal du sous-espace engendré par les deux vecteurs ci-dessus, et donc en particulier dans l'orthogonal de $(0,\dots,0,1)$ et de $(k_o,k_1,\dots,k_n, 0)$ [orthogonal pour la forme hermitienne sur $\mathbb{C}^{n+2}$]. Par suite ces vecteurs s'écrivent $(v,0)$ avec $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $(v|k) = 0$ (en identifiant v à un élément de V). La condition

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & & & k_o \\ & K & & \vdots \\ & & & k_n \\ \hline k_o & -k_1 \;\dots & -k_n & 0 \end{array}\right)\begin{pmatrix} v_o \\ \vdots \\ v_n \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_o \\ \vdots \\ v_n \\ 0 \end{pmatrix}$$

équivaut alors à $K.v = \lambda v$.

C.Q.F.D.

PROPOSITION. - *Soit* (k,K) *un élément de* $\underline{G}$ *tel que* $K.k = 0$ *et tel que* $(k|k) \neq 0$. *Soit* $\lambda = \operatorname{Sup}\{|\lambda_i| \,/\, \lambda_i$ *valeur propre de* $K\}$. *Alors, si* $0 < r < \dfrac{|(k|k)|^{1/2}}{\lambda + 1}$, *le stabilisateur de* $(\frac{k}{r}, K)$ *pour la représentation adjointe de* $\underline{G}$ *est l'ensemble des couples* $(\lambda k,B)$, *où* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* B *est un élément de* $\underline{H}_k$ *vérifiant* $[B,K] = 0$.

PREUVE. - On a évidemment $K.\frac{k}{r} = 0$ et les nombres $\varepsilon\left(\frac{k}{r} \,\middle|\, \frac{k}{r}\right)^{1/2} = \varepsilon\,\dfrac{(k|k)^{1/2}}{r}$ sont valeurs propres complexes de l'élément $u = (\frac{k}{r}, K)$ [considéré comme opérateur sur $\mathbb{R}^{n+2}$] . Le sous-espace engendré par les directions propres correspondantes est stable par cet opérateur. De plus, il existe des réels non nuls α et β tels que $u(k_o,k_1,\dots,k_n, 0) = \alpha(0,0,\dots,1)$ et $u(0,0,\dots,1) = \beta(k_o,k_1,\dots,k_n, 0)$, $(\alpha = (k|k),\ \beta = 1)$.

Lorsque $r < \dfrac{|(k|k)|^{1/2}}{\lambda + 1}$, les valeurs $\varepsilon\,\dfrac{(k|k)^{1/2}}{r}$ sont valeurs propres simples de u. Si $v = (b,B)$ commute avec u, les sous-espaces propres de u sont stables par v, et par suite, les directions propres de u sont stables par v , et donc , les directions propres associées aux valeurs $\varepsilon \frac{(k|k)^{1/2}}{r}$ sont directions propres de v. Compte tenu des conditions que doit vérifier v, on trouve que les valeurs propres de v associées à ces directions sont $\varepsilon\gamma \frac{(k|k)^{1/2}}{r}$, $(\gamma \in \mathbb{R})$. On en déduit $v(k_o,k_1,k_2,\ldots,k_n, 0) = \gamma\alpha(0,0,\ldots,1)$ et $v(0,\ldots,1) = \gamma\beta(k_o,\ldots,k_n, 0)$. En exprimant matriciellement ces conditions dans $\mathbb{R}^{n+2}$, on trouve que : $b = \gamma\alpha\, k$ et $B.k = 0$. Comme $[b, \frac{k}{r}] + [B,K] = 0$, on en déduit que $[B,K] = 0$. On obtient donc bien l'ensemble annoncé dans la proposition, dont on vérifie réciproquement qu'il est contenu dans le stabilisateur de $(\frac{k}{r}, K)$.

COROLLAIRE. - *Lorsque* $0 < r < \frac{|(k|k)|^{1/2}}{\lambda + 1}$, *les variétés* $O(k,K)$ *et* $O_r(k,K)$ *ont même dimension.*

PREUVE. - Il suffit de montrer que les stabilisateurs de (k,K) pour ad^* et de $(\frac{k}{r}, K)$ pour ad sont identiques. Compte tenu du lemme 2 de 4.4 et de la proposition de 4.5, il suffit de montrer que $[b,k]= 0$ implique $b = \lambda k$, $(\lambda \in \mathbb{R})$. Rappelons-nous que les applications

$$V \xrightarrow{\alpha} H \qquad \text{et} \qquad H \xrightarrow{\beta} V$$
$$x \longmapsto -[x,k] \qquad\quad A \longmapsto A.k$$

sont adjointes l'une de l'autre et ont même rang. Compte tenu du fait que $\dim \operatorname{Im}\beta = \dim \underline{H} - \dim \underline{H}_k = n$ (si $k \neq 0$), on trouve $\dim \operatorname{Ker}\alpha = 1$ et donc $\operatorname{Ker}\alpha = \mathbb{R}.k$.

C.Q.F.D.

REMARQUE. - On aurait pu refaire les mêmes démonstrations avec $G = SO(p,q)$ et $H = SO(p-1,q)$.

4.6. Le fait que $O(k,K)$ et $O_r(k,K)$ (pour r suffisamment petit) soient de même dimension est un indice qui laisse penser que les représentations de $V \odot H$ provenant de $O(k,K)$ peuvent être bien approximées avec celles de G provenant de $O_r'(k,K)$. Cette interprétation est vérifiée pour $(k|k) > 0$ comme nous allons le voir.

Soit (k,K) tel que $(k|k) > 0$ et $K \in \underline{H}_k$. La restriction de $(|)$ à $\underline{H}_k$ est non dégénérée et K détermine donc un élément de $\underline{H}_k^*$, qui sous certaines conditions, détermine une représentation u du groupe H_k.

La représentation de $V \odot H$ correspondante est la représentation $\rho'_{k,u}$ construite par la méthode de Mackey associée à l'orbite de k et à la représentation u du "petit groupe" H_k. Les représentations obtenues sont les représentations dites de "masse réelle" de $V \odot H$.

Si l'on pose d'autre part $A_k = \exp_G(\mathbb{R}.k)$, il existe un groupe N_k tel que $P = H_k A_k N_k$ soit un groupe parabolique de G. L'élément $\frac{k}{r}$ détermine un caractère du groupe A_k que l'on note symboliquement $a^{\frac{i(k|k)}{r}}$ (c'est l'application $\exp(t.k) \longmapsto e^{\frac{it(k|k)}{r}}$). La représentation u et le caractère précédent déterminent une représentation du groupe P, et par suite une représentation $U'_{\frac{i(k|k)}{r},u}$ des séries principales de G.

Considérons maintenant l'élément w de $SO_o(1, n+1)$ défini par $w(e_{n+1}) = -e_{n+1}$ et $w(e_n) = -e_n$; $w(e_i) = e_i$ si $i < n$. L'élément w normalise H ($wHw^{-1} \subset H$) et aussi M. Par suite, l'élément $(w.k, wKw^{-1})$ détermine la représentation $\rho_{w.k,u^w}$ de $V \odot H$ (où $u^w(m) = u(wmw^{-1})$.

