H. Buchwalter
D. Tarral

Théorie spectrale

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1982, fascicule 8C
« Théorie spectrale », , p. 1-198
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1982___8C_A1_0>

CHAPITRE 1 - THEORIE SPECTRALE ABSTRAITE

Il s'agit ici d'exposer quelques rudiments de théorie spectrale dans les algèbres de Banach, suffisants pour permettre l'accès à la théorie spectrale des opérateurs sur un espace de Banach ou sur un espace de Hilbert. On commence donc par une étude des algèbres de Banach que, pour simplifier, nous supposerons unitaires (ou unifères). Ce point de vue est suffisant pour l'application aux opérateurs. Il ne le serait pas en Analyse Harmonique où les algèbres convolutives du type $L^1(G)$, G groupe localement compact abélien ou non, ne sont pas unitaires si G n'est pas discret.

1.1 ALGEBRES DE BANACH UNITAIRES. - Par définition, il s'agit d'une algèbre A sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$ (ceci est très important), possédant un élément unité noté $\mathbb{1}$ (ou I ou e éventuellement), munie d'une norme d'espace de Banach telle que l'on ait en plus les relations :

$$\|xy\| \leq \|x\| \, \|y\| \; \forall x \in A, \; y \in A \text{ et } \|\mathbb{1}\| = 1$$

(1.1.1) EXEMPLES. -

Ex. 1. L'algèbre multiplicative $C^\infty(T)$ des fonctions (complexes) continues et bornées sur un espace topologique complètement régulier T. Si T = K est compact on retrouve l'algèbre de Banach classique C(K). Ces algèbres sont commutatives.

Ex. 2. Soit E un espace de Banach. L'algèbre A = L(E) des opérateurs bornés de E n'est pas commutative.

Ex. 3. Soit G un groupe localement compact abélien, par exemple $G = \mathbb{R}^p$, ou $G = \mathbb{Z}^p$ ou $G = \mathbb{T}^p$ avec pour $\mathbb{T}$ le tore à une dimension. L'algèbre convolutive et commutative $L^1(G)$ n'est pas unitaire en général. On la plonge donc dans l'algèbre convolutive M(G) des mesures signées (en fait complexes) sur G, qui admet pour élément unité la mesure de Dirac δ_0 placée à l'origine de G, c'est à dire au zéro de G supposé noté additivement.

Ex. 4. Si $G = \mathbb{Z}$ l'algèbre convolutive $L^1(G)$ n'est autre que $\ell^1(\mathbb{Z})$ avec le produit convolutif $c = a * b$ défini selon :

$$c_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \, b_{n-k}$$

Ex. 5. L'algèbre du disque, c'est-à-dire l'algèbre des fonctions holomorphes sur le disque $U = \{z, \ |z| < 1\}$ qui sont continues sur le disque fermé $\overline{U} = \{z, \ |z| \leq 1\}$, avec la norme uniforme sur U ou sur $\overline{U}$. Elle contient une sous-algèbre intéressante, identifiée à la sous-algèbre convolutive $\ell^1(\mathbb{N})$ de $\ell^1(\mathbb{Z})$, et formée des fonctions $f = \sum_0^\infty a_n z^n$ dont le développement en série entière est absolument convergent sur le tore $\mathbb{T} = \partial U$.

Le groupe des éléments inversibles de A. - On désigne par G le groupe multiplicatif des éléments inversibles de A. Ses propriétés sont conséquences de :

(1.1.2) LEMME. - *Pour* $\|a\| < 1$ *on a* $\mathbb{1} - a \in G$ *et*

$$(\mathbb{1} - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \qquad (\text{avec } a^0 = \mathbb{1})$$

Preuve - Evidente avec l'inégalité $\|a^n\| \leq \|a\|^n$ garantissant la convergence absolue de la série $\sum_0^\infty a^n$ dans A, donc sa convergence puisque A est complète. Si s est la somme on vérifie immédiatement que $(\mathbb{1} - a)s = s(\mathbb{1} - a) = \mathbb{1}$ par continuité de la multiplication dans A. □

(1.1.3) THEOREME. - *Le groupe* G *est ouvert dans* A *et l'application* $x \to x^{-1}$ *est continue sur* G.

Preuve - Soit $a \in G$. La condition $\|ba^{-1}\| < 1$ implique $\mathbb{1} - ba^{-1} \in G$ donc aussi $a - b \in G$. Par suite $\|b\| < \|a^{-1}\|^{-1}$ implique $a - b \in G$ ce qui prouve que G est ouvert. De plus,

$$(a - b)^{-1} = [(\mathbb{1} - ba^{-1})a]^{-1} = a^{-1}(\mathbb{1} - ba^{-1})^{-1} = \sum_0^\infty a^{-1} (ba^{-1})^n$$

d'où :

$$\|(a-b)^{-1} - a^{-1}\| \leq \sum_1^\infty \|b\|^n \, \|a^{-1}\|^{n+1} = \frac{\|a^{-1}\|^2 \, \|b\|}{1 - \|a^{-1}\| \, \|b\|}$$

ce qui prouve la continuité sur G de l'application $x \to x^{-1}$. □

(1.1.4) EXERCICES.

Exerc. 1. Si $a,b \in G$ alors $b^{-1} - a^{-1} = b^{-1}(a-b)a^{-1} = a^{-1}(a-b)b^{-1}$

Exerc. 2. Exponentiation - Pour tout $a \in A$ on pose :

$$\exp(a) = \sum_{o}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$$

Montrer que la série converge dans A, que ab = ba implique l'égalité $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$ et en déduire que $\exp(a) \in G$ et $[\exp(a)]^{-1} = \exp(-a)$. L'application exponentielle $a \to \exp(a)$ de A dans G est-elle continue ?

Exerc. 3. Expliciter le groupe G dans l'algèbre $C^{\infty}(T)$ ou dans l'algèbre $C(K)$. Montrer que dans ces deux algèbres la condition $ab \in G$ implique $a \in G$ et $b \in G$.

Exerc. 4. Soit $E = \ell^1 = \ell^1(\mathbb{N})$ et soit $A = L(E)$. On considère les deux opérateurs $S,T \in A$

$$S\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots) \quad \text{si} \quad \alpha = (\alpha_o, \alpha_1, \alpha_2, \dots)$$
$$T\alpha = (0, \alpha_o, \alpha_1, \dots) \quad \text{si} \quad \alpha = (\alpha_o, \alpha_1, \alpha_2, \dots)$$

Montrer que $S \notin G$, $T \notin G$ mais que ST est l'opérateur identité, donc appartient à G. A-t-on $TS \in G$?

Spectre et résolvant d'un élément $a \in A$. - On appelle *résolvant* de $a \in A$ l'ensemble $\rho(a)$ des nombres complexes λ tels que $\lambda - a \in G$, où on a noté $\lambda - a = \lambda\mathbb{1} - a$ pour simplifier. C'est évidemment un ouvert de $\mathbb{C}$ d'après (1.1.3). Pour $\lambda \in \rho(a)$ on pose :

$$R_\lambda(a) = R(\lambda,a) = (\lambda - a)^{-1}$$

et la fonction $R(.,a)$ définie sur $\rho(a)$, est appelée *fonction résolvante* de a. Le *spectre* $\sigma(a)$ est par définition l'ensemble fermé $\mathbb{C} \setminus \rho(a)$. Enfin on appelle *rayon spectral* de a le nombre $r(a) = \operatorname{Sup}\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(a)\}$.

(1.1.5) PROPOSITION :

a) Pour tout λ *tel que* $|\lambda| > \|a\|$ *on a* $\lambda \in \rho(a)$ *et*

$$R(\lambda,a) = \sum_{o}^{\infty} \lambda^{-(n+1)} a^n$$

b) En particulier $R(\lambda,a) \to 0$ *quand* $|\lambda| \to \infty$

Preuve - a) est évident et b) provient de l'inégalité

$$\| R(\lambda,a)\| < \frac{2}{|\lambda|} \quad \textit{pour } |\lambda| > 2\| a\|. \ \square$$

(1.1.6) COROLLAIRE. - *Soit* $\lambda \in \rho(a)$. *Alors la condition*

$|\mu| < \| R(\lambda,a)\|^{-1}$ *implique* $\lambda - \mu \in \rho(a)$ *et*

$$R(\lambda-\mu, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n R(\lambda,a)^{n+1}$$

Preuve. - Avec l'égalité $\lambda - \mu - a = (\lambda-a)[1-\mu R(\lambda,a)]$. $\square$

(1.1.7) THEOREME. - *La fonction résolvante* $R(.,a)$ *est holomorphe sur l'ouvert* $\rho(a)$, *à valeurs dans A.*

Preuve - Car (1.1.6) signifie qu'elle est développable en série de Taylor au voisinage de tout point $\lambda \in \rho(a)$, donc elle est bien analytique, c'est-à-dire holomorphe. $\square$

Comme conséquences importantes on a :

(1.1.8) COROLLAIRE 1. - *Pour tout* $a \in A$ *le spectre* $\sigma(a)$ *est un compact non vide de* $\mathbb{C}$ *et* $r(a) < \| a\|$.

Preuve - On sait déjà que $\sigma(a)$ est contenu dans $\{\lambda, |\lambda| < \| a\| \}$ avec (1.1.5), donc $r(a) < \| a\|$ dès qu'on aura vu que $\sigma(a)$ n'est pas vide. Si l'on avait $\sigma(a) = \emptyset$, alors la fonction $R(., a)$ serait holomorphe dans $\mathbb{C}$, donc entière. Comme elle est bornée dans $\mathbb{C}$ d'après (1.1.5.b), et même tend vers zéro à l'infini, elle est nécessairement nulle d'après le théorème de Liouville, ce qui aboutit à la contradiction $\mathbb{1} = 0$ et $A = (\circ)$, contrairement à $\| \mathbb{1}\| = 1$. $\square$

(1.1.9) COROLLAIRE 2. - *Pour tout* $a \in A$ *on a la formule*

$$r(a) = \lim_{n \to \infty} \| a^n\|^{1/n}$$

Preuve - La suite $\alpha_n = \|a^n\|$ est telle que $\alpha_{n+m} \leqslant \alpha_n \cdot \alpha_m$. Il suit de là, par un exercice classique, que :

$$\lim \|a^n\|^{1/n} = \operatorname{Inf} \|a^n\|^{1/n}$$

Soit ℓ cette valeur commune. D'après la règle de Cauchy, la série $\sum_0^\infty \lambda^{-(n+1)} a^n$ converge absolument pour $|\lambda| > \ell$, ce qui implique $r(a) \leqslant \ell$.

Réciproquement, pour tout $x' \in A'$, la fonction $\langle R(.,a), x'\rangle$ est holomorphe pour $|\lambda| > r(a)$, et égale à $\sum_0^\infty \lambda^{-(n+1)} \langle a^n, x'\rangle$ pour $|\lambda| > \|a\|$. La série précédente constitue donc le développement de Laurent de la fonction $\langle R(.,a), x'\rangle$, valable par conséquent pour $|\lambda| > r(a)$. En particulier on a $\langle \lambda^{-n} a^n, x'\rangle \to 0$ quand $n \to \infty$ pour ces valeurs de λ, de sorte que la suite $(\lambda^{-n} a^n)$ est faiblement bornée dans A, donc bornée en norme. On en déduit que $\limsup_{n \to \infty} \|a^n\|^{1/n} \leqslant |\lambda|$ pour tout λ tel que $|\lambda| > r(a)$ d'où $\ell \leqslant r(a)$. □

(1.1.10) <u>COROLLAIRE 3.</u> (GELFAND-MAZUR) - *Soit* A *une algèbre complexe unitaire et normée (pas nécessairement complète). Si* A *est un corps, alors* $A = \mathbb{C}\mathbb{1}$.

Preuve - L'espace de Banach complété $\hat{A}$ est algèbre unitaire. Si $a \in A$ et si λ est choisi quelconque dans le compact non vide $\sigma_{\hat{A}}(a)$, alors $\lambda - a$ est non inversible dans A, d'où $\lambda - a = 0$ si A est un corps et $a = \lambda = \lambda \mathbb{1}$. □

(1.1.11) <u>EXERCICES.</u> -

<u>Exerc. 1.</u> <u>Equations résolvantes</u>. Vérifier les deux égalités, dites première et seconde équation résolvante :

$$(*) \quad R(\lambda,a) - R(\mu,a) = (\mu - \lambda)R(\lambda,a)R(\mu,a) \qquad \lambda,\mu \in \rho(a)$$

$$(**) \quad R(\lambda,a) - R(\lambda,b) = R(\lambda,a)\ (a-b)R(\lambda,b) \qquad \lambda \in \rho(a) \cap \rho(b).$$

<u>Exerc. 2.</u> Vérifier que $r(ab) = r(ba)$ pour tous $a,b \in A$.

<u>Exerc. 3.</u> Soit $A = C(K)$, K compact. Pour chaque $f \in C(K)$ déterminer le spectre $\sigma(f)$.

Exerc. 4. Soit $H = \ell^2(\mathbb{N})$ et $A = L(H)$. Soit T l'opérateur de "shift" : $(\alpha_o, \alpha_1, \alpha_2, \ldots) \to (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$. Déterminer $\|T\|$, $r(T)$ et $\sigma(T)$.

Exerc. 5. Soit $P = \alpha_o + \alpha_1 X + \ldots + \alpha_p X^p \in \mathbb{C}[X]$, $\alpha_p \neq 0$, un polynôme de degré p.

a) Expliciter les polynômes $\beta_k(z)$ tels que :

$$\frac{P(\lambda) - P(z)}{\lambda - z} = \sum_{k=o}^{p-1} \beta_k(z)\lambda^k$$

b) Déduire de là que si un élément $a \in A$ est tel que $P(a) = 0$ (on dit que a est un élément algébrique de A quand il est annulé par un polynôme), alors son spectre $\sigma(a)$ est contenu dans l'ensemble $Z(P)$ des zéros de P.

c) On suppose $P(a) = 0$ et P choisi de degré minimal. Alors $\sigma(a) = Z(P)$.

Exerc. 6. Soit A une algèbre de Banach unitaire et soit $\mathcal{A} = L(A)$ l'algèbre de Banach de ses opérateurs linéaires. A chaque $a \in A$ on associe l'opérateur $R_a : x \to xa$ (resp $L_a : x \to ax$) de multiplication à droite (resp. à gauche) par a.

a) Montrer que si a est inversible dans A alors R_a et L_a le sont aussi dans $\mathcal{A}$.

b) Montrer que si R_a est inversible dans $\mathcal{A}$ alors a l'est aussi dans A (remarquer que a est inversible à gauche et simplifiable à droite).

c) Déduire de là que $\sigma(a) = \sigma(Ra) = \sigma(La)$.

Eléments quasi-nilpotents et diviseurs de zéro topologiques. - On dit qu'un élément $a \in A$ est quasi-nilpotent lorsque $r(a) = 0$, ce qui revient à dire que $\sigma(a) = \{0\}$, ou encore que $\|a^n\|^{1/n} \to 0$. Tout élément nilpotent est quasi-nilpotent. Comme on a $\lambda - a \in G$ pour $\lambda \neq 0$, on voit que tout élément quasi-nilpotent appartient à la frontière ∂G du groupe G.

On dit qu'un élément $a \in A$ est un diviseur de zéro topologique (dzt) à droite (resp. à gauche) lorsqu'il existe une suite $b_n \in A$ telle que $\|b_n\| = 1$ et $b_n a \to 0$ (resp. $ab_n \to 0$). On dit que a est un dzt lorsqu'il est dzt bilatère. Pour un dzt à droite ou à gauche, on a nécessairement $a \notin G$.

Un exemple intéressant est donné avec :

(1.1.12) PROPOSITION. - *Tout* $a \in \partial G$ *est un* dzt. *En particulier tout élément quasi-nilpotent est un* dzt.

Preuve - Fixons une suite $g_n \in G$ telle que $g_n \to a$. Alors la suite $\| g_n^{-1} \|$ n'est pas bornée car sinon on aurait :

$$g_n^{-1} a - \mathbb{1} = g_n^{-1}(a - g_n) \to 0$$

d'où $g_n^{-1} a \in G$ pour n assez grand et $a \in G$, ce qui est absurde puisque G est ouvert. En extrayant une sous-suite on peut supposer $\|g_n^{-1}\| \to +\infty$. Posons $b_n = \|g_n^{-1}\|^{-1} g_n^{-1}$, de sorte que $\|b_n\| = 1$. De plus,

$$b_n a = b_n(a - g_n) + \| g_n^{-1}\|^{-1} \mathbb{1} \to 0$$

et de même $ab_n \to 0$. □

Spectre relatif à une sous-algèbre. - Fixons une sous-algèbre unitaire fermée B dans A (ce qui sous-entend que l'unité $\mathbb{1}$ de A est élément de B). Alors tout élément $a \in B$ possède a priori deux spectres $\sigma_A(a)$ et $\sigma_B(a)$, qui ne sont pas nécessairement égaux. On a toutefois :

(1.1.13) PROPOSITION. - *Pour tout* $a \in B$ *on a* $\sigma_A(a) \subset \sigma_B(a)$ *et* $\partial\sigma_B(a) \subset \partial\sigma_A(a)$

Preuve - Si $\lambda \in \rho_B(a)$ alors $(\lambda - a)^{-1}$ existe dans B, donc dans A et ainsi $\rho_B(a) \subset \rho_A(a)$. Si $\lambda \in \partial\sigma_B(a)$, il existe une suite $\lambda_n \in \rho_B(a)$ telle que $\lambda_n \to \lambda$. On en déduit que $\lambda - a \in \partial G_B$, donc $\lambda - a$ est dzt dans B d'après (1.1.12) et par conséquent est aussi dzt dans A, d'où $\lambda - a \notin G_A$ et $\lambda \in \sigma_A(a)$. On a donc $\partial\sigma_B(a) \subset \sigma_A(a)$, ce qui conduit plus précisément à écrire :

$$\partial\sigma_B(a) = \overline{\rho_B(a)} \cap \sigma_B(a) = \overline{\rho_B}(a) \cap \sigma_A(a) \subset \overline{\rho_A(a)} \cap \sigma_A(a) = \partial\sigma_A(a)$$

et termine tout. □

(1.1.14) COROLLAIRE. - *On a* $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$ *lorsque* $\sigma_B(a)$ *est rare ou bien lorsque* $\rho_A(a)$ *est connexe.*

Preuve - si $\sigma_B(a)$ est rare alors $\sigma_B(a) = \partial\sigma_B(a) \subset \sigma_A(a)$, donc $\sigma_B(a) = \sigma_A(a)$. Si $\rho_A(a)$ est connexe, montrons que $\rho_A(a) \cap \sigma_B(a)$ est vide, ce qui implique $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$ avec (1.1.13). Sinon, il existe $\lambda \in \rho_A(a) \cap \sigma_B(a)$ et $\sigma_A(a)$ étant connexe par arc (car il est ouvert), il existe un chemin continu tracé dans $\rho_A(a)$ et joignant λ au point à l'infini, et sur ce chemin un point $\lambda_o \in \partial\sigma_B(a)$. Mais alors $\lambda_o \in \rho_A(a) \cap \sigma_A(a)$ avec (1.1.13), ce qui est absurde. □

Sous-algèbres pleines de A. - On introduit la définition :

(1.1.15) DEFINITION. - *Une sous algèbre unitaire fermée* B *de* A *est dite pleine dans* A *lorsque tout* a ∈ B, *qui est inversible dans* A *est aussi inversible dans* B, *autrement dit, lorsque* $G_B = G_A \cap B$.

On a donc immédiatement :

(1.1.16) PROPOSITION. - *Soit* B *une sous-algèbre pleine dans* A. *Alors pour tout* a ∈ B *on a* $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$.

Un exemple important de sous-algèbre pleine est donné avec :

(1.1.17) PROPOSITION. - *Pour toute partie non vide* M *de* A, *le commutant* M^c *de* M *est une sous-algèbre pleine de* A.

Preuve - Il est clair que M^c est une sous-algèbre unitaire fermée de A. Et si $x \in M^c$ est inversible dans A alors x^{-1} commute avec tout élément $a \in M$, donc M^c est pleine. □

Comme il est évident qu'une intersection quelconque de sous- algèbres pleines est encore une sous-algèbre pleine, on peut parler de sous-algèbre pleine PL(M) engendrée par une partie non vide M de A. En introduisant le bicommutant M^{cc} de M on a, avec (1.1.17) :

(1.1.18) PROPOSITION.- *Toute partie non vide* M *possède une plus petite sous-algèbre pleine* $PL(M) \subset M^{cc}$ *la contenant. Si* M *est commutative alors* PL(M) *l'est aussi.*

Preuve - Si M est commutative alors $M \subset M^c$, donc $M^{cc} \subset M^c$ et $M^{cc} \subset (M^{cc})^c$, ce qui prouve que M^{cc} est commutative, donc aussi PL(M). □

Donnons encore un exemple, qui servira plus loin, de sous-algèbre pleine.

(1.1.19) PROPOSITION. - *Soient* A_1 *et* A_2 *deux algèbres de Banach unitaires et* $\phi, \Psi : A_1 \to A_2$ *deux morphismes d'algèbres unitaires. Alors l'ensemble des* $x \in A_1$ *tels que* $\phi(x) = \Psi(x)$ *est une sous-algèbre pleine de* A_1.

Preuve - Soit $B = \mathrm{Ker}\ (\phi - \Psi)$. Alors B est déjà une sous-algèbre unitaire fermée de A_1. Si $x \in B$ est inversible dans A_1 alors $\phi(x)$ et $\Psi(x)$ sont inversibles dans A_2 et

$$\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1} = \Psi(x)^{-1} = \Psi(x^{-1})$$

donc $x^{-1} \in B$ et B est pleine. □

(1.1.20) EXERCICES. -

Exerc. 1. Soit $E = C\ [0,1]$ et $A = L(E)$. Montrer que l'opérateur $T \in A$, défini par :

$$(Tf)\ (t) = \int_0^t f(s)\ ds \qquad t \in [0,1]$$

est un élément quasi-nilpotent de A (expliciter T^n et majorer $\|T^n\|$). Etendre ce résultat au cas d'un opérateur de Volterra, défini par un noyau $\mathscr{K}(s,t)$ continu sur $[0,1] \times [0,1]$ selon

$$(Tf)\ (t) = \int_0^t \mathscr{K}(t,u)\ f(u)du \qquad t \in [0,1]$$

Exerc. 2. Avec les notations de (1.1.11 Exerc. 6), montrer que chacune des aplications $a \to R_a$ et $a \to L_a$ est un morphisme unitaire isométrique de l'algèbre A dans l'algèbre $\mathcal{A} = L(A)$. En déduire que A s'identifie, par chacun de ces morphismes, à une sous-algèbre pleine de $\mathcal{A} = L(A)$.

