Pierre Dazord

4 Feuilletages et mécanique hamiltonienne

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1983, fascicule 3B
« Séminaire de géométrie », , p. 1-49
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1983___3B_A4_0>

FEUILLETAGES ET MECANIQUE HAMILTONIENNE

par Pierre DAZORD

SOMMAIRE

* * *

RÉSUMÉ

L'étude des feuilletages en Géométrie Symplectique permet d'établir trois résultats principaux, le premier sur la réduction symplectique, le second sur les caractéristiques d'un feuilletage présymplectique régulier, et enfin une généralisation du théorème classique des variables actions-angles.

Ces résultats, appliqués en Mécanique hamiltonienne, donnent des renseignements sur l'abéliannité des groupes d'isotropie des actions hamiltoniennes, le problème d'équivalence et la théorie des mouvements stationnaires.

*

SUMMARY

The study of foliations in Symplectic Geometry, leads to three principal results, one on the symplectic reduction, other on the characteristics of a regular presymplectic foliation and the third on a generalisation of the actions-angles theorem.

These results are applied in Hamiltonian mechanics where they give informations on the isotropic groups of hamiltonian actions, the equivalence problem and the theory of relative equilibria.

* * *

INTRODUCTION

Les trois parties de cet article sont consacrées à l'étude des feuilletages en géométrie symplectique (I, II) et à ses applications en mécanique hamiltonienne (III).

La première partie est centrée sur le problème de la réduction symplectique. Mécaniquement, il s'agit d'utiliser les "contraintes" (intégrales premières ou autres) auxquelles est soumis le système pour diminuer le nombre des variables tout en conservant le formalisme hamiltonien. Géométriquement il s'agit d'étudier le feuilletage caractéristique d'une sous-variété présymplectique V au sens de SOURIAU [21] et d'examiner le comportement d'un hamiltonien admissible au sens de LICHNEROWICZ [14 b,c]. La reconnaissance de ce que ce feuilletage est transversalement symplectique conduit à une formulation générale qui permet de retrouver des résultats antérieurs d'ARNOLD [2], LICHNEROWICZ [14 b,c], MARSDEN et WEINSTEIN [17], relatifs au cas où la sous-variété V est régulière au sens de LICHNEROWICZ, c'est-à-dire quand l'espace des caractéristiques de V est une variété. En particulier la réduction symplectique n'est maximale que si V est coïsotrope. Enfin l'utilisation d'un théorème d'EHRESMANN amélioré par MOLINO [18 d] permet de caractériser les sous-variétés présymplectiques pour lesquelles le feuilletage est une fibration.

La deuxième partie est consacrée à l'étude des feuilletages présymplectiques. Les feuilletages lagrangiens, isotropes ou coïsotropes en sont un cas particulier. Un autre exemple de tels feuilletages sera fourni par les actions hamiltoniennes de groupes, c'est-à-dire par la Mécanique hamiltonienne en présence de groupes de symétries, ou encore par un système d'intégrales premières d'un hamiltonien.

La remarque qu'en géométrie symplectique on peut, grâce à la 2-forme symplectique, mettre en dualité l'orthogonal symplectique d'un feuilletage $\mathcal{V}$ et son fibré normal, conduit à relier propriétés des feuilles et propriétés transverses. C'est ainsi que si le feuilletage présymplectique $\mathcal{V}$ est régulier, c'est toujours le cas si $\mathcal{V}$ est coïsotrope, ses caractéristiques sont des variétés munies d'une connexion symétrique plate dont l'holonomie est un sous-groupe de l'holonomie infinitésimale du feuilletage. L'existence d'une telle connexion pour un feuilletage lagrangien avait été reconnue par WEINSTEIN [23 a], le lien avec l'holonomie infinitésimale du feuilletage établi par l'auteur dans des articles antérieurs [6 a,b] . Si l'holonomie infinitésimale du feuilletage est relativement compacte, les caractéristiques sont des variétés riemanniennes plates ce qui permet de les déterminer si elles sont complètes : ce sont des quotients finis de tores éventuellement multipliés par des espaces numériques. Ce résultat, obtenu pour le cas lagrangien en [6 a,b], contient un théorème d'ARNOLD [2], [3]. Ces questions ont également été abordées par LICHNEROWICZ et TRAN VAN TAN dans une note [15], à paraître, où ces auteurs développent un point de vue différent consistant à construire sur la variété symplectique une connexion symplectique adaptée au feuilletage induisant sur les caractéristiques la connexion plate canonique.

L'étude des mouvements stationnaires (équilibres relatifs dans la terminologie anglo-saxonne) conduit à chercher un modèle local d'une variété symplectique, munie d'un feuilletage présymplectique régulier, au voisinage d'une caractéristique compacte. Ce problème, qui dans le cas lagrangien est résolu par le théorème des variables actions-angles d'ARNOLD [2], est un aspect du problème d'équivalence, problème consistant à chercher un modèle, local ou global, d'une structure. Ce problème qui a fait l'objet de nombreux travaux de Mademoiselle LIBERMANN [13 ab], a été résolu, pour la structure formée par une variété symplectique et une sous-variété présymplectique par Mademoiselle LIBERMANN et MARLE [16 d], ce qui généralise un résultat de Weinstein [23 a] relatif au cas où la sous-variété est lagrangienne. L'utilisation du théorème de stabilité locale de REEB [20] sous la forme que lui a donné HAEFLIGER [10] permet de généraliser le théorème des variables actions-angles, en le débarrassant d'hypothèses superflues, ce qui doit permettre de traiter dans certains cas des problèmes de stabilité de mouvements stationnaires (cf. III. 6).

Dans la troisième partie les résultats de I et II sont appliqués à la mécanique hamiltonienne en présence de groupe de symétries, le lien avec les deux premières parties étant fait par le biais d'un bref rappel du formalisme de SOURIAU [21] et d'une esquisse de la démonstration du théorème des orbites de KIRILLOV [11], KOSTANT [12], SOURIAU [21]. Une sorte de réciproque du théorème précédent est constituée par la construction pour tout cocycle symplectique d'un groupe G d'une structure symplectique sur T^*G canoniquement associée. Ceci permet de généraliser à l'action affine de G dans le dual de son algèbre de Lie $\underline{G}^*$, associée au cocycle, un théorème de DUFLO et VERGNE [7] sur l'abéliannité des algèbres d'isotropie de la représentation coadjointe. Inversement ce théorème fournit des renseignements sur l'isotropie des actions hamiltoniennes du groupe. L'examen de la construction précédente conduit à la double remarque que les actions isotropes sont, pour l'essentiel, des actions de groupes abéliens, alors que tout groupe peut être réalisé, pour tout cocycle symplectique, comme un groupe d'action coïsotrope. Il existe, autrement dit, un modèle pour ce type d'action, ce qui amène à poser un nouveau problème d'équivalence, que l'on résout, sous certaines conditions, en utilisant les résultats de la partie II, au voisinage d'une caractéristique compacte en ne retenant de l'action du groupe que le "feuilletage" par les orbites. Si le groupe est compact et sans isotropie en un point, on peut alors résoudre, au voisinage de l'orbite de ce point, le problème d'équivalence équivariant, résultat obtenu sous des hypothèses voisines par MARLE [16 cde].

Enfin, si l'action de G n'est plus coïsotrope, en imposant une condition forte de régularité à l'action de G, condition "générique" pour un groupe compact, on peut construire un modèle local au voisinage d'une caractéristique compacte. Ce modèle local est ensuite proposé pour l'étude locale des mouvements stationnaires. Après avoir précisé la nature des mouvements stationnaires et étendu au cas où G a de l'isotropie non discrète un théorème de MARSDEN et WEINSTEIN [17] caractérisant les mouvements "génériques", on indique comment on pourrait étudier la stabilité au sens de LIAPOUNOFF dans le cas d'une action fortement régulière.

Un appendice en fin d'article rassemble deux résultats sur les contre-images des feuilletages utiles dans la partie III.

Certains des résultats des parties I et II ont été résumés dans une note aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris [6 d].

Dans la préparation de cet article, l'auteur a bénéficié de fructueuses discussions avec A. LICHNEROWICZ, C.M. MARLE et P. MOLINO. Qu'ils soient chaleureusement remerciés ainsi que les membres du groupe de Géométrie Symplectique de LYON, A. COSTE, N. DESOLNEUX-MOULIS, R. OUZILOU et D. SONDAZ.

* * *

NOTATIONS

Il s'agit ici de notations communes à tout l'article.

Toutes les données géométriques sont C^∞, C^2 suffirait dans la plupart des cas.

(M,σ) désigne une variété symplectique de 2-forme σ, TM (resp. T^*M) le fibré tangent (resp. cotangent). Si E est un sous-ensemble de TM, on note E(x) ou E_x l'intersection de E et de l'espace tangent T_xM à M en x, E^σ (resp. $E^\sigma(x)$) l'orthogonal symplectique de E (resp. son intersection avec T_xM) ; pour tout fibré E sur M, E^* est le fibré dual si U est une partie de M, E_U ou $E|_U$ désigne la restriction à U de E. Si $f : M \to N$ est une application entre variétés, f^T désigne l'application linéaire tangente : $f^T : TM \to TN$.

Pour toute variété V, dim V désigne sa dimension, $\mathscr{X}(V)$ l'algèbre de Lie de ses champs de vecteurs.

Si E est un sous-espace de TM (i.e. $\forall x \in M$, E(x) est un sous-espace vectoriel de T_xM) on dira, par abus de langage, que E est stable par le crochet si le crochet de deux champs locaux quelconques de E est encore dans E. On notera encore E, par abus de notations, le faisceau des germes de sections de E.

Par feuilletage d'une variété V, on entend, systématiquement, un C^∞ sous-fibré intégrable de TV.

* * *
*

I. RÉDUCTION DE L'ESPACE DES PHASES

1. VARIETES PRESYMPLECTIQUES.

Une variété présymplectique au sens de SOURIAU [21] est une variété V munie d'une 2-forme ω, fermée de rang constant ; ce rang est appelé le rang de la variété présymplectique.

Une immersion $i : V \to (M,\sigma)$ est présymplectique si $(V, i^*\sigma)$ est présymplectique. Si (V,ω) est présymplectique, on désigne par $\mathscr{F}_V$ le feuilletage caractéristique [21], feuilletage engendré par le noyau de ω. Si $i : V \to M$ est une immersion présymplectique, $\mathscr{F}_V = TV \cap TV^\sigma$ où TV^σ est l'orthogonal symplectique de TV dans $(i^{-1}TM,\sigma)$ fibré symplectique image réciproque par i. V est une immersion isotrope, (resp. coïsotrope, lagrangienne) si $TV \subset TV^\sigma$ (resp. $TV^\sigma \subset TV$, $TV^\sigma = TV$). Les feuilles de $\mathscr{F}_V$ s'appellent les caractéristiques de V.

Remarque. - Du point de vue de l'analyse, la notion de variété présymplectique généralise celle de système régulier d'équations aux dérivées partielles du premier ordre où la fonction ne figure pas : si $i : V \to (T^*M_1, d\lambda)$, où λ est la 1-forme de Liouville, est une immersion présymplectique, V est localement définie par k équations $f_1 = \dots = f_k = 0$ et $\mathscr{F}_V$ s'identifie au feuilletage bicaractéristique de la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre. La recherche des sous-variétés lagrangiennes de V, c'est-à-dire des sous-variétés W de V telles que $i|_W : W \to T^*M_1$ soit une immersion lagrangienne est la forme géométrique de la résolution du système d'équations du premier ordre :

$$f_r(x_i, \frac{\partial}{\partial x_j}) = 0 \qquad 1 \leqslant r \leqslant k.$$

La régularité du système se traduit par le fait que $\mathcal{F}_V$ est de rang constant. Enfin la condition usuelle d'intégrabilité est équivalente à l'existence d'immersions lagrangiennes dans V contenant une immersion isotrope donnée, et équivaut à la condition $TV^\sigma \subset TV$. V est alors une immersion coïsotrope (ou de première espèce [14 b,c]). Les immersions lagrangiennes dans V (les "solutions lagrangiennes") sont feuilletées par les caractéristiques [8].

Dans la suite de cet article on emploie la terminologie "caractéristique" qui renvoie à la terminologie en usage dans les systèmes différentiels extérieurs d'Elie Cartan de préférence à la terminologie "bicaractéristique" utilisée antérieurement [6] et qui était calquée sur la terminologie usuelle des équations aux dérivées partielles.

2. THEOREMES DE REDUCTION.

On désigne par ∇ la connexion de Bott [5] du feuilletage caractéristique $\mathcal{F}_V$ de la variété présymplectique (V,ω). Si X est un champ tangent au feuilletage $\mathcal{F}_V$ et Y un champ de V, ∇ est défini par

$$\nabla_X Y = \nu[X,Y]$$

où ν est la projection canonique de TV sur le fibré normal $\nu TV = TV/\mathcal{F}_V$. On note $\nu^* TV$ le dual de νTV qu'on identifie au noyau de la projection canonique de T^*V sur $\mathcal{F}^*_V$.

Si F est une caractéristique de (V,ω), ∇ est une connexion dans le fibré $\nu TV|_F \to F$. $\mathcal{F}_V$ étant le noyau de ω, $\omega \in \Lambda^2 \nu^* TV$ et définit une structure symplectique sur $\nu TV|_F \to F$. En particulier le rang du fibré $\nu TV|_F$ est pair. Le lemme suivant est implicite dans la littérature (cf. [23 b] par exemple).

<u>LEMME 1.</u> $\nabla\omega = 0$. *On dit que* $\mathcal{F}_V$ *est un feuilletage transversalement symplectique.*

Démonstration. - Pour toute p-forme $\eta \in \Lambda^p \nu^*TM$, et pour tout champ X tangent à $\mathscr{F}_V$ on a ([6c])

$$\mathcal{L}_X \eta = \nabla_X \eta = \iota_X d\eta .$$

Appliquant ceci à ω, on en déduit $\nabla_X \omega = 0$.

Le lemme 1 se traduit encore en disant que le long de toute caractéristique F, ω est invariante par l'holonomie infinitésimale de la feuille F.

Dorénavant $i : V \hookrightarrow M$ est une sous-variété présymplectique de 2-forme $i^*\sigma = \omega$. Un champ de vecteurs Z défini au voisinage U de V est un hamiltonien local (resp. global) si sur U, $d\,\iota_Z\sigma = 0$ (resp. $\iota_Z\sigma = -dH$ où H est une application C^∞ de U dans $\mathbb{R}$ appelée hamiltonien de Z). Pour étudier la mécanique sur la "variété des contraintes" V, Lichnérowicz a introduit [14 b] la notion suivante :

<u>DEFINITION 1.1.</u> - *Un champ hamiltonien local (resp. global)* Z *au voisinage de* V *est* admissible le long de V *si sa restriction à* V, Z_V , *appartient à* $TV + TV^\sigma$.

Le problème mécanique de la *réduction* consiste à savoir comment utiliser, k désignant la codimension de V, les k "contraintes" pour diminuer les équations scalaires du mouvement en conservant le formalisme hamiltonien.

Les "contraintes" définissant V peuvent être des données du problème, il s'agit alors de "liaisons", ou être des intégrales premières du mouvement défini par le champ Z, cas qui contient celui étudié par MARSDEN et WEINSTEIN [17] (cf. également ARNOLD [2]). V est alors définie par des intégrales premières de Z ce qui se traduit par $Z \in TV$. On notera que l'on est dans un cas formellement analogue chaque fois que V est coïsotrope.

$(TV+TV^\sigma)/\mathscr{F}_V$ étant canoniquement isomorphe à $\nu TV \oplus (TV^\sigma/\mathscr{F}_V)$ il existe une projection naturelle $\nu_\circ$ de $TV + TV^\sigma$ sur νTV. D'autre part de la suite exacte :

$$0 \to \mathscr{F}_V \to TV \to \nu TV \to 0$$

on déduit par dualité la suite exacte

$$0 \to \nu^* TV \to T^* V \to \mathscr{F}_V^* \to 0$$

dans laquelle on identifie le fibré normal dual $\nu^* TV$ aux 1-formes sur V nulles sur $\mathscr{F}_V$.