LEMME. - *On a la formule, pour* $f \in L^2(\mathcal{H}_k, V_u)$, *continue :*

$$\lim_{r \to o} U'_{\frac{i(k|k)}{r},u} (\exp\ rv.h)f(\xi) = \rho'_{k,u}(v,k)f^+(\xi) + \rho'_{wk,u^w}(v,k)f^-(\xi).$$

Ici, $\mathcal{H}_k$ *est l'hyperboloïde de* V *d'équation* $(x|x) = (k|k)$.

$\mathcal{H}_k^+$ *est la composante connexe de cet hyperboloïde contenant* k.

$\mathcal{H}_k^-$ *est la composante ne contenant pas* k.

Si $f \in L^2(\mathcal{H}_k, V_u)$, $f = f^+ + f^-$, $\operatorname{supp} f^+ \subset \mathcal{H}_k^+$; $\operatorname{supp} f^- \subset \mathcal{H}_k^-$.

PREUVE. - Ceci provient simplement du théorème de la partie I, par conjugaisons par un élément X de H' (H' normalisateur de H dans G), tel que $X.(e_{o,n+1}) = \frac{k}{(k|k)}$.

Or, si l'on considère la variété $O_r(k,K)$, on voit qu'elle a pour limite $O(w.k,wKw^{-1}) \cup O(k,K)$ d'après la remarque faite en 3.4. Autrement dit, sur ce cas, ce que l'on constate sur les orbites se retrouve sur les représentations.

4.7. Cas où $(k|k) < 0$.

Examinons quelles représentations sont associées à (k,K) dans $V \odot H$ et à $(\frac{k}{r}, K)$ dans G (on suppose toujours $K.k = 0$). Alors $H_k \simeq SO_o(1,n-1)$. Comme la restriction de la forme de Killing de $\underline{G}$ à $\underline{H}_k$ n'est pas dégénérée, K détermine une forme linéaire sur $\underline{H}_k$, donc sous certaines conditions, une représentation u de H_k. La représentation de $V \odot H$ associée est construite par la méthode de Mackey et notée $\rho'_{k,u}$ (il s'agit des représentations de "masse imaginaire" de $V \odot H$). D'autre part, l'élément $(\frac{k}{r}, K)$ possède comme valeurs propres les nombres $\pm i \frac{|(k|k)|^{1/2}}{r}$ et les valeurs propres de K. En particulier, si K est associé à une orbite de H_k de type série principale (donc possède une valeur propre non nulle réelle), il en est de même de l'élément $(\frac{k}{r}, K)$. Si K est associé à une orbite de type série discrète (valeurs propres imaginaires pures ou nulles - Vecteur propre de lumière associée à $\lambda = 0$), il en est de même de $(\frac{k}{r}, K)$.

Dans le cas série principale, on peut espérer une formule de "contraction". Mais il faut prendre des valeurs de r telles que $\frac{|(k|k)|^{1/2}}{r}$ soit un entier. Le fait qu'une des valeurs propres imaginaires tende vers $+\infty$ veut dire que la représentation du sous-groupe "M" du groupe parabolique MAN à partir de laquelle on va construire l'induite U' va être modifiée, en particulier changer de dimension. [En effet ce sont les valeurs propres imaginaires qui déterminent la représentation de M]. Contrairement au cas traité en 4.6 ($(k|k) > 0$), l'univers de la représentation U' va donc être modifié, ce qui rend plus difficile, mais non impossible, la contraction de cette représentation vers une représentation de $V \odot K$.

Pour les orbites de type série discrète, on a sans doute des problèmes analogues.

4.8. Pour terminer, examinons ce qui se passe lorsque $(k|k) = 0$. (On suppose $n > 2$. Le cas $n = 1$ se traite aisément).

Le cas échappe au cas général traité dans les paragraphes précédents, car $H_k \simeq \mathbb{R}^{n-1} \odot SO(n-1)$ et la restriction de $(\,|\,)$ à $\underline{H}_k$ est dégénérée.

Considérons plus précisément $k = e_{o,n+1} + e_{n,n+1}$. Quand on identifie V à $\mathbb{R}^{n+1}$, k est donc l'élément $(1,0,\dots,0,1)$. Le stabilisateur de K est l'ensemble des éléments de H dont la matrice est

$$A_{\vec{x},m} = \begin{pmatrix} 1+\frac{\|\vec{x}\|^2}{2} & \vec{x}m & -\frac{\|\vec{x}\|^2}{2} \\ {}^t\vec{x} & \boxed{m} & -{}^t\vec{x} \\ \frac{\|\vec{x}\|^2}{2} & \vec{x}m & 1-\frac{\|\vec{x}\|^2}{2} \end{pmatrix}$$

(On identifie les éléments de H à des matrices carrées d'ordre n+1).

Dans cette relation $\vec{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$, $m \in SO(n-1)$ et $\|\vec{x}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2$. Les éléments de l'algèbre de Lie de $\underline{H}_k$ ont pour matrices

$$B_{\vec{V},m} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{V} & 0 \\ {}^t\vec{V} & m & -{}^t\vec{V} \\ 0 & \vec{V} & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{où } \vec{V} \in \mathbb{R}^{n-1} \text{ et } m \in \underline{SO(n-1)}.$$

Posons $n_{\vec{V}} = B_{\vec{V},0}$, et

$$n'_{\vec{V}} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{V} & 0 \\ {}^t\vec{V} & 0 & {}^t\vec{V} \\ 0 & -\vec{V} & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $N = \{n_{\vec{V}} \mid \vec{V} \in \mathbb{R}^{n-1}\}$ et $N' = \{n'_{\vec{V}}\}$. Alors N et N' sont deux sous-algèbres commutatives de $\underline{H}$ isomorphes à $\mathbb{R}^{n-1}$.

Soit

$$\underline{M} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & \\ 0 & m & 0 \\ & 0 & \end{pmatrix} , \quad m \in \underline{SO(n-1)} \right\} .$$

Alors $\underline{M} \oplus N$ et $\underline{M} \oplus N'$ sont deux sous-algèbres de Lie isomorphes ($\underline{M} \oplus N = \underline{H}_k$, $\underline{M} \oplus N' = \underline{H}_{k'}$ où $k' = e_{o,n+1} - e_{n,n+1}$).

On peut montrer que dans l'orbite de l'élément $(e_{o,n+1} + e_{n,n+1},K)$ il existe un élément $(e_{o,n+1} + e_{n,n+1},K_1)$, avec $K_1 \in \underline{H}_{k'}$. (Les formes linéaires sur $\underline{H}_k$ sont bien cette fois-ci représentées par les éléments de $\underline{H}_{k'}$).

La recherche du stabilisateur de (k,K_1) dans $V \odot H$ donne lieu à des calculs laborieux et l'on ne peut assurer que $O(k,K_1)$ et $O_r(k,K_1)$ aient même dimension.

Pour voir ce qui peut se passer du point de vue des représentations, prenons le cas n = 3 (on pourrait montrer que ce cas "représente" bien le cas général). On peut prendre alors,

$$(k,K) = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 1 \\ a & 0 & +a & 0 \\ 0 & -a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Alors } (\frac{k}{r}, K) = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & \frac{1}{r} \\ a & 0 & +a & 0 \\ 0 & -a & 0 & \frac{1}{r} \\ \frac{1}{r} & 0 & -\frac{1}{r} & 0 \end{pmatrix}$$

La représentation de $\mathbb{R}^2 \odot SO_o(1,2)$ associée à (k,K) est une représentation de masse nulle. Le "petit groupe" associé à l'élément k = (1,0,1) est isomorphe à $\mathbb{R}$ et l'élément

$$K = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \\ 0 & -a & 0 \end{pmatrix}$$

détermine le caractère $t \xmapsto{\alpha_a} e^{iat}$ de ce petit groupe. Par la méthode de Mackey, on associe ainsi à (k,K) une représentation de $V \odot H$.