Exerc. 3. Etablir que l'ensemble des dzt à droite (resp. à gauche) de A est fermé dans A.

Exerc. 4. On désigne par exp A l'ensemble des éléments exp(a) quand a décrit A et par g(expA) le sous-groupe engendré dans G, formé des produits finis $\exp(a_1) \ldots \exp(a_k)$, k variable.

a) Montrer que g(expA) est un sous-groupe connexe de G.

b) Pour $b \in A$ tel que $\|b\| < 1$ on pose

$$\mathrm{Log}(\mathbb{1}-b) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n}{n}$$

Prouver que $\exp[\mathrm{Log}(\mathbb{1}-b)] = \mathbb{1} - b$ et déduire de là que le sous-groupe g(expA) contient la boule ouverte de rayon 1 centrée à l'élément neutre $\mathbb{1}$ de G.

c) On rappelle que dans un groupe topologique la composante connexe de l'élément neutre est un sous-groupe G_1, ouvert et fermé, engendré par un voisinage quelconque de l'élément neutre dans G_1. Déduire de là que g(expA) est égal à la composante connexe neutre du groupe G.

Exerc. 5. Montrer que l'application $x \to x^{-1}$, définie sur l'ouvert G de A, à valeurs dans A, est différentable en tout point $x \in G$ et que sa différentielle D_x est définie par

$$D_x(h) = -x^{-1}\, h\, x^{-1} \qquad h \in A$$

(1.2) ALGEBRES DE BANACH COMMUTATIVES UNITAIRES. - Les questions spectrales se développent encore plus loin lorsque l'algèbre A est supposée commutative, à partir d'une notion nouvelle, qui est celle de caractère. Les résultats obtenus seront d'ailleurs applicables aux sous-algèbres commutatives d'une algèbre quelconque, et lorsque ces sous-algèbres seront pleines, on obtiendra ainsi, avec (1.1.16), des résultats nouveaux sur le spectre.

(1.2.1) <u>DEFINITION</u>. - *On appelle caractère de* A *toute forme linéaire multiplicative unitaire.*

(1.2.2) <u>PROPOSITION</u>. - *Pour tout caractère* χ *de* A *et tout* $a \in A$ *on a* $\chi(a) \in \sigma(a)$. *En particulier* $|\chi(a)| < r(a) < \|a\|$.

<u>*Preuve*</u> - Soit $b = \chi(a) - a$. Alors $\chi(b) = 0$, donc b est nécessairement non inversible (car $bb^{-1} = \mathbb{1} \Rightarrow 1 = \chi(\mathbb{1}) = \chi(b)\,\chi(b^{-1})$ et ainsi $\chi(b) \neq 0$) et $\lambda = \chi(a) \in \sigma(a)$. □

(1.2.3) <u>COROLLAIRE</u>. - *L'ensemble, noté* SpA , *des caractères de* A *est une partie faiblement compacte de la boule unité du dual* A' *de* A.

<u>*Preuve*</u> - Soit B' cette boule unité. On a $SpA \subset B'$ et SpA est évidemment faiblement fermé. □

On s'aperçoit donc qu'il est possible d'associer à A un espace compact SpA (et d'ailleurs la commutativité de A n'est pas intervenue pour cela). Ceci va permettre, une fois vu que SpA n'est pas vide (dans le cas commutatif), de comparer A à l'algèbre commutative C(SpA). C'est la théorie de Gelfand.

(1.2.4) <u>EXEMPLES</u>. -

<u>Ex. 1</u>. Si K est compact et si A = C(K) alors SpA = K.

<u>Ex. 2</u>. Si T est complètement régulier et si $A = C^{\infty}(T)$ alors SpA est le compactifié de Stone -Čech $\check{T} = \beta T$ de T.

<u>Ex. 3</u>. Soit A l'algèbre (non commutative) des matrices triangulaires $\begin{bmatrix} a & c \\ o & b \end{bmatrix}$ avec a, b, c, $\in \mathbb{C}$. Montrer que SpA est formé de 2 éléments.

<u>Ex. 4</u>. Soit $A = M_2(\mathbb{C})$ l'algèbre des matrices 2 x 2. Montrer que SpA est vide.

<u>Caractères et idéaux maximaux de A.</u>

(1.2.5.) <u>THEOREME</u>. - *L'ensemble* SpA *des caractères d'une algèbre de Banach commutative unitaire* A *est en correspondance bijective avec l'ensemble des idéaux maximaux de* A.

Preuve - A tout caractère χ on associe l'hyperplan fermé $M_\chi = \operatorname{Ker} \chi$, qui est un idéal maximal. Réciproquement, soit M un idéal maximal. Alors M est fermé, car G étant ouvert, on a $\overline{M} \cap G = \emptyset$, donc $\overline{M} \neq A$ et $\overline{M} = M$. Ainsi l'algèbre quotient $A/_M$ est complète et séparée pour la semi-norme quotient, qui est donc une norme d'espace de Banach et même d'algèbre de Banach. Mais $A/_M$ et aussi un corps par maximalité de M , donc $A/_M = \mathbb{C}$ d'après le théorème de Gelfand-Mazur (1.1.10) et le morphisme canonique $\chi : A \to A/_M \simeq \mathbb{C}$ est un caractère χ de A tel que $M = \operatorname{Ker} \chi$. □

(1.2.6) COROLLAIRE. - *L'espace compact* SpA *est non vide.*

Preuve - Car d'après le théorème de Krull il existe des idéaux maximaux. □

La transformation de Gelfand. - A tout élément $a \in A$ on peut associer la fonction $\hat{a}$, définie sur l'espace compact SpA, selon $\hat{a}(\chi) = \chi(a)$. Par définition de la topologie de SpA, qui est celle de la convergence simple sur A, on voit que $\hat{a}$ est fonction continue. L'application $a \to \hat{a}$, dite transformation de Gelfand, opère donc de A dans C(SpA). Et c'est un outil remarquable pour affiner l'étude des algèbres commutatives.

(1.2.7) THEOREME. - *La transformation de Gelfand* $a \to \hat{a}$ *est un morphisme d'algèbres unitaires de* A *dans* C(SpA) *dont le noyau est formé des éléments quasi-nilpotents de* A. *De façon plus précise on a :*

a) $\|\hat{a}\| = r(a) \leq \|a\|$

b) $\sigma(a) = \hat{a}(\mathrm{SpA}) = \{\chi(a) \; ; \; \chi \in \mathrm{SpA}\}$

c) Pour que l'on ait $a \in G$ *il faut et il suffit que* $\chi(a) \neq 0$ *pour tout* $\chi \in \mathrm{SpA}$, *autrement dit que la fonction* $\hat{a}$ *ne s'annule pas sur* SpA.

Preuve - L'application $a \to \hat{a}$ est évidemment linéaire multiplicative et unitaire et (1.2.2) donne l'inégalité $\|\hat{a}\| \leq r(a)$, qui assure la continuité de la transformation de Gelfand. Maintenant on a, de façon à peu près évidente, c) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ a) et pour prouver c) il suffit de montrer que si $\hat{a}$ ne s'annule pas, alors a est élément de G. Or si $\hat{a}$ ne s'annule pas, l'élément a n'appartient à aucun idéal propre (car sinon il appartiendrait à un idéal maximal et serait annulé par le caractère associé). Donc, l'idéal a A est égal à A, ce qui implique l'inversibilité de a et $a \in G$. □

Les conséquences sont importantes et variées, même pour le cas non commutatif.

(1.2.8) COROLLAIRE 1. - *Soit* A *une algèbre de Banach unitaire et soit* M *une partie commutative non vide de* A. *Alors pour tout* $a \in M$ *on a :*

$\sigma(a) = \{\chi(a)\ ;\ \chi$ *caractère de* $PL(M)\}$

Preuve - Car si $B = PL(M)$ on sait d'une part que $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$ et d'autre part que B est commutative. □

(1.2.9) COROLLAIRE 2. - *Soit* A *une algèbre de Banach unitaire. Pour deux éléments* a *et* b *de* A *qui commutent on a :*

a) $\sigma(a+b) \subset \sigma(a) + \sigma(b)\ ;\ \sigma(ab) \subset \sigma(a)\,\sigma(b)$

b) $r(a+b) \leq r(a) + r(b)\ ;\ r(ab) \leq r(a)\,r(b)$

$r(\mathbb{1}) = 1\ ;\ r(\lambda a) = |\lambda|\,r(a)$

c) Le rayon spectral $r(.)$ *est une semi-norme d'algèbre unitaire sur toute sous-algèbre commutative unitaire de* A.

Preuve - Avec (1.2.8) appliqué à la partie $M = \{a,b\}$. □

(1.2.10) COROLLAIRE 3. - *Soit* $a \in A$. *Alors le spectre de l'algèbre* $PL(a)$ *est canoniquement homéomorphe au spectre* $\sigma(a)$.

Preuve - On peut remplacer A par $PL(a)$, ce qui ne change pas le spectre $\sigma(a)$ et permet de se ramener au cas où A est commutative. Soit $S = SpA = Sp(PL(a))$. La fonction $\hat{a} : S \to \mathbb{C}$ est telle que $\hat{a}(S) = \sigma(a)$. Elle réalise donc une surjection continue entre les deux compacts S et $\sigma(a)$. Pour montrer que $\hat{a}$ est un homéomorphisme de S sur $\sigma(a)$, il suffit de prouver qu'elle est injective. Or si χ_1 et χ_2 sont deux caractères de A tels que $\chi_1(a) = \chi_2(a)$, on voit avec (1.1.19) que l'ensemble des $x \in A$ tels que $\chi_1(x) = \chi_2(x)$ est une sous algèbre pleine qui contient a, donc aussi

$A = PL(a)$ et ainsi $\chi_1 = \chi_2$. □

Pour illustrer ces corollaires et tester la puissance de la théorie donnons quelques exemples parmi les plus classiques.

Un théorème de Wiener. - Soit A l'algèbre convolutive $\ell^1(\mathbb{Z})$ du groupe $\mathbb{Z}$ et soit $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ la base canonique de A, où $e_n = (\delta_{nk})_k$ avec δ_{nk} indice de Kronecker. Il est aisé de voir que tout $a = (a_n) \in A$ s'écrit $a = \Sigma a_n e_n$, et que $e_n = (e_1)^n = e_1 * e_1 * \dots * e_1$ (n fois) pour $n \geq 1$, formule que l'on étend au cas $n < 0$. Ainsi $a = \Sigma a_n (e_1)^n$, la série étant absolument convergente. Alors $A = PL(e_1)$ et pour tout $\chi \in SpA$ on a $\chi(a) = \Sigma a_n \chi(e_1)^n$. Comme $\chi(e_1)^n = \chi(e_n)$ on voit que $|\chi(e_1)|^n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, ce qui n'est possible qui si $|\chi(e_1)| = 1$. En résumé, le spectre SpA s'identifie par l'application $\hat{e}_1 : \chi \to \chi(e_1)$ au tore $\mathbb{T} = \{z, |z| = 1\}$, ce qui fournit d'ailleurs une application de (1.2.10).

On a donc $\chi(a) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$, avec $z = \chi(e_1) \in \mathbb{T}$. Si l'on écrit $z = e^{it}$, on obtient pour $\hat{a}$ une série de Fourier absolument convergente. La condition que a est inversible dans A est donc que $0 \notin \sigma(a) = \hat{a}(SpA) = \hat{a}(\mathbb{T})$, soit encore $\Sigma a_n z^n \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{T}$. Dans ce cas $\hat{b} = \frac{1}{\hat{a}}$ si $b = a^{-1}$ et on a obtenu :

(1.2.11) THEOREME. - (WIENER, 1932). - *Soit* $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{int}$ *une série de Fourier complexe absolument convergente. Si la fonction* $f(t) = \Sigma a_n e^{int}$ *ne s'annule pas sur* $\mathbb{R}$, *alors la fonction inverse* $1/f(t)$ *se développe, elle aussi, en série de Fourier complexe absolument convergente.*

En replaçant l'algèbre $A = \ell^1(\mathbb{Z})$ par sa sous-algèbre convolutive $B = \ell^1(\mathbb{N})$, on voit aisément que $SpB = \sigma_B(e_1) = \overline{U} = \{z, |z| \leq 1\}$ par l'identification $z = \chi(e_1)$. Ainsi $\sigma_B(e_1) \neq \sigma_A(e_1)$ et B n'est pas pleine dans A. Et de plus, par le raisonnement précédent on obtient :

(1.2.12) THEOREME. - *Soit* $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ *une série entière absolument convergente pour* $|z| \leq 1$. *Si* $f(z)$ *ne s'annule pas pour* $|z| \leq 1$, *alors* $1/f(z)$ *se développe aussi en série entière absolument convergente pour* $|z| < 1$.

<u>Parties polynômialement convexes de $\mathbb{C}$</u>. - Désignons par $\mathscr{P} = \mathbb{C}[X]$, l'espace vectoriel des polynômes holomorphes (de la variable z). On dit qu'une partie bornée $K \subset \mathbb{C}$ est polynômialement convexe lorsque tout point $z \in \mathbb{C}$, tel que $|P(z)| \leq \|P\|_K$ pour tout $P \in \mathscr{P}$, est élément de K. Il est immédiat que K est fermé, donc compact. Il est immédiat aussi, qu'une intersection quelconque (indexée par un ensemble non vide) de compacts p.c est encore p.c, de sorte qu'on peut parler de l'enveloppe polynômialement convexe d'une partie quelconque bornée de $\mathbb{C}$, une fois vu que les disques $\{|z| \leq r\}$ sont p.c. A partir de là, on a les faits suivants :

- Soit $Q \in \mathscr{P}$ alors l'ensemble $\{z, |Q(z)| \leq r\}$ est p.c. si $d°Q \geq 1$.
- En particulier toute partie finie est p.c.
- Le tore $\mathbb{T} = \{z, |z| = 1\}$ n'est pas p.c. Un compact K d'intérieur vide n'est donc pas nécessairement p.c.
- Soit K une partie bornée non vide de $\mathbb{C}$. Alors l'enveloppe p.c $\tilde{K}$ de K est formée de tous les points z vérifiant

  (*) $|P(z)| \leq \|P\|_K \quad \forall P \in \mathscr{P}$
- On a $\|P\|_K = \|P\|_{\tilde{K}}$ pour tout $P \in \mathscr{P}$.

La liaison avec la théorie spectrale et les théorèmes précédents se fait avec le théorème suivant, explicitant complètement $\tilde{K}$ lorsque K est compact, ce qu'on peut supposer puisque $\tilde{K} = \tilde{\bar{K}}$. On remarquera qu'il signifie que le passage à l'enveloppe p.c "bouche les trous".

(1.2.13) <u>THEOREME</u>. - *Soit* K *un compact non vide de* $\mathbb{C}$. *On désigne par* Ω *la réunion des composantes connexes bornées de l'ouvert* $\mathbb{C} \setminus K$. *Alors* Ω *est un ouvert borné et l'enveloppe* p.c $\tilde{K}$ *de* K *est égale à* $K \cup \Omega$.

<u>*Preuve*</u> - Plaçons K dans une boule $B(o,r)$ et désignons par W l'unique composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus K$. Alors $W \supset \{z \ ; \ |z| > r\}$ et $\Omega \subset B(o,r)$ donc $K \cup \Omega \subset B(o,r)$. Par ailleurs, en posant $K' = K \cup \Omega$ on a :

$$\mathbb{C} \setminus K' = \mathbb{C} \setminus (K \cup \Omega) = (\mathbb{C} \setminus K) \cap (\mathbb{C} \setminus \Omega) = (\Omega \cup W) \cap (\mathbb{C} \setminus \Omega) = W$$

donc $K' = \mathbb{C} \setminus W$ et ainsi K' est un compact contenant K. Mais dans l'autre sens on a $\partial K' \subset K$, où $\partial K'$ est la frontière de K' ; en effet, si $z \in \partial K' = \partial W$ alors $z \notin W$ car W est ouvert, mais il existe $z_n \in W$ tels que $z_n \to z$; ceci implique $z \notin \Omega$ car Ω est aussi ouvert et $z \in \Omega$ assurerait l'existence d'un entier n tel que $z_n \in W \cap \Omega$ ce qui est absurde ; ainsi il reste $z \in K$.

En résumé $\partial K' \subset K \subset K'$, de sorte que $K' = K$ si K' est sans point intérieur. Si $\overset{\circ}{K'} \neq \emptyset$ alors le principe du maximum, appliqué à tout $P \in \mathcal{P}$, garantit que $\|P\|_{K'} = \|P\|_{\partial K'} = \|P\|_K$. Il suit de là que les points de K' vérifient la condition (*) écrite plus haut, autrement dit $K' \subset \widetilde{K}$. Pour prouver l'égalité $K' = \widetilde{K}$ il ne suffit donc plus de prouver que K' est lui-même polynômialement convexe.

Pour cela introduisons l'algèbre $A = C(K')$ et l'élément $e = X : z \to z$, fonction identique. On sait que $\sigma_A(e) = e(K') = K'$ de sorte que $\rho_A(e) = \mathbb{C} \setminus K' = W$ est connexe. Soit maintenant $B = \overline{\mathcal{P}}$ l'adhérence de $\mathcal{P}$ dans $C(K')$; ce n'est autre que l'algèbre unitaire fermée engendrée par e dans $A = C(K')$. Avec (1.1.14) on a $\sigma_B(e) = \sigma_A(e) = K'$, et comme B est engendrée par e on a, avec (1.2.10), un homéomorphisme $\hat{e} : \mathrm{Sp}B \to \sigma_B(e) = K'$. Autrement dit, $\mathrm{Sp}B$ s'identifie au compact K', chaque $z \in K'$ définissant un caractère χ_z obtenu par prolongement de l'application $P \to P(z)$, et réciproquement tout caractère étant ainsi obtenu. Fixons alors $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|P(z_0)| \leq \|P\|_{K'}$ pour tout $P \in \mathcal{P}$. Alors l'application $P \to P(z_0)$ est continue sur $\mathcal{P} \subset C(K')$ et multiplicative et unitaire ; elle se prolonge donc canoniquement par continuité en un caractère $\chi \in \mathrm{Sp}B$, de sorte qu'il existe aussi $z \in K'$ tel que $P(z_0) = P(z)$ pour tout $P \in \mathcal{P}$. Avec $P = e$ on obtient $z_0 = z$ donc $z_0 \in K'$ et ainsi K' est p.c donc $\widetilde{K} = K' = K \cup \Omega$. □

(1.2.14) COROLLAIRE. - *Pour qu'un compact K de $\mathbb{C}$ soit polynômialement convexe il faut et il suffit que son complémentaire $\mathbb{C} \setminus K$ soit connexe.*

Par exemple tout compact convexe est p.c. Un autre exemple est donné avec tout compact dénombrable car si $K = (z_n)$ et si $z, z' \notin K$ alors le faisceau de cercles passant par z et z' est en correspondance bijective avec $\mathbb{R}$ et pour qu'un cercle Γ de ce faisceau coupe K il faut et il suffit que ce soit l'un des cercles Γ_n défini par les 3 points z,z',z_n (qui sont distincts si $z \neq z'$) ; autrement dit, il existe certainement un cercle Γ passant par z et z' et tracé dans $\mathbb{C} \setminus K$, ce qui prouve que $\mathbb{C} \setminus K$ est connexe par arc, donc connexe.

Remarque : On peut démontrer, mais c'est loin d'être une évidence, le théorème classique de MERGELYAN (1952), à savoir qu'étant donné un compact $K \subset \mathbb{C}$, une condition nécessaire et suffisante pour que l'adhérence $\overline{\mathscr{P}}$ de l'espace $\mathscr{P}$ des polynômes holomorphes dans l'espace $C(K)$ coïncide avec l'espace $\mathscr{H}(\overset{\circ}{K}) \cap C(K)$ des fonctions continues sur K et holomorphes à l'intérieur de K, est que K soit polynômialement convexe. Pour une preuve voir RUDIN - Real and complex analysis, chap. 20.-

(1.3) ALGEBRES STELLAIRES UNITAIRES. - La notion d'involution et d'algèbres stellaires va permettre de préciser l'énoncé (1.2.7) en offrant une caractérisation des algèbres du type $C(K)$. Il s'agit en fait de savoir dans quelles conditions la transformation de Gelfand $a \to \hat{a}$ est un isomorphisme isométrique.

Algèbres involutives. - Une involution sur l'algèbre (complexe) unitaire A est une application antilinéaire $x \to x^*$ telle que $x^{**} = x$ et $(xy)^* = y^* x^*$. On a alors $\mathbb{1}^* = \mathbb{1}$ car $\mathbb{1}\,\mathbb{1}^* = \mathbb{1}^*\,\mathbb{1} = \mathbb{1}^*$ et $\mathbb{1}\,\mathbb{1}^* = (\mathbb{1}^*\,\mathbb{1})^* = \mathbb{1}^{**} = \mathbb{1}$. On dit souvent que x^* est l'adjoint de x. Un élément x tel que $x^* = x$ est dit *hermitien* ; il est dit *normal* lorsque $xx^* = x^* x$; enfin, il est dit *unitaire* lorsque $xx^* = x^* x = \mathbb{1}$, c'est-à-dire lorsque $x^{-1} = x^*$.

Une algèbre de Banach est dite *involutive* lorsqu'elle est munie d'une involution telle que $\|x^*\| = \|x\|$

Algèbres stellaires. - En approfondissant le concept précédent on obtient encore :

(1.3.1) DEFINITION. - *Une algèbre stellaire est une algèbre involutive* A *telle que* $\|xx^*\| = \|x\|^2$ *pour tout* $x \in A$.

Les exemples les plus importants sont, dans le cas commutatif, les algèbres $C(K)$, $C^{\infty}(T)$, $L^{\infty}(\Omega,\Sigma,\mu)$, $BM(\Omega,\Sigma)$, avec $f^* = \overline{f}$, et, dans le cas non commutatif, l'algèbre $L(H)$ des opérateurs sur un espace de Hilbert munie de l'opération d'adjonction. On a en effet $\|T^*\| = \|T\|$ donc $\|TT^*\| \leq \|T\|^2$ et

$$\|TT^*\| = \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1}} |(T^* x | T^* y)| \geq \sup_{\|x\| \leq 1} \|T^* x\|^2 = \|T^*\|^2 = \|T\|^2 .$$

(1.3.2.) PROPOSITION. - *Soit* A *une algèbre stellaire commutative. On a alors*

$\|x^2\| = \|x\|^2$ *pour tout* $x \in A$.