<u>LEMME 2.</u> $\nabla \nu_\circ(Z) = 0$ *si* Z *est un champ hamiltonien local admissible.*

Démonstration. Z étant admissible, Z s'écrit (de façon non canonique) $Z = Z_1 + Z_2$ $Z_1|_V \in TV$ $Z_2|_V \in TV^\sigma$ et $\nu_\circ(Z) = \nu(Z_1)$. Soit X tangent à $\mathscr{F}_V$

$$\nabla_X \nu_\circ(Z) = \nabla_X \nu(Z_1) = \nu[X, Z_1].$$

Comme $Z_2|_V \in TV^\sigma$, $\iota_{Z_1} \omega = i^* \iota_Z \sigma$, ce qui entraîne que $\mathcal{L}_{Z_1} \omega = 0$.

Soit Y un champ sur V.

$$0 = (\mathcal{L}_{Z_1} \omega)(X,Y) = \mathcal{L}_{Z_1}(\omega(X,Y)) - \omega([Z_1,X],Y) - \omega(X_1[Z_1,Y]).$$

Comme $X \in \mathscr{F}_V$, ceci se traduit par $\omega([X,Z_1], Y) \equiv 0$ pour tout Y tangent à V, ce qui signifie que $[X,Z_1] \in \mathscr{F}_V$ et donc que $\nu[X,Z_1] = 0$, ce qui achève la démonstration.

Le lemme 2 s'exprime en disant que $\nu_\circ(Z)$ est un *champ transverse* au feuilletage $\mathscr{F}_V$. Soit Π_1 une projection de $TV + TV^\sigma$ sur TV ; dans la terminologie de MOLINO [18 d] le lemme 2 s'énonce : $\Pi_1 Z$ est un champ feuilleté.

L'identification de $\nu^* TV$ à un sous-espace de $T^* V$ identifie la 2-forme symplectique de νTV à $\omega = i^* \sigma$. Il s'en déduit que $\iota_{\nu_\circ(Z)} \omega = \iota_{Z_1} \omega$, ce qui entraîne que $d\iota_{\nu_\circ(Z)} \omega = 0$, on dira que $\nu_\circ(Z)$ est un *champ hamiltonien local transverse*. Si de plus $\iota_{\nu_\circ(Z)} \omega = -d\widetilde{H}$, on dira que $\nu_\circ(Z)$ est un *champ hamiltonien transverse*.

LEMME 3. - *Si* Z *est un champ hamiltonien admissible de hamiltonien* H, H *est constant sur les caractéristiques et* $\nu_o(Z)$ *est un champ hamiltonien transverse de hamiltonien* H.

En effet, $\iota_Z\sigma = -dH$ et $Z \in TV + TV^\sigma$ entraînent que, pour tout $X \in \mathscr{F}_V = TV \cap TV^\sigma$, $\sigma(Z,X) = 0$. Rassemblant les résultats précédents, on a prouvé le

THEOREME 1.1 (Théorème de Réduction). - *Soient* $i : V \to (M,\sigma)$ *une sous-variété présymplectique,* Z *un champ hamiltonien local admissible le long de* V. *Le feuilletage caractéristique* $\mathscr{F}_V$ *est transversalement symplectique,* $\nu_o(Z)$ *est un champ hamiltonien local transverse à* $\mathscr{F}_V$. *De plus si* Z *est global au voisinage de* V *de hamiltonien* H, $\nu_o(Z)$ *est global de même hamiltonien.*

Si k est la codimension de V et $k' < k$ le rang de $\mathscr{F}_V$, si U est un ouvert distingué du feuilletage d'espace transverse W_U , W_U est une variété symplectique de dimension, dim V-k', et $\nu_o(Z)$ définit canoniquement un champ hamiltonien sur W_U. On a donc, localement, réduit le problème de k' équations. Pour conduire la réduction de façon globale, il faut pouvoir affirmer que l'espace transverse du feuilletage est une variété, ce qui justifie la notion suivante due à LICHNEROWICZ [14 b,c].

DEFINITION 2. - *Une variété présymplectique* V *est* régulière *si l'espace des caractéristiques de* V *muni de la structure quotient de* V *par la relation d'équivalence associée au feuilletage est une variété. Cette variété* W *s'appelle la* variété dynamique.

On dira que V *est* fortement régulière *si, de plus,* $\Pi : V \to W$ *est une fibration.*

Le théorème 1.1 entraîne le théorème suivant dû à Lichnérowicz :

THEOREME 1.2 [14 b,c] :

(i) W *est munie canoniquement d'une structure symplectique* σ_o, *et* $\Pi^* \sigma_o = \omega$.

(ii) Si Z *est un champ hamiltonien local admissible le long de* V, *il existe sur* W *un champ hamiltonien local* Z_W *canoniquement défini par* Z *dont les trajectoires décrivent dans* W *le mouvement défini par* Z *et la sous-variété des contraintes* W. *De plus si* Z *est hamiltonien de hamiltonien* H, Z_W *est hamiltonien de hamiltonien* H_W *et* $\Pi^* H_W = H$.
On dit que $V \mapsto (W,\sigma_o)$ *est une* réduction symplectique.

La réduction n'est maximale ($k'=k$) que si V est coïsotrope.

En général $Z_W = \Pi^T Z_1$ où Z_1 est tel que $Z-Z_1 \in TV^\sigma$, $Z_1 \in TV$.

COROLLAIRE. - *Si* V *est coïsotrope, ou si* Z *est tangent à* V, $\Pi^T Z = Z_W$.

Remarque. - Sous le nom de réduction symplectique, BENENTI et TULCZYJEW étudient [4] une généralisation de la notion de sous-variété coïsotrope régulière : une sous-variété coïsotrope $i : C \hookrightarrow (M,\sigma)$ définit une réduction symplectique si le feuilletage caractéristique est simple - c'est-à-dire s'il existe une variété M_o et une submersion $\Pi : C \to M_o$ surjective telle que les caractéristiques soient les composantes connexes des contre-images par Π des points de M_o - et si M_o possède une structure symplectique σ_o telle que $\Pi^* \sigma_o = i^* \omega$.

Le théorème 1.2 s'étend à ce cas - en remplaçant (W,σ_o) par (M_o,σ_o). Au demeurant si $\Pi^{-1}(x)$ est connexe pour tout x, C est symplectique régulière, la deuxième condition résultant alors de la première.

3. UN CRITERE DE REGULARITE FORTE DES SOUS-VARIETES PRESYMPLECTIQUES.

Les théorèmes précédents justifient la définition suivante :

DEFINITION 3.1. - *Un champ de vecteurs* X *sur la sous-variété présymplectique* V *est un champ* V*-dynamique si pour tout point* x_o *de* V *il existe un voisinage ouvert* U *de* x_o *dans* M *et un champ hamiltonien sur* U, Z, *admissible le long de* $(Z-X)$ *tel que* $(Z-X)\big|_{V \cap U} \in TV^\sigma$.

Le lemme 2 du paragraphe précédent entraîne que νX est un champ hamiltonien local transverse. Soit $\mathscr{A}_{loc}(V)$ l'espace des champs V-dynamiques locaux.

PROPOSITION 3.1. $\mathscr{A}_{loc}(V)$ *est transitif sur* V.

Démonstration. - Il faut prouver que pour tout x_o, $\mathscr{A}_{loc}(V)(x_o)$ ensemble des valeurs en x_o des champs V dynamiques locaux est identique à $T_{x_o}V$. Soit U_o un ouvert distingué du feuilletage en x_o. U_o est une sous-variété symplectiquement régulière de variété dynamique W_o espace transverse de U_o en x_o. Soit Π la projection de U_o sur W_o et $X_o \in T_{x_o}V$. $\Pi^T X_o \in T_{x_o}W_o$. Il existe H_o hamiltonien sur W_o tel que si ξ_{H_o} est le champ associé $\xi_{H_o}(x_o) = \Pi^T X_o$. Soit U un voisinage de x_o dans M et ρ une application C^∞ de U dans V telle que $\rho(U) = U \cap V \subset U_o$. Soit $H = \rho^* \Pi^* H_o$ et Z le champ hamiltonien sur U associé. Il est immédiat que Z est admissible. Utilisant une carte distinguée $\varphi : U_o \simeq F_o \times W_o$ où F_o est la plaque de U_o en x_o, on construit un champ X sur U_o d'image (ξ_o, ξ_{H_o}) où ξ_o est un champ tangent à F_o tel que $X(x_o) = X_o$. On a évidemment $Z-X|_{\rho(U) = U \cap V} \in TV^\sigma$ ce qui achève la démonstration.

Soit $\mathscr{A}_c(V)$ le sous-espace de $\mathscr{A}_{loc}(V)$ des champs de vecteurs sur V complets appartenant à $\mathscr{A}_{loc}(V)$.

THEOREME 3.1. - *Une sous-variété* V *présymplectique est fortement régulière si et seulement si les caractéristiques sont fermées et si* $\mathscr{A}_c(V)$ *est transitif sur* V.

Démonstration.

1. Supposons V fortement régulière et soit $\Pi : V \to W$ la fibration. Il suffit de prouver que $\mathscr{A}_c(V)$ est transitif. Soient $x_o \in V$, $y_o = \Pi(x_o)$ et W_o un voisinage ouvert de y_o trivialisant. Soit $\mathscr{H}_o(W_o)$ l'ensemble des hamiltoniens à support compact contenu dans W_o, $\mathscr{H}_o(W_o)$ l'espace des champs hamiltoniens associés. $\tilde{\mathscr{H}}_o(W_o)(y_o) = T_{y_o}W$. $\Pi^{-1}W_o$ étant isomorphe à $W_o \times \Pi^{-1}(y_o)$ on associe à tout champ $Z_o \in \tilde{\mathscr{H}}_o(W_o)$ le champ $X_o = (Z_o, 0)$ qu'on prolonge par 0 hors de $\Pi^{-1}W_o$ ce qui fournit un champ X sur V

qui est complet.

Soit $\rho : U \to V$ un voisinage tubulaire de V. Au hamiltonien H_o de Z_o on associe $H = \rho^* \Pi^* H_o$ de champ hamiltonien associé Z. Si $Y \in TV$, $dH(Y) = dH_o(\Pi^T Y) = - \iota_{Z_o} \sigma_o(\Pi^T Y)$.

Soit $\sigma(Z,Y) = \sigma(X,Y)$, ce qui assure que $Z|_V - X \in TV^\sigma$. Il en résulte que $\mathcal{A}_c(V)(x_o)$ contient $X(x_o)$ et donc tout espace tangent en x_o à une section s de Π telle que $s(y_o) = x_o$, ce qui entraîne que $\mathcal{A}_c(V)(x_o) = T_{x_o}V$. $\mathcal{A}_c(V)$ est donc transitive sur V.

2. Réciproquement les champs V-dynamiques sont des champs feuilletés ; le résultat se déduit alors d'un théorème d'EHRESMANN amélioré par MOLINO [18 d].

<u>REMARQUES</u> :

1) Si $\mathcal{F}_V$ est un feuilletage stable au sens suivant : toute feuille est compacte à holonomie finie, l'espace des caractéristiques est une variété de Sataké [18 d] symplectique W : en effet on peut, pour définir l'holonomie, se restreindre aux applications distinguées $f : U \to \mathbb{R}^{2q}$ telles que $f^*\mathrm{can} = \omega|_U$ où "can" est la 2-forme symplectique canonique de $\mathbb{R}^{2q}$, ce qui résulte du théorème de Darboux.

L'ensemble des germes de ces applications de but 0 est un fibré principal à groupe discret, le groupe des germes de transformations canoniques de $\mathbb{R}^{2q}$ conservant 0. Le fibré principal d'holonomie est une nappe d'holonomie de ce fibré. On note $\psi(F)$ son groupe structural [cf. 6c]. Du théorème de stabilité locale de REEB [20], [10], on déduit que F étant compacte sans holonomie $\psi(F)$ se réalise comme groupe de transformations d'un voisinage W_F de 0 dans $\mathbb{R}^{2q}$ [10], et donc comme groupe (fini) de transformations canoniques de W_F. L'assertion en résulte.

2) Il résulte de la démonstration de MOLINO [18d] qu'il suffit de vérifier que $\mathcal{A}_c(V)$ est transversalement transitif au sens suivant : pour tout point x de V $\mathcal{A}_c(V)(x)$ contient un supplémentaire de $(TV \cap TV^\sigma)(x)$ ce qui est en particulier réalisé si $\mathcal{A}_c(V)$ contient un sous-espace $\mathcal{A}$ tel qu'en tout point

$\mathscr{A}(x) + (TV^{\sigma} \cap TV)(x) = TV(x)$.

3) Si $i : Y \to M$ est une immersion et si $\mathscr{A}_c(V)$ est transitif sur V et si les caractéristiques sont fermées, V est fortement régulière. La réciproque n'est pas assurée si i n'est pas un plongement.

* * *

II. FEUILLETAGES PRÉSYMPLECTIQUES

1. FEUILLETAGE CARACTERISTIQUE D'UN FEUILLETAGE REGULIER.

Soit $\mathcal{V}$ un feuilletage sur (M,σ), $\mathcal{V}^{\sigma}$ son orthogonal symplectique. L'isomorphisme canonique du fibré tangent TM sur le fibré cotangent T^*M

$$\tilde{\sigma} : X \to - \iota_X \sigma$$

permet d'identifier canoniquement $\mathcal{V}^{\sigma}$ au fibré dual du fibré normal de $\mathcal{V}$, ν^*TM, qu'on identifie toujours au noyau de la projection canonique de T^*M sur $\mathcal{V}^*$: on a ainsi les deux suites exactes de fibrés sur M, duales,

$$0 \to \mathcal{V} \xrightarrow{i} TM \xrightarrow{\nu} \nu TM \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow \nu^* TM \longrightarrow T^*M \xrightarrow{i^*} \mathcal{V}^* \longrightarrow 0.$$

Soit V une feuille de $\mathcal{V}$ et ∇ la connexion de BOTT [5] de en V, connexion sans courbure dans le fibré $\nu TM|_V \to V$. Elle définit canoniquement une connexion dans le fibré $\nu^* TM|_V \to V$ que l'isomorphisme σ permet de transporter en une connexion sans courbure $\tilde{D}$ dans le fibré $\mathcal{V}^{\sigma}|_V \to V$.

Si X est un champ tangent au feuilletage et Y un champ appartenant à $\mathcal{V}^{\sigma}$, on a par définition

$$\iota(\tilde{D}_X Y)\sigma = \nabla_X \iota_Y \sigma .$$

Soit Z un champ quelconque de M.

$$\sigma(\tilde{D}_X Y,Z) = \mathcal{L}_X\sigma(Y,Z) - \sigma(Y, [X,Z]) \qquad (1)$$

compte tenu de ce que $\nabla_X \nu Z = \nu[X,Z]$.

Enfin D étant construite par isomorphisme avec ∇, son groupe d'holonomie est isomorphe au groupe d'holonomie de ∇, c'est-à-dire au groupe d'holonomie infinitésimale de V, $\psi_1(V)$.

PROPOSITION 1.1. - $\mathcal{V}^\sigma|_V \to V$ *est muni canoniquement d'une connexion* $\tilde{D}$ *sans courbure vérifiant (1) et dont le groupe d'holonomie est le groupe d'holonomie infinitésimale* $\psi_1(V)$ *de la feuille* V *du feuilletage* $\mathcal{V}$.

Supposons que $\mathcal{V}^\sigma$ soit également un feuilletage, V' une feuille de $\mathcal{V}^\sigma$ et $\tilde{D}^\sigma$ la connexion sur $\mathcal{V}|_{V'} \to V'$. Soient X et Y deux champs de vecteurs, l'un tangent à $\mathcal{V}$, l'autre à $\mathcal{V}^\sigma$. En tout point $x \in V \cap V'$ on peut calculer $\tilde{D}_X Y - \tilde{D}^\sigma_Y X$.

PROPOSITION 1.2. $\tilde{D}_X Y - \tilde{D}^\sigma_Y X - [X,Y] = 0$.

Démonstration. σ étant fermée, si Z est un champ quelconque

$$d\sigma(X,Y,Z) \equiv \oint\{\mathcal{L}_X\sigma(Y,Z) - \sigma([X,Y],Z)\} = 0$$

où $\oint$ désigne la sommation par permutation circulaire sur (X,Y,Z). Le résultat découle alors de la formule (1) et de $\sigma(X,Y) \equiv 0$.