Pour voir quelle représentation de $SO_o(1,3)$ est associée à $(\frac{k}{r}, K)$, il faut chercher les valeurs propres de l'élément $(\frac{k}{r}, K)$.

On trouve que ces valeurs propres sont $\pm\sqrt{\frac{2a}{r}}$ et $\pm i\sqrt{\frac{2a}{r}}$ et que pour des valeurs de r telles que $i\sqrt{\frac{2a}{r}}$ soit entier, on a une représentation des séries principales (lorsque $a \neq 0$).

Le caractère du groupe "A" et le caractère du groupe "M", représentés par $\sqrt{\frac{2a}{r}}$ et $i\sqrt{\frac{2a}{r}}$ tendent donc tous deux vers $+\infty$. On peut espérer une formule de passage à la limite, mais le problème reste ouvert. Si $a = 0$, l'élément $(\frac{k}{r}, K)$ reste dans la même droite. Diverses raisons nous amènent à penser que la représentation de $\mathbb{R}^3 \circledS SO_o(1,2)$ correspondant alors à (k,K) se prolonge à $SO_o(2,3)$.

V - CONTRACTION DE REPRESENTATIONS DE $SO_o(2,n)$ VERS LES REPRESENTATIONS DE MASSE IMAGINAIRE DE $\mathbb{R}^{n+1} \odot SO_o(1,n)$.

$\boxed{1}$ DECOMPOSITION D'IWASAWA ET CERTAINS SOUS GROUPES DE $SO_o(2,n)$.

1.1. Le groupe $G = SO_o(2,n)$ est la composante connexe du groupe orthogonal de la forme quadratique Q de signature $(+,+,-,\dots,-)$ définie pour $x = (x_{-1},x_o,x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{2+n}$ par $Q(x) = x_{-1}^2 + x_o^2 - x_1^2 \dots - x_n^2$.

Pour cette forme, la base canonique $(e_{-1},e_o,e_1,\dots,e_n)$ vérifie $Q(e_{-1}) = Q(e_o) = 1$ et $Q(e_i) = -1$ lorsque $1 \leqslant i \leqslant n$. Nous appelons B la forme bilinéaire associée.

1.2. Le groupe $H = SO(1,n)$ est la partie positive du groupe orthogonal de la forme B de signature $(+,-,\dots,-)$ sur R^{n+1} définie pour $x = (x_o,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ par $B(x) = x_o^2 - x_1^2 \dots - x_n^2$. Le groupe H possède deux composantes connexes qui sont le sous-groupe distingué $H_o = SO_o(1,n)$ et $SO^-(1,n)$ (qui n'est pas un sous-groupe). Le groupe H_o s'identifie à l'ensemble des matrices du groupe $SO_o(2,n)$ de la forme $\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & h \end{array}\right)$, où $h \in SO_o(1,n)$. Le groupe H s'identifie à l'ensemble des matrices de $SO_o(2,n)$ de l'une des formes $\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & h \end{array}\right)$ $(h \in SO_o(1,n))$ ou $\left(\begin{array}{c|c} -1 & 0 \\ \hline 0 & h \end{array}\right)$ $(h \in SO^-(1,n))$

1.3. La décomposition d'Iwasawa de $SO_o(2,n)$ s'écrit :

$$SO_o(2,n) = KAN .$$

- Le sous-groupe K est l'ensemble des matrices de la forme $\left(\begin{array}{c|c} U & 1 \\ \hline 1 & V \end{array}\right)$, où $U \in SO(2)$, $V \in SO(n)$. Le groupe K est évidemment isomorphe à $SO(2) \times SO(n)$.

- Le sous-groupe A est le produit direct des groupes A_1 et A_2, où

  où A_1 est l'ensemble des matrices de la forme

$$a_t = \begin{pmatrix} Cht & & & & Sht \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & 1 & \\ Sht & & & & Cht \end{pmatrix}$$

et A_2 est l'ensemble des matrices de la forme

$$a'_t = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \mathrm{Ch}t & & & & \mathrm{Sh}t \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & \mathrm{Sh}t & & & & \mathrm{Ch}t \end{pmatrix} .$$

Chacun des groupes A_1 et A_2 est isomorphe à $\mathbb{R}$ et le groupe A est donc abélien et isomorphe à $\mathbb{R}^2$.

- Le sous groupe N est le produit semi-direct des groupes N_1 et N_2 où N_1 est le groupe des matrices de la forme

$$n_x = \begin{pmatrix} 1 - \frac{|x|^2}{2} & x^* & \frac{|x|^2}{2} \\ x & \mathrm{Id} & -x \\ -\frac{|x|^2}{2} & x^* & 1 + \frac{|x|^2}{2} \end{pmatrix}$$

$(x = \begin{pmatrix} x_o \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$, $x^* = (-x_o, x_1, \ldots, x_{n-1})$, $|x|^2 = x_o^2 - x_1^2 \ldots - x_{n-1}^2)$

et N_2 est le groupe des matrices de la forme $\left(\begin{array}{c|ccc|c} 1 & & 0 & & 0 \\ \hline & 1 - \frac{\|y\|^2}{2} & {}^t y & \frac{\|y\|^2}{2} & \\ 0 & y & \mathrm{Id} & -y & 0 \\ & -\frac{\|y\|^2}{2} & {}^t y & 1 + \frac{\|y\|^2}{2} & \\ \hline 0 & & 0 & & 1 \end{array}\right)$

$(y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-2} \end{pmatrix}$, $\|y\| = y_1^2 + \ldots + y_{n-2}^2)$. Les groupes N_1 et N_2 sont abéliens et isomorphes à $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^{n-1}$ respectivement. Le groupe N n'est pas abélien, mais nilpotent, et son sous groupe N_1 est distingué.

D'autre part, le commutant M de A dans K est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & & \\ & & \boxed{m} & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$, où $m \in SO(n-2)$.

1.4. Le commutant du groupe A_1 est le groupe T des matrices de la forme $\begin{pmatrix} \varepsilon & & \\ & \boxed{t} & \\ & & \varepsilon \end{pmatrix}$ où $\varepsilon \in \{+1,-1\}$ et t est un élément de $SO(1,n-1)$ qui est dans la composante connexe de $SO(1,n-1)$ si $\varepsilon = +1$ et qui n'y est pas si $\varepsilon = -1$. Le groupe T est donc isomorphe à $SO(1,n-1)$, et sa composante connexe, T_o, est isomorphe à $SO_o(1,n-1)$.

Le stabilisateur du vecteur $e_{-1} + e_n$ est le groupe NT_o, produit semi-direct des groupes N et T_o. Le groupe N_1T_o, produit semi-direct des groupes N_1 et T_o, est isomorphe au groupe de Poincaré connexe.

1.5. GROUPES PARABOLIQUES

Le groupe $P_o = MAN$ est un sous-groupe parabolique minimal du groupe G.