Preuve - $\|x^2\|^2 = \|x^2(x^2)^*\| = \|x^2 x^{*2}\| = \|xx^*(xx^*)^*\| = \|xx^*\|^2 = \|x\|^4$. □

(1.3.3) COROLLAIRE. - *Si* A *est stellaire et commutative alors* $r(x) = \|x\|$ *pour tout* $x \in A$. *En particulier il n'y pas d'élément quasi-nilpotent non nul.*

Preuve - Car $\|x^{2^n}\| = \|x\|^{2^n}$ donc $r(x) = \lim \|x^{2^n}\|^{2^{-n}} = \|x\|$. □

Un résultat fondamental est maintenant le suivant :

(1.3.4) LEMME (ARENS).- *Soit* A *une algèbre stellaire unitaire.*

a) Pour tout élément hermitien $h \in A$ *le spectre* $\sigma(h)$ *est réel, autrement* $\sigma(h) \subset \mathbb{R}$.

b) Pour tout élément unitaire $u \in A$ *le spectre* $\sigma(u)$ *est contenu dans le tore* $\mathbb{T}$.

Preuve - Démontrons b) : Remarquons d'abord que si a est inversible et si $\lambda \in \rho(a)$ est tel que $\lambda \neq 0$, alors $\lambda^{-1} \in \rho(a^{-1})$. En effet il existe $b = R(\lambda,a)$, qui commute avec a, tel que $(\lambda-a)b = \mathbb{1} = (a^{-1}-\lambda^{-1})b\lambda a$, donc $\lambda^{-1} \in \rho(a^{-1})$. Ceci étant si u est unitaire alors $\|u\|^2 = \|uu^*\| = \mathbb{1}$, donc $\|u\| = 1$ et $\|u^{-1}\| = \|u^*\| = 1$. Si $\lambda \in \sigma(u)$ alors $|\lambda| \leq 1$ et $\lambda \neq 0$ (car $0 \in \rho(u)$) mais $\lambda^{-1} \in \sigma(u^{-1})$ car sinon $\lambda^{-1} \in \rho(u^{-1})$ et d'après la remarque on aurait $\lambda \in \rho(u)$; donc $|\lambda^{-1}| \leq 1$ et ainsi $|\lambda| = 1$ et $\sigma(u) \subset \mathbb{T}$. Pour prouver a), il suffit de considérer $u = \exp(ih)$, qui est tel que $u^* = \exp(-ih)$ comme on voit par développement en série, continuité de l'adjonction et utilisation des égalités $(h^n)^* = (h^*)^n = h^n$. Alors u est unitaire. Introduisons maintenant l'algèbre $B = PL(h)$; alors $u \in B$ et $u^* \in B$. Fixons $\lambda \in \sigma(h)$; on sait qu'il existe un caractère χ de B tel que $\lambda = \chi(h)$, d'où l'on déduit $\chi(u) = e^{i\lambda} \in \sigma(u)$. Ainsi $e^{i\lambda} \in \mathbb{T}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. □

(1.3.5) <u>COROLLAIRE 1</u>. - *Soit* A *une algèbre stellaire commutative unitaire. Alors tout caractère* χ *de* A *est hermitien, c'est-à- dire que* $\chi(x^*) = \overline{\chi(x)}$ *pour tout* $x \in A$.

<u>*Preuve*</u> - En décomposant x selon $x = a + ib$ avec $a = \frac{1}{2}(x+x^*)$ et $b = \frac{1}{2i}(x-x^*)$, on voit que a et b sont hermitiens, de sorte qu'il suffit de prouver que $\chi(h)$ est réel pour tout élément hermitien h. Mais c'est justement (1.3.4).□

(1.3.6) <u>COROLLAIRE 2</u>. - *Soit* A *une algèbre stellaire unitaire. Toute sous-algèbre stellaire* B *(c'est-à-dire fermée et stable pour l'involution et aussi unitaire) est pleine dans* A.

<u>*Preuve*</u> - Si $h \in B$ est hermitien alors $\sigma_B(h) \subset \mathbb{R}$ est rare dans $\mathbb{C}$, donc $\sigma_B(h) = \sigma_A(h)$ avec (1.1.14). Si $a \in B$ est inversible dans A, alors les éléments hermitiens $h = aa^*$ et $k = a^*a$ sont dans B et inversibles dans A, donc aussi dans B d'après ce qui précède. Cela siginifie que a est inversible à droite et à gauche dans B, donc inversible dans B et ainsi B est pleine. □

(1.3.7) <u>COROLLAIRE 3</u>. - *Soit* A *une algèbre stellaire unitaire. Pour toute partie non vide* M, *l'algèbre stellaire* B *engendrée par* M *coïncide avec* $PL(M \cup M^*)$.

<u>*Preuve*</u> - Car B est pleine et contient $M \cup M^*$, donc aussi $PL(M \cup M^*)$. Réciproquement $PL(M \cup M^*)$ est stable par involution et fermée, donc stellaire, et ainsi contient B. □

(1.3.8) <u>COROLLAIRE 4</u>. - *Soit* A *une algèbre stellaire unitaire. Pour tout élément normal* $a \in A$ *on a* $r(a) = \|a\|$ *de sorte qu'un élément normal et quasi-nilpotent est nécessairement nul.*

<u>*Preuve*</u> - Il suffit de calculer r(a) dans l'algèbre $B = PL(a,a^*)$ puisque

$\sigma(a)$ est inchangé. Mais B étant stellaire et commutative (puisque a est normal), on est ramené à (1.3.3). □

On en arrive maintenant, après avoir développé toutes les conséquences du lemme d'Arens, au résultat fondamental :

(1.3.9) THEOREME (GELFAND-NAIMARK). - *Soit* A *une algèbre stellaire commutative unitaire. Alors la transformation de Gelfand* $a \to \hat{a}$ *est une isométrie involutive surjective de* A *sur l'algèbre stellaire* C(SpA).

Preuve - La transformation de Gelfand est déjà un morphisme d'algèbres unitaires. Elle est involutive puisque $\widehat{a^*} = \overline{\hat{a}}$ par (1.3.5). Elle est isométrique puisque $\|\hat{a}\| = r(a) = \|a\|$ avec (1.3.8). Il reste à voir qu'elle est surjective. Prouvons pour cela que son image $\hat{A}$, qui est complète dans C(SpA), y est partout dense. Or $\hat{A}$ est, dans C(SpA), une sous-algèbre stable par conjugaison, contenant les constantes et séparant les points du compact SpA puisque $\chi_1(a) = \chi_2(a)$ pour tout a implique $\chi_1 = \chi_2$. Alors le résultat est acquis avec le théorème de Stone-Weierstrass. □

Parmi les exemples les plus simples on retrouve l'isomorphisme isométrique entre $C^\infty(T)$ et $C(\beta T)$, où $\beta T = Sp[C^\infty(T)]$ est le compactifié de Stone-Čech de l'espace complètement régulier T. Avec $A = BM(\Omega,\Sigma)$, algèbre des fonctions mesurables et bornées par rapport à la tribu Σ de Ω, on obtient avec K = SpA la notion de "compactification d'un espace mesurable", ce qui permet d'identifier le dual $BM(\Omega,\Sigma)' = ba(\Sigma)$ à un espace de mesures de Radon M(K) = C(K)'. Le théorème de Gelfand-Naimark s'applique aussi au cas de l'algèbre $L^\infty(\Omega,\Sigma,\mu)$. Il est facile de voir que dans ces deux derniers cas le compact K = SpA a des propriétés remarquables de disconnexité en général.

Calcul fonctionnel dans une algèbre stellaire unitaire. - Lorsque A n'est pas commutative on ne peut évidemment espérer obtenir une isométrie du type $A \simeq C(K)$. Toutefois le théorème de Gelfand-Naimark reste largement utile, car il permet de construire ce qu'on appelle un "calcul fonctionnel continu".

Supposons toujours A stellaire unitaire et soit $\dot{M} = a = (a_i)_{i \in I}$

une famille *commutative* d'éléments normaux, où l'on entend par là que chaque a_i commute avec chaque a_j et chaque a_j^*. Alors la partie $M \cup M^*$ est commutative, de même que la sous-algèbre pleine $B = PL(M \cup M^*)$. On généralise la transformée de Gelfand $\hat{a}$ définie par $a \in A$, en posant ici

$$\hat{a}(\chi) = (\chi(a_i))_{i \in I} \in \mathbb{C}^I$$

pour tout $\chi \in SpB$. Alors $\hat{a} : SpB \to \mathbb{C}^I$ est continue et de plus, elle est injective car si $\chi_1(a_i) = \chi_2(a_i)$ pour tout i, alors $\chi_1(a_i^*) = \chi_2(a_i^*)$ aussi puisque les caractères de B sont hermitiens d'après (1.3.5). Mais dans ce cas, l'ensemble des $x \in B$ tels que $\chi_1(x) = \chi_2(x)$ est une sous-algèbre pleine avec (1.1.19), qui contient $M \cup M^*$, donc est égal à B et ainsi $\chi_1 = \chi_2$. L'image $\hat{a}(SpB) \subset \mathbb{C}^I$ est donc un compact non vide de $\mathbb{C}^I$, homéomorphe à SpB par l'intermédiaire de la fonction $\hat{a}$. On dit que ce compact, noté $\sigma(M)$ ou $\sigma(a)$ ou $\sigma((a_i))$ est le *spectre simultané* de la famille (a_i).

On a évidemment $\sigma(a) \subset \prod_{i \in I} \sigma(a_i)$ et dans le cas où $M = \{a\}$, avec a élément normal de A, on retrouve le spectre $\sigma(a) \subset \mathbb{C}$. La notion $\sigma(a)$ peut donc être conservée sans incohérence.

Ainsi la fonciton $\hat{a}$ définit, par transposition, un $*$-morphisme d'algèbres unitaires, isométrique et surjectif.

$$\theta : C[\sigma(a)] \to C(SpB) \qquad \theta(f) = f \circ \hat{a}$$

et la transformation de Gelfand $G : B \to C(SpB)$ est aussi un $*$-morphisme du même type. En composant selon $\Phi = G^{-1} \circ \theta : C[\sigma(a)] \to B$ on obtient encore un $*$-morphisme du même type, bien défini par l'égalité $\Phi(f)\hat{} = f \circ \hat{a}$, soit encore par :

$$\chi[\Phi(f)] = f(\chi(a)) \quad \text{avec } \chi(a) = (\chi(a_i))_i \text{ et } \chi \in SpB.$$

En particulier si e_i est la fonction coordonnée $z \to z_i$ de $\mathbb{C}^I$ dans $\mathbb{C}$, on obtient $\Phi(e_i) = a_i$ et $\Phi(\overline{e}_i) = a_i^*$. D'ailleurs sous ces conditions Φ est l'unique $*$-morphisme, car Φ est alors connu sur tous les polynômes P des variables e_i ou $\overline{e_j}$, donc sur $C[\sigma(a)]$ par le théorème de Stone-Weierstrass. En résumé on a obtenu :

(1.3.10) THEOREME (Calcul fonctionnel continu simultané).- *Soit* A *une algèbre stellaire unitaire. A toute famille* $a = (a_i)_{i \in I}$ *d'éléments* *normaux de* A, *commutative dans le sens où chaque* a_i *commute avec chaque* a_j *et chaque* a_j^*, *on peut associer un* $*$*-morphisme d'algèbres unitaires isométrique* $\Phi : C[\sigma(a)] \to A$, *unique sous la condition que* $\Phi(e_i) = a_i$ *avec* $e_i : z \to z_i$. *L'image de* Φ *est la sous-algèbre* $B = PL(M \cup M^*)$ *avec* $M = (a_i)_{i \in I}$, *c'est-à-dire la sous-algèbre stellaie engendrée par les* a_i *dans* A.

Remarque 1. - La linéarité, la multiplicativité et la stabilité de l'adjonction vérifiées par Φ font que pour tout polynôme P par rapport aux variables z_i et $\bar{z}_i$ on a $\Phi(P) = P(a_i, a_j^*)$. On notera donc très souvent $\Phi(f) = f(a)$ en notation très condensée, ce qui respecte le symbolisme multiplicatif $(fg)(a) = f(a)g(a)$, ainsi que l'égalité $\bar{f}(a) = f(a)^*$.

Remarque 2. - La sous-algèbre $B = PL(M \cup M^*)$ est commutative de sorte que $\Phi(f) \in (M \cup M^*)^{cc}$. La question peut se poser de savoir si l'on obtient ainsi tout le bicommutant $(M \cup M^*)^{cc}$. Dans le même genre d'idées, on peut se demander s'il est possible de définir $\Phi(f) = f(a)$ pour une algèbre de fonctions f sur $\sigma(a)$ plus large que $C[\sigma(a)]$. Autrement dit peut-on étendre le calcul fonctionnel "continu" en un calcul plus large. On verra que la réponse est positive et qu'on peut définir $\Phi(f)$ pour toute fonction de Baire bornée f sur le compact $\sigma(a) \subset \mathbb{C}^I$, au moins pour le cas de certaines algèbres A comprenant les algèbres d'opérateurs L(H) sur un espace de Hilbert.

Revenons maintenant aux conséquences du théorème.

(1.3.11) COROLLAIRE 1 (Théorème spectral).- *Soit* $a = (a_i)_{i \in I}$ *avec les hypothèses du théorème. Pour toute* $f \in C[\sigma(a)]$ *on a*

$$\sigma(f(a)) = f[\sigma(a)]$$

Preuve - En raisonnant dans l'algèbre $B = PL(M \cup M^*)$ on voit que $\sigma(f(a)) = \{\chi(f(a)) ; \chi \in SpB\}$ et $f[\sigma(a)] = \{f(\chi(a)), \chi \in SpB\}$. Or $\chi(f(a)) = \chi[\Phi(f)] = f(\chi(a))$, ce qui suffit. □

Si au lieu d'une seule fonction $f \in C[\sigma(a)]$ on se donne une famille $(f_j)_{j \in J}$ dans $C[\sigma(a)]$, on peut introduire le point $b = (b_j)$ avec $b_j = f_j(a)$ et le spectre simultané $\sigma(b) \subset \mathbb{C}^J$. En posant $f = (f_j) \in C[\sigma(a), \mathbb{C}^J]$ on aura de la même manière, en utilisant les caractères $\chi \in \mathrm{SpB}$:

(1.3.12) <u>COROLLAIRE 2</u> (Théorème spectral simultané). - *Soit* $a = (a_i)$ *avec les hypothèses du théorème et* $f = (f_j) \subset C[\sigma(a)]$.
En posant $f(a) = (f_j(a))$ *on a* $\sigma(f(a)) = f[\sigma(a)]$.

Enfin, le résultat d'itération suivant peut être utile :

(1.3.13) <u>COROLLAIRE 3</u>. - *Soit* $a = (a_i)$ *avec les hypothèses du théorème et* $f = (f_j) \subset C[\sigma(a)]$. *On pose* $b = f(a) = (f_j(a))$. *Alors pour toute* $g \in C[\sigma(b)]$ *on a :*

$$g(b) = g[f(a)] = (g \circ f)(a).$$

<u>*Preuve*</u> - Déjà $\sigma(b) = f[\sigma(a)] \subset \mathbb{C}^J$ donc $g \circ f$ est bien définie et $g \circ f \in C[\sigma(a)]$ L'application $\psi : g \to (g \circ f)(a)$ est un $*$-morphisme d'algèbres unitaires de $C[\sigma(b)]$ dans A tel que $\psi(e_j) = f_j(a) = b_j$, où $e_j : z \to z_j$ est le passage à la j-ème coordonnée de $\mathbb{C}^J$ dans $\mathbb{C}$. Avec la partie unicité de (1.3.10) on obtient $\psi(g) = g(b) = g[f(a)]$. □

Pour terminer le chapitre donnons encore un exemple d'application de (1.3.10).

(1.3.14) <u>THEOREME</u>. - *Soit* H *un espace de Hilbert complexe de dimension finie . Pour toute famille* $(T_i)_{i \in I}$ *d'opérateurs normaux, commutante au sens de* (1.3.10), *le spectre simultané* $\sigma(T) \subset \mathbb{C}^I$ *est fini, et il existe une base orthonormale de* H, *propre pour chacun des* T_i.

<u>*Preuve*</u> - Soit S un o f (ouvert et fermé) du spectre simultané $\sigma(T)$. Alors $1_S \in C\,[\sigma(T)]$ et c'est un élément idempotent invariant par conjugaison. Posons $T = (T_i)_{i \in I}$ et soit $1_S(T) = \Phi(1_S) = P_S$. On obtient un projecteur hermitien de H qui n'est pas nul si $S \neq \emptyset$ puisque $\|P_S\| = \|1_S\| = 1$. Si maintenant S_1 et S_2 sont deux o f disjoints non vides alors $1_{S_1} 1_{S_2} = 0$

et $P_{S_1} P_{S_2} = 0$ et les espaces images $P_{S_1}(H)$ et $P_{S_2}(H)$ sont orthogonaux (et non nuls) dans H. Il suit de là qu'il est impossible de trouver dans

$\sigma(T)$ plus de n o f disjoints, d'où l'on déduit sans difficulté, la possibilité de décomposer $\sigma(T)$ en une partition $S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_p$ de p o f non vides disjoints *minimaux*, avec $1 \leq p \leq n$. Alors chaque S_k est donc un compact *connexe*, et si e_i est toujours la fonction coordonnée $z \to z_i$, l'image $e_i(S_k)$ est un compact connexe de $\mathbb{C}$. Or $e_i(S_k) \subset e_i(\sigma(T)) \subset \sigma(T_i)$ et $\sigma(T_i)$ est exactement l'ensemble (fini) des valeurs propres de T_i, puisque H est de dimension finie. Par conséquent, $e_i(S_k)$ est un compact connexe fini non vide de $\mathbb{C}$, donc un singleton $\{\lambda_i^{(k)}\}$. Il suit de là que S_k lui-même est un singleton $\{\lambda^{(k)}\}$ avec $\lambda^{(k)} = (\lambda_i^{(k)})$ et ainsi $\sigma(T)$ est fini. Posons maintenant $P_k = P_{S_k}$ pour simplifier, et remarquons que sur le spectre $\sigma(T)$ chaque fonction $f \in C[\sigma(T)]$ coïncide avec $\sum_k f(\lambda^{(k)}) 1_{S_k}$, de sorte que chaque opérateur $f(T) = \Phi(f)$ s'écrit $f(T) = \sum_k f(\lambda^{(k)}) P_k$. En particulier $T_j = e_i(T) = \sum_k \lambda_i^{(k)} P_k$, ce qui prouve que $T_i|_{H_k}$, avec $H_k = P_k(H)$, n'est autre que l'homothétie de rapport $\lambda^{(k)}$, et ceci termine la démonstration. □

CHAPITRE 2 - OPERATEURS NORMAUX BORNES SUR UN ESPACE DE HILBERT

Dans ce chapitre, on se propose d'appliquer la théorie spectrale abstraite développée précédemment au cas des opérateurs normaux bornés sur un espace de Hilbert. Le théorème de Gelfand - Naimark nous permet de construire un calcul fonctionnel "continu" associé à de tels opérateurs ; nous verrons en fait que ce calcul fonctionnel se généralise à une classe plus vaste de fonctions : la classe des fonctions de Baire sur le spectre de l'opérateur. La construction de ce calcul fonctionnel "bairien" nous permet alors de définir la mesure spectrale associée à un opérateur normal borné, ces mesures spectrales se révèlant être un outil précieux pour l'étude de tels opérateurs, et tout particulièrement de leur spectre.

Dans un premier temps, nous allons donc introduire la classe des fonctions de Baire sur un espace compact et en examiner, rapidement, les propriétés les plus élémentaires.

(2.1) FONCTIONS DE BAIRE SUR UN ESPACE COMPACT. - Dans ce qui suit, on désigne par S un espace compact.

La tribu de Baire ba(S). - Rappelons qu'une partie A de S est un G_δ si A est une intersection dénombrable d'ouverts de S.

(2.1.1) LEMME. - *Dans* S, *les compacts* G_δ *sont exactement les noyaux* $Z(f) = f^{-1}\{0\}$ *des fonctions continues.*

Preuve - Déjà, si f est continue sur S, Z(f) est compact et $Z(f) = \bigcap_n \omega_n$, où $\omega_n = \{x \; ; \; |f(x)| < \frac{1}{n}\}$, donc Z(f) est un compact G_δ. Inversement, Soit $K = \bigcap_n \omega_n$ un compact G_δ de S. D'après le théorème d'Urysohn, il existe, pour chaque n, une fonction continue f_n, $0 \leq f_n \leq 1$, telle que $f_n = 0$ sur K et $f_n = 1$ sur ω_n^c. La fonction $f = \sum_n 2^{-n} f_n$ est continue et il est clair que $K = f^{-1}\{0\}$. □

(2.1.2) DEFINITION. - *On appelle tribu de Baire sur* S, *et on note* ba(S) *la tribu engendrée par les compacts* G_δ *de* S *(ou par les noyaux des fonctions continues). Un élément* $A \in ba(S)$ *est dit bairien.*

On peut se demander si un compact $K \in ba(S)$ est nécessairement un G_δ, c'est-à-dire, fait partie de la classe qui engendre ba(S). La réponse est positive :

(2.1.3) LEMME. - *Tout compact bairien est un* G_δ.

Preuve - Soit K un compact bairien. Il existe alors une suite (S_n) de compacts G_δ telle que K appartienne à la tribu $\sigma\{S_n\}$ engendrée par la suite (S_n). D'après (2.1.1), pour chaque n, il existe une fonction $f_n \in C(S)$ telle que $S_n = f_n^{-1}\{0\}$. L'application $d : S \times S \to \mathbb{R}^+$ définie par $d(x,y) = \sum_n 2^{-n} |f_n(x) - f_n(y)|$ est un écart sur S auquel on peut associer la relation d'équivalence $\mathscr{R}$ selon $x \mathscr{R} y \Leftrightarrow d(x,y) = 0$. Soient $\hat{S}$ l'espace quotient $S/_{\mathscr{R}}$ et $\pi : S \to \hat{S}$ la surjection canonique. On peut définir de manière canonique une distance $\hat{d}$ sur $\hat{S}$ en posant $\hat{d}(\pi(x), \pi(y)) = d(x,y)$ et il est facile de voir que π est continue de S dans $(\hat{S}, \hat{d})$. Par ailleurs, pour chaque n on a $S_n = \pi^{-1}[\pi(S_n)]$ et comme la famille $\mathscr{F} = \{A \in \sigma\{S_n\}\}; \exists \hat{A} \subset \hat{S},\ A = \pi^{-1}(\hat{A})$ est une tribu, $\mathscr{F}$ coïncide avec $\sigma\{S_n\}$ et il existe une partie $\hat{K} \subset \hat{S}$ telle que $K = \pi^{-1}(\hat{K})$. Alors $\hat{K} = \pi[\pi^{-1}(\hat{K})] = \pi(K)$ est un compact de l'espace métrique $(\hat{S},\hat{d})$, c'est donc un G_δ. Il existe une suite $(\hat{\omega}_n)$ d'ouverts de $\hat{S}$ telle que $\hat{K} = \bigcap_n \hat{\omega}_n$. Alors $K = \bigcap_n \pi^{-1}(\hat{\omega}_n)$ où les $\pi^{-1}(\hat{\omega}_n)$ sont des ouverts de S, ce qui suffit. □

Remarque - Dans ce qui précède, on a déjà noté que si l'espace compact S est métrisable, tout compact (fermé) de S est un G_δ. Dans ce cas, la tribu ba(S) n'est autre que la tribu engendrée par les fermés de S, c'est-à-dire qu'elle coïncide avec la tribu borélienne bo(S) de S (alors que dans le cas général, on a seulement l'inclusion $ba(S) \subseteq bo(S)$).