DEFINITION 1.1. - *Un* feuilletage $\mathcal{V}$ *est* présymplectique *si toutes ses feuilles sont des variétés présymplectiques de même rang. Ce rang est appelé rang du feuilletage.*

Il revient au même de dire que $\mathcal{V} \cap \mathcal{V}^\sigma$ est un feuilletage, *le feuilletage caractéristique de* $\mathcal{V}$. Ses feuilles sont les *caractéristiques de* $\mathcal{V}$. Soit F une caractéristique et V l'unique feuille de $\mathcal{V}$ qui la contient. F est évidemment une caractéristique de V au sens du paragraphe I. $\tilde{D} : \mathcal{V}^\sigma|_V \to V$ induit une connexion notée encore D sur $\mathcal{V}^\sigma|_F \to F$.

$TF \to F$ est un sous-fibré de $\mathcal{V}^\sigma|_F \to F$ sur lequel $\tilde{D}$ induit une connexion si pour tout couple (X,Y) de champs tangents à F, $\tilde{D}_X Y \in TF$.

<u>LEMME.</u> - *Si* $[\mathcal{V} \cap \mathcal{V}^\sigma, \mathcal{V} + \mathcal{V}^\sigma] \subset \mathcal{V} + \mathcal{V}^\sigma$, D *induit une connexion linéaire sur* F.

Démonstration. - Il faut prouver que pour tout $Z \in \mathcal{V} + \mathcal{V}^\sigma$,

$\sigma(\tilde{D}_X Y, Z) \equiv 0$, ce qui résulte de la formule (1) et de la condition $[\mathcal{V} \cap \mathcal{V}^\sigma, \mathcal{V} + \mathcal{V}^\sigma] \subset \mathcal{V} + \mathcal{V}^\sigma$.

On note D la connexion linéaire induite sur F. D est par construction sans courbure et son groupe d'holonomie est isomorphe à un sous-groupe de $\psi_1(V)$. Soit T la torsion de D, Z un champ quelconque tangent à M, X et Y deux champs tangents à $\mathcal{V} \cap \mathcal{V}^\sigma$. Comme $\sigma(X,Y) \equiv 0$, $\sigma(T(X,Y),Z) \equiv d\sigma(X,Y,Z) = 0$.

<u>DEFINITION 1.2.</u> - *Un feuilletage présymplectique* $\mathcal{V}$ *est* régulier *si* $[\mathcal{V} \cap \mathcal{V}^\sigma, \mathcal{V} + \mathcal{V}^\sigma] \subset \mathcal{V} + \mathcal{V}^\sigma$.

On a prouvé le résultat suivant qui étend et précise un théorème de WEINSTEIN [23 a] relatif aux feuilletages lagrangiens :

<u>THEOREME 1.1.</u> - *Si* $\mathcal{V}$ *est un feuilletage présymplectique régulier, toute caractéristique* F *de* $\mathcal{V}$ *est munie canoniquement d'une connexion linéaire* D *symétrique plate dont le groupe d'holonomie est isomorphe à un sous-groupe du groupe d'holonomie infinitésimale* $\psi_1(V)$ *de la feuille* V *de* $\mathcal{V}$ *contenant* F. *En particulier si* $\mathcal{V}$ *est lagrangien,* V=F *et l'holonomie de* D *est l'holonomie infinitésimale de* V.

La connexion D étant canonique la définition suivante est justifiée :

<u>DEFINITION 1.3.</u> - *Une caractéristique* F *est complète si il existe* $x_o \in F$ *tel que toutes les géodésiques de* D *passant par* x_o *soient définies sur* R.

Remarque. - Le théorème est en défaut si le rang de $\mathcal{V} \cap \mathcal{V}^\sigma$ n'est pas constante au voisinage de F, même si chacune des feuilles V de $\mathcal{V}$ est une variété présymplectique.

EXEMPLES :

1) Tout feuilletage $\mathscr{V}$ coïsotrope ($\mathscr{V}^{\sigma} \subset \mathscr{V}$) est régulier trivialement. Par contre un feuilletage isotrope $\mathscr{I}$ ($\mathscr{I} \subset \mathscr{I}^{\sigma}$) n'est pas régulier en général.

2) Si $\mathscr{V} + \mathscr{V}^{\sigma}$ est un feuilletage - il suffit pour ceci que $\mathscr{V} + \mathscr{V}^{\sigma}$ soit stable par le crochet - la condition de régularité est trivialement vérifiée.

3) Il en est de même si $\mathscr{V}^{\sigma}$ est un feuilletage ce qui résulte de la remarque suivante :

PROPOSITION 1.3. - *Si $\mathscr{V}$ est un feuilletage présymplectique tel que $\mathscr{V}^{\sigma}$ soit un feuilletage, $\mathscr{V} + \mathscr{V}^{\sigma}$ est un feuilletage.*

Démonstration. $\mathscr{V}$ et $\mathscr{V}^{\sigma}$ étant des feuilletages

$$[\mathscr{V} + \mathscr{V}^{\sigma},\ \mathscr{V} + \mathscr{V}^{\sigma}] \subset \mathscr{V} + \mathscr{V}^{\sigma} + [\mathscr{V},\ \mathscr{V}^{\sigma}].$$

Tout revient à prouver que $[\mathscr{V},\mathscr{V}^{\sigma}] \subset \mathscr{V} + \mathscr{V}^{\sigma}$. Soient donc X,Y,Z des champs tangents à M appartenant respectivement à $\mathscr{V}, \mathscr{V}^{\sigma}$, $\mathscr{V} \cap \mathscr{V}^{\sigma}$. Des relations

$$\sigma(X,Y) = \sigma(Y,Z) = \sigma(Z,X) = 0$$

il résulte que $d\sigma(X,Y,Z) \equiv - \oint \sigma([X,Y],Z) = 0$. Or $[Z,X] \in \mathscr{V}$ et $[Y,Z] \in \mathscr{V}^{\sigma}$ car $\mathscr{V}$ et $\mathscr{V}^{\sigma}$ sont des feuilletages, ce qui entraîne que $\sigma([X,Y],Z) \equiv 0$, c'est-à-dire que $[\mathscr{V},\mathscr{V}^{\sigma}] \subset \mathscr{V}+\mathscr{V}^{\sigma}$.

4) Si $\mathscr{V}$ est tel que $[\mathscr{V},\mathscr{V}^{\sigma}] \subset \mathscr{V} + \mathscr{V}^{\sigma}$ a fortiori $\mathscr{V}$ est régulier.

Soit $\mathscr{W}$ un deuxième feuilletage présymplectique régulier tel que $\mathscr{C} = \mathscr{W} \cap \mathscr{W}^{\sigma} \supset \mathscr{F} = \mathscr{V} \cap \mathscr{V}^{\sigma}$. Soit F une caractéristique de et C l'unique caractéristique de $\mathscr{V}$ qui le contient. Soit D^{c} la connexion linéaire induite sur C. D^{c} est caractérisée par

$$\sigma(D^{c}_{X}Y,Z) \equiv \mathcal{L}_{X}\sigma(Y,Z) - \sigma(Y, [X,Z])$$

où X et Y sont tangents à C et Z tangent à M. Il en résulte que si X et Y sont tangents à F, $D^{c}_{X}Y \equiv D_{X}Y$, ce qui équivaut à F totalement géodésique puisque D^c est sans torsion.

PROPOSITION 1.4. - *Si* $\mathcal{V}$ *et* $\mathcal{W}$ *sont deux feuilletages présymplectiques réguliers tels que* $\mathcal{V} \cap \mathcal{V}^\sigma \subset \mathcal{W} \cap \mathcal{W}^\sigma$, *toute caractéristique* F *de* $\mathcal{V}$ *est totalement géodésique dans la caractéristique de qui la contient. En particulier si* $\mathcal{V} \cap \mathcal{V}^\sigma = \mathcal{W} \cap \mathcal{W}^\sigma$, $\mathcal{V}$ *et* $\mathcal{W}$ *induisent la même connexion sur leurs caractéristiques communes.*

Soit V une feuille à groupe d'holonomie infinitésimale $\psi_1(V)$ relativement compact. $\psi_1(V)$ étant relativement compact, il existe sur $\mathcal{V}^\sigma(x)$ $(x \in V)$ une métrique g invariante par $\psi_1(V)$.

Par transport par parallélisme, relativement à $\tilde{D}$, de g on munit $\mathcal{V}^\sigma|_V \to V$ d'une structure riemannienne de métrique notée encore g telle que $\tilde{D}g = 0$ [cf. 14 a]. Si $\mathcal{V}$ est un feuilletage présymplectique régulier, g induit sur les caractéristiques F de V une métrique riemannienne dont la connexion riemannienne est la connexion canonique D de F. On a ainsi prouvé le théorème suivant qui étend des résultats antérieurs de ARNOLD [2][3] et de l'auteur [6 a,b].

THEOREME 1.2. - *Si* $\mathcal{V}$ *est un feuilletage présymplectique régulier, et si* V *est une feuille de* $\mathcal{V}$ *à holonomie infinitésimale relativement compacte* $\psi_1(V)$, $\mathcal{V}^\sigma|_V \to V$ *est un fibré riemannien induisant sur les caractéristiques de* V *une structure riemannienne plate d'holonomie un sous-groupe de* $\psi_1(V)$. *Si* $\mathcal{V}$ *est lagrangien, alors la structure riemannienne plate de* V *a pour holonomie* $\psi_1(V)$.

Si F est une caractéristique compacte, c'est une variété riemannienne complète. Si F est complète au sens de la définition 1.3. le théorème de Hopf-Rinow entraîne que F est encore une variété riemannienne complète ce qui justifie la terminologie introduite. Les variétés riemanniennes plates sont connues (cf. [24] et [6b] pour des précisions dans le cas non compact). On peut énoncer :

COROLLAIRE 1. - *Si* $\psi_1(V)$ *est relativement compact les caractéristiques complètes de* V *sont isométriques à des produits d'espaces* *numériques* $\mathbb{R}^k$ *par des quotients de tores plats par des sous-groupes finis de* $\psi_1(V)$.

En particulier si V est sans holonomie infinitésimale, les caractéristiques compactes de V sont des tores, les caractéristiques complètes non compactes des cylindres $\mathbb{R}^k \times T^{k'}$ $(k > 1)$.

Inversement on a le résultat suivant :

<u>COROLLAIRE 2.</u> - *Si* $\mathcal{L}$ *est un feuilletage lagrangien et* L *une feuille de* $\mathcal{L}$ *à holonomie infinitésimale* $\psi_1(L)$ *relativement compacte,* $\psi_1(L)$ *est un groupe fini si* L *est compacte ou plus généralement complète.*

Ceci donne une importance particulière aux feuilletages transversalement riemanniens [18 b,c,d] car l'holonomie infinitésimale de toute feuille est alors relativement compacte ; on peut alors préciser :

<u>COROLLAIRE 3.</u> - *Toute feuille compacte ou complète d'un feuilletage lagrangien transversalement riemannien est à holonomie infinitésimale finie.*

2. <u>HAMILTONIEN ADMISSIBLE LE LONG D'UN FEUILLETAGE.</u>

<u>DEFINITION 2.1.</u> - *Un champ de vecteurs* Z *est admissible le long d'un feuilletage* $\mathcal{V}$ *si* $Z \in \mathcal{V} + \mathcal{V}^\sigma$.

Dans ces conditions pour tout $X \in \mathcal{F} = \mathcal{V} \cap \mathcal{V}^\sigma$, $\sigma(X,Z) = 0$. $\mathcal{F}$ généralise la notion de système (complet) d'intégrales premières de Z.

<u>PROPOSITION 2.1.</u> - *Soit* Z *un champ de vecteurs de* $\mathcal{V}^\sigma$ *et* V *une feuille de* $\mathcal{V}$. *Si* $\alpha = -\iota_Z\sigma$ *est telle que* $d\alpha = 0$ *en tout point de* V, $\widetilde{D}_X Z = 0$ *pour tout* X *tangent à* V.

Un tel champ Z est donc une section parallèle du fibré $\mathcal{V}^\sigma|_V \to V$.

COROLLAIRE 1. - *Si* $\mathcal{V}$ *et* $\mathcal{V}^{\sigma}$ *sont des feuilletages,* X *et* Y *des champs hamiltoniens locaux tangents respectivement à* $\mathcal{V}$ *et* $\mathcal{V}^{\sigma}$, $[X,Y] = 0$.

En effet si on note $\widetilde{D}^{\sigma}$ la connexion dans $\mathcal{V}$ associée au feuilletage $\mathcal{V}^{\sigma}$, $\widetilde{D}_X Y - \widetilde{D}^{\sigma}_Y X - [X,Y] = 0$ d'après la proposition 1.2. Le résultat découle de la proposition 2.1.

COROLLAIRE 2. - *Soient* $\mathcal{V}$ *un feuilletage présymplectique,* Z *un champ admissible le long de* $\mathcal{V}$ *et* F *une caractéristique de* $\mathcal{V}$. *Si* $\alpha = - \iota_Z \sigma$ *est fermée en tout point de* F, Z *est une section parallèle de* $TF^{\sigma} \to F$. *De plus si* $\mathcal{V}$ *est régulier, pour que* Z *soit tangent à* F *il suffit que* Z *soit tangent à* F *en un point et* Z *est alors un champ parallèle de* F.

Ce corollaire s'applique en particulier si Z est un champ hamiltonien (local ou global) admissible le long de $\mathcal{V}$.

Démonstration. - La première partie du corollaire résulte de la proposition 2.1. appliquée au couple $(\mathcal{F},Z)$; la deuxième partie de ce que $\mathcal{V}$ étant régulier une section parallèle de $TF^{\sigma} \to F$ est contenue dans TF si elle est contenue dans TF en un point.

F étant munie d'une connexion D symétrique plate, tout point x_o de F possède un voisinage affinement difféomorphe à un ouvert d'un espace numérique muni de sa connexion canonique. Dans ce difféomorphisme un champ hamiltonien local X, $\mathcal{V}$-admissible, tangent à F en x_o est transformé en un champ constant puisque X est tangent à F et parallèle : ceci généralise le théorème d'intégratibilité complète de LIOUVILLE. Si F est une variété riemannienne plate, $X|_F$ est un champ constant, c'est-à-dire que son relèvement dans l'espace numérique $\mathbb{R}^k$ revêtement universel de F est un champ constant. En particulier si F est compacte, les composantes de $X|_F$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^k$ formée des champs constants périodiques s'appellent les pseudopériodes de $X|_F$. Si elles sont deux à deux $\mathbb{Z}$-linéairement dépendantes, les orbites de $X|_F$ sont périodiques : on dit que F est résonnant. Si elles sont deux à deux $\mathbb{Z}$-linéairement indépendantes, les orbites de $X|_F$ sont partout denses.

On dit que F est non-résonnant. Dans les cas intermédiaires, les orbites sont denses sur des quotients finis de tores $T^{k'}$ $(0 < k' < k)$. Dans tous les cas les orbites de $X|_F$ sont toutes isomorphes.

Le corollaire 2 permet dans certains cas de caractériser les caractéristiques complètes.

COROLLAIRE 3. - *Si $\mathcal{V}$ est un feuilletage coïsotrope défini par k 1-formes α_i (deux à deux en involution) et si* V *est une feuille de $\mathcal{V}$ telle qu'en tout point de* V, $d\alpha_i = 0$ *pour* $(i = 1,\dots,k)$, V *est sans holonomie infinitésimale, et* F *caractéristique de* V *est complète si et seulement si les champs X_i définis par $\iota_{X_i}\sigma = -\alpha_i$ sont, en restriction à* F, *complets.*

Démonstration. - Pour tout champ X tangent à V, $\nabla_X\alpha_i = \iota_X d\alpha_i = 0$ où ∇ est la connexion de Bott, ce qui assure que V est sans holonomie infinitésimale. D'autre part X_i vérifie les conditions du corollaire 3 puisque $d\alpha_i = 0$ en tout point de V. Donc $DX_i = 0$. $[X_i,X_j] = 0$ parce que les α_i sont en involution. Les caractéristiques F de V sont telles que la connexion canonique de F est identique à la connexion canonique associée au parallélisme. Ce qui assure que F est complète si et seulement si les X_i le sont [6 b].