Le groupe $P_1' = TA_1N_1$ est un sous-groupe parabolique maximal du groupe G (remarquons que $P_o \subset P_1'$). Sa composante neutre est le groupe $P_1 = T_oA_1N_1$.

Enfin, le groupe $P = MA_2N_2$ est un sous-groupe parabolique du groupe T_o (rappelons que ce dernier groupe est isomorphe à $SO_o(1,n-1)$).

$\boxed{2}$ SERIES PRINCIPALES DE $SO_o(2,n)$.

2.1. Nous notons a_{t_1,t_2} l'élément $a_{t_1} a'_{t_2}$ du groupe A. (CF. 1.3).

Soit $\lambda = (\lambda_1,\lambda_2)$ un couple de nombres réels. L'application

$$a_{t_1,t_2} \xmapsto{\mu_\lambda} e^{i(t_1\lambda_1+t_2\lambda_2)} = a_{t_1,t_2}^{i(\lambda_1,\lambda_2)}$$ est un caractère du groupe A.

Soit u une représentation continue unitaire irréductible du groupe M (on sait qu'en fait, toute représentation continue irréductible du groupe M est unitarisable). Nous notons V_u l'espace de cette représentation.

L'application $u \otimes \mu_\lambda$ définie par la formule $man \mapsto a_t^{i\lambda}\, u(m)$ est une représentation unitaire de P_o. Les séries principales $U_{u,\lambda}$ de $SO_o(2,n)$ paramétrées par $u \in \hat{M}$ et $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ sont définies par

$U_{u,\lambda_1,\lambda_2} = \mathrm{Ind}_{P_o}^{G}\ (u \otimes \mu_\lambda)$.

2.2. Dans ce paragraphe, nous rappelons quelques propriétés sur les mesures quasi-invariantes d'un espace homogène. Nous renvoyons à Warner (T I) ou à Bourbaki [2] p. 56 pour les démonstrations. Pour tout groupe localement compact G, la notation $\int_G f(x)dx$ désigne toujours l'intégrale par rapport à une mesure de Haar à gauche dx.

<u>LEMME 1</u> : *Soit* G *un groupe localement compact,* H *un sous-groupe fermé,* ρ *une fonction sur* G *continue telle que*

$$\rho(x\xi) = \frac{\Delta_H(\xi)}{\Delta_G(\xi)}\ \rho(x)$$

quels que soient $x \in G$ *et* $\xi \in H$. *Il existe sur* G/H *une mesure quasi-invariante* $d\dot{m}$ *telle que :*

$$\int_G f(x)\rho(x)dx = \int_{G/H} d\dot{m}(\dot{x}) \int_H f(x\xi)d\xi .$$

(Dans cet énoncé, valable lorsque les fonctions sont intégrables, la notation $\dot{x}$ désigne la classe dans G/H de $x \in G$).

<u>LEMME 2</u> : *Il existe sur* G *une fonction continue* $\Phi \geqslant 0$ *dont le support a une intersection compacte avec le saturé* KH *de toute partie compacte* K *de* G *et telle que*

$$\int_H \Phi(x\xi)d\xi = 1 \text{ pour tout } x \in G.$$

Pour qu'une fonction g *sur* G/H *soit mesurable (resp. intégrable) il faut et il suffit que* $x \mapsto \Phi(x)g(\dot{x})\rho(x)$ *le soit pour* dx *(mesure de Haar sur* G*). On a, si* g *est intégrable :*

$$\int_{G/H} g(u)d\dot{m}(u) = \int_G \Phi(x)g(\dot{x})\rho(x)dx.$$

2.3. La représentation $U_{u,\lambda}$ peut être construite sur l'espace $E^{u,\lambda}$ que nous allons décrire (C.F. Warner T.I. p. 449). On considère tout d'abord la forme linéaire ρ définie sur $\underline{A} = \underline{A}_1 + \underline{A}_2$ par $\rho(a) = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}[(ada)_{|\underline{N}}]$. (On a $\rho(a_1+a_2) = na_1+(n-2)a_2$. On peut alors définir l'application ρ_{P_o} de A dans $\mathbb{R}$ par $\rho_{P_o}(a) = a^{-2\rho} = e^{-2\rho(\mathrm{Log}\,a)}$. (L'application Log de A dans $\underline{A}$ est bien définie puisque A est abélien).

On sait que tout élément x de G s'écrit de manière unique $x = kan (k \in k,\ a \in A,\ n \in N)$. On pose alors $\rho_{P_o}(x) = a^{-2\rho}$. La fonction ρ_{P_o} définit une mesure quasi-invariante sur G/P_o (cf. Warner [7] p. 475), notée dm_{P_o} (elle dépend des mesures de Haar sur G et P). L'espace $E^{u,\lambda}$ est l'ensemble des fonctions boréliennes de G dans V_u telles que

$$\begin{cases} \text{(a)}\ f(xman) = a^{-i\lambda-\rho} u(m^{-1}) f(x)\ [m \in M, a \in A, n \in N, x \in G\ ] \\ \text{(b)}\ \|f\|^2 = \int_{G/P_o} \rho_{P_o}(x)^{-1} \|f(x)\|^2 dm_{P_o}(\dot{x}) < \infty . \end{cases}$$

(Remarquons que l'application $x \mapsto \rho_{P_o}(x)^{-1} \|f(x)\|^2$ est contante sur chaque classe modulo P_o).

La représentation $U_{u,\lambda_1,\lambda_2}$ est la restriction à l'espace $E^{u,\lambda}$ de la représentation régulière gauche de G dans V.

Grâce aux résultats de 2.2, on peut modifier l'expression de la norme sur $E^{u,\lambda}$.

<u>PROPOSITION</u> : *Soit Φ une fonction continue $\geqslant 0$ à support compact (définie sur G) telle que* $\int_{P_o} \Phi(x\xi)d\xi = 1$, *pour tout* $x \in G$. [*Il en existe d'après le lemme 2 de 2.2*]. *Alors, pour* $f \in E^{u,\lambda}$, $\|f\|^2 = \int_G \|f(x)\|^2 \Phi(x)dx$.

$\boxed{3}$ SERIES DE REPRESENTATIONS UNITAIRE ATTACHEES AU GROUPE $P_1 = T_o A_1 N_1$

3.1. Sur le modèle des séries principales attachées à un sous-groupe parabolique minimal, nous allons contruire des séries de représentations unitaires de G attachées au groupe P_1, que nous appellerons P_1-séries.

Comme cas particulier des P_1-séries, nous retrouverons les séries principales de G. C'est à partir de ces P_1-séries que nous obtiendrons par contraction toutes les représentations de masse imaginaire de $R^{n+1} \odot SO_o(1,n)$

3.2. Nous notons, pour tout $a_{t_1} \in A_1$ et pour tout $\lambda_1 \in \mathbb{R}$: $(a_{t_1})^{i\lambda_1} = (a_{t_1,o})^{i(\lambda_1,o)}$

(CF 2.1) L'application $a_{t_1} \xmapsto{\rho_{\lambda_1}} (a_{t_1})^{i\lambda_1}$ est un caractère unitaire du groupe A_1.