Ainsi, lorsqu'on raisonne avec le spectre $\sigma(T)$ d'un opérateur normal borné, on ne sort pas du cas métrisable (puisque $\sigma(T)$ est un compact de $\mathbb{C}$), et l'introduction de la tribu de Baire peut paraître superflue. Mais dans le cas où l'on étudie le spectre "simultané" d'une famille non dénombrable d'opérateurs normaux bornés, commutante au sens de (1.3.10), on travaille avec un compact qui n'est plus métrisable a priori, et la tribu de Baire joue alors un rôle essentiel. Notons en effet que pour un compact S non métrisable, la tribu de Baire est généralement strictement plus petite que la tribu borélienne. Par exemple, si $S = [0,1]^I$, où I est un ensemble non dénombrable, les singletons n'appartiennent pas à la tribu ba(S) (sinon, d'après (2.1.3), ils seraient des G_δ , ce qui est absurde), mais, bien-entendu, ce sont des boréliens de S.

Les fonctions de Baire. - Dans ce qui suit, on s'intéresse aux fonctions complexes définies sur le compact S.

(2.1.4) DEFINITIONS :

a) Une classe M *de fonctions est dite stable (resp. b-stable) si, pour toute suite* $f_n \in M$ *(resp. uniformément bornée) convergeant simplement vers une fonction* f, *on a* $f \in M$.

b) On désigne par Ba(S) *la plus petite classe b-stable contenant l'espace* C(S) *des fonctions continues. Une fonction* $f \in Ba(S)$ *est dite "de Baire" ou bairienne.*

Si B(S) désigne l'algèbre stellaire (pour l'involution $f^* = \overline{f}$) de toutes les fonctions bornées sur S, c'est évidemment une classe b-stable contenant C(S) et donc on a $Ba(S) \subseteq B(S)$. En fait, on peut préciser ce résultat.

(2.1.5) PROPOSITION. - Ba(S) *est une sous-algèbre stellaire (donc pleine) de l'algèbre stellaire* B(S).

Preuve - Soit M la classe des fonctions f telles que, pour toute fonction $g \in C(S)$, on ait :

$$f + g, \quad \lambda f, \; fg, \; \overline{f} \in Ba(S)$$

Alors M est une classe b-stable qui contient C(S), donc $Ba(S) \subseteq M$. De même, **soit** M' la classe des fonctions f telles que, pour toute fonction $g \in Ba(S)$, on ait : $f + g$, $fg \in Ba(S)$

M' est encore une classe b-stable contenant C(S) d'après ce qui précède. Ainsi $Ba(S) \subseteq M'$, ce qui suffit puisque Ba(S) est évidemment fermée dans B(S). □

Remarque - La technique précédente permet aussi d'établir que $f \in Ba(S) \Rightarrow |f| \in Ba(S)$.

Il convient maintenant de faire le lien entre la classe Ba(S) des fonctions de Baire et la tribu de Baire ba(S).

(2.1.6) DEFINITION. - *On dit qu'une fonction* $f : S \to \mathbb{C}$ *est Baire-mesurable si elle est mesurable lorsqu'on place sur* S *la tribu de Baire* ba(S) *et sur* $\mathbb{C}$ *la tribu borélienne. On désigne par* $B_m(S)$ *l'ensemble des fonctions Baire-mesurables.*

Notons que, pour qu'une fonction f soit Baire-mesurable, il suffit que l'on ait $f^{-1}(K) \in ba(S)$, pour tout compact K de $\mathbb{C}$.

(2.1.7) PROPOSITION. - *La classe* $B_m(S)$ *est stable et contient l'espace* C(S).

Preuve - Il suffit en fait de voir que toute fonction continue sur S est Baire-mesurable. Or si $f \in C(S)$, tout compact K de $\mathbb{C}$ étant un G_δ, $f^{-1}(K)$ est un fermé (donc un compact) de S qui est encore un G_δ. Ainsi $f^{-1}(K) \in ba(S)$. □

Remarque - Ce résultat nous permet déjà d'affirmer que l'on a $Ba(S) \subseteq B_m(S)$ et donc :

$$Ba(S) \subseteq B_m(S) \cap B(S).$$

En fait, de manière plus précise :

(2.1.8) PROPOSITION. :

a) Pour une partie A *de* S, *on a les équivalences suivantes :*

$$A \in ba(S) \Longleftrightarrow 1_A \in Ba(S) \Longleftrightarrow 1_A \in B_m(S).$$

b) On a $Ba(S) = B_m(S) \cap B(S)$. *Autrement dit, les fonctions de Baire sont exactement les fonctions Baire-mesurables et bornées.*

<u>*Preuve*</u> - a) Il suffit de voir que si A est bairien, alors 1_A appartient à Ba(S). Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des parties $\sigma \subseteq S$ telles que $1_\sigma \in Ba(S)$. Comme Ba(S) est une algèbre, il est facile de voir que la classe $\mathscr{C}$ est stable par réunion finie et passage au complémentaire. De plus, soit (σ_n) une suite croissante de $\mathscr{C}$ et soit $\sigma = \bigcup_n \sigma_n$; alors $1_{\sigma_n} \to 1_\sigma$ et $|1_{\sigma_n}| \leq 1$, donc 1_σ est bairienne et σ appartient à $\mathscr{C}$. $\mathscr{C}$ est donc une tribu. Montrons que $\mathscr{C}$ contient les compacts G_δ, ce qui suffira. Soit $K = \bigcap_n \omega_n$ un compact G_δ de S(on peut supposer la suite (ω_n) décroissante). Avec Urysohn, on obtient une suite $f_n \in C(S)$, telle que $0 \leq f_n \leq 1$, $f_n = 1$ sur K et $f_n = 0$ sur ω_n^c. Alors $f_n \to 1_K$ et $|f_n| \leq 1$. Donc $1_K \in Ba(S)$ et $K \in \mathscr{C}$.

b) Il suffit de voir l'inclusion $B_m(S) \cap B(S) \subseteq Ba(S)$. Soit $f \in B_m(S) \cap B(S)$ une fonction réelle positive ; pour tout $\varepsilon > 0$, soit :

$$s_n(\varepsilon) = \{x \; ; \; n\varepsilon \leq f(x) < (n+1)\varepsilon\}$$

Alors $s_n(\varepsilon) \in ba(S)$ et $s_n(\varepsilon) = \emptyset$ dès que $n\varepsilon > \|f\|$. Ainsi, $1_{s_n(\varepsilon)}$ appartient à Ba(S) d'après ce qui précède et il en est de même pour la fonction $\phi_\varepsilon = \sum_n n\varepsilon 1_{s_n(\varepsilon)}$. Comme on a $\|f - \phi_\varepsilon\| \leq \varepsilon$, f est limite uniforme d'une suite de fonctions de Baire ; elle est donc elle-même de Baire. On passe aisément de là, au cas d'une fonction complexe. □

Pour terminer, précisons un peu le résultat obtenu en (2.1.7).

(2.1.9) <u>PROPOSITION</u>. - $B_m(S)$ *est la plus petite classe stable contenant* C(S).

<u>*Preuve*</u> - Soit M une classe stable contenant C(S). A fortiori, M est b-stable, donc on a $Ba(S) \subseteq M$. Si $f \in B_m(s)$, on pose :

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| \leq n \\ n & \text{si } |f(x)| > n \end{cases}$$

Comme f est Baire-mesurable, l'ensemble $K_n = \{x ; |f(x)| \leq n\}$ appartient à ba(S) et on a $f_n = f1_{K_n} + n1_{K_n^c}$. Déjà, d'après (2.1.8), $n1_{K_n^c}$ appartient à Ba(S). On veut établir que la fonction *bornée* $f1_{K_n}$ est de Baire, pour cela, il suffit de vérifier qu'elle est Baire-mesurable. Or, pour tout compact σ de $\mathbb{C}$, on a :

$$(f1_{K_n})^{-1}(\sigma) = \begin{cases} f^{-1}(\sigma) \cap K_n & \text{si } 0 \notin \sigma \\ f^{-1}(\sigma) \cup K_n^c & \text{si } 0 \in \sigma \end{cases}$$

Ainsi $(f1_{K_n})^{-1}(\sigma)$ appartient à ba(S). Il en résulte que la suite (f_n) est dans Ba(S), donc dans M, et elle converge simplement vers f. Comme la classe M est stable, f appartient aussi à M, ce qui suffit. □

(2.2) LES THEOREMES DE PROLONGEMENT. - S désigne toujours un espace compact et X un espace de Banach. L'objet de ce paragraphe est de donner des conditions pour qu'un opérateur $C(S) \to X$ se prolonge à l'algèbre Ba(S) des fonctions de Baire étudiée précédemment. Pour cela, commençons par introduire une classe particulière d'espaces de Banach, pour lesquels un tel prolongement est possible.

Espaces de Banach faiblement semi-complets. - On dit qu'une suite $(x_n) \in X$ est de Cauchy faible si, pour tout $x' \in X'$, la suite numérique $\langle x_n, x'\rangle$ est convergente (ou de Cauchy). En posant $\ell(x') = \lim \langle x_n, x'\rangle$ on définit donc une forme linéaire $\ell \in (X')^*$ dual algébrique de X', mais rien n'assure en général que l'on ait $\ell \in X$.

(2.2.1) DEFINITION. - *Un espace de Banach* X *est dit faiblement semi-complet si toute suite* (x_n) *de Cauchy faible est faiblement convergente dans* X, *c'est-à-dire, s'il existe* $x \in X$ *tel que* $\langle x, x'\rangle = \lim \langle x_n, x'\rangle$, *pour tout* $x' \in X'$.

(2.2.2) THEOREME. - *Tout espace de Banach réflexif et en particulier tout espace de Hilbert, est faiblement semi-complet.*

Preuve - En effet, soit (x_n) une suite de Cauchy faible dans un espace de Banach réflexif X ; alors (x_n) est faiblement bornée, donc fortement bornée d'après le théorème de Banach-Steinhaus. Or les boules de X sont faiblement compactes (pour $\sigma(X,X')$), donc (x_n) possède une valeur d'adhérence faible $x \in X$. Or, pour tout $x' \in X'$, la suite $(\langle x_n, x'\rangle)$ est convergente, on a donc nécessairement :

$$\langle x, x'\rangle = \lim_n \langle x_n, x'\rangle$$

et X est faiblement semi-complet. □

Il faut noter qu'il existe des espaces de Banach faiblement semi-complets, mais non réflexifs. On pourra par exemple établir :

(2.2.3) EXERCICE. - Les espaces de Banach suivants sont faiblement semi-complets :

$$X = \ell^1(I) \;;\; X = L^1(\mu) \;;\; X = ca(\Sigma) \;;\; X = ba(\Sigma)$$

où $ca(\Sigma)$ (resp. $ba(\Sigma)$) désigne l'espace des mesures signées (resp. fonctions additives d'ensembles bornées) sur une tribu Σ, muni de la norme de la variation.

Les théorèmes de prolongement. - Dans ce qui suit, on considère un espace compact S, un espace de Banach X et une application linéaire continue $\phi : C(S) \to X$. Pour tout $x' \in X'$, l'application $\phi_{x'}$ définie selon $\phi_{x'}(f) = \langle\phi(f), x'\rangle$ est une forme linéaire continue sur l'espace C(S), donc s'identifie à une mesure de Radon complexe $\mu_{x'}$. Or, si f est une fonction de Baire, elle est Baire-mesurable et bornée , donc a fortiori $\mu_{x'}$-intégrable. Ainsi, on peut définir $\int f d\mu_{x'}$, pour toute $f \in Ba(S)$ et tout $x' \in X'$, ce qui va nous permettre de prolonger l'opérateur ϕ. De manière plus précise, on a :

(2.2.4) PROPOSITION. - *Soit $\phi : C(S) \to X$ une application linéaire continue ; alors ϕ se prolonge de manière unique en une application linéaire continue $\Phi : Ba(S) \to X''$ qui vérifie la condition de convergence dominée suivante :*

(CD) $\begin{cases} \textit{Pour toute suite } (f_n) \in Ba(S), \textit{ telle que } |f_n| \leq 1 \textit{ et } f_n \to 0 \\ \textit{simplement, on a } \Phi(f_n) \to 0 \textit{ dans } X'' \textit{ pour la topologie } \sigma(X'',X') \end{cases}$

L'application Φ est complètement déterminée par l'égalité :

$$\langle \Phi(f), x'\rangle = \int f d\mu_{x'} \quad \forall f \in Ba(S)$$

où $\mu_{x'}$ est la mesure de Radon complexe $x' \circ \phi$. *De plus, on a,* $\|\Phi\| = \|\phi\|$.

<u>*Preuve*</u> - Pour toute $f \in Ba(S)$ on a $\left|\int f d\mu_{x'}\right| \leq \|f\| \|\mu_{x'}\|$ et $\|\mu_{x'}\| \leq \|\phi\| \|x'\|$; ainsi la forme linéaire $x' \to \int f d\mu_{x'}$ est continue sur X', donc est élément de X", ce qui permet de définir $\Phi(f)$. Il est clair que Φ prolonge ϕ et que la condition de convergence dominée est satisfaite (simple conséquence du théorème de Lebesgue). L'égalité $\|\Phi\| = \|\phi\|$ est immédiate. Reste à prouver l'unicité du prolongement. Or, si Ψ est un autre prolongement de ϕ vérifiant la condition (CD), la classe M des fonctions f telles que $\Psi(f) = \Phi(f)$ contient C(S) et est évidemment b-stable ; ainsi Ψ et Φ coïncident sur Ba(S). □

L'intérêt des espaces de Banach faiblement semi-complets apparaît dans le résultat suivant :

(2.2.5) <u>THEOREME</u>. - *Si l'espace de Banach* X *est faiblement semi-complet, le prolongement* Φ *obtenu en (2.2.4) opère en réalité de* Ba(S) *dans* X.

<u>*Preuve*</u> - C'est encore un raisonnement classique par engendrement. Si M désigne la classe des fonctions f telles que $\Phi(f)$ appartienne à X, M contient évidemment C(S) et il suffit de prouver que M est b-stable. Soit donc (f_n) une suite de M convergeant simplement vers f et telle que $|f_n| \leq 1$; la condition (CD) implique que la suite $(\Phi(f_n))$ de X converge vers l'élément $\Phi(f) \in X''$ pour la topologie $\sigma(X'', X')$. Alors $(\Phi(f_n))$ est une suite de Cauchy faible dans X, donc faiblement convergente vers un point de X, qui est nécessairement $\Phi(f)$. □

Dans le cas où l'espace de Banach X est en réalité une algèbre stellaire A faiblement semi-complète et où l'application $\phi : C(S) \to A$ est un *-morphisme d'algèbres stellaires, le théorème (2.2.5) se précise par le suivant :

(2.2.6) <u>THEOREME</u>. - *Soit* A *une algèbre stellaire faiblement semi-complète ; Alors tout *-morphisme* $\phi : C(S) \to A$ *d'algèbres stellaires admet* *un unique prolongement* $\Phi : Ba(S) \to A$ *qui est encore un *-morphisme d'algèbres stellaires et qui vérifie :*

$$(CD)\begin{cases}\textit{Pour toute suite } f_n \in Ba(S) \textit{ telle que } |f_n| < 1 \textit{ et } f_n \to 0 \\ \textit{simplement , on a } \Phi(f_n) \to 0 \textit{ dans } A \textit{ pour la topologie} \\ \textit{faible } \sigma(A,A').\end{cases}$$

De plus on a , $\|\Phi\| = \|\phi\|$.

Preuve - Il suffit de vérifier que le prolongement Φ construit en (2.2.5) reste multiplicatif et conserve l'involution. Déjà, soit M la classe des fonctions f telles que, pour toute $g \in C(S)$ on ait $\Phi(fg) = \Phi(f)\ \Phi(g)$, M contient évidemment C(S). Montrons que M est b-stable. Si (f_n) est une suite de M telle que $|f_n| < 1$ et (f_n) converge simplement vers f, alors pour toute $g \in C(S)$, la suite $\Phi(f_n g)$ converge faiblement vers $\Phi(fg)$. Or $\Phi(f_n g) = \Phi(f_n)\ \phi(g)$ et $\Phi(f_n)$ converge faiblement vers $\Phi(f)$. Pour conclure, il suffit donc de voir que si une suite $x_n \in A$ converge faiblement vers x alors $x_n y$ converge faiblement vers xy, pour tout $y \in A$. Or, pour tout $x' \in A'$, la forme linéaire $z \to \langle zy,x'\rangle$ est continue donc il existe $y' \in A'$ tel que $\langle zy,x'\rangle = \langle z,y'\rangle$ pour tout $z \in A$. En particulier $\langle (x_n-x)y,x'\rangle = \langle x_n-x,y'\rangle \to 0$, ce qui suffit.

On a établi l'inclusion $Ba(S) \subseteq M$ et ainsi $\Phi(fg) = \Phi(f)\ \Phi(g)$, pour toute $f \in Ba(S)$ et $g \in C(S)$. On recommence le même raisonnement en remplaçant les fonctions $g \in C(S)$ par des fonctions $g \in Ba(S)$, ce qui prouve finalement le caractère multiplicatif de Φ.

Le dernier point, à savoir $\Phi(\overline{f}) = \Phi(f)^*$, pour $f \in Ba(S)$, se démontre de manière analogue, par engendrement. □

Remarque - On a vu en (2.2.5) que le prolongement Φ vérifie une condition de convergence dominée "faible", en ce sens que la suite $\Phi(f_n)$ converge vers zéro, faiblement dans X. En fait, on peut voir assez aisément, tout au moins dans le cas où X = H est un espace de Hilbert, que, sous les mêmes conditions, la suite $\Phi(f_n)$ converge en fait fortement vers zéro, c'est-à-dire pour la norme de H (ceci est une conséquence du théorème de Grothendieck caractérisant les parties faiblement compactes de mesures de Radon).

<u>Le théorème de prolongement pour une algèbre d'opérateurs</u>. - X désigne toujours un espace de Banach et on considère l'algèbre (unitaire) L(X) des opérateurs bornés (continus) $X \to X$.

Sur cette algèbre L(X), on peut considérer plusieurs topologies :

- Celle, classique, de la norme, pour laquelle L(X) est une algèbre de Banach.
- Celle, dite simple-forte, dont les suites convergentes sont les suites (T_n) telles que, pour tout $x \in X$, la suite $(T_n x)$ converge dans X.
- Celle, dite simple-faible, dont les suites convergentes sont les suites (T_n) telles que, pour tout $x \in X$, la suite $(T_n x)$ converge faiblement dans X (pour $\sigma(X,X')$.

On s'intéresse maintenant au prolongement d'un morphisme (continu et unitaire) d'algèbres de Banach : $C(S) \to L(X)$.

<u>Notation</u>. - Pour tout $x \in X$ et tout $x' \in X'$, on désigne par $\mu_{x,x'}$ la mesure de Radon complexe

$$f \to \langle\phi(f)x,x'\rangle$$

Il est intéressant de noter que l'on a :

(2.2.7) <u>LEMME</u>. - *Pour toute* $g \in C(S)$ *on a l'égalité :*

$$\mu_{\phi(g)x,x'} = g \cdot \mu_{x,x'} \quad \forall\, x \in X,\ \forall\, x' \in X'$$

<u>*Preuve*</u> - Elle est immédiate.

Les résultats établis précédemment pourraient laisser croire que la condition de semi-complétude faible - portant sur l'algèbre L(X) - est nécessaire pour effectuer le prolongement du morphisme ϕ. En fait, il n'en est rien. En effet, même si l'espace de Banach X est faiblement semi-complet, rien n'assure qu'il en est de même pour l'algèbre $L(X)$; toutefois, on a :

(2.2.8) THEOREME. - *Soit* X *un espace de Banach faiblement semi-complet et soit* $\phi : C(S) \to L(X)$ *un morphisme (unitaire) d'algèbres de Banach.*

a) ϕ *admet un prolongement* Φ *:* $Ba(S) \to L(X)$ *qui est encore un morphisme d'algèbres de Banach, et on a* $\|\Phi\| = \|\phi\|$

b) Φ *est complètement déterminé par les égalités :*

$$<\Phi(f)x,x'> = \int f d\mu_{x,x'}, \quad \forall f \in Ba(S)$$

c) Enfin, Φ *est unique sous la condition :*

$$(CD)\begin{cases} \text{Pour toute suite } f_n \in Ba(S) \text{ telle que } |f_n| \leq 1 \\ \text{et } f_n \to 0 \text{ simplement, on a } \Phi(f_n) \to 0 \text{ dans } L(X) \text{ pour} \\ \text{la topologie simple-faible.} \end{cases}$$

Preuve - Pour tout $x \in X$, l'application $\phi_x : C(S) \to X$ définie par $\phi_x(g) = \phi(g)x$ est évidemment un morphisme (non multiplicatif) d'espaces de Banach. Comme X est faiblement semi-complet, il résulte de (2.2.5) que ϕ_x admet un prolongement $\Phi_x : Ba(S) \to X$ déterminé par les égalités :

$$<\Phi_x(f), x'> = \int f d\mu_{x,x'}, \quad \forall f \in Ba(S)$$

Pour $f \in Ba(S)$, l'application $x \to \Phi_x(f)$ est évidemment linéaire, mais aussi continue car $\|\mu_{x,x'}\| \leq \|\phi\| \|x\| \|x'\|$, donc appartient à $L(X)$. Ceci permet de définir l'élément $\Phi(f) \in L(X)$ selon $\Phi(f)x = \Phi_x(f)$, pour tout $x \in X$, ce qui prouve l'assertion b). De l'égalité $\|\Phi_x\| = \|\phi_x\|$, on déduit aisément l'égalité $\|\Phi\| = \|\phi\|$.