En particulier si $\mathcal{V}$ est un feuilletage coïsotrope défini par k 1-formes fermées α_i et si F est une caractéristique de $\mathcal{V}$ telle que $X_i|_F$ soit complet pour $1 \leqslant i \leqslant k$, F est un tore dans le cas compact, un cylindre $\mathbb{R}^{k'} \times T^{k-k'}$ $(k' > 0)$ dans l'autre cas. Si la variété ambiante M est compacte les champs X_i sont complets et on est en tout point dans la situation précédente.

Si $\mathcal{L}$ est un feuilletage lagrangien défini par n 1-formes fermées α_i sur (M,σ) compacte, un théorème de TISCHLER [22] permet d'affirmer que M est fibrée sur T^n, la fibration n'ayant en général aucun rapport avec le feuilletage. $\mathcal{L}$ étant lagrangien et les α_i fermées, $\mathcal{L}$ est transversalement parallélisable et même de Lie, pour le groupe $\mathbb{R}^n$, au sens de FEDIDA [9] (cf. [18 a,d] également). On peut alors préciser :

COROLLAIRE 5. - *Si* M *est une variété symplectique compacte possédant un feuilletage lagrangien* $\mathcal{L}$ *défini par* n 1*-formes fermées* α_i *(et donc en involution et linéairement indépendantes en tout point)*

(i) les feuilles de $\mathcal{L}$ *sont toutes isomorphes. Ce sont des tores si elles sont compactes, des cylindres* $\mathbb{R}^{n'} \times T^{n''}$ $(n'+n'' = n,\ n' > 0)$ *si elles sont non compactes.*

(ii) Si les feuilles de $\mathcal{L}$ *sont des tores,* $\mathcal{L}$ *est une fibration à fibres* T^n *de base* T^n.

(iii) Si les feuilles de $\mathcal{L}$ *sont non compactes, leurs adhérences définissent une fibration coïsotrope de* M *sur un tore* T^k, $0 \leqslant k < n$.

(iv) Dans tous les cas M *possède un revêtement difféomorphe à un cylindre.*

3. COORDONNEES ACTIONS-ANGLES.

L'objet de ce paragraphe est de donner un modèle local au voisinage d'une feuille compacte sans holonomie d'un feuilletage caractéristique d'un feuilletage coïsotrope. D'après ce qui précède une telle feuille est isomorphe à un tore.

THEOREME 3.1. - *Soit* $\mathcal{V}$ *un feuilletage coïsotrope et* F *une caractéristique compacte de* $\mathcal{V}$ *sans holonomie comme feuille du feuilletage caractéristique* $\mathcal{F} = \mathcal{V}^{\sigma}$.

Il existe un voisinage ouvert U *de* F *saturé pour la relation d'équivalence associée au feuilletage* $\mathcal{V}$ *tel que :*

(i) si V *désigne la feuille contenant* F *de* $\mathcal{V}_U$, *restriction à* U *du feuilletage* $\mathcal{V}$, V *admette une réduction symplectique* (W, σ_W).

(ii) Il existe un symplectoisomorphisme ψ *de* U *dans* $T^*F \times W$ *muni de la structure produit* $d\lambda_F + \sigma_W$ *(où* λ_F *est la 1-forme de Liouville de* T^*F*) induisant l'identité sur* F, *et tel que* $\psi(U) = F\times A\times W$ *où* A *est un voisinage de* 0 *dans* $\mathbb{R}^k$.

(iii) ψ *transforme* $\mathcal{V}_U$ *en le feuilletage trivial* $(F\times a\times W)_{a \in A}$ *et le feuilletage* $\mathcal{F}_U = \mathcal{V}_U^{\sigma}$ *en le feuilletage* $(F\times a\times w)_{(a,w) \in A\times W}$.

L'outil essentiel de la démonstration est le théorème suivant qui - à l'utilisation près du théorème de Darboux-Weinstein - est le théorème classique "des variables actions-angles" d'ARNOLD ([2], [3]).

THEOREME 3.2. - *Si $\mathcal{L}$ est un feuilletage lagrangien de T^*T^k possédant T^k comme feuille sans holonomie, il existe un sysmplectoisomorphisme ψ d'un voisinage ouvert saturé U de T^k sur un ouvert $T^k \times U_1$ de T^*T^k (où U_1 est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^k$), dont la restriction à T^k est l'identité et qui transforme $\mathcal{L}_U$ en le feuilletage trivial $(T^k \times a)_{a \in U_1}$.*

Remarques :

1. Comme l'a noté MARLE [16 c], les hypothèses additionnelles faites pour prouver le théorème 3.2. par ARNOLD, AVEZ, ABRAHAM et MARSDEN ([2], [3], [1]) sont superflues.

2. Le théorème est encore vrai si $\mathcal{L}$ est un feuilletage lagrangien de $T^*(T^k \times \mathbb{R}^{k'})$ $(k' > 0)$ possédant $F = T^k \times \mathbb{R}^{k'}$ comme feuille si il existe un voisinage U de F et une application distinguée f définie sur U telle que si $\rho : T^*F \to F$ est la projection canonique et si $f(U) = U_\circ$, (ρ, f) soit un difféomorphisme de U sur $F \times U_\circ$. Si F est compacte sans holonomie, ce point résulte du théorème de stabilité locale [20], [10] : les feuilles voisines sont des 1-formes fermées.

Démonstration du théorème 3.2. - On reprend l'idée de la démonstration d'ARNOLD ([2], [3]) consistant à associer à chaque feuille les périodes de la forme de Liouville.

T^k étant sans holonomie, il existe (cf. supra) une application distinguée $f : U \to U_\circ \subset \mathbb{R}^k$ telle que (ρ, f) soit un difféomorphisme sur $F \times U_\circ$.

On note $(q^i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ les angles de T^k et comme il est d'usage sur le tore on note dq^i la 1-forme fermée non exacte représentant la mesure angulaire d'angle q^i Soit $(C_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ la base de $H_1(T^k, \mathbb{Z})$ formée des classes des k-cercles canoniquement associés aux q^i.

A tout $u \in U_o$, on associe $f^{-1}(u)$ qui s'identifie à une 1-forme fermée $p_i(q,u)dq^i$ de T^q. Si s_u est l'isomorphisme inverse de la restriction à $f^{-1}(u)$ de ρ, et i_u l'immersion canonique de $f^{-1}(u)$ dans U

$$\int_{s_u C_i} i_u^* \lambda = \int_{C_i} p_j(q,u)dq^j = P_i .$$

Comme $f^{-1}(u)$ est lagrangien la quantité P_i ne dépend que de u.

<u>LEMME 1.</u> - *L'application* $u \to P(u) = (P_i(u))_{1 \leq i \leq k}$ *est un* C^∞*-difféomorphisme de* U_o *dans* $\mathbb{R}^k$.

Démonstration du lemme. - Si $P(u) = P(v)$, pour tout $i \in [1,k]$, $p_j(q,u)dq^j$ et $p_j(q,v)dq^j$ ont des intégrales identiques sur les cycles de T^k. Ces 2-formes diffèrent donc d'une différentielle exacte dS qui, T^k étant compacte, s'annule en un point q_o. Les feuilles $f^{-1}(u)$ et $f^{-1}(v)$ ont en commun le point $(q_o,\ p(q_o,u) = p(q_o,v))$ elles coïncident donc et P est injectif.

$u \to P(u)$ est clairement C^∞. Soit $(\lambda_\alpha)_{(1 \leq \alpha \leq k)}$ k nombres réels tels que $\lambda_\alpha \dfrac{\partial P}{\partial u_\alpha}(u) = 0$. De la définition de P il résulte que $\lambda^\alpha \dfrac{\partial p_j}{\partial u^\alpha}(q,u)dq^j$ est une 1-forme fermée, nulle sur tous les cycles de T^k. Elle est donc nulle en un point q_o. Mais l'application $(q,p) \to (q,u)$ $(u = f(q,p))$ étant un difféomorphisme $(\dfrac{\partial p_i}{\partial u_\alpha})$ est inversible en tout point, ce qui entraîne que $\lambda_\alpha = 0$. P est donc une immersion injective C^∞. Le lemme est prouvé.

Fin de la démonstration. $U \ni (p,q) \to (q,P)$ est un C^∞-difféomorphisme transformant $\mathcal{F}$ en le feuilletage $(F \times \{P\})_P$. Par construction même, sur toute feuille,

$$p_j(q,P)dq^j - P_j\ dq^j$$

est une 1-forme fermée nulle sur tous les cycles. Il existe donc une application C^∞ $(q,P) \to S(q,P)$ telle que pour tout couple (q,P)

$$p_j(q,P)dq^j - P_j\ dq^j = \frac{\partial S}{\partial q_j}\ dq^j .$$

Par différentiation extérieure, on en déduit que

$$dp_j \wedge dq^j = dP_j \wedge d(q^j + \frac{\partial S}{\partial P_j}) \ .$$

Soit $\psi_1 : U \to F \times \mathbb{R}^q$ l'application définie par

$$(q,p) \to (Q,P) \text{ où } Q^j = q^j + \frac{\partial S}{\partial P_j}$$

(où + représente l'action de $\mathbb{R}^k$ sur T^k).

$\psi_1(\mathcal{L})$ est le feuilletage $(F \times \{P\})_p$

$\psi_1^*(dP_j \wedge dQ^j) = (dp_j \wedge dq^j)$.

Si on munit $F \times \mathbb{R}^k$ de la structure symplectique $dP_j \wedge dQ^j$, ce qui revient à identifier $F \times \mathbb{R}^k \quad T^*F$, ψ_1 devient un symplectomorphisme de T^*F transformant $\mathcal{L}$ en le feuilletage $(F \times \{P\})_p$. Par construction même si X_i désigne le champ hamiltonien associé à DP_i, $\psi_1^T(X_i) = X_i \circ \psi$. Donc en restriction aux feuilles ψ_1 est une isométrie locale des structures riemanniennes canoniques, et en restriction à toute feuille de $\mathcal{L}$, $\rho \circ \psi_1$ est un morphisme d'un groupe abélien isomorphe à T^k dans T^k qui est un difféomorphisme local. En particulier $q \to Q(q,0)$ est une application affine de T^k dans lui-même qui est une isométrie locale. Il existe donc $A \in O(k)$ et $B \in \mathbb{R}^k$ tels que $Q(q,0) = A.q + B$.

Soit ψ_2 le symplectoisomorphisme défini par $\psi_2(Q,P) = (A^{-1}(Q-B), AP)$. $\psi = \psi_2 \circ \psi_1$ est un symplectoisomorphisme de T^*F induisant l'identité sur la feuille $P = 0$, ce qui achève la démonstration.

Démonstration du théorème 3.1. - Soit k la dimension de F. F est isomorphe à T^k car F est compacte sans holonomie. D'après le théorème de stabilité locale [20], [10], il existe un voisinage U de F et une application distinguée $g : U \to U_o$ où U_o est un ouvert de $\mathbb{R}^{2n-k}$ qui est une fibration triviale. $g(\mathcal{V})$ est un feuilletage sur U_o dont les feuilles sont les réductions symplectiques des feuilles de $\mathcal{V}_U$. Par restriction de U on peut toujours supposer que U_o est un ouvert distingué du feuilletage $g(\mathcal{V})$ dont les feuilles sont des variétés symplectiques. En utilisant le théorème de Darboux à paramètre, on peut trouver un difféomorphisme transformant U_o, éventuellement réduit, en le produit $A \times W$, le feuilletage $g(\mathscr{V})$ étant transformé en le feuilletage $(a \times (W,\sigma_W)_{a \in A}$ où (W,σ_W) est la réduction symplectique de la feuille de $\mathscr{V}_U$ contenant F. En réduisant encore U, on peut supposer que A est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^k$ et, grâce au théorème de Darboux, que (W,σ_W) est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^{2(n-k)}$ muni de la structure symplectique canonique $\sum_{\alpha=1}^{n-k} dW^{\alpha^*} \wedge dW^{\alpha}$ où $\alpha^* = \alpha+n-k$. Ainsi il existe une application distinguée $f = (f_1,f_2)$ de U sur $A \times W$ telle que le feuilletage $f(\mathscr{V})$ en variétés symplectiques soit le feuilletage trivial $(a \times (W,\sigma_W))_{a \in A}$.

On note $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ les coordonnées dans $A \subset \mathbb{R}^k$. Soient $(X_i,Y_\alpha,Y_{\alpha^*})$ respectivement les champs hamiltoniens sur U de hamiltoniens $(f^*p_i,\ f^*(w^{\alpha^*},\ f^*(-\ w^{\alpha}))$. Le feuilletage $\mathscr{V}$ est défini par f^*p_i = constante. Il en résulte que les champs (X_i) engendrent $\mathscr{F}$, ce qui entraîne que $d(f^*(-\ w^{\alpha}))(X_i) = 0 = d(f^*\ w^{\alpha^*})(X_i)$ et donc que $d(f^*p_i)(Y_\alpha) = 0 = d(f^*p_i)(Y_{\alpha^*})$. Les champs hamiltoniens (Y_α,Y_{α^*}) engendrent donc avec les X_i le feuilletage $\mathscr{V}_U$. Par réduction les champs Y_α, Y_{α^*} se projettent sur les champs hamiltoniens de hamiltoniens respectifs $^{\alpha^*}$ et $-\ ^{\alpha}$ (Th. I.1.2) autrement dit Y_α et Y_{α^*} se projettent respectivement sur les champs $\frac{\partial}{\partial w^\alpha}$ et $\frac{\partial}{\partial w^{\alpha^*}}$. Il résulte de ceci que si l'on note φ_{w_α} (resp. $\varphi_{w_{\alpha^*}}$) le flot de Y_α (resp. Y_{α^*}) et $\Phi_w = \varphi_{w^{2(n-k)}} \circ \cdots \circ \varphi_{w^1}$, Φ_w est un difféomorphisme symplectique tel que $f_2 \circ \Phi_w(x) = w + f_2(x)$ (1).

$f_2^{-1}(0)$ est trivialement une sous-variété symplectique de U. La feuille F étant compacte, on peut en restreignant au besoin U assurer que l'application $\Phi : (x,w) \to \Phi_w(x)$ est définie sur $f_2^{-1}(0) \times W$ à valeurs dans U. De (1) il résulte que Φ_w est un difféomorphisme symplectique de $f_2^{-1}(0)$ sur $f_2^{-1}(w)$. D'autre part Φ_w s'obtenant à partir de flots de champs tangents à $\mathscr{V}$ conserve le feuilletage $\mathscr{V}$ feuille à feuille. Enfin la nullité des parenthèses de Poisson $\{f^*p_i,\ f^*{}_{w^{\alpha}}\}$ qui exprime que $d(f^*p_i)(Y_\alpha) = 0$ assure que $[Y_\alpha, X_i] = 0$ et donc que Φ_w est un automorphisme du feuilletage $\mathscr{F}$. Comme par construction $f_2^{-1}(w)$ est réunion de feuilles de $\mathscr{F}$ Φ_w, transforme $\mathscr{F}\big|_{f_2^{-1}(0)}$ en $\mathscr{F}\big|_{f_2^{-1}(w)}$. Soit

$\mathcal{L} = \mathscr{F}\big|_{f_2^{-1}(0)} = \mathscr{V} \cap f_2^{-1}(0)$. $\mathcal{L}$ est un feuilletage lagrangien de

$f_2^{-1}(0)$. Compte tenu de tout ceci $\phi^{-1}(\mathscr{V})$ est sur $f_2^{-1}(0) \times W$ le feuilletage $\mathcal{L} \times W$ tandis que $\phi^{-1}(w)$ est le feuilletage $(\mathcal{L}\times w)_{w \in W}$.

$f_2^{-1}(0)$ est une variété symplectique munie d'un feuilletage lagrangien $\mathcal{L}$ possédant F comme feuille compacte sans holonomie.

D'après le théorème d'Arnold, $f_2^{-1}(0)$ est isomorphe symplectiquement à T^*T^k, $\mathcal{L}$ étant transformé en le feuilletage $(T^k \times P)_{P \in \mathbb{R}^k}$. Soit ψ_o le difféomorphisme de $(T^*T^k \times W)$ dans U obtenu en composant ϕ avec le difféomorphisme de $T^*T^k \times W$ sur $f^{-1}(0) \times W$ produit du difféomorphisme d'Arnold et de l'identité. $\psi_o^{-1}(\mathscr{V})$ est le feuilletage $(T^k \times P \times w)$ $(P \in \mathbb{R}^k,\ w \in W)$ de $T^*T^k \times W$. Par un changement de variables ne portantque sur f_1 on peut donc assurer que les X_i ont pour image par ψ_o^{-1} les champs de $(T^*T^k \times w)$ définis par $dP_i = -\iota_{X_i} d\lambda$ où λ est la forme de Liouville $P_i dq^i$ de T^*T^k.