Soit θ une représentation unitaire du groupe T_o (La représentation θ est donc, en général, de dimension infinie). Nous notons V_θ l'espace de cette représentation. L'application $\theta \otimes e_{\lambda_1}$ définie par la formule

$ta_{t_1}n \mapsto \rho_{\lambda_1}(a_{t_1})\ \theta(t)$ est une représentation unitaire du groupe P_1 d'espace V_θ. Les P_1 séries sont les représentations unitaires R_{θ,λ_1} de $SO_o(2,n)$ définies par

$$R_{\theta,\lambda_1} = \mathrm{Ind}_{P_1}^{G}\ (\theta \otimes \rho_{\lambda_1}) \ .$$

<u>REMARQUE</u> : Nous montrerons que si θ appartient aux séries principales de T_o, alors R_{θ,λ_1} appartient aux séries principales de G.

3.3. Soit ρ_1 la forme linéaire définie sur $\underline{A}_1$ par $\rho_1(a) = \mathrm{Tr}((ada)_{|\underline{N}_1})$.

On vérifie que $\rho_1 = \rho_{|\underline{A}_1}$ (cf. 2.3) et nous identifierons ρ et ρ_1 sur $\underline{A}_1$.

Soit d'autre part ψ une fonction définie sur G, continue, $\geqslant 0$, dont le support a une intersection compacte avec le saturé de toute partie compacte de G, et telle que $\int_{P_1} \psi(x\xi)d\xi = 1$ pour tout $x \in$ G. Alors, l'espace A^{θ,λ_1} de la représentation R_{θ,λ_1} est l'ensemble des fonctions f boréliennes de G dans V_θ telles que

$$\begin{cases} (1) \quad \|f\|^2 = \int_G \|f(x)\|^2 \psi(x)dx < +\infty \\ (2) \quad f(xtan) = a^{-i\lambda-\rho}\theta(t^{-1})f(x) \end{cases}$$

pour tout $t \in T_o$, $a \in A_1$, $n \in N_1$, $x \in G$.

(La construction est la même que pour les séries principales. Pour le vérifier, il suffit de contrôler que le module de P_1 est donné par $\Delta_{P_1}(\text{tan}) = a^{-2\rho_1}$).

Le groupe G agit par la représentation régulière gauche sur cet espace.

3.4. Pour des raisons qui deviendront claires par la suite, nous allons construire la représentation R_{θ,λ_1} sur un espace de fonctions de $H \simeq SO(1,n)$ dans V_θ. Cet espace est l'espace A^θ d'une des réalisations de la représentation $\text{Ind}_{T_o}^H \theta$. Auparavant, nous aurons besoin de quelques lemmes techniques.

<u>LEMME 1</u> : *On a la décomposition* $G = \overline{HA_1N_1}$. *L'ensemble* HA_1N_1 *est ouvert et partout dense dans* G. *Son complémentaire dans* G *est de mesure nulle (Pour la mesure de Haar de* G*). Enfin, pour tout élément de* HA_1N_1, *il y a unicité de la décomposition.*

<u>PREUVE</u> : Le groupe G agit sur $\mathbb{R}^{n+2}$, et sur C, cône des éléments $(x_{-1},x_o,x_1,\dots,x_n)$ de $\mathbb{R}^{n+2}$ tels que $x_{-1}^2+x_o^2-x_1^2 \dots - x_n^2 = 0$. Le groupe G agit aussi sur P(C), ensemble des raies de ce cône, et de manière transitive. Considérons le cône C_1 des éléments x de C tels que $x_{-1} \neq 0$. Le groupe H agit transitivement sur $P(C_1)$ (Ce qui n'est pas le cas de H_o, sa composante connexe).

Considérons la raie $\mathbb{R}(1,0,\dots,1) = R(e_{-1}+e_n)$ de C_1.

Soit G_1 l'ensemble des $g \in G$ tels que $g(e_{-1}+e_n) \in C_1$.

Cet ensemble est ouvert dans G, car C_1 est ouvert dans C et l'application $g \mapsto g(e_{-1}+e_n)$ est évidemment continue. De plus, le complémentaire de G_1 dans G est une sous-variété de G de dimension strictement inférieure à celle de G. Donc d'une part ce complémentaire est de mesure nulle, d'autre part, G_1 est partout dense dans G. Remarquons que l'ensemble G_1 agit transitivement sur $P(C_1)$, car il contient H qui possède déjà la même propriété.

Nous montrons pour finir que $G_1 = HA_1N_1$:

La stabilisateur de la raie $\mathbb{R}(e_{-1}+e_n)$ est le groupe $P'_1 = TA_1N_1$. Comme le groupe H agit transitivement sur $P(C_1)$, pour tout $g \in G_1$, il existe $h_1 \in H$ tel que $h_1^{-1}g \in P'_1$, donc tel que $g = h_1t_1a_1n_1$ ($t_1 \in T, a_1 \in A_1, n_1 \in N_1$). On en déduit, en posant $h = h_1t_1$, que $g = ha_1n_1$, ce qui est la décomposition annoncée (rappelons que $T \subset H$).

C.Q.F.D.

LEMME 2 : *On peut choisir la mesure de Haar* dh *sur* H, *de manière que, pour toute fonction* f *intégrable sur* G, *on ait :*

$$\int_G f(x)dx = \int_{H \times A_1N_1} f(han)(\delta(an))^{-1}\, dh\, d(an)$$

$$= \int_{H \times A_1 \times N_1} f(han)a^{2\rho}\, dhdadn \quad .$$

(Ici, δ *désigne la fonction module sur* A_1N_1 *. On a la relation* $\delta(an) = a^{-2\rho}$ *).*

PREUVE : Voir Warner [7] Lemme 5-5-14 p. 448.

On suppose choisie la mesure de Haar dh dans les conditions du lemme 2.

Il est alors possible de choisir une mesure quasi-invariante $d\dot{h}$ sur H/T_o telle que, pour toute fonction intégrable sur H, on ait :

$$\int_H f(x)\, dx = \int_{H/T_o} d\dot{h}(\dot{x}) \int_{T_o} f(x\xi)d\xi \quad .$$

(On applique le lemme 1 de 2.2, en utilisant le fait que H et T_o sont unimodulaires).

LEMME 3 : *Soit* ψ_1 *la fonction définie sur* H *par*

$$\psi_1(x) = \int_{A_1 \times N} \psi(xa_1n_1)\, da_1dn_1 .$$

a) La fonction ψ_1 *est continue,* $\geqslant 0$.

b) Le support de ψ_1 *a une intersection compacte avec le saturé* KT_o *de toute partie compact* K *de* H.

c) Pour tout x *de* H, *on a*

$$\int_{T_o} \psi_1(x\xi)d\xi = 1.$$

PREUVE ; Si x est fixé, la fonction an $\overset{\psi_x}{\longmapsto} \psi(xan)$ est à support compact sur A_1N_1 et donc la fonction ψ_1 est bien définie en tout point et positive. Lorsque x varie sur un compact de H, la réunion des supports des fonctions ψ_x est contenue dans un compact de A_1N_1. Par suite, la fonction ψ_1 est continue. La propriété b) se montre aisément, et la propriété c) vient de : $(x \in H)$

$$\begin{aligned} 1 = \int_{T_oA_1N_1} \psi(x\xi)dP_1(\xi) &= \int_{T_o\times A_1N_1} \psi(xt_oa_1n_1) \; dt_o\, da_1\, d_{n_1} \\ &= \int_{T_o} dt_o \int_{A_1N_1} \psi(xt_oa_1n_1)a_1^{-2\rho}da_1dn_1 \\ &= \int_{T_o} \psi_1(xt_o)dt_o = 1 \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

LEMME 4 : *On considère la mesure* $\dot{d}h$ *sur* H/T_o *définie ci-dessus.*

Pour toute fonction intégrable sur G/H, on a :

$$\int_{H/T_o} f(u)\; \dot{d}h(u) = \int_H f(\dot{x})\; \psi_1(x)dx.$$

(où $\dot{x} \in H/T_o$ *désigne ici la classe de* $x \in H$*).*

PREUVE : Conséquence du lemme 2 de V. 2.2.