Reste à voir que le prolongement $\Phi : Ba(S) \to L(X)$ est un morphisme d'algèbres de Banach ; pour cela, il suffit bien-sûr de vérifier qu'il est multiplicatif. On peut déjà noter que si $f \in Ba(S)$ et si $g \in C(S)$, l'élément $\Phi(fg)$ est déterminé par :

$$<\Phi(fg)x,x'> = \int fg d\mu_{x,x'}$$

et il résulte du lemme (2.2.7) que l'on a aussi

$$<\Phi(fg)x,x'> = \int f d\mu_{\phi(g)x,x'} = <\Phi(f)\phi(g)x,x'>$$

Ainsi $\Phi(fg) = \Phi(f)\phi(g)$. Ceci prouve a posteriori que le résultat de (2.2.7) est encore valable pour $f \in Ba(S)$, c'est-à-dire que l'on a $\mu_{\Phi(f)x,x'} = f \cdot \mu_{x,x'}$, d'où on déduit aisément l'égalité $\Phi(f\ g) = \Phi(f)\Phi(g)$, lorsque f et g sont des fonctions de Baire.
Quant à l'assertion c), elle est immédiate, conséquence encore du théorème de Lebesgue. □

Pour terminer, nous allons examiner le cas d'une algèbre L(H) d'opérateurs sur un espace de Hilbert. L(H) est donc une algèbre stellaire (T* désignant l'adjoint de l'opérateur T) et dans ce cas, on considère un morphisme d'algèbres stellaires $\phi : C(S) \to L(H)$, donc avec en plus la condition $\phi(\overline{f}) = \phi(f)^*$. Le théorème (2.2.8) se précise alors selon :

(2.2.9) <u>COROLLAIRE</u>. - *Soit* H *un espace de Hilbert et soit* $\phi : C(S) \to L(H)$ *un morphisme d'algèbres stellaires :*

a) ϕ *admet un prolongement* $\Phi : Ba(S) \to L(H)$ *qui est encore un morphisme d'algèbres stellaires, tel que* $\|\phi\| = \|\Phi\|$. *De plus,* Φ *est déterminé par les égalités :*

$$(\Phi(f)x|y) = \int f d\mu_{x,y} \ ; \ f \in Ba(S) \ ; \ x,y \in H$$

b) Φ *est unique sour la condition :*

$$\left\{\begin{array}{l}\textit{Pour toute suite } f_n \in Ba(S), \textit{ telle que } |f_n| < 1 \text{ et } f_n \to 0 \\ \textit{simplement, on a } \Phi(f_n) \to 0 \textit{ pour la topologie simple-forte de} \\ L(H).\end{array}\right.$$

c) Pour tout $x \in H$, *la mesure de Radon* $\mu_{x,x}$ *est positive et :*

$$\|\Phi(f)x\|^2 = \int |f|^2 \, d\mu_{x,x}$$

d) Pour toute $f \in Ba(S)$, *les opérateurs* $\Phi(f)$ *sont normaux.*

<u>*Preuve*</u> - a) Le fait que Φ soit un *-morphisme se démontre comme en (2.2.6) moyennant la condition de convergence dominée "simple-faible" satisfaite a priori par Φ.

c) Montrons que $\mu_{x,x}$ est positive ; si f est continue et positive, il existe une fonction continue g telle que $f = |g|^2 = g\overline{g}$.

Alors on a :

$$\int f d\mu_{x,x} = (\phi(g\bar{g})x|x) = (\phi(g)x|\phi(g)x) = \|\phi(g)x\|^2 \geq 0$$

Comme Φ est un *-morphisme, on a aussi :

$$\|\Phi f(x)\|^2 = (\Phi(f\bar{f})\ x/x) = \int |f|^2 d\mu_{x,x}$$

b) Il faut établir que Φ satisfait en réalité à une condition de convergence dominée "simple-forte". Or, pour une suite $f_n \in Ba(S)$ vérifiant les hypothèses, on a d'après c) :

$$\|\Phi(f_n)x\|^2 = \int |f_n|^2\ d\mu_{x,x} \to 0$$

d'après le théorème de Lebesgue. Ainsi, $\|\Phi(f_n)x\| \to 0$ pour tout $x \in H$.

d) Cette assertion est immédiate puisque Φ est un *-morphisme. □

(2.3) CALCUL FONCTIONNEL BAIRIEN ASSOCIE A UN OPERATEUR NORMAL BORNE SUR UN ESPACE DE HILBERT. - Dans ce paragraphe, on va utiliser à la fois les résultats de théorie spectrale abstraite établis au chapitre 1 et les théorèmes de prolongement vus en (2.2) pour contruire un calcul fonctionnel bairien associé à un opérateur normal borné T sur un espace de Hilbert H.

Rappelons que l'on désigne par $\sigma(T)$ le spectre (compact) de T ; alors le théorème (1.3.10) appliqué à l'algèbre stellaire unitaire L(H) et à l'opérateur normal T établit déjà l'existence d'un *-morphisme Φ : $C(\sigma(T)) \to L(H)$ qui est même une isométrie ; dont tel que, pour $f \in C(\sigma(T))$, $\|f\| = \|f(T)\|$ ($f(T)$ désignant désormais l'opérateur $\Phi(f)$). Rappelons aussi que, toujours pour $f \in C(\sigma(T))$, on a $f(\sigma(T)) = \sigma(f(T))$ (d'après (1.3.11) Corollaire 1), et que, si f est polynôme $P(z,\bar{z})$ alors $f(T) = P(T,T^*)$. Ainsi $T = \Phi(z \to z)$.

Grâce au corollaire (2.2.9), on peut prolonger Φ en un *-morphisme d'algèbres stellaires, encore noté Φ, opérant de $Ba(\sigma(T))$ dans L(H). Résumons les propriétés de ce calcul fonctionnel bairien vues en (2.2.9) :

a) Pour toute suite (f_n) de $Ba(\sigma(T))$ telle que $|f_n| \leq 1$ et $f_n \to 0$ simplement, on a $\|f_n(T)x\| \to 0$, pour tout $x \in H$.

b) Pour $f \in Ba(\sigma(T))$ et $x \in H$, on a l'égalité :

$$\| f(T)x\|^2 = \int |f|^2 \, d\mu_{x,x}$$

c) Pour $f \in Ba(\sigma(T))$, l'opérateur $f(T)$ est normal ; en particulier si f est réelle, $f(T)$ est un opérateur hermitien.

Notons aussi que les opérateurs du type $f(T)$, pour $f \in Ba(\sigma(T))$, commutent entre eux, puisque le morphisme Φ est multiplicatif et l'algèbre $Ba(\sigma(T))$ commutative.

La seule question qui reste posée est de préciser la relation qui existe entre les parties $f(\sigma(T))$ et $\sigma(f(T))$, lorsque la fonction f est bairienne.

(2.3.1) PROPOSITION. - *Si* f *est une fonction de Baire sur le spectre* $\sigma(T)$ *on a :*

$$\sigma(f(T)) \subseteq \overline{f(\sigma(T))}$$

Preuve - Soit $\lambda \notin \overline{f(\sigma(T))}$ et montrons que λ appartient à $\rho(f(T))$. Or la fonction g définie sur $\sigma(T)$ par $g(z) = \dfrac{1}{\lambda - f(z)}$ est bairienne (car $Ba(\sigma(T))$ est une sous-algèbre pleine de $B(\sigma(T))$) et on a $g(\lambda \mathbb{1} - f) = (\lambda \mathbb{1} - f)g = \mathbb{1}$. Il en résulte que l'on a aussi $g(T)(\lambda I - f(T)) = (\lambda I - f(T))g(T) = I$ et ainsi $(\lambda I - f(T))$ possède un inverse dans $L(H)$ qui est l'opérateur $g(T)$, donc λ appartient à $\rho[f(T)]$. □

Il faut noter que, au moins dans le cas où l'opérateur T est supposé hermitien, on peut construire le calcul fonctionnel continu (et a posteriori bairien) associé à T de manière directe, c'est-à-dire sans utiliser la théorie des algèbres stellaires abstraites et la transformation de Gelfand. On remarquera toutefois que l'on obtient un résultat moins précis en ce sens que l'*-morphisme Φ obtenu n'opère pas sur l'algèbre $C(\sigma(T))$ mais sur l'algèbre des fonctions continues sur un intervalle compact contenant $\sigma(T)$. Donnons toutefois, sans entrer trop avant dans les détails, une idée de la technique utilisée, basée essentiellement sur les propriétés des polynômes positifs sur $[0,1]$.

On remarque tout d'abord que l'on peut définir un ordre sur $L(H)$

selon :

$$S \prec T \Longleftrightarrow (Sx|x) \prec (Tx|x) \quad \forall x \in H$$

et si $0 \prec T$, on dit que l'opérateur T est positif.

(2.3.2) EXERCICE 1. - Soit T un opérateur hermitien tel que $0 \prec T \prec I$; on a $T(I-T) \succ 0$.

On fixe désormais un opérateur T hermitien. Pour tout polynôme à coefficients complexes $P = P(z)$, on sait déjà définir l'opérateur P(T) (tel que $\overline{P}(t) = P(T)^*$). Pour passer de là à la définition de f(T) pour des fonctions f continues, il faut donc examiner la continuité de l'opération $P \to P(T)$. Sachant que tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, P positif sur [0,1] , se décompose sous la forme :

$$P = A^2 + X(1-X)B^2 \text{ avec } A,B \in \mathbb{R}[X], \text{ on peut établir :}$$

(2.3.3) EXERCICE 2. - Soit T un opérateur hermitien tel que $0 \prec T \prec I$. Si $P \in \mathbb{R}[X]$est positif sur [0,1], alors l'opérateur P(T) est posifif.

On en déduit :

(2.3.4) LEMME. - *Soit* T *un opérateur hermitien tel que* $0 \prec T \prec I$.
Pour tout polynôme à coefficients complexes $P = P(z)$, *on a :*

$$\| P(T) \| \prec \| P \|_{[0,1]}$$

Preuve - On commence par choisir P dans $\mathbb{R}[X]$. De l'inégalité $P \prec \|P\|_{[0,1]}$ vraie sur [0,1], on déduit, grâce à (2.3.3) que l'on a aussi $P(T) \prec \|P\|_{[0,1]} I$ c'est-à-dire $(P(T)x/x) \prec \|P\|_{[0,1]} \|x\|^2$ pour tout $x \in H$. On a de même $-(P(T)x/x) \prec \|P\|_{[0,1]} \|x\|^2$, et comme P(T) est hermitien, on a bien l'inégalité souhaitée. Si maintenant $P = P(z)$ est un polynôme complexe, on applique ce qui précède au polynôme $|P|^2 = P\overline{P}$; on en déduit que l'opérateur hermitien $P(T)\, P(T)^*$ satisfait à $\|P(T)\, P(T)^*\| \prec \|P\|^2_{[0,1]}$, ce qui conduit encore à l'inégalité $\|P(T)\| \prec \|P\|_{[0,1]}$. □

Il suffit maintenant d'appliquer le théorème de Stone-Weierstrass pour définir l'opérateur f(T), pour toute fonction complexe $f \in C[0,1]$ et l'on a encore $\| f(T) \| \leq \| f \|_{[0,1]}$. En résumé :

(2.3.5) THEOREME. - *Soit* T *un opérateur hermitien tel que* $0 \leq T \leq I$. *Il existe un *-morphisme d'algèbres stellaires* $\Phi : C[0,1] \to L(H)$ *tel que* $\| \Phi(f) \| \leq \| f \|_{[0,1]}$, *unique sous la condition :*

$$T = \Phi(x \to x)$$

Remarque - Pour faire la liaison entre ce théorème et le théorème (1.3.10) obtenu précédemment, il suffit de voir que pour un opérateur T satisfaisant aux hypothèses de (2.3.5) on a $\sigma(T) \subseteq [0,1]$. Or, si $\lambda \notin [0,1]$, la fonction $f : x \to \frac{1}{\lambda - x}$ est continue sur $[0,1]$ et telle que $f(x)(\lambda - x) = 1$. Il en résulte que l'on a aussi $f(T)(\lambda I - T) = I = (\lambda I - T) f(T)$. Ainsi, $(\lambda I - T)$ est inversible dans L(H) et λ appartient à $\rho(T)$.

Le théorème (2.3.5) se généralise bien-sûr sans problème au cas d'un opérateur hermitien quelconque. En effet, si $T \in L(H)$, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que l'on ait $aI \leq T \leq bI$, ce qui permet d'établir :

(2.3.6) THEOREME. - *Soit* T *un opérateur hermitien et soient* $a, b \in \mathbb{R}$ *tels que* $aI \leq T \leq bI$. *Il existe alors un *-morphisme d'algèbres stellaires* $\Phi : C[a,b] \to L(H)$ *vérifiant* $\| \Phi(f) \| \leq \| f \|_{[a,b]}$; *de plus,* Φ *est unique sous la condition* $T = \Phi(x \to x)$.

Comme dans la remarque précédente, on peut déjà noter que si T est un opérateur hermitien positif, on a : $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}^+$. L'existence d'un calcul fonctionnel continu associé à T, permet alors d'établir l'existence d'une racine carrée de T, c'est-à-dire d'un opérateur $S \in L(H)$, noté $T^{1/2}$, tel que $S^2 = T$.

(2.3.7) EXERCICE 1. - Soit T un opérateur hermitien positif ; Montrer que T possède une unique racine carrée, hermitienne et positive.

Remarque - Pour l'unicité de $T^{1/2}$, on pourra utiliser (1.3.13) Corollaire 3.

(2.3.8) EXERCICE 2. - Soient S et T des opérateurs hermitiens positifs tels que ST = TS. Alors l'opérateur ST est aussi positif.

Pour conclure ce paragraphe, on peut encore noter que le calcul fonctionnel continu associé à une famille commutante d'opérateurs normaux, construit en (1.3.10), se prolonge de manière analogue, grâce à (2.2.9) en un calcul fonctionnel bairien ; en d'autres termes, qu'il existe un $*$-morphisme $\Phi : Ba(\sigma(T)) \to L(H)$, où $\sigma(T)$, spectre simultané de la famille d'opérateurs, est une partie compacte d'un $\mathbb{C}^I$ (donc n'est plus nécessairement métrisable). Les propriétés du morphisme Φ sont évidemment identiques à celles déjà vues dans le cas où la famille est réduite à un seul opérateur normal.

(2.4) MESURE SPECTRALE ASSOCIEE A UN OPERATEUR NORMAL BORNE SUR UN ESPACE DE HILBERT. - On fixe une fois pour toutes un opérateur normal $T \in L(H)$. Dans ce paragraphe, on va développer une des conséquences essentielles des résultats vus précédemment, à savoir l'existence, grâce au calcul fonctionnel bairien associé à T, d'une unique mesure, à valeurs opérateurs, associée à T, notée E_T (ou E pour simplifier) et appelée résolution spectrale de T. Outre le fait qu'on peut caractériser de nombreuses propriétés de T à l'aide de cette mesure, l'intérêt de cette résolution spectrale est surtout qu'elle permet de généraliser les théorèmes classiques de décomposition spectrale, connus pour les opérateurs compacts normaux. On sait en effet qu'un opérateur compact normal a son spectre "discret", c'est-à-dire formé de la suite (λ_n) de ses valeurs propres non nulles, à laquelle on rajoute le point-limite 0. Si, à chaque valeur propre λ_n, on associe son sous-espace propre H_n et le projecteur orthogonal $P_n : H \to H_n$, alors T admet la décomposition spectrale $T = \sum_n \lambda_n P_n$. Lorsque T est seulement supposé normal, son spectre n'est plus "discret" en général et ne contient d'ailleurs pas que des valeurs propres. Toutefois, la décomposition précédente se généralise en une décompositon spectrale "intégrale" sous la forme :

$$T = \int_{\sigma(T)} \lambda \, d\, E\,(\lambda)$$

Définitions et propriétés immédiates. -

(2.4.1) DEFINITION. - *Pour tout* $A \in ba(\sigma(T))$, *on pose* $E(A) = \Phi(1_A) = 1_A(T)$; *l'application :*

$$E : ba(\sigma(T)) \to L(H)$$

s'appelle la résolution spectrale de T.

On a, de manière immédiate :

(2.4.2) PROPOSITION. - *La résolution spectrale de* T *vérifie les propriétés suivantes :*

a) Chaque $E(A)$ *est un projecteur hermitien de* H.
b) $E(\sigma(T)) = I$.
c) $E(A \cap B) = E(A)\, E(B)$.
d) E *est une mesure vectorielle définie sur la tribu* $ba(\sigma(T))$, *à valeurs dans l'espace* $L(H)$ *muni de la topologie simple-forte (noté* $L_S(H)$).

Il est intéressant de voir que la résolution spectrale E permet de reconstruire l'*-morphisme $\Phi : Ba(\sigma(T)) \to L(H)$. En effet, si $f \in Ba(\sigma(T))$ est une fonction réelle et positive, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$s_n(\varepsilon) = \{\lambda \in \sigma(T) \; ; \; n\varepsilon \leqslant f(\lambda) < (n+1)\varepsilon\}$$

Alors $s_n(\varepsilon)$ appartient à $ba(\sigma(T))$, la fonction $\phi_\varepsilon = \Sigma\, n\varepsilon 1_{s_n(\varepsilon)}$ est donc de Baire et vérifie $\| f-\phi_\varepsilon \| \leqslant \varepsilon$. Il en résulte que l'on a aussi $\| \Phi(f)-\Phi(\phi_\varepsilon) \| \leqslant \varepsilon$, d'où l'on déduit :

(2.4.3) PROPOSITION. - *Soit* $f \in Ba(\sigma(T))$ *une fonction positive. Avec les notations précédentes, on a :*

$$\Phi(f) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_n n\varepsilon\, E(s_n(\varepsilon))$$

où la limite est considérée au sens de la norme de $L(H)$.

Remarque - On retrouve ainsi la sommation "par tranche" de Lebesgue, si bien que l'on peut noter :

$$\Phi(f) = f(T) = \int_{\sigma(T)} f(\lambda)dE(\lambda)$$

Il est clair que cette formule s'étend au cas d'une fonction de Baire réelle, puis d'une fonction de Baire complexe quelconque. En particulier :

$$T = \int_{\sigma(T)} \lambda dE(\lambda) \ ; \ T^* = \int_{\sigma(T)} \overline{\lambda} \ dE(\lambda)$$

Le dernier point restant à éclaircir est celui de l'unicité d'une telle résolution spectrale.

(2.4.4) PROPOSITION. - *Il existe une unique mesure* E : $ba(\sigma(T)) \to L_S(H)$ *permettant de définir "un calcul fonctionnel bairien" selon :*

$$\Phi(f) = \int_{\sigma(T)} f(\lambda) \ dE(\lambda) \qquad \forall \ f \in Ba(\sigma(T))$$

et pour laquelle on ait la représentation spectrale :

$$T = \int_{\sigma(T)} \lambda dE(\lambda)$$

Preuve - En effet, pour tout polynôme $P(z,\overline{z})$, on a nécessairement $P(T,T^*) = \int P(\lambda, \overline{\lambda})dE(\lambda)$; ainsi E est connue sur tous les polynômes, et par densité sur toutes les fonctions complexes continues sur $\sigma(T)$, ce qui suffit. □

Lorsqu'on considère E comme une mesure de Radon (vectorielle), il peut être intéressant de noter que le support de E est le spectre $\sigma(T)$ tout entier.

(2.4.5) PROPOSITION. - *Soit* ω *un ouvert de* $\sigma(T)$ *(pour la topologie induite). On a :*

$$E(\omega) = 0 \Longleftrightarrow \omega = \emptyset$$

Preuve - Supposons que ω soit un ouvert non vide de $\sigma(T)$. D'après le théorème d'Urysohn, il existe $f \in C(\sigma(T))$, $f \neq 0$, telle que Supp $f \subseteq \omega$. Alors, $f = f \, . \, 1_\omega$, donc on a $\Phi(f) = \Phi(f) \ E \ (\omega)$. Or la restriction de Φ

à l'espace $C(\sigma(T))$ est une isométrie, donc $\|\Phi(f)\| = \|f\| > 0$. Ainsi on a $E(\omega) \neq 0$.

Terminons par un exemple. On prend pour H l'espace $L^2[0,1]$ et pour T l'opérateur de multiplication par x défini par $Tf(x) = xf(x)$, pour $f \in L^2[0,1]$.

(2.4.6) EXERCICE. -

a) Vérifier que l'opérateur T est hermitien et tel que $0 \leq T \leq I$.

b) Montrer que $\sigma(T) = [0,1]$, mais que T n'admet aucune valeur propre (ainsi T n'est pas compact).

c) Montrer que pour $A \in ba[0,1]$, le projecteur $E(A)$ n'est autre que l'opérateur de multiplication par la fonction indicatrice 1_A, et, de manière générale, que pour $f \in Ba[0,1]$, l'opérateur $f(T)$ est l'opérateur de multiplication par f.

Questions de commutation. - On a déjà noté que les opérateurs $f(T)$, $f \in Ba(\sigma(T))$, commutent entre eux (et a fortiori avec les projecteurs $E(A)$). L'opérateur normal T étant toujours fixé, il est facile de voir :

(2.4.7) PROPOSITION. - *Pour un opérateur* $S \in L(H)$, *les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) T *commute avec* S *et* S^*.

b) S *commute avec* T *et* T^*.

c) S *commute avec tous les* $E(A)$, $A \in ba(\sigma(T))$.

d) S *commute avec tous les* $\Phi(f)$, $f \in Ba(\sigma(T))$

Remarque 1 - On peut en fait établir (théorème de Fuglede) que, dès qu'un opérateur $S \in L(H)$ commute avec l'opérateur normal T, il commute avec tous les opérateurs $f(T)$, et en particulier avec T^*. Ainsi, on pourrait simplifier un peu l'énoncé de (2.4.7).

Remarque 2 - On peut se demander s'il est possible de caractériser tous les opérateurs $S \in L(H)$ qui commutent avec T (donc avec T^*). Par exemple, si T est un opérateur normal simple (voir 3.3.1), on peut montrer qu'un tel opérateur est nécessairement de la forme $f(T)$, $f \in Ba(\sigma(T))$. De même, on peut aussi établir, dans le cas où H est séparable mais T normal quelconque, que si un opérateur S appartient au bicommutant $(T,T^*)^{cc} = (\{T\}^{cc})$, il s'écrit nécessairement $S = f(T)$, $f \in Ba(\sigma(T))$.

Caractérisation en termes spectraux des opérateurs hermitiens et unitaires.
Rappelons qu'un opérateur $T \in L(H)$ est dit unitaire si on a $TT^* = T^*T = I$. En utilisant la résolution spectrale de T, on peut facilement établir le résultat ci-dessous, généralisant (1.3.4).

(2.4.8) PROPOSITION. - *Soit* $T \in L(H)$ *un opérateur normal :*

a) Pour que T *soit hermitien il faut et il suffit que l'on ait* $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$.

b) Pour que T *soit hermitien positif il faut et il suffit que l'on ait* $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}^+$.

c) Pour que T *soit unitaire, il faut et il suffit que l'on ait* $\sigma(T) \subseteq \mathbb{T}$, *où* $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} \ ; \ |\lambda| = 1\}$.