$\psi_o^*\sigma = \Sigma$ est une 2-forme symplectique sur $T^*T^k \times W$. D'autre part Σ induit sur $T^*T^k \times w$ la 2-forme $d\lambda$ et sur $T^k \times 0 \times W$ la 2-forme σ_W tout ceci par construction de ψ_o. Il en résulte que

$$\Sigma = d\lambda + \sigma_W + dW^{\bar\alpha} \wedge u_{\bar\alpha}$$

où $u_{\bar\alpha} = A_{\bar\alpha i}\, dq^i + B_{\bar\alpha j}\, dP_j + C_{\bar\alpha \bar\beta}\, d_W{}_{\bar\beta}$

(les indices $\bar\alpha$ ... prenant les valeurs comprises entre 1 et 2(n-k)).

Comme $\iota_{X_i} \Sigma = -dP_i$, $A_{\alpha i} = 0$. L'invariance de σ par les champs hamiltoniens $(X_i, Y_\alpha, Y_{\alpha^*})$ entraîne que $B_{\bar\alpha j}$ et $C_{\bar\alpha\bar\beta}$ ne dépendent que de P. $dw^{\bar\alpha} \wedge u_{\bar\alpha}$ étant fermé $C_{\bar\alpha\bar\beta}(P)$ est constant et donc nul, car $C_{\bar\alpha\bar\beta}(0) = 0$. Dans ces conditions

$$\begin{cases} dw^{\overline{\alpha}} \wedge u_{\overline{\alpha}} = B_{\overline{\alpha}j}\, dw^{\overline{\alpha}} \wedge dP_j \\ dB_{\overline{\alpha}j} \wedge dP_j = 0 \end{cases}$$

Σ peut donc s'écrire

$$\Sigma = dP_i \wedge d(q^i - B_{\overline{\alpha}i}\, w^{\alpha}) + \sigma_W \qquad (2)$$

Il est clair que $\psi_1 : (q^i, p_j, w^{\alpha}) \to (q^i - B_{\overline{\alpha}\, i}\, w^{\alpha}, p_j, w^{\alpha})$ est un difféomorphisme $\psi^{-1} = \psi_\circ \circ \psi_1^{-1}$ est donc un difféomorphisme d'un ouvert de $T^*T^k \times W$ sur U transformant le feuilletage $(T^k \times P \times W)$ en $\mathscr{V}_U$ et le feuilletage $(T^k \times P \times w)$ en $\mathscr{F}_U$. Enfin (2) exprime que $\psi^* \sigma = d\lambda + \sigma_W$. Comme $\psi^{-1}(q,0,0) = q$, $\psi|_F$ est l'identité, ce qui achève la démonstration.

<u>COROLLAIRE.</u> - *Soit $\mathscr{V}$ un feuilletage présymplectique tel que $\mathscr{V}^{\sigma}$ soit un feuilletage. Soit* F *une caractéristique compacte de $\mathscr{V}$, sans holonomie comme feuille de $\mathscr{V} \cap \mathscr{V}^{\sigma} = \mathscr{F}$. Il existe un symplectomorphisme (bijectif) d'un voisinage ouvert, saturé pour $\mathscr{F}$,* U *de* F *sur le produit d'un ouvert de $T^k \times \mathbb{R}^k = T^*\mathbb{R}^k$ (* k *est la dimension de $\mathscr{F}$) muni de sa structure symplectique canonique par le produit $(\widetilde{V}_1, \widetilde{\sigma}_1) \times (\widetilde{V}_2, \widetilde{\sigma}_2)$ des variétés symplectiques $(\widetilde{V}_i, \widetilde{\sigma}_i)$ réduites de (V_i, σ_i) où V_1 (resp. V_2) est la feuille de la restriction à* U *de $\mathscr{V}$ (resp. $\mathscr{V}^{\sigma}$) contenant* F.

Démonstration. - On a vu (Proposition 1.3) que $\mathscr{V} + \mathscr{V}^{\sigma} = \mathscr{W}$ est un feuilletage coïsotrope auquel on applique le théorème précédent. La feuille $V_\circ$ de $\mathscr{W}$ contenant F se projette en $\widetilde{V}_\circ$ variété symplectique munie de deux feuilletages présymplectiques $\mathscr{V}|\mathscr{F}$ et $\mathscr{V}^{\sigma}|\mathscr{F}$ orthogonaux symplectiquement. En réduisant au besoin $\widetilde{V}_\circ$ on peut supposer que c'est le produit des variétés symplectiques indiquées.

Ce corollaire permettra dans la troisième partie d'étudier les mouvements stationnaires.

III. ACTIONS HAMILTONIENNES DE GROUPES

1. FORMALISME HAMILTONIEN.

Ce paragraphe a pour objet de rappeler brièvement le formalisme de la Mécanique Hamiltonienne [1], [2], [21].

Soit G un groupe de Lie de dimension r *toujours supposé connexe*, et (M,σ) une variété symplectique de dimension 2m. On se donne une action C^∞, à gauche, fidèle de G dans M conservant σ. On dit que G est un groupe dynamique [21]. On note $\underline{G}$ l'algèbre de Lie de G et $\mathcal{G}$ son image dans $\mathcal{X}(M)$ définie pour tout x par

$$X \to X_M(x) = \frac{d}{dt} \exp -tX.x \Big|_{t=0}$$

$X \to X_M$ est un homomorphisme injectif d'algèbre de Lie de $\underline{G}$ dans $\mathcal{X}(M)$ formé de champs hamiltoniens locaux car $\mathcal{L}_{X_M} \sigma = 0$.

On dit que l'action de G est hamiltonienne [21], si les champs X_M sont des champs hamiltoniens globaux. Il existe alors une application C^∞ $\mathcal{J}$ de M dans $\underline{G}^*$ dual de $\underline{G}$ appelée moment [21] telle que pour tout $\zeta \in \mathcal{X}(M)$ et tout $X \in \underline{G}$,

$$\sigma(X_M, \zeta) = - < \mathcal{J}^T\zeta, X >.$$

On note Ad^* la représentation coadjointe de G dans $\underline{G}^*$. De façon précise Ad^*_g est la transposée de $Ad_{g^{-1}}$:

$$\forall \eta \in \underline{G}^* \qquad \forall X \in \underline{G} \quad < Ad^*_g \eta, X > = < \eta, Ad_{g^{-1}} X >.$$

Un cocycle symplectique de la représentation coadjointe est un cocycle θ de Ad^*, c'est-à-dire une application θ, C^∞, de G dans G^* telle que $\theta(g_1 g_2) = Ad^*_{g_1} \theta(g_2) + \theta(g_1)$ et que la forme bilinéaire sur $\underline{G}$ définie par $\Theta_\circ(X,Y) = D\,(e)(X)(Y)$ (e identité de G) soit antisymétrique. $\Theta_\circ$ est alors *un 2-cocycle de* $\underline{G}$.

Le moment $\mathcal{J}: M \to \underline{G}^*$ est G-équivariant pour une représentation affine a de G dans $\underline{G}^*$, appelée représentation associée à $\mathcal{J}$, et telle que

$$\forall \eta \in \underline{G}^* \quad a(g)\eta = Ad^*_g \eta + \theta(g)$$

où θ est un cocycle symplectique dont la classe comme cocycle ne dépend que de l'action de G et non du moment $\mathcal{J}$ (défini à une constante près) choisi.

En particulier si G est semi-simple dynamique, G est hamiltonien et son moment est Ad^*_g équivariant.

On note $\mathcal{G}(x)$ l'ensemble des valeurs en x des champs de $\mathcal{G}$, $\rho(x)$ le rang de $\mathcal{J}$ en x. $\mathcal{G}$ n'est pas un feuilletage car la dimension de $\mathcal{G}(x)$ n'est pas constante. Cependant $\mathcal{G}$ est complètement intégrable (i.e. stable par le crochet) et (cf. [1], [21]) si G_x désigne le groupe d'isotropie de x et V_x l'orbite de x, la bijection canonique : $G/G_x \to V_x \hookrightarrow M$ est une immersion injective de G/G_x dans M, telle qu'en tout point $y \in V_x$, $T_y V_x = \mathcal{G}(y)$. On peut donc par analogie considérer les orbites de G comme les "feuilles" de $\mathcal{G}$. Les résultats suivants découlent immédiatement des définitions :

PROPOSITION 1.1. - *Le rang de* $\mathcal{J}$ *est constant le long d'une feuille de* $\mathcal{G}$ *(orbite de* G *dans* M*).*

PROPOSITION 1.2. $\mathcal{G}^\sigma(x)$ *est le noyau de l'application tangente en* x, $\mathcal{J}^T_x$. *En particulier :*

(i) $\mathcal{G}^\sigma$ *est complètement intégrable.*

(ii) $\mathcal{G}$ *est un feuilletage si et seulement si* $\mathcal{G}^\sigma$ *est un feuilletage.*

(iii) $\mathcal{G}$ est un feuilletage si et seulement si $\mathcal{J}$ est de rang constant.

Remarque. - Les parties (ii) et (iii) de la proposition précédente n'auront en général de sens que pour les feuilletages induits sur un ouvert U de M stable par G.

Pour tout $\xi \in \underline{G}^*$ on note G_ξ le groupe, $\underline{G}_\xi$ l'algèbre d'isotropie de ξ pour la représentation a :

PROPOSITION 1.3 :

(i) On a une suite exacte $(\mathcal{J}(x) = \xi)$

$$0 \to \underline{G}_x \to \underline{G}_\xi \to (\mathcal{G} \cap \mathcal{G}^\sigma)(x) \to 0$$

(ii) $(\mathcal{G} + \mathcal{G}^\sigma)(x) = (\mathcal{J}^T)^{-1}(T_\xi \mathcal{O}_\xi)$

où $\mathcal{O}_\xi$ *est l'orbite de* ξ *sous l'action* a *de* G.

COROLLAIRE 1. :

(i) $\dim(\mathcal{G} + \mathcal{G}^\sigma)(x) = \dim \mathcal{O}_{\mathcal{J}(x)} + 2m - \rho(x)$

(ii) $\dim G_x = r - \rho(x)$. *En particulier l'action de* G *sur un ouvert* G-*saturé* U *de* M *est localement libre si et seulement si* $\mathcal{J} : U \to \underline{G}^*$ *est une submersion.*

Il résulte en particulier des propositions précédentes que les orbites de G dans M sont des variétés présymplectiques. Si V_x est une telle orbite sur feuilletage caractéristique est défini par $\mathcal{J}|_{V_x}$. Les caractéristiques sont donc fermées.

D'autre part $\mathcal{A}_c(V_x)$ contient les images des champs de Killing de G restreints à V_x qui sont complets, donc V_x est fortement régulière. Soit $V_x \to \widetilde{V}_x$ la réduction symplectique associée. Le groupe d'isotropie G_x de x sous l'action de G est un sous-groupe de G_ξ. La proposition 1.3. assure alors que l'immersion $G_\xi/G_x \to V_x$ a pour composantes connexes les caractéristiques. Comme $\mathcal{J} : V_x \to \mathcal{O}_\xi$ est constante sur G_ξ/G_x, $\widetilde{V}_x$ est un revêtement symplectique de $\mathcal{O}_\xi$, autrement dit $\widetilde{V}_x \to \mathcal{O}_\xi$ est un revêtement qui est une réduction symplectique. Soit σ_ξ la 2-forme symplectique construite ainsi sur $\mathcal{O}_\xi$. Si X et Y sont des éléments de $\underline{G}^*$, X_ξ et Y_ξ leurs images dans $\mathcal{O}_\xi$, σ_ξ est définie par

$$\sigma_\xi(X_\xi, Y_\xi) = \sigma(X_M, Y_M)$$

ce qui donne $\sigma_\xi(X_\xi, Y_\xi) = \langle \xi, [X,Y] \rangle - \Theta_o(X,Y)$ et montre que σ_ξ ne dépend que du cocycle Θ_o.

On a ainsi prouvé le théorème suivant dû à KIRILLOV [11], KOSTANT [12], et SOURIAU [21].

<u>THEOREME 1.1.</u> - *Soit* G *une action hamiltonienne de groupe dans* (M,σ) *de moment* $\mathcal{J}$, *de représentation* a *associée au cocycle* θ.

(i) Les orbites de a *sont canoniquement munies d'une structure symplectique.*

(ii) Pour tout point x *de* M, *l'orbite* V_x *de l'action de* G *est une variété symplectique fortement régulière et l'espace* $\widetilde{V}_x$ *des caractéristiques de* V_x *est un revêtement symplectique de l'orbite de* $\mathcal{J}(x)$ *munie de sa structure symplectique canonique.*

<u>DEFINITION 1.1.</u> - *On dit que l'action de* G *est* régulière *en* x_o *si* $\mathcal{G}$ *est un feuilletage régulier au voisinage de* x_o.

Si l'action de G est régulière en x_o, il existe un ouvert G-saturé U contenant x_o sur lequel l'action de G est régulière.

<u>PROPOSITION 1.4.</u> - $\mathcal{G}$ *est un feuilletage présymplectique régulier sur un ouvert* G-*stable* U *si*

(i) $\mathcal{J}$ *est de rang constant* ρ *sur* U.

(ii) $(\mathcal{O}_\xi)$ *est un feuilletage d'un ouvert* G-*saturé de* $\underline{G}^*$ *contenant* $\mathcal{J}(U)$.

Les conditions (i) et (ii) sont nécessaires si l'action de G est localement libre sur U.

<u>DEFINITION 1.2.</u> - *L'action de* G *est* très régulière *en* x_o *si* $\mathcal{J}$ *est de rang constant au voisinage de* x_o *et si* $(\mathcal{O}_\xi)$ *est un feuilletage au voisinage de* $\mathcal{O}_{\xi_o}$. *Il existe alors un ouvert* G- *saturé* U *contenant* x_o *sur lequel l'action de* G *est très régulière.*

Si le groupe G est compact, un théorème de MONTGOMERY, SAMELSON et YANG [19] assure que $\underline{G}^*$ contient un ouvert dense sur lequel $(\mathcal{O}_\xi)$ est une fibration. En tout point $x_o \in \mathcal{J}^{-1}(\mathcal{U})$ l'action de G est très régulière si et seulement si $\mathcal{J}$ est de rang constant au voisinage. C'est le cas en particulier si G_{x_o} est discret.

PROPOSITION 1.5. *Si l'action de* G *est très régulière sur l'ouvert* G*-saturé* U, *les feuilles* N *du feuilletage* $\mathcal{G}+\mathcal{G}^\sigma$ *restreint à* U, $(\mathcal{G}+\mathcal{G}^\sigma)|_U$, *sont présymplectiques fortement régulières sur des revêtements symplectiques des orbites de* a. *En particulier* $\mathcal{J} : N_x \to \mathcal{O}_{\mathcal{J}(x)}$ *(où* $x \in N$*) est une réduction symplectique au sens de* [4].

Ceci se prouve de la même manière que pour les orbites. Enfin on notera le résultat suivant utile pour la suite :

PROPOSITION 1.6. - *Si l'action de* G *est régulière sur l'ouvert* G*-saturé* U, *le feuilletage* $\mathcal{G}|_U$ *est isotrope (resp. coïsotrope) si l'une des orbites de* G *dans* U *est isotrope (coïsotrope). On dira que l'action de* G *sur* U *est isotrope (resp. coïstrope) régulière.*

2. STRUCTURE SYMPLECTIQUE SUR T^*G CANONIQUEMENT ASSOCIEE A UN COCYCLE SYMPLECTIQUE.

θ étant un cocycle symplectique, Θ_o défini par $\Theta_o(X,Y) = \langle D\theta(e)(X), Y \rangle$ est un cocycle de $\underline{G}$. Soit Θ la 2-forme invariante à gauche sur G associée à Θ_o . Θ est une 2-forme fermée.