3.5. ESPACE A^θ. ISOMETRIE DES ESPACES A^θ ET A^{θ,λ_1}

DEFINITION : *L'espace* A^θ *est l'espace des fonctions boréliennes de* H *dans* V_θ *telles que :*

(1) $f(ht) = \theta(t^{-1})f(h)$ *pour tous* $t \in T_o$ *et* $h \in H$.

(2) $$\| f\|_H^2 = \int_{H/T_o} \| f(\dot{x}) \|^2 d\dot{h}(x) = \int_H \| f(x)\|^2 \psi_1(x)dx < +\infty \ .$$

(La représentation $\mathrm{Ind}_{T_o}^H \theta$ est alors la représentation régulière gauche de H sur cet espace).

LEMME 1 : *L'application* $f \xrightarrow{\alpha} f|_H$ *est une isométrie de* $B^{\theta,\lambda}$ *sur* A^θ *qui permute aux opérateurs de* H .

PREUVE : Si $f \in B^{\theta,\lambda}$, alors $f|_H$ vérifie (1) . De plus :

$$\begin{aligned}\|f\|^2 = \int_G \| f(x)\|^2 \psi(x)dx &= \int_{H\times AN} \| f(han)\|^2 \psi(han)a^{+2\rho} dh\, da_1\, du_{-1}\\ &= \int_{H\times AN} \| f(h)\|^2 a^{-2\rho+2\rho} \psi(han)\, dhdadn\\ &= \int_H \| f(h)\|^2 \psi_1(h)dh = \| f|_H\|_H \ .\end{aligned}$$

Enfin, l'application β, réciproque de l'application α , est définie par :

$$g \overset{\beta}{\longmapsto} g'$$

où $g'(ha_1n_1) = a_1^{-\rho-i\lambda} g(h)$, ce qui détermine g' presque partout. Dans la suite, on notera $\|\cdot\|$ au lieu de $\|\cdot\|_H$.

3.6. REALISATION DE R_{θ,λ_1} SUR A^θ

La représentation R_{θ,λ_1} se réalise sur A^θ par la formule :

$$[\, R_{\theta,\lambda}(g).f](h) = a_1(g^{-1}h)^{-\rho-i\lambda_1} f(g^{-1}\cdot h)$$

$$(f \in A^\theta \ ; \ g \in G \ ; \ h \in H).$$

Dans cette formule, g.h est l'action de G sur H induite par la décomposition G = HAN. Autrement dit, si $gh \in HAN$, on a :

$$gh = (g^{-1}.h)\ a_1(g^{-1}h)n_1(g^{-1}h)$$

$(g^{-1}.h \in H \ , \ a_1(g^{-1}h) \in A_1 \ , \ n_1(g^{-1}h) \in N_1)$.

Pour g donné, $g^{-1}.h$ et $a_1(g^{-1}h)$ sont donc définis H-presque partout.

REMARQUE : On retrouve le fait que la restriction de $R_{\theta,\lambda}$ à H est la représentation $\mathrm{Ind}_{T_o}^{H}\ \theta$.

$\boxed{4}$ REPRESENTATIONS DE MASSE IMAGINAIRE DE $\mathbb{R}^{n+1} \circledS SO_o(1,n)$

4.1. Pour les notations nous renvoyons au Ch. II

La base canonique sur $\mathbb{R}^{n+1}$ est appelée $(f_o,f_1,\ldots,f_n)$.

On idenfitie $\mathbb{R}^{n+1}$ et le groupe abélien V des matrices de $SO_o(2,n)$ qui s'écrivent :

$$V_{x_o,\ldots,x_n} = \begin{pmatrix} 0 & x_o \; - x_1 \; \ldots\ldots \; - x_n \\ - x_o & \\ \vdots & \\ - x_n & \end{pmatrix} .$$

On rappelle que H_O, isomorphe à $SO_O(1,n)$ est le groupe de matrices $\left(\begin{array}{c|c} 1 & o \\ \hline o & h \end{array}\right)$

($h \in SO_o(1,n)$). L'action de H_o sur V : $v \mapsto Ad(h)(v)$ est l'action canonique de $SO_o(1,n)$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$ et l'on écrira $h(v) = Ad(h)(v)$. Le produit semi-direct $V \underset{Ad}{\circledS} H_o$ s'identifie donc au produit semi-direct $\mathbb{R}^{n+1} \circledS SO_o(1,n)$, qui est le groupe de Poincaré généralisé.

4.2. On identifie V et V* par la forme bilinéaire $b(x,y) = x_oy_o-x_1y_1\ldots -x_ny_n$. A chaque orbite de H_o sur V est alors associée, par la méthode de Mackey, une famille de représentations unitaires irréductibles de $V \circledS H_o$.

Nous nous intéressons ici aux orbites d'équation $x_o^2 - x_1^2 \ldots -x_n^2 = - p^2$ ($p \in \mathbb{R}^*$) appelées encore orbites de masse imaginaire ip. Le vecteur $p\, f_n = \begin{pmatrix} o & & -p \\ & o & \\ -p & & o \end{pmatrix}$ appartient à cette orbite. Son stabilisateur pour l'action de H_o est le groupe T_o isomorphe à $SO_o(1,n-1)$. Lorsque nous choisissons une représentation $\theta \in \widehat{T_o}$, nous construisons la représentation

$\rho_{\theta,ip} = \mathrm{Ind}_{V \Theta T_o}^{V \Theta T} u \otimes (pf_n)$ où (pf_n) est le caractère unitaire de $V : v \longrightarrow e^{ib(pf_n,v)}$.

Par ce procédé, nous obtenons l'ensemble des représentations de "masse imaginaire" de $V \Theta H_o$.

La représentation $\rho_{\theta,ip}$ peut se construire sur l'espace A_θ^1 qui est le sous-espace des fonctions de A^θ (C.F. 3.5) à support dans H_o (On verra plus loin que A_θ se décompose en une somme directe orthogonale : $A_\theta = A_\theta^1 + A_\theta^2$)

Remarquons que si $f \in A_\theta^1$, alors

$$\|f\|^2 = \int_{H_o/T_o} \|f(\dot{x})\|^2 d\dot{h}(x) = \int_{H_o} \|f(\dot{x})\|^2 \psi_1(x)dx .$$

La représentation $\rho_{\theta,ip}$ se réalise sur l'espace A_θ^1 par la formule

$$\rho_{\theta,ip}(v,h)f(h_1) = e^{ib(h_1^{-1}(v),pf_n)} f(h^{-1}h_1)$$

$$(f \in A_\theta^1 \ ; \ h_1 \in H \ ; \ (v,h) \in V \Theta H_o)$$

$\boxed{5}$ CONTRACTION DE REPRESENTATIONS DE $SO_o(2,n)$ VERS LES REPRESENTATIONS DE MASSE IMAGINAIRE DE $\mathbb{R}^{n+1} \Theta SO_o(1,n)$.