Preuve - a) On a déjà vu que pour T hermitien, on a $\sigma(T) \subseteq R$. La réciproque est immédiate compte-tenu de (2.4.4) puisque l'on a

$$T^* = \int_{\sigma(T)} \bar{\lambda} \, dE(\lambda) = \int_{\sigma(T)} \lambda dE(\lambda) = T$$

b) Dans la remarque suivant (2.3.6), on a noté que si T est hermitien positif, on a $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}^+$. Réciproquement, pour tout $x \in H$, on a :

$$(Tx/x) = \int_{\sigma(T)} \lambda \, dE_{x,x}(\lambda)$$

où $E_{x,x}$ est la mesure scalaire $g \in C(\sigma(T)) \to (\Phi(g)x/x)$. On démontre, comme en (2.2.9.c) que $E_{x,x}$ est une mesure positive, ainsi $(Tx/x) \geq 0$ et l'opérateur hermitien T est positif.

c) Compte-tenu de (1.3.4), il suffit de supposer $\sigma(T) \subseteq \mathbb{T}$. Grâce à (2.4.4) appliqué à la fonction $f : z \to z\bar{z}$ on a

$$TT^* = \int_{\sigma(T)} \lambda\bar{\lambda} dE(\lambda) = \int_{\sigma(T)} dE(\lambda) = I$$

et de même $T^*T = I$; ainsi T est unitaire. □

CHAPITRE 3 - SPECTRE ET MESURES SPECTRALES

Nous allons revenir plus en détail sur les résultats généraux obtenus aux chapitres 1 et 2. D'une part nous définirons la notion de mesure spectrale dans toute sa généralité, ce qui préparera l'introduction des opérateurs non bornés. D'autre part nous chercherons à construire des "classifications spectrales" : l'idée de base est la remarque qu'un opérateur normal $T \in L(H)$ est complètement déterminé lorsqu'on connait son spectre $\sigma(T) \subset \mathbb{C}$ et sa mesure spectrale associée $E(.)$, mais la question essentielle est de rechercher si l'on peut diminuer cette quantité d'information pour pouvoir reconstruire néanmoins l'opérateur T. Il est clair que la connaissance de $\sigma(T)$ ne suffit pas : prenons par exemple $H = L^2[0,1]$ et $T : f \to xf$ (multiplication par x) de sorte que $\sigma(T) = [0,1]$, puis prenons $H = \ell^2(\mathbb{N})$, déterminons une bijection $n \to r_n$ entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q} \cup [0,1]$ et définissons T par $Te_n = r_n e_n$, où (e_n) est la base canonique de H. On aura aussi $\sigma(T) = [0,1]$ et les opérateurs T ainsi construits n'ont vraiment rien de bien semblable, le premier n'ayant aucune valeur propre et le second possédant une base orthogonale de vecteurs propres. La mesure spectrale doit donc intervenir dans la reconstruction de T, mais cette mesure spectrale exige pour être connue la connaissance d'une infinité de mesures positives $E_x = (E(.)x|x)$, $x \in H$. Peut-on alors se ramener à une famille plus réduite de mesures positives ?

La question est aussi liée aux *applications quantiques* de la théorie des opérateurs sur un espace de Hilbert et en particulier de la théorie spectrale. En théorie quantique on ne distingue pas un opérateur hermitien T de son transmué $S = U\,T\,U^{-1}$ par un opérateur unitaire U (qui correspond à un changement de base orthogonale). Ceci introduit l'équivalence unitaire entre deux opérateurs S et T. On constate alors que $\sigma(S) = \sigma(T)$ et que $E_S(.) = U\,E_T(.)\,U^{-1}$ (la mesure spectrale est donc changée), de sorte que pour chaque $x \in H$ il existe $y = U^{-1}x$ tel que $E_{S,x} = E_{T,y}$. Ainsi l'ensemble des mesures $(E_x)_{x \in H}$ est le même pour S et T. On ne pourra donc espérer reconstruire T qu'à une équivalence unitaire près.

Les problèmes correspondant à ces questions d'équivalence unitaire, ainsi que ceux liés à diverses décompositions du spectre, constitueront donc une partie importante des éléments de ce chapitre.

3.1 MESURE SPECTRALE GENERALE. - Pour des applications ultérieures il convient de définir la notion de mesure spectrale en sortant du cas d'un ensemble compact K muni de sa tribu de Baire Ba(K) (ou de Borel s'il est métrisable).

3.1.1 DEFINITION. - *Soit* H *un espace de Hilbert. On appelle mesure spectrale sur* H *la donnée d'un espace mesurable* (Ω, Σ) *et d'une application :* $E : \Sigma \to L(H)$
possédant les propriétés suivantes :

a) $E(\emptyset) = 0$, $E(\Omega) = I$, $E(A)^{\star} = E(A)$

b) $E(A \cap B) = E(A)\, E(B)$ *pour tous* $A, B \in \Sigma$

c) $E(.)$ *est dénombrablement additive pour la topologie simple-forte sur* L(H), *c'est-à-dire que pour toute suite disjointe* (A_n) *dans* Σ *et tout* $x \in H$ *on a*

$$E(\cup A_n)x = \Sigma E(A_n)x$$

au sens de la topologie de H.

Il suit de b) que E(A) est un projecteur hermitien et que $A \cap B = \emptyset$ implique que les projecteurs E(A) et E(B) sont orthogonaux, de sorte que la condition c) implique encore l'égalité

$$\| E(A)x \|^2 = \Sigma \|E(A_n)x\|^2 \quad \text{avec } A = \cup A_n$$

Lorsque la condition b) est remplacée par la condition $E(A) \geqslant 0$ pour tout A, on a alors affaire à une mesure dite *sous-spectrale* ou *quasi-spectrale* Ces mesures plus générales interviennent fréquemment dans diverses sortes de problèmes, comme on le verra peut-être dans les chapitres réservés aux applications.

La mesure $A \to (E(A)x|y)$ est notée $E_{x,y}$ et la mesure $E_{x,x}$ est notée E_x

pour simplifier. On a alors :

(3.1.2) LEMME. - On a $\| E_x \| = \| x \|^2$ et $\| E_{x,y} \| \leqslant \| x \| \, \| y \|$

Preuve - E_x est une mesure positive car $E_x(A) = \| E(A)x \|^2$, donc $\| E_x \| = E_x(\Omega) = \| x \|^2$. Par ailleurs pour tout A on a

$$|E_{x,y}(A)| = |(E(A)x|y)| = |(E(A)x|E(A)y)| \leqslant \|E(A)x\| \, \| E(A)y\|$$

donc, pour toute famille disjointe finie (A_i) on a :

$$\begin{aligned}(\Sigma |E_{x,y}(A_i)|)^2 &\leqslant (\Sigma \|E(A_i)x\| \, \| E(A_i)y\|)^2 \\ &\leqslant \Sigma \| E(A_i)x \|^2 \, . \, \Sigma \| E(A_i)y \|^2 \\ &\leqslant \| x \|^2 \, \| y \|^2\end{aligned}$$

la deuxième inégalité étant obtenue par Cauchy-Schwarz et la troisième par orthogonalité des projecteurs $E(A_i)$. Alors par passage à la borne supérieure, lorsque la famille (A_i) varie, on obtient, par définition de la norme de la variation pour une mesure complexe, l'inégalité cherchée. □

L'intérêt de ce lemme est qu'il permet facilement de construire, en suivant la méthode directe basée sur les fonctions Σ-étagées, un calcul fonctionnel $\Phi : BM(\Omega,\Sigma) \to L(H)$ relié à $E(.)$ selon $\Phi(1_A) = E(A)$, ayant les propriétés suivantes, après qu'on ait noté pour simplifier

$$\Phi(f) = \int f dE = \int f(\lambda) \, dE(\lambda)$$

(3.1.3) THEOREME. - *L'application* Φ *est un* $\star$*-morphisme de l'algèbre stellaire unitaire* $BM(\Omega,\Sigma)$ *dans l'algèbre stellaire unitaire* $L(H)$ *tel que :*

a) $\|\Phi(f)\| \leqslant \| f \|$

b) $\|\Phi(f)x\|^2 = \int |f|^2 \, dE_x$ *pour tout* $x \in H$

En particulier Φ est multiplicative (ce qui provient essentiellement de (3.1.1.b)) et $\Phi(\overline{f}) = \Phi(f)^\star$. Chaque $\Phi(f)$ est normal dans $L(H)$, et hermitien si f est réelle. De plus $\sigma(\Phi(f)) \subset \overline{f(\Omega)}$.

Support d'une mesure spectrale. - Lorsque Ω est un espace topologique métrisable et Σ sa tribu de Borel (ou de Baire) on peut introduire le support de E selon :

(3.1.4) PROPOSITION. - *Il existe un plus petit fermé* S *dans* Ω, *tel que* $E(S) = I$, *appelé support de* E, *et on a*

$$S = \text{Supp } E = \overline{\bigcup_{x \in H} \text{Supp } E_x}$$

Preuve - Si $E(S) = I$ alors $E(\Omega\setminus S) = 0$ donc $E_x(\Omega\setminus S) = 0$ et $\text{Supp } E_x \subset S$. Soit alors $S_o = \overline{\bigcup \text{Supp } E_x}$; on a $\text{Supp } E_x \subset S_o$ et S_o est fermé, donc $E_x(\Omega\setminus S_o) = 0$. Par la formule classique liant produit scalaire et norme dans H, on en déduit $E_{x,y}(\Omega\setminus S_o) = 0$ pour tous x,y, d'où $E(\Omega\setminus S_o) = 0$ et $E(S_o) = I$, ce qui suffit. □

Mesure spectrale image. - Si $h : (\Omega,\Sigma) \to (\Omega,\Sigma)$ est une application mesurable, alors pour toute mesure spectrale $E : \Sigma \to L(H)$ on construit sans difficulté la mesure image h(E) selon

$$h(E)\ (B) = E(h^{-1}(B)) \qquad B \in \Sigma'$$

En posant $E' = h(E)$ on aura alors, pour toute fonction $g \in BM(\Omega',\Sigma')$:

$$\int g dE' = \int g \circ h \, dE$$

Un exemple intéressant est fourni avec :

(3.1.5) PROPOSITION. - *Soit* T *un opérateur normal sur* H. *Alors la mesure spectrale* E^* *de l'adjoint* T^* *n'est autre que la mesure spectrale image de la mesure spectrale* E *de* T *par l'application de conjugaison* $z \to \bar{z}$ *de* $\sigma(T)$ *sur* $\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)}$.

Preuve - Elle résulte de l'égalité $\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)}$, de la formule $T^* = \int \bar{\lambda} dE(\lambda)$ et de la clause d'unicité de la mesure spectrale de T^*. □

Nous ne voulons pas développer au-delà la notion de mesure spectrale générale. Signalons toutefois 3 faits intéressants. Le premier consiste en la donnée d'un exemple "canonique" de mesure spectrale ne relevant pas des exemples donnés au chapitre 2. Il suffit de prendre une mesure μ sur (Ω,Σ), et de considérer l'espace $H = L^2(\mu)$. Alors l'opérateur $E(A) : f \to 1_A f$ est manifestement une mesure spectrale $E : \Sigma \to L(H)$ (on pourra vérifier les détails) et pour chaque $g \in BM(\Omega,\Sigma)$ on aura $\Phi(g)f = gf$.

Le second consiste à remarquer qu'une mesure spectrale définie sur une partie compacte K d'un espace métrisable Ω peut être considérée comme une mesure spectrale sur Ω (en fait la mesure image associée à l'injection $K \to \Omega$) dont le support est contenu dans K. Ainsi pour tout opérateur normal (resp. hermitien) T sur H, on pourra lire sa mesure spectrale $E = E_T$ comme une mesure spectrale sur $\mathbb{C}$ (resp. sur $\mathbb{R}$).

Le troisième consiste à remarquer qu'on introduit ainsi des mesures spectrales sur $\mathbb{C}$ ou sur $\mathbb{R}$. S'il en existe dont le support n'est pas compact, peuvent-elles servir à représenter des opérateurs non bornés ? Ce qui est sûr c'est qu'elles peuvent servir à représenter des situations intéressantes. Donnons-en deux exemples à partir d'une mesure spectrale E sur $\mathbb{R}$, liés à la théorie des semi-groupes.

<u>Exemple 1</u> - En posant $U_t = \int e^{it\lambda}\, dE(\lambda)$ on obtient pour $t \in \mathbb{R}$, une famille d'opérateurs unitaires, qui constitue un groupe puisque $U_s . U_t = U_{s+t}$. Savoir si tout "groupe unitaire à un paramètre" se représente ainsi est une question importante : la réponse est positive et relève de la théorie des semi-groupes (théorème de Stone). On peut aussi l'obtenir plus directement avec l'exercice 5 ci-dessous.

<u>Exemple 2</u> - En supposant $\operatorname{supp} E \subset [0,+\infty[$ on construit un semi-groupe d'opérateurs hermitiens positifs en posant $T_t = \int e^{-t\lambda}\, dE(\lambda)$ pour $t \geqslant 0$, vérifiant $\|T_t\| \leqslant 1$.

(3.1.6) <u>EXERCICES</u>. -

<u>Exerc. 1</u>. - Soit E(.) une mesure quasi-spectrale sur l'espace H. Montrer que chacune des deux conditions (nécessaires) suivantes est suffisante pour que E soit spectrale :

a) Chaque E(A) est un projecteur, pour tout $A \in \Sigma$.

b) $E(A)\, E(B) = 0$ si $A \cap B = \emptyset$

Exerc. 2. - Soit μ une mesure positive sur $\mathbb{R}$ ayant des moments de tous les ordres. L'espace $\mathscr{P}$ des polynômes est donc contenu dans $L^2(\mu)$ et on désigne par $H = \overline{\mathscr{P}}$ son adhérence qui est un espace de Hilbert et par π_H la projection orthogonale de $L^2(\mu)$ sur H. Soit Σ la tribu borélienne $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ Pour tout $A \in \Sigma$ et toute $f \in H$ on pose $E(A)f = \pi_H(1_A f)$.
Montrer qu'on définit une mesure quasi-spectrale sur H.
Démontrer ensuite que cette mesure n'est spectrale que ssi $H = L^2(\mu)$, c'est-à-dire que ssi $\mathscr{P}$ est dense dans $L^2(\mu)$. (On verra plus tard qu'il existe des mesures μ telles que $\mathscr{P}$ ne soit pas dense dans $L^2(\mu)$).

Exerc. 3. - Soit $\widetilde{H}$ un espace de Hilbert et $\widetilde{E} : \Sigma \to L(\widetilde{H})$ une mesure spectrale. Soit H un sous-espace fermé de $\widetilde{H}$ et $\pi_H : \widetilde{H} \to H$ la projection orthogonale sur H. On définit $E : \Sigma \to L(H)$ par $\widetilde{E}(.) = \pi_H\ E(.)\ \pi_H$. Démontrer que E est une mesure quasi-spectrale telle que $E_{x,y} = \widetilde{E}_{x,y}$ pour tous $x,y \in H$. En particulier on a $\|E_{x,y}\| \leqslant \|x\|\ \|y\|$.

Exerc. 4. - (Théorème de Naimark - 1943)

L'exercice précédent est intéresssant en ce sens qu'il admet une réciproque, c'est-à-dire que toute mesure quasi-spectrale E(.) sur H s'obtient à partir d'une mesure spectrale $\widetilde{E}$ sur un espace élargi $\widetilde{H}$. Fixons donc H et la mesure quasi-spectrale E et désignons par $\mathscr{E}(\Sigma)$ l'espace des fonctions numériques complexes Σ- étagées et par $\mathscr{E}(\Sigma,H) = \mathscr{E}(\Sigma) \otimes H$ l'espace des fonctions Σ-étagées à valeurs dans H. Pour toutes $\phi = \Sigma\, 1_{A_k} x_k$ et $\psi = \Sigma 1_{B_\ell} y_\ell$ on pose :

$$(\phi \mid \psi) = \sum_{k,\ell} (E(A_k \cap B_\ell)\ x_k \mid y_\ell)$$

a) Démontrer, grâce à l'additivité de E, que $(\phi|\psi)$ ne dépend pas de la représentation choisie pour ϕ et ψ, puis prouver que la forme $(\phi,\psi) \to (\phi|\psi)$ est un semi-produit scalaire.

b) On note $\widetilde{H} = \mathscr{E}(\Sigma) \hat{\otimes} H$ le séparé complété de l'espace $\mathscr{E}(\Sigma) \otimes H$ pour le semi-produit scalaire précédent. Montrer que l'application $x \to \mathbb{1} \otimes x$, de H dans $\widetilde{H}$, est une isométrie permettant d'identifier H à un sous-espace fermé de $\widetilde{H}$. Prouver ensuite que la projection π_H est suffisamment bien définie par les conditions :

$$\pi_H(1_A \otimes x) = E(A)x \quad A \in \Sigma\ ,\ x \in H$$

c) On définit maintenant $\widetilde{E}(A)$ sur $\mathscr{E}(\Sigma) \otimes H$ selon $\widetilde{E}(A)\phi = 1_A\phi$. Vérifier que $\|\widetilde{E}(A)\phi\| \leq \|\phi\|$, puis prouver que $\widetilde{E}(A)$ se prolonge canoniquement en un opérateur $\widetilde{E}(A) : \widetilde{H} \to \widetilde{H}$. Démontrer ensuite que $\widetilde{E}$ est une mesure spectrale sur $\widetilde{H}$, telle que $E(.) = \pi_H \widetilde{E}(.)\pi_H$. Vérifier enfin que l'espace $\widetilde{H}$ a été choisi minimal en ce sens qu'il est engendré par les vecteurs $\widetilde{E}(A)x$, $A \in \Sigma$, $x \in H$.

d) Enoncer enfin le théorème de Naimark et en déduire que pour toute mesure quasi-spectrale E on a l'inégalité $\|E_{x,y}\| \leq \|x\| \; \|y\|$.

Exerc. 5. - (Théorème de Stone)

A toute mesure spectrale E sur $\mathbb{R}$, définie sur l'espace H, on associe un groupe unitaire $U_t = \int e^{it\lambda} \, dE(\lambda)$, qui est d'ailleurs fortement continu, c'est-à-dire que $U_t x \to x$ quand $t \to 0$ pour tout $x \in H$. On veut donner une preuve de la réciproque, utilisant essentiellement le théorème de Bochner. Soit donc (U_t), $t \in \mathbb{R}$, un groupe unitaire fortement continu sur l'espace H.

a) Etablir que, pour tout x, la fonction $\phi(t) = (U_t x | x)$ est continue et de type positif En déduire qu'il existe une mesure positive finie E_x sur $\mathbb{R}$ telle que $(U_t \, x | x) = \int e^{it\lambda} dE_x(\lambda)$.

b) En déduire encore qu'il existe une application $E(.)$, de la tribu borélienne $\Sigma = \mathscr{B}(\mathbb{R})$ de $\mathbb{R}$ dans $L(H)$, dénombrablement additive pour la topologie simple-forte sur $L(H)$. Utiliser ensuite le théorème d'Orlicz-Pettis pour montrer que E est une mesure quasi-spectrale $\Sigma \to L(H)$, c'est-à-dire qu'elle est dénombrablement additive pour la topologie simple-forte sur $L(H)$.

c) Soit $\mathscr{C}$ une classe de fonctions boréliennes bornées sur $\mathbb{R}$, stable par passage à la limite simple des suites uniformément bornées. On suppose que $\mathscr{C}$ contient toutes les fonctions $e_t : \lambda \to e^{it\lambda}$, $t \in \mathbb{R}$. Etablir que $\mathscr{C}$ contient toutes les fonctions indéfiniment différentiables à support compact en écrivant ces fonctions comme intégrales de Fourier. En déduire que $\mathscr{C}$ est égale à l'espace $BM(\mathbb{R}, \Sigma)$ de toutes les fonctions boréliennes bornées.

d) Déduire de là que pour chaque $f \in BM(\mathbb{R}, \Sigma)$ on a :

$$\int f e_s dE = \int f dE \, . \int e_s dE$$

pour tout $s \in \mathbb{R}$, puis démontrer que la mesure quasi-spectrale E est multiplicative, donc une mesure spectrale. Enoncer le théorème obtenu (théorème de Stone).

Exerc. 6. :

a) Décrire toutes les mesures spectrales sur H quand on prend $\Omega = \mathbb{Z}$ et $\Sigma = \mathcal{P}(\mathbb{Z})$.

b) Soit E une telle mesure spectrale. Montrer que la formule :

$$U_t = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{int} E(\{n\})$$

définit un groupe unitaire à un paramètre, fortement continu et tel que $U_{t+2\pi} = U_t$.

c) Réciproquement soit (U_t) un tel groupe unitaire 2π-périodique. Montrer que la mesure spectrale E(.) associée par le théorème de Stone a pour support $\mathbb{Z}$ et retrouver la forme b).

(3.2) DECOMPOSITION DU SPECTRE. - Fixons toujours l'espace de Hilbert H et l'algèbre L(H), quoiqu'une partie de ce qui va suivre peut se développer pour un espace de Banach E et l'algèbre L(E). Un opérateur $T \in L(H)$ qui est non inversible peut l'être de diverses façons : ou bien il est non injectif c'est-à-dire que $\operatorname{Ker} T \neq 0$, ou bien il est injectif sans être surjectif (et cela suffit par le théorème des isomorphismes de Banach car si T est bijectif alors T^{-1} existe) et alors on peut distinguer suivant que l'image ImT est dense dans H (et distincte de H), on non-dense dans H. Il suit de là, en remplaçant T par $(\lambda - T)$ que l'on peut introduire les définitions suivantes :

(3.2.1) DEFINITIONS. - *Soit* $T \in L(H)$ *et* $\lambda \in \mathbb{C}$.

a) On dit que λ *apppartient au spectre ponctuel de* T *noté* $\sigma_p(T)$ *ou que c'est une valeur propre de* T, *lorsque* $\lambda - T$ *n'est pas injectif.*

b) Lorsque $\operatorname{Ker}(\lambda-T) = 0$, *on dit que* λ *appartient au spectre continu* $\sigma_c(T)$ *lorsque* $\operatorname{Im}(\lambda-T)$ *est dense et distincte de* H.

c) Enfin, lorsque $\operatorname{Ker}(\lambda-T) = 0$ *et* $\overline{\operatorname{Im}(\lambda-T)} \neq H$, *on dit que* λ *appartient au spectre résiduel* $\sigma_r(T)$.