Grâce aux translations à gauche on identifie TG à $G\times\underline{G}$ et T^*G à $G\times\underline{G}^*$. On note π la projection canonique de T^*G sur G et $\mathcal{J}_o$ l'application naturelle de T^*G sur $\underline{G}^*$. Soit A l'action de G dans T^*G définie pour tout $\gamma \in G$ par

$$A(\gamma)(g,\alpha) = (g\gamma^{-1}, a(\gamma)\alpha).$$

THEOREME 2.1. - *La 2-forme* $\sigma_G = d\lambda + \pi^* \Theta$ *où* λ *est la 1-forme de Liouville de* T^*G *munit* T^*G *d'une structure symplectique pour laquelle* G, *agissant par* A, *est un groupe d'action hamiltonienne de moment* $\mathcal{J}_\circ$ *équivariant pour les actions de* G, A *et* a.

Démonstration. - A tout élément X de $\underline{G}$ on associe le champ X_G de $T^*G = G \times \underline{G}^*$ défini par

$$X_G(g,\alpha) = \frac{d}{dt} A(\exp - tX)(g,\alpha)\Big|_{t=o}$$

$$X_G(g,\alpha) = (g,\alpha\ ;\ X,\ \alpha_\circ Ad_X - \iota_X\ \Theta_\circ) \in G \times \underline{G}^* \times \underline{G} \times \underline{G}^*$$

On note φ_t le flot de X_G.

LEMME 1. $\mathcal{L}_{X_G} = - \iota_{X_G} \pi^* \Theta$.

Démonstration du lemme. - Soit $Z = (g,\alpha,\ \zeta_1,\ \zeta_2)$ un vecteur tangent à T^*G.

$$\varphi_t^T(Z) = (g \exp tX,\ a(\exp - tX)\alpha,\ Ad_{\exp-tX}\ \zeta_1,\ Ad^*_{\exp-tX}\ \zeta_2)$$

$$\lambda\ \varphi_t^T(Z) = < a(\exp-tX)\alpha,\ Ad_{\exp-tX}\ \zeta_1 >$$

$$\lambda\ \varphi_t^T(Z) = \alpha(\zeta_1) - < \theta(\exp\ \ tX),\ \zeta_1 >$$

soit $$\varphi_t^*\ \lambda = \lambda - < \theta(\exp\ \ tX),\ g^{-1}\ \pi^T >$$

ce qui, en dérivant pour t=0, donne le lemme.

Posant alors $\sigma_G = d\lambda + \pi^* \Theta$, il résulte du lemme que $\iota_{X_G} \sigma_G = -d\ \iota_{X_G} \lambda$.

Or $\iota_{X_G} \lambda(g,\alpha) = <\alpha,X> = <\mathcal{J}_\circ(g,\alpha),\ X>$, soit $\iota_{X_G}\sigma_G = -d<\mathcal{J}_\circ,X>$.

Il reste à prouver que σ_G est non dégénérée puisque $d\sigma_G = 0$. Si $(g_\circ,\alpha_\circ)$ est un point de T^*G, $Y_\circ$ un vecteur dans le noyau de σ_G en $(g_\circ,\alpha_\circ)$, $\mathcal{J}_\circ^T Y_\circ = 0$. Autrement dit $Y_\circ = (g_\circ,\alpha_\circ,\ Y,\ 0)$. Soit $Z = (g,\alpha,0,\ \zeta_2)$ un champ sur T^*G où ζ_2 est constant et $\widetilde{Y}_\circ$ le champ $(g,\alpha,Y,0)$ prolongeant $Y_\circ$

$$\sigma_G(\widetilde{Y}_\circ,Z) = - \mathcal{L}_Z(\lambda(\widetilde{Y}_\circ)) \qquad \text{car } [\widetilde{Y}_\circ,Z] = 0.$$

Soit $$\sigma_G(Y_\circ,Z) = - < \zeta_2,\ Y >.$$

$\sigma_G(Y_\circ,Z)$ devant être nul pour tout Z et donc tout ζ_2, Y = 0, ce qui achève la démonstration du théorème.

3. ABELIANNITE DES ALGEBRES D'ISOTROPIE.

THEOREME 3.1. - *Soit* G *un groupe d'action hamiltonienne de* (M,σ), *de moment* $\mathcal{J}$, *de représentation associée* a. *Si l'action de* G *est régulière en* $x_\circ$, *l'algèbre de Lie d'isotropie de* $x_\circ$ *contient l'algèbre dérivée de l'algèbre de Lie d'isotropie de* G *en* $\xi_\circ = \mathcal{J}(x_\circ)$

$$[\underline{G_{\xi_\circ}}, \underline{G_{\xi_\circ}}] \subset \underline{G_{x_\circ}}$$

Démonstration. - L'action de G étant régulière en $x_\circ$, il existe un ouvert G-saturé U sur lequel $\mathcal{G}$ est un feuilletage régulier. $\mathcal{G}^\sigma$ est également un feuilletage sur U d'après la proposition 1.2. qui implique également que $\mathcal{J}$ est de rang constant U. Le feuilletage restreint à U, $\mathcal{G}^\sigma_U$ est donc la contre-image des points de $\underline{G}^*$ par l'application de rang constant $\mathcal{J}|_U$. Il résulte du théorème A2 de l'appendice que $\mathcal{G}^\sigma_U$ est un feuilletage sans holonomie ce qui implique que les caractéristiques de $\mathcal{G}_U$ sont des variétés riemanniennes plates sans holonomie (Théorème II. 1.2). $G^\circ_{\xi_\circ}$ agit dans $F_{x_\circ}$ caractéristique contenant $x_\circ$. Si $X \in \underline{G_{\xi_\circ}}$ le champ X_M est un champ hamiltonien admissible tangent à $F_{x_\circ}$, et complet puisque c'est un champ de Killing. On note X_F sa restriction à $F_{x_\circ}$. L'application $X \to X_F$ est un morphisme d'algèbre de Lie de $\underline{G_{\xi_\circ}}$ dans l'algèbre de Lie des champs parallèles de la variété riemannienne plate sans holonomie $F_{x_\circ}$, d'après la proposition II. 2.1, corollaire 2. La proposition 1.3 assure, pour des raisons de dimensions que ce morphisme est surjectif. On a ainsi une suite exacte d'algèbres de Lie

$$0 \to \underline{G_{x_\circ}} \to \underline{G_{\xi_\circ}} \to \mathcal{C}(F_{x_\circ}) \to 0.$$

Comme $\mathcal{C}(F_{x_\circ})$ est abélienne le théorème est prouvé. La suite étant exacte, $\mathcal{C}(F_{x_\circ})$ est transitive sur F qui est donc une variété riemannienne complète (Corollaire 3, proposition II, 2.1) et donc, PROPOSITION 3.1. - *Sous les hypothèses précédentes,* F_{x_o} *est isomorphe au groupe abélien* $\mathbb{R}^{k'} \times T^{k''}$ *et on a une suite exacte d'algèbres de Lie*

$$0 \to \underline{G}_{x_o} \to \underline{G}_{\xi_o} \to \mathscr{C}(F_{x_o}) \to 0.$$

La caractéristique de x_o est en fait le groupe quotient d'un sous-groupe ouvert de G_{ξ_o} par $G_{x_o} \cap G_{\xi_o}$. Si G est compact, un argument de connexité montre que $F_{x_o} = G^o_{\xi_o}/G^o_{\xi_o} \cap G_{x_o}$, $\mathscr{C}(F_{x_o})$ s'identifiant à l'algèbre de Lie de F_{x_o}.

Si l'action de G est localement libre en x_o, $\underline{G}_{\xi_o}$ est abélienne ; ceci va conduire au :

THEOREME 3.2. - *Si* a *est la représentation de* G *dans* $\underline{G}^*$ *associée au cocycle symplectique* $\mathcal{O}$, *si* $(\mathcal{O}_\xi)$ *est un feuilletage au voisinage de* ξ_o, G_{ξ_o} *est abélienne.*

Démonstration. - La construction effectuée au paragraphe 2 permet de réaliser G comme groupe d'action hamiltonienne libre de (T^*G, σ_G). Si $(\mathcal{O}_\xi)$ est un feuilletage au voisinage de ξ_o, l'action de G est très régulière en $\mathscr{J}^{-1}(\xi_o)$, car G agit librement, et donc $[\underline{G}_{\xi_o}, \underline{G}_{\xi_o}] = 0.$ C.Q.F.D.

On déduit immédiatement du résultat précédent le :

COROLLAIRE 1. - *Si l'action de* G *est très régulière en* $x_o \in M$, $\underline{G}_x$ *est abélienne en tout point* x *d'un voisinage ouvert* G*-saturé de* x_o.

COROLLAIRE 2. - *Si* $(\mathcal{O}_\xi)$ *est un feuilletage au voisinage de* $\mathcal{O}_{\xi_o}$ *et si :*

(i) il existe un sous-espace transverse au feuilletage en ξ_o, W_o, *tel que pour tout* $\xi \in W$, $\underline{G}_\xi = \underline{G}_{\xi_o}$.

(ii) $\underline{G}_{\xi_o}$ *est un idéal de* $\underline{G}$.

Alors $\underline{G}_{\xi_o}$ *est contenu dans le centre de* $\underline{G}$.

Démonstration. - Les groupes d'isotropie G_η aux points η de l'orbite $\mathcal{O}_\xi$ sont conjugués du groupe G_ξ. Les hypothèses (i) et (ii) assurent donc qu'il existe un ouvert G-saturé U_o contenant $\mathcal{O}_{\xi_o}$ tel qu'en tout point $\eta \in U_o$, $\underline{G}_{\eta} = \underline{G}_{\xi_o}$. Soit $U = \mathcal{J}_o^{-1}(U_o)$ ouvert de T^*G.

L'action A est très régulière sur U si U_o est choisi de façon que de plus $(\mathcal{O}_\xi)$ soit un feuilletage de U_o. Si $X \in \underline{G}_{\xi_o}$, $X_G \in \mathcal{G}_G \cap \mathcal{G}_G^\sigma$ et donc est tangent à $\mathcal{G}_G^\sigma$. Si $Y \in \underline{G}$, $Y_G \in \mathcal{G}_G$. X_G et Y_G sont donc des champs hamiltoniens tangents respectivement à $\mathcal{G}_G^\sigma$ et $\mathcal{G}_G$. Le corollaire 1 de la proposition II. 2.2 assure que $[X_G,Y_G] = 0$ soit comme l'action A de G est libre que $[X,Y] = 0$. C.Q.F.D.

Le théorème 3.2. et le corollaire 2 étendent des résultats de M. DUFLO et M. VERGNE [7] relatifs à la représentation coadjointe (cas $\theta = 0$).

Si G est un groupe compact, un théorème de MONTGOMERY, SAMELSON et YANG [19] assure que la condition (i) du corollaire 2 est toujours satisfaite. D'autre part, les mêmes auteurs prouvent qu'il existe un ouvert partout dense sur lequel $(\mathcal{O}_\xi)$ est une fibration. Le théorème 3.2. et le corollaire 2 entraînent le

<u>THEOREME 3.3.</u> - *Soit* θ *un cocycle symplectique d'un groupe compact* G *et* a *la représentation de* G *dans* $\underline{G}^*$ *associée. Il existe un ouvert dense* $\mathcal{U}$ *de* $\underline{G}^*$ *tel que pour tout point* $\xi \in \mathcal{U}$, $\underline{G}_\xi$ *soit abélienne. Si de plus* $\underline{G}_\xi$ *est un idéal de* $\underline{G}$, $\underline{G}_\xi$ *est contenue dans le centre de* $\underline{G}$.

Le théorème est faux en dehors de $\mathcal{U}$ comme on peut le voir en considérant la représentation coadjointe de SO(3) au point 0 de son algèbre de Lie où $G_0 = SO(3)$.

<u>PROPOSITION 3.2.</u> - *Si* G *est un groupe d'action hamiltonienne régulière de* (M,σ) *et si* G *a une orbite* V_{x_o} *isotrope*, G/G_{x_o} *est un groupe abélien* $\mathbb{R}^{k'} \times T^{k''}$. *Si* G *est un groupe d'action très régulière,* G *est un groupe abélien* $\mathbb{R}^{\ell'} \times T^{\ell''}$. *Si* G *est un groupe compact d'action hamiltonienne régulière possédant une orbite isotrope et si* $\mathcal{J}(M) \cap \mathcal{U} \neq \phi$, G *est isomorphe à un tore* T^k.

Démonstration. - Toutes les orbites de G dans M sont isotropes (Proposition 1.6). Donc en tout point $\xi \in \mathcal{J}(M)$, $G = G_\xi$. Comme G est connexe la caractéristique F_x en x tel que $\mathcal{J}(x) = \xi$ s'identifie à G_ξ/G_x qui est un groupe abélien d'après la proposition 3.1. Si G est très régulier le résultat découle du théorème 3.2. La dernière partie de la proposition est une application directe du théorème 3.3.

Remarques :

1. Les cas de l'action régulière et de l'action très régulière sont strictement distincts : si G est un groupe d'action hamiltonienne très régulière, si Γ est un groupe quelconque, $\Gamma\times G$ agissant sur M par $(\gamma,g).x = g.x$ est un groupe d'action régulière qui ne sera pas très réguliere si $\underline{\Gamma}$ n'est pas abélienne, seul cas où les orbites de la coadjointe de Γ définissent un feuilletage au voisinage de 0.

2. La proposition 3.2. régle le cas des actions isotropes régulières. A la différence de ce cas, tout groupe peut, pour tout cocycle symplectique, être réalisé comme groupe d'actions coïsotropes très régulières (cf. infra § 4).

4. ACTION COISOTROPE CANONIQUEMENT ASSOCIEE A UN COCYCLE SYMPLECTIQUE θ.

Soit $\xi_o \in \underline{G}^*$ et $\underline{G} = \underline{G_{\xi_o}} \oplus H$ une décomposition de G en somme directe. H s'identifie à l'espace tangent en ξ_o à l'orbite $\mathcal{O}_{\xi_o}$ de ξ_o sous l'action a associée à θ. Donc $(X,Y) \to \xi_o[X,Y] - \Theta_o(X,Y)$ définit sur H une 2-forme symplectique. Soit $\underline{G}^* = \underline{G_{\xi_o}^\perp} \oplus H^\perp$ la décomposition de $\underline{G}^*$ associée à la décomposition de $\underline{G}$ donnée. $H^\perp$ est isomorphe au dual de $\underline{G_{\xi_o}}$. De plus $H^\perp$ et $\tilde{a}(H)\xi_o = T_{\xi_o}\mathcal{O}_{\xi_o}$ définissent une décomposition en somme directe de $\underline{G}^*$. En effet $\tilde{a}(H)\xi_o \cap H^\perp$ estl'ensemble des $X \in H$ tels que pour tout $Y \in H$, $< \tilde{a}(X)\xi_o, Y > = 0$. Or

$$< \tilde{a}(X)\xi_o, Y > = -(\xi_o[X,Y] - \Theta_o(X,Y)) = -\sigma_{\xi_o}(X_{\xi_o}, Y_{\xi_o})$$

et ne peut être nul pour tout $Y \in H$ que si $X=0$.

Soit ψ le difféomorphisme de T^*G défini par $\psi(g,\alpha) = (g^{-1}, a(g)\alpha)$. $\psi^{-1}(G \times (\xi_o + H^\perp))$ est une sous-variété W de T^*G réunion des orbites sous l'action A de G dans T^*G des points

$(e,\xi_\circ + H^\perp)$ (e est l'identité de G). La dimension de $\widetilde{W}$ est égale à 2 dim $G_{\underline{\xi}}$ + dim $\mathcal{O}_\xi$ et est donc paire.

PROPOSITION 4.1. - *Il existe un voisinage* $W_\circ$ *de* 0 *dans* $H^\perp$ *tel que la réunion* W *des orbites des points* $\{(e,\eta)|\eta \in \xi_\circ + W_\circ\}$ *sous l'action* A *soit une sous-variété symplectique* A*-stable de* (T^*G,σ_G) *sur laquelle* A *induit une action de* G *libre, coïsotrope et très régulière si* $(\mathcal{O}_\xi)$ *est un feuilletage au voisinage de* $(\mathcal{O}_{\xi_\circ})$.

Démonstration. - L'existence de $W_\circ$ résultera, par continuité de ce que $(TW \cap TW^{\sigma_G})(e,\xi_\circ) = 0$.