5.1. <u>DEFINITION</u> : *On définit la représentation* $\Gamma_{\theta,ip}$ *de* $V \otimes H$ *par la formule :*

$$\Gamma_{\theta,ip}(v,h)f(h_1) = e^{ib(h_1^{-1}(v),pf_n)} f(h^{-1}h_1) \quad (f \in A^\theta).$$

<u>LEMME 1</u> : *On a* $A_\theta = A_\theta^1 \oplus A_{\theta_2}^2$ *, où* $A^1{}_\theta$ *est l'ensemble des éléments de* A^θ *à support dans* H_o*, et* A_θ^2 *est l'ensemble des éléments de* A^θ *à support dans* $H_1 = \complement_H H_o$ *(*H_1 *n'est pas un sous-groupe de* H *) Les sous-espaces* A_θ^1 *et* A_θ^2 *sont stables par* $\Gamma_{\theta,ip}$.

<u>PREUVE</u> : Evident.

LEMME 2 : *L'espace* A^2_θ *(cf. ci-dessus) s'identifie à l'espace* $A^1_{\theta^w}$,

où w *est l'élément* $\begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$ *de* H *(matrice carrée d'ordre* $n+1$*) et* θ^w *est la représentation de* T_o *définie par* $\theta^w(t) = \theta(wtw)$.

(On vérifie que $wT_ow = T_o$*).*

PREUVE : Remarquons tout d'abord que $H_1 = H_ow$. L'application de A^2_θ dans $A^1_{\theta^w}$: $f \xrightarrow{\beta} f^\beta$ définie par : $f^\beta(h) = f(hw)$ est un isomorphisme d'espaces de Hilbert. En effet :

a) Si $f \in A_2^\theta$: $f^\beta(ht_o) = f(ht_ow) = f(hw(wt_ow))$

$$= \theta(wt_o^{-1}w)f(hw)$$

$$= \theta^w(t_o^{-1})f^\beta(h)$$

b) On a $\| f^\beta\|^2 = \int_H \| f(xw)\|^2 \psi_1(x)dh(x)$

$$= \int_N \| f(x)\|^2 \psi_1(xw^{-1})dh(x)$$

On pose $\psi_2(x) = \psi_1(xw)$; rappel : $w^{-1} = w$) . Alors, si $x \in H$

$\int_{T_o} \psi_2(x\xi)\, d\xi = \int_{T_o} \psi_1(x\xi w)\, d\xi = \int_{T_o} \psi_1(xw\xi)\, d\xi$, car l'automorphisme $\xi \mapsto w\xi w$ de T_o est involutif, donc de module 1. Ainsi :

$$\int_{T_o} \psi_2(x\xi)d\xi = \int_{T_o} \psi_1(xw\xi)d\xi = 1 ,$$

donc ψ_2 a les mêmes propriétés que ψ_1 et

$$\| f^\beta\|^2 = \int_H \| f(x)\|^2 \psi_1(xw)dx = \int_H \| f(x)\|^2 \psi_2(x)dx = \| f\|^2 .$$

C.Q.F.D.

LEMME 3 : *La représentation* $\rho_{\theta^w, ip}$ *se réalise sur l'espace* A^2_θ *par la formule :*

$$\rho_{\theta^w, ip}(v,h)f(h_1) = e^{ib(h_1^{-1}(v),-pf_n)} f(h^{-1}h_1) \quad .$$

LEMME 4 : *La représentation* $\Gamma_{\theta, ip}$ *est équivalente à la somme* $\rho_{\theta, ip} \oplus \rho_{\theta^w, ip}$ *de deux représentations irréductibles de* $V \ominus H_o$.

PREUVE : On utilise les lemmes précédents, en remarquant que $\rho_{\theta^w, ip}$ et $\rho_{\theta^w, -ip}$ sont deux représentations équivalentes (Car ipf_n et $-ipf_n$ sont sur la même H_o-orbite).

Le théorème suivant est le principal résultat de ce chapitre :

5.2. THEOREME : *Soit* $f \in A_\theta$, *continue*

On a

$$\boxed{\lim_{r \to 0} R_{\theta, \frac{p}{r}} \circ \Pi_r(v,h)f(h_1) = \Gamma_{\theta, ip}(v,h)f(h_1)} \quad .$$

(Limite simple presque partout, uniforme sur tout compact de $V \ominus H$).

PREUVE : Le principe de la preuve est similaire à celui employé au théorème du chapitre II. On constate d'abord que pour toute $f \in A^\theta$, on a :

$$R_{\theta, \frac{p}{r}} \circ \Pi_r(0,h)f(h_1) = \Gamma_{\theta, i\frac{p}{r}}(0,h)f(h_1) = f(h^{-1}h_1) \qquad (I) \; .$$

Ensuite, on étudie : $\lim_{r \to +\infty} R_{\theta, \frac{p}{r}} \circ \Pi_r(v, Id)f(h_1)$ lorsque f est une fonction continue.

On a :

$$R_{\theta, \frac{p}{r}} \circ \Pi_r(v,Id)f(h_1) = a_1(g^{-1}h_1)^{-\rho - i\frac{p}{r}} f(g^{-1}.h_1) \; ,$$

où $g = \exp rv$.

On a $\qquad g^{-1}h_1 = (\exp -rv)h_1 = h_1 \exp [-rh_1^{-1}(v)]$.

Pour r assez petit, l'élément $\exp[-fh_1^{-1}(v)]$ admet une décomposition de la forme $h_r a_{t(r)} n_{x(r)}$ puisque l'ensemble HA_1N_1 est ouvert dans G et contient l'unité. Par suite $g^{-1}.h_1 = h_1\, h_r$ et $\lim_{r\to 0} g^{-1}.h_1 = h_1$. Calculons maintenant :

$$\lim_{r \to 0} a_1(g^{-1}h_1)^{-\rho-i\frac{p}{r}} = \lim_{r \to 0} a_r^{-\rho-\frac{ip}{r}}$$

On considère les éléments de G comme agissant sur $\mathbb{R}^{n+2}$. On a alors :

$$h_r\, a_{t(r)} n_{x(r)}(e_{-1}+e_n) = e^{t(r)}[\, e_{-1} + h_r(e_n)]$$

D'où : $e^{t(r)} = B(h_r\, a_{t(r)} n_{t(r)}(e_{-1}+e_n), e_{-1})$

$$= B(\exp[-rh_1^{-1}(v)]\ (e_{-1}+e_n), e_{-1})\ .$$

Donc $a_1(g^{-1}.h_1)^{-\rho-\frac{ip}{r}} = B(\exp[-rh_1^{-1}(v)]\ (e_{-1}+e_n), e_{-1})^{-\rho-\frac{ip}{r}}$

Effectuons maintenant un développement limité de ce dernier terme.

On trouve : $B(\exp[-rh_1^{-1}(v)](e_{-1}+e_n), e_{-1})$

$$= B((Id - rh_1^{-1}(v))(e_{-1}+e_n), e_{-1}) + O(r^2)$$

$$= 1 + B([-rh_1^{-1}(v)](e_{-1}+e_n), e_{-1}) + O(r^2).$$

Or si v_1 est un élément de V (considéré comme application sur $\mathbb{R}^{n+2}$) on trouve que $B(v_1(e_{-1}+e_n), e_{-1}) = b(v_1, f_n)$ (par un calcul matriciel élémentaire) où b est la forme (+...) sur $\mathbb{R}^{n+1}$.