On a évidemment la décomposition disjointe

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$$

En remplaçant T par son adjoint T* on remplace $\sigma(T)$ par l'ensemble conjugué $\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)}$, mais la décomposition précédente ne se conserve pas. On a toutefois, sans difficulté :

(3.2.2) PROPOSITON. :

a) $\lambda \in \sigma_p(T) \Rightarrow \overline{\lambda} \in \sigma_p(T^*) \cup \sigma_r(T^*)$

b) $\lambda \in \sigma_r(T) \Rightarrow \overline{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$

L'exercice qui suit va illustrer dans un cas particulier la complexité de la situation :

(3.2.3) EXERCICE. - Soit $H = \ell^2(\mathbb{N})$ et T l'opérateur de shift $(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots) \to (\xi_1, \xi_2, \ldots)$

a) Expliciter l'opérateur adjoint T*.

b) Montrer que $\sigma(T) = \overline{U} = \{\lambda, |\lambda| \leq 1\}$ et que $\sigma_p(T) = U = \{\lambda, |\lambda| < 1\}$.

c) On fixe $\lambda \in \mathbb{T}$, c'est-à-dire tel que $|\lambda| = 1$. Montrer que $\lambda \in \sigma_c(T)$ en prouvant que $\mathrm{Im}(\lambda - T)$ est dense dans H. Pour cela on fixera $y = (\eta_k) \in H$, et pour chaque $\varepsilon > 0$, on introduira un entier N tel que $\sum_{k>N} |\eta_k|^2 < \varepsilon^2$, ce qui permet de construire un point $x \in H$ tel que $\|y - (\lambda - T)x\| < \varepsilon$.

d) En déduire $\sigma_p(T)$, $\sigma_c(T)$ et $\sigma_r(T)$.

e) Déterminer $\sigma_p(T^*)$, $\sigma_c(T^*)$ et $\sigma_r(T^*)$.

Mais le cas d'un opérateur normal est plus simple.

(3.2.4) THEOREME. - *Soit* T *un opérateur normal et soit* E *sa mesure spectrale, considérée comme mesure spectrale sur* $\mathbb{C}$. *On a alors :*

a) Supp E = $\sigma(T)$, *ce qui revient à dire que pour tout ouvert* ω *de* $\mathbb{C}$ *on a l'équivalence :*

$$E(\omega) = 0 \Leftrightarrow \omega \cap \sigma(T) = \emptyset$$

b) Le spectre ponctuel $\sigma_p(T)$ *est défini par les conditions* $\lambda \in \sigma_p(T)$ $\Longleftrightarrow E(\{\lambda\}) \neq 0$. *Plus généralement on a* $E(\{\lambda\})H = \mathrm{Ker}(\lambda - T)$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}$.

c) Le spectre résiduel est vide : $\sigma_r(T) = \emptyset$

<u>*Preuve*</u> -

a) Puisque $E(\sigma(T)) = I$ on voit que $E(\omega) = 0$ pour tout ω disjoint de $\sigma(T)$. Réciproquement supposons ω ouvert tel que $E(\omega) = 0$ et soit $\lambda \in \omega$. On définit la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda - z} & \text{si } z \notin \omega \\ 0 & \text{si } z \in \omega \end{cases}$$

Alors f est borélienne et bornée et $(\lambda - z)f(z) = 1_{\mathbb{C}\setminus\omega}$, de sorte que :

$$I = E(\mathbb{C}) = E(\mathbb{C} \setminus \omega) = (\lambda - T)f(T)$$

donc $\lambda \in \rho(T)$ et ainsi $\omega \cap \sigma(T) = \emptyset$

b) La condition $x \in E(\{\lambda\})H$ équivaut à l'égalité $E(\{\lambda\})x = x$, laquelle entraîne :

$$Tx = TE(\{\lambda\})x = \int_{\{\lambda\}} \theta \, dE(\theta)x = \lambda E(\{\lambda\})x = \lambda x$$

d'où $x \in \mathrm{Ker}(\lambda - T)$.

Réciproquement si $Tx = \lambda x$, soit $A_n = B(\lambda, \frac{1}{n})$ et soit $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par :

$$f_n(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda - z} & \text{si } z \notin A_n \\ 0 & \text{si } z \in A_n \end{cases}$$

Alors f_n est borélienne et bornée et $(\lambda - z)f_n(z) = 1_{\mathbb{C} \setminus A_n}$, donc :

$$E(\mathbb{C} \setminus A_n)x = f_n(T)(\lambda - T)x = 0 \text{ et } E(A_n)x = x.$$

Mais $A_n \downarrow \{\lambda\}$ donc à la limite $E(\{\lambda\})x = x$.

c) Pour un opérateur normal T on a $\|Tx\|^2 = (x \mid T^*Tx) = (x \mid TT^*x) = \|T^*x\|^2$ d'où $\mathrm{Ker}\, T = \mathrm{Ker}\, T^*$. Supposons donc $\lambda \in \sigma_r(T)$; on a alors $\overline{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$ avec (3.2.2.b), donc $\mathrm{Ker}(\overline{\lambda} - T^*) \neq (0)$, donc aussi $\mathrm{Ker}(\lambda - T) \neq (0)$ puisque $\lambda - T$ est normal. Ainsi $\lambda \in \sigma_p(T)$, ce qui est absurde et par conséquent $\sigma_r(T) = \emptyset$. □

(3.2.5) COROLLAIRE. - *Soit* T *un opérateur normal. Si le spectre* $\sigma(T)$ *est dénombrable, alors* $\sigma_p(T)$ *est non vide et il existe dans* H *une base orthonormale propre pour* T. *De plus, tout point de* $\sigma_c(T)$*, s'il en existe, est point d'accumulation de valeurs propres, autrement dit* $\sigma(T) = \overline{\sigma_p(T)}$.

Preuve - Soit $\sigma_p(T) = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots)$ et $\sigma_c(T) = (\mu_1, \ldots, \mu_m, \ldots)$. Puisque $E(\{\mu_m\}) = 0$ alors pour tout $x \in H$, grâce à la dénombrabilité de $\sigma(T)$ on a :

$$x = Ix = \int dE(\lambda)x = \Sigma E(\{\lambda_n\})x$$

ce qui prouve que $H = \bigoplus H_n$, avec $H_n = \mathrm{Ker}(\lambda_n - T)$. Une base orthonormale propre pour T peut donc être construite en choisissant des bases orthonormales dans les espaces H_n. Maintenant si $\mu \in \sigma_c(T)$ alors pour tout ouvert ω voisinage de μ on a $E(\omega) \neq o$ d'après (3.2.4.a). Or $E(\omega) = \Sigma E(\omega \cap \{\lambda_n\})$, de sorte qu'il existe au moins un point $\lambda \in \omega \cap \sigma_p(T)$. □

Remarque - Dans cet exemple on peut avoir $\sigma_c(T) = \phi$, par exemple avec $T = I$; une valeur propre peut être de multiplicité infinie c'est-à-dire que $\dim \mathrm{Ker}(\lambda - T) = \infty$, et enfin, un point $\mu \in \sigma_c(T)$ peut être point d'accumulation de points de $\sigma_c(T)$

Application aux opérateurs normaux compacts. - La situation la plus générale est rassemblée dans l'énoncé suivant :

(3.2.6) THEOREME. - *Soit* T *un opérateur normal et compact. Alors* $\sigma_p(T)$ *est au plus dénombrable et chaque valeur propre* $\lambda \neq 0$ *est de multiplicité finie c'est-à-dire que* $\mathrm{Ker}(\lambda - T)$ *est de dimension finie* $\alpha(\lambda)$. *De plus on a nécessairement l'un des cas suivants :*

a) H *est de dimension finie et* $\sigma_p(T) = \sigma(T)$ *est fini.*

b) H *est de dimension infinie,* $\sigma_p(T)$ *est fini,* $\sigma_c(T)$ *est vide et* $\mathrm{Ker}\, T \neq 0$, *c'est-à-dire* $0 \in \sigma_p(t)$.

c) H *est de dimension infinie,* $\sigma_p(T)$ *est infini et s'ordonne en une suite* (λ_n) *telle que* $|\lambda_n| \downarrow 0$. *Si* $\mathrm{Ker}\, T \neq 0$ *alors* $0 \in \sigma_p(T)$ et $\sigma_c(T) = \phi$. *Si* T *est injectif alors* $\sigma_c(T) = \{0\}$ et H *est alors séparable.*

Preuve - Le cas a) est le cas matriciel habituel. Supposons H de dimension infinie. Déjà si $\lambda \in \sigma_p(T)$ et si $\lambda \neq 0$ alors $H_\lambda = \mathrm{Ker}\,(\lambda - T) \neq 0$ et $T|_{H_\lambda}$ est l'homothétie de rapport λ. Comme cette homothétie est compacte et λ est non nul, alors H_λ est de dimension finie d'après le théorème de Riesz.

Montrons maintenant qu'un point $\lambda \neq 0$, quelconque dans $\mathbb{C}$, ne peut être point d'accumulation de valeurs propres, ce qui prouvera que les valeurs propres ne peuvent s'accumuler qu'à l'origine. En effet, si $\lambda_n \to \lambda$ avec $\lambda_n \in \sigma_p(T)$, il existerait une suite x_n telle que $\| x_n \| = 1$ et $Tx_n = \lambda_n x_n$. Par compacité on peut supposer que $Tx_n \to y$ et puisque les projecteurs $E(\{\lambda_n\})$ et $E(\{\lambda_m\})$ sont orthogonaux on a $(x_n | x_m) = 0$ pour $n \neq m$. Alors $(Tx_n \mid Tx_m) = 0$, d'où $y = 0$ à la limite et $|\lambda_n| = \| \lambda_n x_n \| = \| Tx_n \| \to \| y \| = 0$, ce qui est absurde.

Montrons maintenant que si $\lambda \in \sigma_c(T)$ alors $\lambda = 0$ nécessairement. En effet si $\lambda \neq 0$, on se ramène à $\lambda = 1$, de sorte que Im(I-T) est dense dans H, et distincte de H. Soit $x \in H$; il existe une suite $y_n \in H$ telle que $y_n - Ty_n \to x$.

Montrons que la suite (y_n) est bornée : sinon on peut supposer $\|y_n\| \to \infty$ et soit $z_n = y_n / \|y_n\|$. Alors $z_n - Tz_n \to 0$ et $\| z_n \| = 1$, de sorte que par compacité de T on peut supposer $Tz_n \to b$, d'où $z_n \to a = b$ et $b = Ta = a$ avec $\|a\| = 1$, ce qui nous ramène à $1 \in \sigma_p(t)$ et est absurde. Alors la suite (y_n) étant bornée, on peut supposer que Ty_n a une limite donc $y_n \to y$, $Ty_n \to Ty$ et $y - Ty = x$; mais cela prouve que Im(I-T) = H puisque x a été choisi quelconque et la contradiction est obtenue.

Si $\sigma_p(T)$ est infini et si Ker $T \neq 0$ alors $0 \in \sigma_p(T)$ donc $\sigma_c(T) = \emptyset$. Si T est injectif alors $0 \notin \sigma_p(T)$, mais $0 \in \sigma(T)$ par accumulation de valeurs propres et ainsi $0 \in \sigma_c(T)$, donc ImT est dense dans H ; par compacité de T ceci implique la séparabilité de H et le cas c) est complètement décortiqué.

Passons au cas b), où $\sigma_p(T)$ est fini, égal par exemple à $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Comme $\sigma_c(T)$ est vide ou égal à $\{0\}$, alors $\sigma(T)$ est dénombrable, d'où avec (3.2.5), $H = \bigoplus H_k$ avec $H_k = \mathrm{Ker}\,(\lambda_k - T)$. Mais dans ce cas l'un des H_k est de dimension infinie, ce qui implique $\lambda_k = 0 \in \sigma_p(T)$ et ainsi $\sigma_c(T) = \emptyset$ et Ker $T \neq (0)$. Le théorème est donc enfin démontré. □

Remarque - Le théorème sous-entend, grâce à (3.2.5), qu'il existe dans H une base orthonormale propre pour T. Par ailleurs il s'applique évidemment au cas où T est un opérateur *hermitien* compact et dans ce cas les valeurs propres λ_n sont réelles. Si en plus T est un opérateur positif, au sens où $(Tx|x) \geq 0$ pour tout $x \in H$, alors on a $\lambda_n \geq 0$. Ce dernier cas s'applique plus particulièrement en choisissant pour T un opérateur de la forme S^*S ou SS^* avec $S \in L(H)$ quelconque mais compact. Et en faisant intervenir la décomposition polaire d'un tel opérateur S, on peut facilement (en reprenant par exemple le Cours d'Analyse Fonctionnelle p. 22 à 24) établir le résultat suivant :

(3.2.7) THEOREME. - *Soit* T *un opérateur compact sur l'espace de Hilbert* H. *Il existe alors une suite* $\alpha_n > 0$ *décroissante au sens large, finie ou dénombrable (et dans ce cas* $\alpha_n \downarrow 0$) *et deux suites orthonormales* (e_n) et (ε_n) *dans* H, *telles que :*

$$Tx = \Sigma\, \alpha_n (x \mid e_n)\, \varepsilon_n$$

$$T^*x = \Sigma\, \alpha_n (x \mid \varepsilon_n)\, e_n$$

$$T^*Tx = \Sigma\, \alpha_n^2 (x \mid e_n)\, e_n$$

$$TT^*x = \Sigma\, \alpha_n^2 (x \mid \varepsilon_n)\, \varepsilon_n$$

pour tout $x \in H$.

De plus $\|T\| = \|T^*\| = \operatorname{Sup} \alpha_n$ *et l'opérateur* T *est de Hilbert-Schimdt ssi* $\Sigma\alpha_n^2 < +\infty$ *et dans ce cas* $\|T\|_2^2 = \Sigma\, \alpha_n^2$.

On remarquera que les valeurs α_n ne sont pas les valeurs propres de T, mais celles de $[T] = (T^*T)^{1/2}$ ou de $[T^*] = (TT^*)^{1/2}$. On les appelle *les valeurs singulières de* T.

D'ailleurs le théorème précédent ne dit rien de précis sur le spectre même $\sigma(T)$ d'un opérateur compact quelconque non normal. Il faut se souvenir du cas d'une matrice nilpotente sur un espace de dimension finie, correspondant à un opérateur T tel que $\sigma(T) = \{0\}$, pour voir que l'information contenue dans le spectre peut être très pauvre dans le cas général.

En fait la théorie spectrale des opérateurs compacts relève plutôt d'une théorie sur les espaces de Banach (théorie de Riesz-Schauder) et nous éloigne considérablement des mesures spectrales. Nous ne l'entreprendrons donc pas.

Le spectre essentiel. - On aborde ici une autre façon de décomposer le spectre $\sigma(T)$ d'un opérateur normal, importante principalement par le théorème de perturbation donné ci-dessous. On a vu qu'un point $\lambda \in \mathbb{C}$ est élément de $\sigma(T)$ ssi pour tout voisinage ω ouvert de λ on a $E(\omega) \neq 0$, ce qui n'est autre que l'énoncé (3.2.4.a). On peut donner à cela une forme équivalente ne faisant pas intervenir la mesure spectrale E de T.

(3.2.8) PROPOSITION. - *Pour que* λ *soit élément de* $\sigma(T)$, *il faut et il suffit qu'il existe une suite* $x_n \in H$ *telle que* $\|x_n\| = 1$ *et* $Tx_n - \lambda x_n \to 0$.

Preuve - La condition est suffisante car si l'on avait $\lambda \in \rho(T)$ alors $x_n = (\lambda - T)^{-1}(\lambda x_n - Tx_n)$ tendrait vers 0. Elle est aussi nécessaire car si $\omega = B(\lambda, \frac{1}{n}) = B_n$ et si x_n est choisi dans Im E $(B_n) \neq (0)$ tel que $\|x_n\| = 1$, on a $x_n = E(B_n)x_n$ et $Tx_n = TE(B_n)x_n$, d'où :

$$Tx_n - \lambda x_n = \int_{B_n} (\theta - \lambda)\, dE(\theta)x_n$$

et par suite, puisque $|\theta - \lambda| < \frac{1}{n}$:

$$\| Tx_n - \lambda x_n \| < \frac{1}{n} \int \|dE(\theta)x_n\| < \frac{\|x_n\|}{n} = \frac{1}{n} . \square$$

Introduisons donc :

(3.2.9) DEFINITION. - *On dit que* λ *appartient au spectre essentiel de* T, *noté* $\sigma_{ess}(T)$, *lorsque pour tout voisinage ouvert* ω *de* λ, *le projecteur* $E(\omega)$ *est de dimension infinie. On appelle spectre discret noté* $\sigma_d(T)$, *la partie* $\sigma(T) \setminus \sigma_{ess}(T)$.

Si $\lambda \in \sigma_d(T)$ alors il existe un voisinage ω de λ tel que $E(\omega)$ soit un projecteur de dimension finie non nulle. Comme $E(B_n) \downarrow E(\{\lambda\})$, on voit encore que dim $E(\{\lambda\})H \geq 1$, de sorte que λ est une valeur propre de multiplicité finie. Mais comme la suite dim $E(B_n)$ est décroissante dans $\mathbb{N}^*$, elle se stabilise de sorte qu'il existe un ouvert ω voisinage de λ tel que $E(\omega) = E(\{\lambda\})$, de sorte que nécessairement $\omega \cap \sigma(T) = \{\lambda\}$. En résumé λ est une valeur propre de multiplicité finie qui est un point isolé dans le spectre $\sigma(T)$. La réciproque consiste à remonter le raisonnement sans difficulté. D'où :

(3.2.10) <u>PROPOSITION</u>. - *Pour qu'un point λ appartienne à $\sigma_{ess}(T)$ il faut et il suffit qu'il soit élément de $\sigma_c(T)$, ou bien valeur propre de* T *de multiplicité infinie ou non isolée dans le spectre* $\sigma(T)$.

On prendra garde qu'un point λ du spectre essentiel peut très bien être une valeur propre de multiplicité finie, non isolée dans le spectre. On en obtient un exemple avec l'opérateur T sur $H = \ell^2(\mathbb{N})$ défini par $Te_n = r_n e_n$, où (r_n) est une numérotation de $Q \cap [0,1]$, et (e_n) la base canonique de $\ell^2(\mathbb{N})$.

De la définition (3.2.9) il résulte immédiatement :

(3.2.11) <u>PROPOSITION</u>. - *Le spectre essentiel $\sigma_{ess}(T)$ est fermé.*

Donnons maintenant une caractérisation classique, analogue à (3.2.8), des points $\lambda \in \sigma_{ess}(T)$, ne faisant pas intervenir la mesure spectrale E.

(3.2.12) <u>THEOREME</u> (H. WEYL). - *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) $\lambda \in \sigma_{ess}(T)$

b) Il existe une suite (x_n) orthonormale *telle que* $Tx_n - \lambda x_n \to 0$.

c) Il existe une suite (x_n) *telle que* $\|x_n\| = 1$, *faiblement convergente vers* 0 *et telle que* $Tx_n - \lambda x_n \to 0$.

<u>*Preuve*</u> - a) $\Rightarrow$ b) : On peut supposer que λ n'est pas valeur propre de multiplicité infinie, de sorte que $E(B_n \setminus \{\lambda\})$ est un projecteur de dimension infinie pour tout n, avec $B_n = B(\lambda,\frac{1}{n})$. Posons $A_n = B_n \setminus B_{n+1}$ de sorte que

$\bigcup_{n\geq 1} A_n = B_1 \setminus \{\lambda\}$ et $\mathrm{Im}\, E(B_1 \setminus \{\lambda\}) = \bigoplus \mathrm{Im}\, E(A_n)$. Il existe donc une suite n_k telle que $E(A_{n_k}) \neq 0$ et l'on peut choisir $x_k \in E(A_{n_k})H$, tel que $\|x_k\| = 1$, ce qui construit une suite orthonormale. On vérifie que $Tx_k - \lambda x_k \to 0$ comme en (3.2.8).

b) $\Rightarrow$ c) : c'est évident car si (x_n) est une suite orthonormale alors $x_n \to 0$ faiblement d'après Bessel-Parseval.

c) $\to$ a) : Fixons ω voisinage ouvert de λ ; on a alors :

$$\begin{aligned} \| Tx_n - \lambda x_n\|^2 &= \int |\theta-\lambda|^2 \, dE_{x_n}(\theta) \\ &> \int |\theta-\lambda|^2 \, dE_{x_n}(\theta) \\ &> r^2 \int_{\omega^c} dE_{x_n}(\theta) = r^2 \| x_n - E(\omega)x_n\|^2 \end{aligned}$$

où $r > 0$ est choisi tel que $B(\lambda,r) \subset \omega$. Il suit de là que $E(\omega)x_n - x_n \to 0$, donc $\|E(\omega)x_n\| \to 1$. Mais la condition $x_n \to 0$ faiblement implique que $E(\omega)x_n \to 0$ faiblement. On est alors sûr que $\mathrm{Im}\, E(\omega)$ est de dimension infinie car dans le cas contraire le théorème de Riesz fournirait la condition $\| E(\omega)x_n\| \to 0$. □

De ce critère de Weyl on déduit le résultat le plus intéressant, qui rentre dans la catégorie des problèmes de perturbation et montre l'utilité du spectre essentiel.

(3.2.13) THEOREME. - *Soient* S *et* T *deux opérateurs normaux tels que l'opérateur* $R = S - T$ *soit compact (et pas nécessairement normal). Alors on a l'égalité* $\sigma_{ess}(S) = \sigma_{ess}(T)$.

Preuve - En changeant R en - R il suffit de prouver que $\lambda \in \sigma_{ess}(T) \Rightarrow \lambda \in \sigma_{ess}(T+R)$. Pour cela on utilise (3.2.12.c). Il suffit de remarquer que si $x_n \to 0$ faiblement alors $Rx_n \to 0$ dans H. Or cela est évident car déjà $Rx_n \to 0$ faiblement d'une part, et d'autre part la suite (Rx_n) étant contenue dans un compact K de H (puisque $\|x_n\| = 1$), la topologie faible coïncide sur K avec la topologie de H. □

Remarque - La définition du spectre essentiel laissait effectivement espérer son invariance par une perturbation de T qui soit un opérateur de rang fini, le théorème précise ce point en montrant qu'on peut aller jusqu'à un opérateur compact. Peut-on aller plus loin quant à l'opérateur R ? C'est là une question couplée avec une autre : peut-on aller plus loin avec l'opérateur T ? C'est-à-dire peut-on définir un notion de spectre essentiel s'appliquant à des opérateurs non nécessairement normaux ? Les réponses à ces deux questions sont positives mais nous placent en pleine "théorie des perturbations" !

(3.2.14) EXERCICES. -

Exerc. 1. - Soit T un opérateur normal sur un espace de dimension infinie H. Montrer que T est compact si et seulement si $\sigma_{ess}(T) = \{0\}$.

Exerc. 2. - Soit $T = U\,[T]$ la décomposition polaire d'un opérateur normal quelconque T. Soit $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $f_n(z) = \frac{z}{|z|}$ si $|z| > \frac{1}{n}$ et $f_n(z) = nz$ si $|z| < \frac{1}{n}$. Etablir que $U = \lim f_n(T)$ au sens de la topologie simple-forte. En déduire que U appartient à la sous-algèbre pleine $PL(T,T^*)$.