Soit $Z_1 = (e,\xi_\circ,X_1,Y_1)(X_1 \in \underline{G},\ Y_1 \in \underline{G}^*)$ un élément de $TW^\sigma_{(e,\xi_\circ)}$. Si $X \in \underline{G}$, $X_G \in TW$ et donc $\sigma(Z_1,X_G) = 0$,

$$\text{soit } \langle \mathcal{J}_\circ^T Z_1, X \rangle = 0 \text{ pour tout } X \in \underline{G},$$

ce qui entraîne que $Y_1 = 0$.

D'autre part, $Z_1 \in \widetilde{TW}^\sigma_{(e,\xi_\circ)}$ entraîne que

$$\sigma_G(Z_1,\ (e,\xi_\circ,0,Y)) \equiv 0 \quad \text{pour tout } Y \in H^\perp,$$

ce qui s'écrit $d\lambda(Z_1,(e,\xi_\circ,0,Y)) = 0$.

De $\lambda((e,\xi_\circ,0,Y)) = 0$ et de $[Z_1,(e,\xi_\circ,0,Y)] = 0$ puisque $Y_1 = 0$, il résulte que, pour tout $Y \in H^\perp$:

$$d\lambda(Z_1,(e,\xi_\circ,0,Y)) = -\langle Y,X_1 \rangle = 0$$

ce qui entraîne que $X_1 \in H$.

Enfin $Z_1 \in \widetilde{TW} \cap \widetilde{TW}^\sigma$ signifie qu'il existe $Y_1' \in H^\perp$ tel que $Y_1' = \widetilde{a}(X_1)\xi_\circ$ où $X_1 \in H$. Comme $a(H)\xi_\circ \oplus H^\perp = \underline{G}^*$, $Y_1' = 0 = \widetilde{a}(X_1)\xi_\circ$, ce qui assure que $X_1 = 0$ et prouve que $Z_1 = 0$.

G agit librement dans W (i.e. sans isotropie). $\mathcal{J}_\circ$ étant une submersion, l'action de G sera très régulière si $(\mathcal{O}_\xi)$ est un feuilletage au voisinage de $\xi_\circ$ à condition éventuellement de diminuer le voisinage $W_\circ$ de 0 dans $H^\perp$. L'action sera coïsotrope si l'orbite $\mathcal{O}(e,\xi_\circ)$ de $(e,\xi_\circ)$ sous l'action A de G est coïsotrope. Soit σ_W la 2-forme symplectique induite sur W, $\mathcal{J}_W$ la restriction de $\mathcal{J}_\circ$ à W

$$T^{\sigma_W}\mathcal{O}(e,\xi_o) = \mathcal{J}_W^{-1}(0) = \{(e,\xi_o,X,0)\,|\,X \in \underline{G}\}.$$

Or $T^{\sigma_W}\mathcal{O}(e,\xi_o) \subset TW$, donc il existe $Y \in H^{\perp}$ tel que $\tilde{a}(X)\xi_o + Y = 0$ ce qui entraîne que $X \in \underline{G_{\xi_o}}$ et donc que $T^{\sigma_W}\mathcal{O}(e,\xi_o) \subset T\,\mathcal{O}(e,\xi_o)$,

C.Q.F.D.

G étant un groupe de Lie quelconque, on suppose que $(\mathcal{O}_\xi)$ est un feuilletage au voisinage de ξ_o et que $G^\circ_{\xi_o}$ est compact. $G^\circ_{\xi_o}$ est alors isomorphe à T^k. D'autre part $G^\circ_{\xi_o}$ s'identifie à la feuille F issue de (e,ξ_o) du feuilletage $\mathcal{G}_W^{\sigma_W}$ orthogonal symplectique du feuilletage $\mathcal{G}_W$ des champs de Killing de W. Mais $\mathcal{J}_W$ étant une submersion $\mathcal{G}_W^{\sigma_W}$ est sans holonomie. Comme $G^\circ_{\xi_o}$ est compact le théorème de stabilité locale de REEB [20], [10] permet d'affirmer qu'il existe un voisinage ouvert G-saturé de F réunion de feuilles compactes isomorphes à $G^\circ_{\xi_o}$. Autrement dit

<u>COROLLAIRE.</u> - *Si* $(\mathcal{O}_\xi)$ *est un feuilletage au voisinage de* ξ_o *et si* $G^\circ_{\xi_o}$ *(composante connexe de l'identité de* G_{ξ_o} *) est compacte, il existe un voisinage ouvert* G*-saturé de* $\mathcal{O}_{\xi_o}$ *tel qu'en tout point de ce voisinage* G°_ξ *soit isomorphe à* T^k.

5. <u>REMARQUES SUR LE PROBLEME D'EQUIVALENCE.</u>

Résoudre le problème d'équivalence local (resp. global) c'est déterminer si il existe des structures modèles auxquelles la structure considérée est localement (globalement) isomorphe. Pour les actions hamiltoniennes les résultats du paragraphe II.3 et la construction du paragraphe ci-dessus - donnant un modèle d'action coïsotrope très régulière - permettent de préciser ce qui suit.

<u>THEOREME 5.1.</u> - *Si* G *est un groupe d'action hamiltonienne très régulière et coïsotrope en* x_o *et si la caractéristique* F_{x_o} *passant par* x_o *est compacte elle est difféomorphe à un tore* T^k *et il existe un voisinage ouvert* U *de* F_{x_o} $\mathcal{F}$*-saturé (où* $\mathcal{F} = \mathcal{G}^\sigma$ *est le feuilletage caractéristique) symplectiquement difféomorphe à un voisinage ouvert de* $T^*T^k \times \mathcal{O}_{\xi_o}$ *de la forme* $T^k \times U_o \times U_1$ *où* U_o *est un voisinage de* 0 *dans* $\mathbb{R}^k$, U_1 *un voisinage de* ξ_o *dans* $\mathcal{O}_{\xi_o}$,

$T^*T^k \times \mathcal{O}_{\xi_o}$ *étant muni de la structure symplectique produit. Le difféomorphisme transforme* $\mathcal{G}_U$ *(resp.* $\mathcal{G}^\sigma_U$*) en le feuilletage* $(T^k \times p \times U_1)_{p \in U_o}$ (resp. $(T^k \times p \times u_1)_{(p,u_1) \in U_o \times U_1}$).

Démonstration. F_{x_o} étant compacte, tout revient à démontrer que c'est une feuille de $\mathcal{G}^\sigma$ sans holonomie. Comme F_{x_o} est une composante connexe de $\mathcal{J}^{-1}(\xi_o)$ (où $\xi_o = \mathcal{J}(x_o)$) et que $\mathcal{J}$ est de rang constant ce point découle du théorème 2 de l'appendice appliqué au feuilletage $\mathcal{G}^\sigma{}_U$ et au feuilletage trivial de $\underline{G}^*$ par les points. Le théorème II 3.1. permet alors de conclure.

F_{x_o} est compacte en particulier si $G^\circ_{\xi_o}$ composante connexe de l'identité de G_{ξ_o} est compacte. Si de plus le groupe d'isotropie G_{x_o} de G en x_o est réduit à l'identité, $G^\circ_{\xi_o}$ est isomorphe à F_{x_o}. U est alors difféomorphe à un ouvert de $T^*G^\circ_{\xi_o} \times \mathcal{O}_{\xi_o}$. Mais l'action A de G dans W vérifie les mêmes hypothèses, ce qui permet d'affirmer :

<u>COROLLAIRE 1.</u> - *Si de plus* $G^\circ_{\xi_o}$ *est compacte et* G_{x_o} *réduit à l'identité, le voisinage* U $\mathcal{F}$*-saturé est difféomorphe à un ouvert* W_o *de* W, *le difféomorphisme* ψ *échangeant les orbites de* G *respectivement dans* U *et* W_o.

En général le difféomorphisme construit n'est pas équivariant. Cependant :

<u>THEOREME 5.2.</u> - *Soit* G *un groupe compact d'action hamiltonienne de* (M,σ) *de moment* $\mathcal{J}$, $\mathcal{U}$ *l'ouvert dense de* $\underline{G}^*$ *fibré par les orbites de* G *pour l'action* a *associée à* $\mathcal{J}$. *Si* $x_o \in \mathcal{J}^{-1}(\mathcal{U})$ *et si le groupe d'isotropie de* x_o *est réduit à l'identité, il existe un ouvert* U, G*-saturé, contenant* x_o *et un symplecto-isomorphisme* ψ G*-équivariant de* U *dans* W *induisant sur l'orbite* V_{x_o} *de* x_o *par* G *l'application* $\widetilde{\mathcal{J}}$ *définie par* $\widetilde{\mathcal{J}}(g.x_o) = (g^{-1}, a(g)\,\mathcal{J}(x_o))$.

Sous des hypothèses voisines, ce théorème a été prouvé par MARLE [16 cd].

Démonstration. G_{x_o} étant réduit à l'identité $\mathcal{J}$ est une submersion sur un ouvert G-saturé U_o contenant x_o. $(\mathcal{O}_\xi)$ étant une fibration, V_{x_o} orbite de x_o par G est sans holonomie. G étant compact, on peut construire une métrique h sur M, G-invariante (et même échangeable avec σ au sens de LICHNEROWICZ [15 a]). Le théorème de stabilité locale de REEB ([20], [10]) permet alors de construire un voisinage tubulaire U de V_{x_o} contenu dans U_o, tel que la fibration triviale $U \to V_{x_o}$ soit G-équivariante ; $\mathcal{O}(e,\xi_o)$ étant une sous-variété coïsotrope de W qui a même dimension que M, la version équivariante du Théorème de WEINSTEIN [23 ab] étendu par MARLE [16 e] permet alors d'affirmer que l'application

$$\tilde{\mathcal{J}} : V_{x_o} \to \mathcal{O}(e,\xi_o),\ \tilde{\mathcal{J}}(gx_o) = (g^{-1},a(g)\xi_o) = A(g)(e,\xi_o)$$

s'étend en une simplectoïsomorphisme équivariant ψ. C.Q.F.D.

Remarque. - Pour obtenir un théorème englobant le théorème 5.2 et le théorème des variables actions-angles (théorème II, 3.1) il faudrait s'intéresser aux orbites compactes d'un groupe simplement connexe G d'action hamiltonienne coïsotrope qui sont de dimension maximale la dimension de G. Si l'action de G est très régulière en x_o, l'orbite V_{x_o} étant compacte, $\mathcal{O}_{\xi_o}$ $(\xi_o = \mathcal{J}(x_o))$ est également compacte. Si $\mathcal{O}_{\xi_o}$ est une feuille sans holonomie du feuilletage $(\mathcal{O}_\xi)$ le théorème 2 de l'appendice appliqué aux feuilletages $\mathcal{G}$ et $(\mathcal{O}_\xi)$ permet d'affirmer que V_{x_o} est sans holonomie. Les feuilles voisines sont donc compactes difféomorphes à V_{x_o}. Pour des raisons de dimension, G est également le revêtement universel des feuilles voisines. Il en résulte que G_x, groupe d'isotropie de x, est isomorphe au groupe d'isotropie G_{x_o} de x_o sur un voisinage ouvert G-saturé de x_o. Si G_{x_o} est dans le centre de G, $G/G_{x_o} = \Gamma$ est un groupe compact et il faudrait montrer que l'on peut par un symplectoisomorphisme, déformer l'action de G en l'action de Γ dans un sous-espace W de $T^*\Gamma$.

Si l'action hamiltonienne de G n'est plus coïsotrope, on pourra appliquer le corollaire du théorème II, 3.1 au voisinage d'une caractéristique compacte sans holonomie.

DEFINITION 5.1. - *Une action hamiltonienne d'un groupe* G *dans une variété* (M,σ) *est une action hamiltonienne* fortement régulière en x_o *si elle est très régulière en* x_o *et si la caractéristique* F *de* x_o *est compacte sans holonomie comme feuille de* $\mathcal{G} \cap \mathcal{G}^{\sigma} = \mathcal{F}$.

Il existe alors un ouvert G-saturé U contenant x_o sur lequel l'action de G est fortement régulière. F caractéristique de x_o étant isomorphe à T^k, le corollaire du théorème II, 3.1 entraîne le

THEOREME 5.3. - *Si* G *est une action hamiltonienne fortement régulière en* x_o, *il existe un ouvert* $\mathcal{F}$-*saturé* U *contenant* x_o *et un symplectoisomorphisme* ψ *de* U *sur un ouvert* $T^k \times U_o \times U_1 \times U_2$ *de* $T^*T^k \times U_1 \times U_2$ *où* U_o *est un voisinage de* 0 *dans* $\mathbb{R}^k$, U_1 *un voisinage de* $\xi_o = \mathcal{J}(x_o)$ *dans* $\mathcal{O}_{\xi_o}$, U_2 *la réduction symplectique de la feuille de* $\mathcal{G}_U^{\sigma}$ *contenant* F, $T^*T^k \times U_1 \times U_2$ *étant munie de la structure symplectique produit. De plus* $\psi(\mathcal{G}_U)$ *(resp.* $\psi(\mathcal{G}_U^{\sigma})$, *resp.* $\psi(\mathcal{F}_U)$*) est le feuilletage* $(T^k \times p \times U_1 \times u_2)_{(p,u_2) \in U_o \times U_2}$

(resp. $(T^k \times p \times u_1 \times U_2)_{(p,u_1) \in U_o \times U_1}$,

(resp. $(T^k \times p \times u_1 \times u_2)_{(p,u_1,u_2) \in U_o \times U_1 \times U_2}$).

Les groupes compacts fournissent un exemple d'action fortement régulière.

PROPOSITION 5.1. - *Si* G *est un groupe compact d'action hamiltonienne de* (M,σ) *régulière en* x_o *et sans isotropie en* x_o, *l'action de* G *est fortement régulière en* x_o.

Démonstration. - Un théorème de MONTGOMERY, SAMELSON et YANG [19] permet d'affirmer, l'action de G étant régulière sans isotropie en x_o, qu'il existe un sous-espace K transverse aux orbites de G en x_o rencontrant chaque orbite voisine en un seul point, autrement dit que V_{x_o} est une feuille sans holonomie de $\mathcal{G}$. Soit $\varphi : U \to K$ l'application distinguée associée. L'application $(\varphi, \mathcal{J}) : U \to K \times \underline{G}^*$ est une application distinguée de $\mathcal{F}$, ce qui achève la démonstration.

6. APPLICATION A L'ETUDE DES MOUVEMENTS STATIONNAIRES.

Soit H un hamiltonien sur (M,σ) possédant un groupe de symétries hamiltoniennes G. Ceci signifie que G est un groupe d'action hamiltonienne de (M,σ), de moment $\mathscr{J}$, et que G laisse H invariant. Si Z_H est le champ hamiltonien de H ($\iota_{Z_H}\sigma = -dH$), dire que G laisse H invariant signifie que $\sigma(Z_H, X_G) \equiv 0$ soit $\mathscr{J}^T Z_H = 0$. Les orbites de Z_H sont donc tracées sur les sous-espaces $\mathscr{J}$ = constante, ce qui constitue le théorème de NOËTHER (cf. [21]).

DEFINITION 6.1. - Un mouvement stationnaire *est une orbite de* Z_H *qui est également une orbite de* G.

Autrement dit il existe alors $X \in G$ tel que $\exp - tX.x$ soit orbite de Z_H. Cette définition est légitime, G laissant la mécanique du problème invariante. Dans la littérature [1], [2], [17] les mouvements stationnaires sont souvent appelés équilibres relatifs.

On fait dorénavant l'hypothèse que $\mathscr{J}^{-1}(\xi_\circ)$ est une sous-variété présymplectique régulière.

DEFINITION 6.2. - *On appelle* espace des phases réduit, P, *en* $\xi_\circ$, *la réduction symplectique de* $\mathscr{J}^{-1}(\xi_\circ)$.

Le théorème I. 1.2 et son corollaire entraînent que Z_H se projette sur P en un champ $\widetilde{Z}$ de hamiltonien $\widetilde{H}$ tel que $\pi^* H = \widetilde{H}$ où $\pi : \mathscr{J}^{-1}(\xi_\circ) \to P$.

Si H a un mouvement stationnaire γ, $\gamma(t) = \exp -tX.x$ est une orbite de Z_H.
Donc $\mathscr{J}(\gamma(t)) = \xi_\circ$, ce qui exige que $X \in G_{\xi_\circ}$ et assure alors que Z_H est tangent à $\mathscr{G} \cap \mathscr{G}^\sigma$. γ est donc contenu dans une caractéristique de $\mathscr{J}^{-1}(\xi_\circ)$ et se projette en un point $y_\circ$ tel que $\widetilde{Z}(y_\circ) = 0$.