D'où $B(\exp[-rh_1^{-1}(v)(e_{-1}+e_n)], e_{-1}) = 1 - r\, b(h_1^{-1}(v), f_n) + O(r^2)$.

Enfin, on a : $(1 - rb(h_1^{-1}(v), f_n) + O(r^2))^{-\rho-\frac{ip}{r}}$

$$= e^{ip\, b(h_1^{-1}(v), f_n) + O(r)}.$$

D'où $\lim_{r \to 0} (g^{-1}.h_1)^{-\rho-\frac{ip}{r}} = e^{ipb(h_1^{-1}(v), f_n)}$ (II).

A l'aide des relations (I) et (II), on achève la démonstration de manière identique à la démonstration du th. Chap. II. V.

$\boxed{6}$ EQUIVALENCE DE CERTAINES REPRESENTATIONS ATTACHEES A P_1 ET DES SERIES PRINCIPALES DE $SO_o(2,n)$.

Nous montrons pour terminer que lorsque θ appartient aux séries principales de T_o, la représentation $\mathfrak{R}_{\theta,\lambda}$ appartient aux séries principales de G et qu'on obtient de cette manière toutes les séries principales de G. Le procédé utilisé est celui, classique, d'induction par étages. Nous reformulons le théorème de contraction dans ce cas.

6.1. En prenant les notations de 1.5 et 1.4, le groupe P est un sous-groupe parabolique minimal du groupe T_o. Soit w une représentation unitaire irréductible de M et $\lambda_2 \in \mathbb{R}$. Nous formons la représentation $u \otimes \alpha_{\lambda_2}$ de $MA_2N_2 = P$ définie par la formule $m\,a\,n \mapsto u(m)\, a^{i\lambda_2}$ $(a \in A_2 \; ; \; m \in M \; ; \; n \in N_2)$. Les séries principales θ_{n,λ_2} de T_o sont alors définies par :

$$\theta_{u,\lambda_2} = \mathrm{Ind}_P^{T_o}\, u \otimes \alpha_{\lambda_2} \quad .$$

6.2. Nous allons montrer maintenant que la représentation de $T_oA_1N_1 = P_1$ définie par $\ominus_{u,\lambda_1,\lambda_2} = \mathrm{Ind}_{P_o}^{P_1}\, u \otimes \mu_{(x_1,x_2)}$ est équivalente à la représentation $\theta_{u,\lambda_2} \otimes \rho_{\lambda_1}$ (Pour les notations, C.F. 2.2 et 3.2).

Posons $v = v = u \otimes \alpha_{\lambda_2}$. On a $\mu_{(\lambda_1,\lambda_2)} = \alpha_{\lambda_2} \otimes \rho_{\lambda_1}$ d'où $u \otimes \mu_{(\lambda_1,\lambda_2)} = v \otimes \rho_{\lambda_1}$.

D'après [I] p. 130 à 134, la représentation $\ominus_{u,\lambda_1,\lambda_2}$ peut se réaliser sur l'espace de la représentation θ_{u,λ_2}. Ce dernier espace peut être défini comme l'ensemble des fonctions mesurables de T_o dans V_u , espace de la représentation u, telles que

$$(1) \qquad f(tman) = u(m^{-1})\alpha_{\lambda_2}^{-1}(a)f(t) \; [m \in M \; ; \; a \in A_2 \; ; \; n \in N_2]$$

$$(2) \qquad \int_{T_o/P} \| f(\dot{x}) \|^2 d\mu_{T_o/P} < +\infty$$

($d\mu T_o/P$ étant une mesure sur T_o/P quasi invariante par l'action de G).

La représentation $\Theta_{u,\lambda_1,\lambda_2}$ se réalise sur cet espace par (C.F. [1]).

$$[\Pi(g)f](h) = \chi(p(g^{-1}),\dot{h})^{1/2}\rho_{\lambda_1}[N(g^{-1}h)^{-1}]f(g^{-1}.h) \quad .$$

Dans cette formule : - χ est le "multiplicateur" relatif à la mesure quasi-invariante $d\mu_{T_o/P}$.

- $p(g)$ est la projection canonique d'un élément g de P_1 sur T_o relatif à sa décomposition $g = t_o an(t_o \in T_o \; ; \; a \in A_1 \; ; \; n \in N_1)$

- $\dot{h}$ est la classe à droite de $h \in T_o$ dans T_o/P

- $n(g)$ est la projection canonique d'un élément g sur A_1N_1.

(Compte tenu du fait que A_1N_1 est distingué dans P_o (et dans P_1) nous avons adapté la formule de 4.4 de [1]).

On obtient, si $g = tan(t \in T_o \; ; \; a \in A_1 \; ; \; n \in N_1)$

$$[\Pi(g)f](f) = \chi\,(t^{-1},\dot{h})^{1/2}\rho_{\lambda_1}(a)f(t^{-1}.h).$$

Ceci est en fait exactement la formule donnant la représentation $\theta_{u,\lambda_2} \otimes \rho_{\lambda_1}$.

6.3. Compte tenu du fait que la représentation $\theta_{u,\lambda_2} \otimes \rho_\lambda$ est équivalente à la représentation $\mathrm{Ind}_{P_o}^{P_1} u \otimes \mu_{(\lambda_1,\lambda_2)}$, nous utilisons maintenant un résultat classique d'induction par étage pour affirmer que

$$R_{\theta,\lambda} = \mathrm{Ind}_{P_1}^{G}(\mathrm{Ind}_{P_o}^{P_1}(u \otimes \mu_{(\lambda_1,\lambda_2)})) \simeq \mathrm{Ind}_{P_o}^{G} u \otimes \mu_{(\lambda_1,\lambda_2)}$$
$$\simeq U_{u,(\lambda_1,\lambda_2)}$$

C'est exactement ce que nous nous proposions de montrer.

6.4. <u>THEOREME</u> : *Par contraction (au sens du théorème 4.2), les séries principales de* $SO_o(2,n)$ *donnent les représentations de masse imaginaire de* $\mathbb{R}^{n+1} \circ SO_o(1,n)$ *obtenues en prenant les représentations du "petit groupe"* $SO_o(1,n-1)$ *dans les séries principales de ce groupe.*

BIBLIOGRAPHIE

1. G. ARSAC — Le groupe de Poincaré et ses représentations. Publications du Dépt. de Math. de Lyon, 1982, 3/C, p. 1-171.

2. N. BOURBAKI — Intégration. Fasc. XXIX, chap. 7 et 8. Hermann (1963).

3. J. DIXMIER — Algèbres enveloppantes. Gauthier-Villars, 1974.

4. A. H. DOOLEY-J.W. RICE. - On contractions of semi-simple Lie groups. Preprint, 1983.

5. J. H. RAWNSLEY. - Representations of a semi-direct product by quantization. Math. Proc. Cambr. Phil. Soc. 1975, Vol. 78, p. 345-350.

6. F. RICCI — A contraction of SU(2) on the Heisenberg group, preprint, 1982.

7. G. WARNER — Harmonic analysis on semi-simple Lie groups I. Springer Verlag, New-York, 1972.

-:-:-:-