PROPOSITION 6.1. [1], [2], [17]. - *Les mouvements stationnaires de* H *sur* $\mathscr{J}^{-1}(\xi_\circ)$ *se projettent sur les équilibres de* $\widetilde{H}$ *dans l'espace des phases réduit* P.

Réciproquement :

THEOREME 6.1. - *Si* $y_o \in P$ *est un équilibre du hamiltonien réduit* $\tilde{H}$, H *possède un mouvement stationnaire sur* $\mathcal{J}^{-1}(\xi_o)$ *dans les deux cas suivants :*
soit (i) ξ_o *est une valeur régulière de* $\mathcal{J}$.
Soit (ii) l'action de G *est très régulière aux points* $\pi^{-1}(y_o)$.

De plus dans le deuxième cas les équilibres relatifs sont portés par des cylindres $\mathbb{R}^{k'} \times T^{k''}$. *En particulier si* $G^{\circ}_{\xi_o}$ *est compact, ce sont des mouvements presque périodiques.*

La partie (i) du théorème est classique ([1], [2], [17]).

Démonstration de (ii). $\tilde{Z}(y_o) = 0$ donc Z_H est tangent à $\pi^{-1}y_o$ qui est une caractéristique F de l'action de G qui est régulière le long de F. Z_H étant tangent à $\mathcal{G}^{\sigma}$, est donc un hamiltonien admissible du feuilletage régulière $\mathcal{F} = \mathcal{G} \cap \mathcal{G}^{\sigma}$, tangent à la feuille F. Le corollaire 2 de la proposition II. 2.1 assure que $Z_H|_F \in \mathcal{C}(F)$ algèbre de Lie des champs constants de F qui est un cylindre $\mathbb{R}^{k'} \times T^{k''}$. La proposition 3.1. assure que l'on a une suite exacte d'algèbres de Lie

$$0 \to \underline{G_{x_o}} \to \underline{G_{\xi_o}} \to \mathcal{C}(F) \to 0.$$

Il existe donc $x \in \underline{G_{\xi_o}}$ tel que $Z_H|_F = X_M|_F$, ce qui achève la démonstration.

On suppose dorénavant que le long de $F = \pi^{-1}(y_o)$ l'action de G est fortement régulière. On peut alors trouver un modèle local en utilisant le théorème 5.3. Z_H est transformé en un champ hamiltonien de $T^*T^k \times U_1 \times U_2$ tangent à $\psi(\mathcal{G}^{\sigma}_U)$. Son hamiltonien $\mathcal{H}$ est donc une fonction de (p,u_2) seulement. Dire que Z_H a un mouvement stationnaire porté par $\pi^{-1}y_o$ signifie que $\frac{\partial}{\partial u_2}(0,u^{\circ}_2) = 0$ où u°_2 est l'image par ψ de y_o. Le théorème 5.3 joue donc pour l'étude des mouvements stationnaires dans le cas de la régularité forte le même rôle que le théorème classique des variables actions-angles. En particulier, l'étude de la stabilité se ramène à l'étude de la stabilité du hamiltonien à paramètre p, $\mathcal{H}_p$ défini par $\mathcal{H}_p(u_2) = \mathcal{H}(p,u_2)$, ce qui permet d'utiliser les critères de ω- stabilité au sens de LIAPOUNOFF.

* * *

APPENDICE

SUR LES CONTRE-IMAGES DES FEUILLETAGES

Dans cet appendice $(M_i, \mathscr{F}_i)$ $i = (1,2)$ sont deux variétés feuilletées et $\varphi : M_1 \to M_2$ une application C^∞ telles que, pour tout $x_1 \in M_1$, si F_1 désigne la feuille de $\mathscr{F}_1$ contenant x_1 et F_2 la feuille de $\mathscr{F}_2$ contenant $x_2 = \varphi(x_1)$, on ait la suite exacte

$$0 \to \varphi_{x_1}^{T-1}(0) \to T_{x_1}F_1 \to T_{x_2}F_2 \to 0 \qquad \text{(C)}$$

Autrement dit $\varphi_{x_1}^T(T_{x_1}F_1) = T_{x_2}F_2$ et $T_{x_1}F_1$ contient le noyau de $\varphi_{x_1}^T$.

Les conditions imposées entraînent que φ est de rang constant $\rho = m_2 - p_2 + p_1$ où p_i (resp. m_i) est la codimension du feuilletage $\mathscr{F}_i$ (resp. la dimension de la variété M_i). En particulier si φ est une submersion $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ sont de même codimension. $\nu TM_i \to F_i$ désignant le fibré normal le long de F_i, on a un morphisme naturel $\tilde{\varphi}$ relevant φ :

$$\begin{array}{ccc} \nu TM_1 & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \nu TM_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ F_1 & \longrightarrow & F_2 \end{array}$$

$\tilde{\varphi}$ compte tenu de (C) est injective sur les fibres. ∇_i désignant la connexion de Bott de νTM_i,

PROPOSITION 1. - *Si* Z *est une application* C^∞ *d'un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *dans* νTM_1,

$$\tilde{\varphi}\left(\frac{\nabla_1 Z}{dt}\right) = \frac{\nabla_2 \tilde{\varphi}\circ Z}{dt} .$$

Démonstration. - Il est classique que pour prouver une telle relation il suffit de la prouver localement pour des champs φ-projetables, à condition que ces derniers soient assez nombreux. φ étant de rang constant, cette dernière condition est assurée au voisinage de tout point $x_1 \in M_1$. Si Z (resp. X) est un champ tangent à M_1 (resp. $\mathcal{F}_1$) projetable, il faut prouver que

$$\tilde{\varphi}\, \nabla_X \nu Z = \nabla_{\varphi^T X}\, \tilde{\varphi}\, \nu Z$$

or $\tilde{\varphi}\, \nabla_X \nu Z = \tilde{\varphi} \circ \nu[X,Z] = \nu \circ \varphi^T[X,Z] = \nu[\varphi^T X, \varphi^T Z]$, ce qui assure le résultat.

Soit γ un lacet de F_1 en x_1, $[\gamma]$ sa classe, $\psi_1 : \pi_1 F_i \to \psi_1(F_i)$ le morphisme d'holonomie infinitésimale, $\psi_1(F_i)$ étant identifié à un sous-groupe du groupe linéaire de $\nu_{x_i} TM_i$ $(x_2 = \varphi(x_1))$. Si $u_1 = \psi_1([\gamma])$, pour tout $Z_\circ \in \nu_{x_1} TM_1$, $u_1(Z_\circ)$ est la valeur pour t=1 de la solution unique de l'équation différentielle $\frac{\nabla_1 Z}{dt} = 0$ telle que $Z(0) = Z_\circ$.

De $\tilde{\varphi}\, \frac{\nabla_1 Z}{dt} = \frac{\nabla_2 \tilde{\varphi} Z}{dt}$, il résulte alors que

$$\tilde{\varphi}\circ u_1 = u_2 \circ \tilde{\varphi}$$

où $u_2 = \psi_2[\varphi\circ\gamma]$.

Si on note $\psi_2(F_2)|_{F_1}$ la trace sur $\nu_{x_1} TM_1$, identifié par $\tilde{\varphi}$ à un sous-espace de $\nu_{x_2} TM_2$, des endomorphismes appartenant à $\psi_2(F_2)$ conservant $\nu_{x_1} TM_1$,

$$\psi_1(F_1) \subset \psi_2(F_2)|_{F_1} .$$

En particulier :

<u>THEOREME 1.</u> - *Si* F_2 *est sans holonomie infinitésimale (resp. à holonomie infinitésimale relativement compacte) il en est de même pour* F_1 *composante connexe de* $\varphi^{-1}F_2$.

Concernant l'holonomie on a le résultat partiel suivant :

<u>THEOREME 2.</u> - *Si* F_2 *est une feuille propre sans holonomie,* F_1 *composante connexe de* $\varphi^{-1}F_2$ *est propre sans holonomie.*

Démonstration. F_2 étant propre sans holonomie, il existe une application distinguée f_2 dont la source U_2 est un voisinage de F_2. De plus le jet du premier ordre de f_2 fournit une trivialisation du fibré normal de F_2 :

$$\nu F_2 \longrightarrow F_2 \times \mathbb{R}^{p_2}$$

$$\xi \longrightarrow (x_2, f_2^T \xi)$$

Soit g l'application de F_1 dans $G_{p_1}(\mathbb{R}^{p_2})$ grassmannienne des p_1-plans de $\mathbb{R}^{p_2}$ définie pour $x \in F_1$ par

$$g(x) = f_2^T \varphi^T T_x M_1$$

g est en fait une application constante : F_1 étant connexe, il suffit de prouver que g est localement constante. Soit donc U_1 un voisinage ouvert distingué de $x_1 \in F_1$ tel que $\varphi(U_1) \subset U_2$. $f_2 \circ \varphi$ étant constante sur les plaques de U_1, f_1 désignant une application distinguée associée à U_1 et $\check{U}_1$ l'espace transverse en x_1 de U_1, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} U_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f_1"] & U_2 \arrow[d, "f_2"] \\ \mathbb{R}^{p_1} \supset \check{U}_1 \arrow[r, "\varphi_\circ"] & \mathbb{R}^{p_2} \end{tikzcd}$$

f_1 étant une submersion, pour tout x appartenant à la plaque P, $g(x) = \varphi_\circ^T T_{f_1(x)} \check{U}_1 = \varphi_\circ^T \mathbb{R}^{p_1}$, ce qui assure que g est localement constante.

Soit π une projection de $\mathbb{R}^{p_2}$ sur $\Pi = g(F_1)$ identifié à $\mathbb{R}^{p_1}$. $f = \pi \circ f_2 \circ \varphi$ est une submersion sur un voisinage de F_1 constante sur les plaques par construction. C'est donc une application distinguée dont la source contient F_1, ce qui assure que F_1 est sans holonomie. Comme $F_1 = f^{-1}(0)$, F_1 est une sous-variété, ce qui achève la démonstration.

EXEMPLES D'UTILISATION :

1. Si $\mathscr{I} : U \to \underline{G}^*$ est de rang constant ρ, le feuilletage g^σ a pour feuilles les composantes connexes de $\mathscr{I}^{-1}(\xi)$, $\xi \in \mathscr{I}(U)$. $g^\sigma|_U$ est donc un feuilletage à feuilles propres sans holonomie.

2. Supposons que $\mathscr{I} : U \to \underline{G}^*$ est de rang constant ρ et que $(\mathscr{O}_\xi)$ est un feuilletage de $\mathscr{I}(U)$ sans holonomie. Cette dernière situation est toujours réalisée si G est compact et si $\mathscr{I}(U) \subset \mathscr{U}$ où $\mathscr{U}_o$ est un ouvert dense de $\underline{G}^*$ d'après un théorème de MONTGOMERY, SAMELSON et YANG [19]. Dans ces conditions $\mathscr{G} + \mathscr{G}^\sigma|_U$ est un feuilletage à feuilles toutes propres et sans holonomie. De plus ces feuilles sont fibrées sur les orbites.

* * *

BIBLIOGRAPHIE

[1] ABRAHAM R. & MARSDEN J.E., Foundations of mechanics, 2nd edition. Benjamin-Cummings, Reading 1978.

[2] ARNOLD V., Les méthodes mathématiques de la mécanique classique, Traduction française, Editions MIR, Moscou, 1976.

[3] ARNOLD V. & AVEZ A., Problèmes ergodiques de la mécanique classique, Gauthier-Villars, Paris 1967.

[4] BENENTI S. & TULCZYJEW W.M., Remarques sur les réductions symplectiques, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 294 (1982), p. 561-564.

[5] BOTT R., On a topological obstruction to integrability, (Proc. Symp. in Pure Math. A.M.S.), vol. 16, 1970, p. 127-131.

[6] DAZORD P., a) Variations sur la classe de Maslov-Arnold, Journées P. de Fermat, Toulouse, 1981 (à paraître).

b) Sur la Géométrie des sous-fibrés et feuilletages lagrangiens, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4ème série, t. 13, 1981, 465-480.

c) Théorie des feuilletages, polygraphié, Lyon, 1981.

d) Feuilletages en Géométrie Symplectique, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 294, (1982), 489-491.

[7] DUFLO M. & VERGNE M., Une propriété de la représentation coadjointe d'une algèbre de Lie, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 268, 1969, série A, 583-585.

[8] DUISTERMAAT J.J., Fourier Integral Operators, Courant Institute of Mathematical Sciences, New-York University.

[9] FEDIDA E., Sur les feuilletages de Lie, C.R. Acad. Sc. Paris, 272 (A) (1971), 999-1002.

[10] HAEFLIGER A., Variétés feuilletées, Ann. Scuola Normale Sup. Pisa, 16 (1962), 367-397.

[11] KIRILLOV A., Eléments de la théorie des représentations, Traduction française, Editions Mir, Moscou, 1974.

[12] KOSTANT B., Quantization and unitary representations, Part. I : Prequantization, Lect. Notes in Math. 170 (1970), 87-208.

[13] LIBERMANN P., a) Sur le problème d'équivalence de certaines structures infinitésimales, Thèse Fac. Sc. Strasbourg, Série E, n° 121 (1953).

b) Problèmes d'équivalence et Géométrie Symplectique, Journées S.M.F. du Schnepfenried, 1982, (à paraître).

[14] LICHNEROWICZ A., a) Théorie globale des Connexions et des Groupes d'holonomie, Ed. Cremonese, Rome 1955.

b) Variété symplectique et dynamique associée à une sous-variété, C.R. Acad. Sc. Paris, Série A, 280 (1975), 523-527.

c) Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées, J. Differential Geometry, 12 (1977), 253-300.

[15] LICHNEROWICZ A. & TRAN VAN TAN, Feuilletages, Géométrie Riemannienne et Géométrie Symplectique, (à paraître).

[16] MARLE C.M., a) Symplectic manifolds, Dynamical Groups and Hamiltonian Mechanics, Differential Geometry and Relativity (Volume in honour of André Lichnérowicz on his 60th birthday). Reidel 1976.

b) Lie group action on a canonical manifold, Journées P. de Fermat, Toulouse, 1981 (à paraître).

c) A propos des systèmes hamiltoniens complètement intégrables et des variables actions-angles, Journées Relativistes, Lyon 1982 (à paraître).

d) Sous-variétés de rang constant d'une variété symplectique, Journées S.M.F. de Géométrie du Schnepfenried, 1982 (à paraître).

e) Sous-variétés de rang constant et sous-variétés symplectiquement régulières d'une variété symplectique, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 295, (1982), 119-122.

[17] MARSDEN J.E. & WEINSTEIN A., Reduction of symplectic manifolds with symmetry, Reports on Mathematical Physics, Vol. 5 (1974), 121-130.

[18] MOLINO P., a) Feuilletages transversalement parallélisables et feuilletages de Lie, C.R. Acad. Sc. Paris, 282, A(1976), 99-101.

b) Feuilletages transversalement complets et applications, Ann. Ec. Norm. Sup., 10 (1977), 289-307.

c) Feuilletages riemanniens sur les variétés compactes ; champ de Killing transverse, C.R. Acad. Sc. Paris, 289 (A) (1979), 421-423.

d) Géométrie globale des feuilletages riemanniens, Séminaire de Géométrie différentielle, Montpellier 1979-1980, 1-55.

[19] MONTGOMERY D., SAMELSON H., YANG C.T., Exceptionnal orbits of highest dimension, Ann. of Math. t. 64, n° 1 (1956) 131-141.

[20] REEB G., Sur certaines propriétés des variétés feuilletées, Hermann et Cie, Paris (1952).

[21] SOURIAU J.M., Structure des systèmes dynamiques, Dunod, Paris (1969).

[22] TISCHLER, On fibering certain foliated manifolds over S^1, Topology 9 (1970), 153-154.

[23] WEINSTEIN A., a) Symplectic manifolds and their lagrangian submanifolds, Advances in Math. 6 (1971), 329-346.

b) Lectures on symplectic manifolds, Conference board of the mathematical sciences. Regional Conferences series in mathematics, n° 29 (1979), A.M.S. Providence.

[24] WOLF J.A., Spaces of constant curvature, Mac Graw Hill, 1967.

* * *