Exerc. 2. - a) En utilisant la représentation dyadique des nombres réels montrer qu'il existe une bijection $[0,1] \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ échangeant les parties boréliennes (isomorphisme mesurable). En déduire la même propriété entre $[0,1]$ et $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

b) Soit (T_n) une suite dénombrable commutante d'opérateurs normaux sur H. Montrer qu'il existe un opérateur hermitien S tel que $\sigma(S) \subset [0,1]$ et des fonctions boréliennes $f_n : [0,1] \to \mathbb{C}$ telles que $T_n = f_n(S)$.

(3.3) LES OPERATEURS NORMAUX SIMPLES. -

Nous n'avons pas l'ambition ici de traiter la théorie, dite de la multiplicité, qui généralise au cas de la dimension infine la théorie de la multiplicité des valeurs propres des matrices normales. Nous cherchons seulement à généraliser convenablement le cas des valeurs propres distinctes lorsque H est de dimension finie. Donnons-nous par exemple un opérateur diagonalisé $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, défini par $(Tz)_k = \lambda_k z_k$ avec $z = (z_k)$ et supposons les λ_k deux à deux distinctes. Alors $\sigma(t) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, ce qui permet d'introduire la mesure $\mu = \Sigma\delta_{\lambda_k}$ sur $\mathbb{C}$, qui est telle, d'une part que supp $\mu = \sigma(T)$ et d'autre part que l'espace $L^2(\mu)$ est isomorphe isométriquement à l'espace $\mathbb{C}^n$ puisqu'une fonction $f \in L^2(\mu)$ est complètement déterminée par ses valeurs $f(\lambda_k)$. Désignons par Z la fonction $\lambda \to \lambda$ identique de $\mathbb{C}$. Alors dans l'isométrie $U : H = \mathbb{C}^n \to L^2(\mu)$ précédente il est clair que l'opérateur T correspond à l'opérateur, noté aussi Z, de multiplication par Z sur $L^2(\mu)$. Autrement dit le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "U"] \arrow[d, "T"'] & L^2(\mu) \arrow[d, "Z"] \\ H \arrow[r, "U"] & L^2(\mu) \end{tikzcd}$$

et ainsi $T = U^{-1}ZU$. En résumé T est "unitairement équivalent" à un opérateur Z de multiplication par λ sur un espace $L^2(\mu)$, où μ est une mesure positive sur $\mathbb{C}$ dont le support est compact (et nécessairement égal à $\sigma(T)$). Cette remarque permet la généralisation suivante :

(3.3.1) <u>DEFINITION</u>. - *Un opérateur* $T \in L(H)$ *est dit simple (ou sans multiplicité) lorsqu'il est unitairement équivalent à l'opérateur* Z *de multiplication par la fonction* $\lambda \to \lambda$ *de* $\mathbb{C}$ *sur un espace* $L^2(\mu)$ *associé à une mesure positive* μ *sur* $\mathbb{C}$ *à support compact.*

Il existe donc une isométrie surjective $U : H \to L^2(\mu)$ telle que $T = U^{-1}ZU$. Comme l'opérateur Z est normal, alors T est aussi normal et $T^* = U^{-1}\,\overline{Z}\,U$. De plus le spectre $\sigma(T) = \sigma(Z)$ est évidemment égal à supp μ. En passant par l'intermédiaire des polynômes $P(z,\overline{z})$, il est facile de vérifier que $P(T,T^*) = U^{-1}\,P(Z,\overline{Z})\,U$ et plus généralement que $f(T) = U^{-1}M_fU$ pour toute fonction f borélienne et bornée sur $\sigma(T) =$ supp μ , où M_f désigne l'opérateur de multiplication par f sur $L^2(\mu)$. En particulier la résolution spectrale de T s'obtient selon $E(A) = U^{-1}M_{1_A}\,U$.

Cela étant deux questions immédiates se posent. La première est d'obtenir une caractérisation des opérateurs simples et la seconde est de savoir dans quel sens on peut affirmer que la mesure μ est caractérisée par l'opérateur T. Une troisième question, moins immédiate, est de savoir si l'on peut reconstruire tout opérateur normal à partir d'opérateurs simples. Pour répondre à la première question on introduit la notion de vecteur cyclique pour T :

(3.3.2) DEFINITION. - *On dit qu'un vecteur* $x \in H$ *est cyclique pour l'opérateur normal* T *lorsque l'ensemble des vecteurs* $T^m T^{*n}x$, $m,n \geq 0$ *est total dans* H.

On a alors :

(3.3.3) THEOREME. - *Pour que l'opérateur* T *normal sur* H *soit simple, il faut et il suffit qu'il possède un vecteur cyclique* x. *Dans ce dernier cas* T *est unitairement équivalent à l'opérateur* Z *défini sur l'espace* $L^2(\mu)$ *avec* $\mu = E_x$. *En particulier* $\sigma(T) = \text{supp } E_x$.

Preuve - La condition est nécessaire d'après le théorème de Stone-Weierstrass, car le support de μ étant nécessairement compact (égal à $\sigma(T)$), l'ensemble des polynômes $P(z,\bar{z})$ est dense dans $L^2(\mu)$. Ceci revient à dire que le vecteur $1 \in L^2(\mu)$ est cyclique pour l'opérateur Z de multiplication par lui-même, donc $x = U^{-1}1$ est cyclique pour T dans H, puisque U est un isomorphisme isométrique. La condition est aussi suffisante car en posant $\mu = E_x$, on sait déjà que supp μ est contenu dans $\sigma(T)$, dont est compact. De plus, l'espace des vecteurs de la forme $P(T,T^*)x$, ou P décrit l'ensemble des polynômes en $z,\bar{z}$, est dense dans H. Par ailleurs on sait que :

$$\| P(T,T^*)x\|^2 = \int |P|^2 \, dE_x = \|P\|^2_{L^2(\mu)}$$

de sorte que l'application, qui au vecteur $P(T,T^*)x$ associe le polynôme $P(z,\bar{z})$ dans $L^2(\mu)$, est d'une part proprement définie et isométrique, et d'autre part se prolonge canoniquement en une isométrie $U : H \to L^2(\mu)$ qui est d'ailleurs surjective à cause de la densité dans $L^2(\mu)$ de l'espace des polynômes en $z,\bar{z}$. Ainsi T est unitairement équivalent à l'opérateur Z sur $L^2(\mu)$ puisque $UTy = ZUy$ pour $y \in H$, ce qui est conséquence de l'égalité, a priori moins générale mais en fait équivalente :

$$UT\,[P(T,T^*)x] = ZP = ZU[P(T,T^*)x]$$

On peut donc préciser que $\operatorname{supp} \mu = \operatorname{supp} E_x = \sigma(T)$. □

La réponse à la seconde question est plus nuancée. On va voir que la mesure μ n'est pas nécessairement unique, ce qui est bien évident car il peut exister plusieurs vecteurs cycliques. Mais ce qui est complètement déterminé est en fait la classe d'équivalence de μ, au sens de Radon-Nikodym. On rappelle ici que μ et ν sont équivalentes au sens de Radon-Nikodym lorsque $\mu \ll \nu$ et $\nu \ll \mu$, ce qui revient à dire que μ et ν ont les mêmes ensembles boréliens négligeables, ou encore qu'il existe une densité h strictement positive et borélienne telle que $\nu = h.\mu$, tandis que $\mu = \frac{1}{h}.\nu$. On a alors :

(3.3.4) THEOREME. - *Soit μ et ν deux mesures positives à support compact sur $\mathbb{C}$. Désignons par S et T l'opérateur Z respectivement sur $L^2(\mu)$ et $L^2(\nu)$. Pour que S et T soient unitairement équivalents il faut et il suffit que μ et ν soient équivalentes au sens Radon-Nikodym.*

Preuve - La condition est suffisante car si $\nu = h.\mu$ avec $h > 0$, il est facile de voir que l'opérateur multiplicatif $f \to fh^{-1/2}$, de $L^2(\mu)$ dans $L^2(\nu)$, est une isométrie surjective U, telle que $US = TU$. Réciproquement supposons $US = TU$ avec $U : L^2(\mu) \to L^2(\nu)$ isométrie surjective. Alors de $US = TU$ on tire $S^*U^{-1} = U^{-1}T^*$ soit encore $US^* = T^*U$, ce qui exprime l'égalité $U\bar{Z} = \bar{Z}U$, en désignant par $\bar{Z}$ l'opérateur de multiplication par $\bar{\lambda}$. Alors $UP(Z,\bar{Z}) = P(Z,\bar{Z})U$, autrement dit $UP(S,S^*) = P(T,T^*)U$ pour tout polynôme P en $z,\bar{z}$. En appliquant cette égalité à la fonction $\mathbb{1} \in L^2(\mu)$ et en posant $g = U\mathbb{1} \in L^2(\nu)$ on obtient $UP = Pg$ pour tout polynôme P. Par densité on en tire $Uf = fg$ pour toute $f \in L^2(\mu)$ et comme U est isométrique alors :

$$\int |f|^2 d\mu = \int |f|^2\, |g|^2\, d\nu$$

En particulier, avec $f = 1_A$, on obtient $\mu(A) = \int_A |g|^2 d\nu$ donc $\mu = |g|^2.\nu$ et

$\mu \ll \nu$. En remplaçant l'isométrie U par U^{-1} on obtiendrait $\nu \ll \mu$, d'où l'équivalence de μ et ν au sens de Radon-Nikodym.

(3.3.5) COROLLAIRE. - *Soient* x *et* y *deux vecteurs cycliques pour* T *dans* H. *Alors les mesures* E_x *et* E_y *sont Radon-Nikodym-équivalentes.*

Pour répondre à la troisième question on remarque par un exercice facile que l'identité I : H → H ne peut être un opérateur simple que si dim H = 1. Ceci revient à dire qu'un opérateur T ayant une valeur propre de multiplicité supérieure ou égale à 2 n'est pas simple. L'idée qui préside au théorème qui va suivre est donc de décomposer l'espace H en sous-espaces stables par T et T* et sur chacun desquels T est un opérateur simple. L'inconvénient de la méthode est que la décomposition obtenue est assez largement arbitraire (il n'y a pas de résultat d'unicité) et qu'elle "désarticule" nécessairement les espaces propres de dimension supérieure à 2.

(3.3.6) THEOREME. - *Soit* T *un opérateur normal sur* H. *Alors il existe une décomposition hilbertienne*

$$H = \bigoplus_{i \in I} H_i$$

indexée sur un ensemble I *non nécessairement fini, ni même dénombrable (si* H *est non séparable), en sous-espaces* H_i *(deux à deux orthogonaux) stables à la fois par* T *et* T* *et tels que la restriction* $T_i = T|_{H_i}$ *soit, pour chaque* $i \in I$, *un opérateur simple. Si* μ_i *est une mesure sur* $\mathbb{C}$ *associée à* T_i *(connue à une équivalence près) alors* $\sigma(T) = \overline{\bigcup_i \operatorname{supp} \mu_i}$

Preuve - Désignons par $\mathcal{F}$ l'ensemble des familles $(H_i)_{i \in I}$ de sous-espaces orthogonaux, stables par T et T* et tels que $T_i = T|_{H_i}$ soit simple pour chaque i. Alors $\mathcal{F}$ n'est pas vide car pour tout $x \in H$, l'espace $H_o = \overline{ev}\,(T^n\, T^{*m} x)$ est tel , d'après (3.3.3), que $\{H_o\} \in \mathcal{F}$. On ordonne $\mathcal{F}$ par inclusion et on vérifie que $\mathcal{F}$ est, ainsi ordonné, un ensemble inductif. D'après le lemme de Zorn il admet donc un élément maximal $(H_i)_{i \in I}$. Posons alors $L = \bigoplus H_i$, somme directe hilbertienne et supposons $L \neq H$.

Alors l'orthogonal $L^{\perp}$ est non nul. Mais L est stable par T et T*, donc aussi $L^{\perp}$. Alors si $x \in L^{\perp}$ et si $x \neq 0$, on voit que $L^{\perp}$ contient l'espace $H_o = \overline{ev}\,(T^n T^{*m} x)$, de sorte qu'on peut agrandir la famille $(H_i)_{i \in I}$ en y rajoutant H_o, contrairement à sa maximalité. Ainsi $H = \oplus H_i$ et $T = \oplus T_i$. De plus $\sigma(T_i) = \text{supp}\, \mu_i$. Montrons déjà que $\sigma(T_i) \subset \sigma(T)$, c'est-à-dire que $\rho(T) \subset \rho(T_i)$. Si $\lambda \in \rho(T)$ alors la fonction $z \to \frac{1}{\lambda - z}$ est continue et bornée sur $\sigma(T)$ et

$$R(\lambda,T) = (\lambda - T)^{-1} = \int \frac{dE(z)}{\lambda - z}$$

Le fait que T et T* laissent invariant H_i conduit aisément à l'invariance de H_i par tous les opérateurs f(T) (toujours par Stone-Weierstrass) pour f continue et même pour f borélienne bornée par le raisonnement classique sur les classes b-stables de fonctions. Ainsi $R(\lambda,T)H_i \subset H_i$ donc $R(\lambda,T)|_{H_i}$ est l'inverse de $(\lambda-T)|_{H_i}$ c'est-à-dire que $\lambda \in \rho(T_i)$ et $R(\lambda,T_i) = R(\lambda,T)|_{H_i}$.

On a donc bien déjà $\overline{\bigcup \sigma(T_i)} \subset \sigma(T)$. Réciproquement supposons $\lambda \notin \overline{\bigcup \sigma(T_i)}$. Il existe alors $\delta > 0$ tel que $d(\lambda, \sigma(T_i)) > \delta$ pour tout i. L'équation $(\lambda-T)x = y = \Sigma y_i$, où y est fixé, se résout par $x = (x_i)$ avec $x_i = R(\lambda,T_i)y_i$ nécessairement, de sorte que $(\lambda-T)$ est déjà injectif. Pour prouver que $(\lambda-T)^{-1}$ est borné il faut pouvoir majorer $\Sigma \|x_i\|^2$. Or

$$\|x_i\|^2 = \int \left| \frac{1}{\lambda_i - z} \right|^2 dE_{i,y_i} < \frac{1}{\delta^2} \|y_i\|^2$$

et par suite $x = (x_i) \in H$ et $\|x\| < \frac{1}{\delta} \|y\|$, donc $\lambda \in \rho(T)$. □

<u>Remarque</u> - On prendra garde que les compacts $K_i = \sigma(T_i) = \text{supp}\, \mu_i$ ne sont pas nécessairement disjoints et peuvent même être égaux. Par conséquent, la projection $H \to H_i$ n'est pas le projecteur $E(K_i)$ en général.

(3.3.7) <u>EXERCICES</u>. :

<u>Exerc. 1.</u> - Soit I l'opérateur identité sur H quelconque. Expliciter une décomposition de T = I en opérateurs simples.

<u>Exerc. 2.</u> - Même question avec dim H = 5 en prenant pour T un opérateur hermitien admettant une valeur propre triple et une autre double. Préciser sur cet exemple la remarque ci-dessus.

Exerc. 3. - Montrer que si T (supposé normal) est simple alors le commutant $\{T,T^*\}^c$ est une sous-algèbre stellaire *commutative* de L(H). (On se ramènera à T = Z sur $L^2(\mu)$ et on prouvera que le commutant s'identifie isométriquement à l'algèbre $L^\infty(\mu)$).

Exerc. 4. - Soit T un opérateur normal sur un espace séparable H. Montrer qu'il existe un espace métrisable localement compact Ω, réunion dénombrable de compacts disjoints (donc dénombrable à l'infini) et une probabilité P sur Ω, tels que T soit unitairement équivalent à un opérateur de multiplication par une fonction continue et bornée sur l'espace $L^2(P)$.

CHAPITRE 4 - OPERATEURS NON BORNES

Nous n'avons jusqu'à présent étudié que des opérateurs bornés (continus) définis sur un espace de Hilbert H tout entier. Toutefois, au chapitre 3, nous avons déjà remarqué que la donnée d'une mesure spectrale sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ pourrait peut-être permettre de représenter des opérateurs d'un type plus général. De plus, il y a en Analyse même ou en Physique, des exemples simples d'opérateurs définis sur une partie seulement de l'espace H et qui, surtout, ne sont pas bornés. Ainsi, si on prend pour H l'espace $L^2[0,1]$, l'opérateur différentiation $T = \frac{d}{dx}$, défini sur le sous-espace de H formé des fonctions continument différentiables, est bien entendu non borné, comme on s'en assure en examinant la suite de fonctions $f_n(x) = e^{2i\pi nx}$. De même, si $H = L^2(\mathbb{R})$, l'opérateur de multiplication par x, défini sur le sous-espace de H formé des $f \in L^2(\mathbb{R})$ telles que $xf \in L^2(\mathbb{R})$, fournit un autre exemple simple d'opérateur non borné. Le but de ce qui suit est d'étudier en détail de tels opérateurs en vue d'applications, à la Mécanique Quantique par exemple.

(4.1) OPERATEURS NON BORNES. - Etant donné un espace de Hilbert H, on appelle opérateur sur H, la donnée d'un couple $(T,D(T))$, où $D(T)$ est un sous-espace vectoriel de H et T une application linéaire de $D(T)$ dans H ; $D(T)$ s'appelle le domaine de T. Il convient bien de noter que la donnée de $D(T)$ est essentielle dans la définition de l'opérateur T : si on restreint ce domaine (ou si on l'agrandit), on modifie les propriétés de T donc on change d'opérateur.

Dans ce qui suit, on supposera toujours que $D(T)$ *est un sous-espace dense* de H, seuls les opérateurs à domaine dense se révèlant utiles pour les applications. Donnons maintenant un certain nombre de définitions élémentaires.

On dit que deux opérateurs S et T sont égaux si on a $D(S) = D(T)$ et $Sx = Tx$, pour tout $x \in D(S)$. De même, S prolonge T ou est une extension de T (noté $T \subseteq S$) si on a $D(T) \subseteq D(S)$ et $Tx = Sx$, pour tout $x \in D(T)$.

Enfin l'opérateur $S + T$ est défini par $(S+T)x = Sx + Tx$, pour $x \in D(S) \cap D(T)$ alors que l'opérateur ST n'est défini que pour les $x \in D(T)$ tels que $Tx \in D(S)$. Ainsi, généralement, les domaines $D(ST)$ et $D(TS)$ sont différents, ce qui va compliquer encore le problème de commutation de deux opérateurs non bornés. Lorsque T est injectif, on notera T^{-1} l'opérateur (non borné en général) défini sur $\mathrm{Im}\, T$ par les égalités : $Tx = y \Leftrightarrow x = T^{-1}y$ $\forall\, x \in D(T)$.

A tout opérateur T, on peut associer son graphe, noté $G(T)$, qui est le sous-espace vectoriel de $H \times H$ défini par :

$$G(T) = \{ (x,Tx) \ ; \ x \in D(T) \}$$

Cette notion est importante puisqu'un opérateur est complètement déterminé par son graphe. Ainsi, pour des opérateurs S et T on a $S = T$(resp.$S \subseteq T$) si et seulement si $G(S) = G(T)$ (resp. $G(S) \subseteq G(T)$).

Opérateurs fermés :

(4.1.1) DEFINITION. - *On dit que* T *est fermé lorsque son graphe* $G(T)$ *est fermé dans* $H \times H$, *ce qui signifie en clair que si une suite* $(x_n) \in D(T)$ *est telle que* $x_n \to x$ *et* $Tx_n \to y$, *alors* $x \in D(T)$ *et* $y = Tx$.

Il résulte immédiatement de la définiton que si l'opérateur T est fermé, son noyau $\mathrm{Ker}\, T$ est fermé dans H. On vérifie également que l'on a :

(4.1.2) PROPOSITION. :

a) Si S *est un opérateur borné sur* H, *alors* T *est fermé si et seulement si* $S + T$ *est fermé.*

b) Si T *est injectif, alors* T *est fermé si et seulement si* T^{-1} *est fermé.*

Un opérateur fermé n'est pas nécessairement borné (sur son domaine) comme on peut le voir avec l'opérateur de multiplication par x défini dans l'introduction ; pour faire le lien entre ces deux notions, on peut noter :

(4.1.3) PROPOSITION. - *Soient les trois assertions suivantes :*

a) T *est borné sur* D(T).

b) T *est fermé.*

c) D(T) *est fermé dans* H.

Alors deux quelconques de ces assertions impliquent la troisième.

Preuve - Il est clair que si on a a) et b), alors on a c). Maintenant si T est borné sur D(T), alors G(T) est fermé dans D(T) x H, donc fermé dans H x H dès que D(T) est lui-même fermé. Enfin, si T est fermé et à domaine fermé, il résulte du théorème du graphe fermé que T est continu. □

En particulier, les opérateurs considérés étant à domaine dense, on déduit de (4.1.3) qu'un opérateur fermé T est continu si et seulement si D(T) = H.

Il faut encore noter que si l'opérateur T est fermé, on peut définir sur son domaine D(T) une autre norme hilbertienne, notée $\|.\|_*$ en posant:

$$\|x\|_*^2 = \|x\|^2 + \|Tx\|^2 \qquad \forall\ x \in D(T)$$

où $\|.\|$ désigne la norme initiale de H. L'intérêt de cette norme, appelée *norme de Sobolev*, est qu'elle rend l'espace D(T) complet et que par ailleurs comme $\|Tx\| \leqslant \|x\|_*$ pour tout $x \in D(T)$, T devient un opérateur borné de l'espace de Hilbert $(D(T), \|.\|_*)$ dans H. Pour voir que D(T) est complet il suffit de remarquer que si une suite $(x_n) \subseteq D(T)$ est de Cauchy pour $\|.\|_*$, elle est de Cauchy dans H, donc converge vers $x \in H$. Mais (Tx_n) est aussi de Cauchy dans H, donc converge vers $y \in H$. La fermeture de T assure que $x \in D(T)$ et qu'on a $y = Tx$; on déduit de là que (x_n) converge aussi vers x pour $\|.\|_*$.

Lorsque T n'est plus fermé, la question se pose de savoir s'il admet des extensions fermées. Ce n'est pas toujours le cas ; si T est tel qu'il existe 2 suites (x_n) et (y_n) dans D(T) convergeant vers le même point x et tel que les suites (Tx_n) et (Ty_n) aient des limites distinctes, alors T n'admet pas d'extension fermée. Pour que cette situation ne se produise pas, il faut et il suffit que $\overline{G(T)}$ soit le graphe d'un opérateur, ce qui nous amène à la définition suivante :

(4.1.4) DEFINITION. - *On dit que* T *est fermable (ou préfermé) s'il admet une extension fermée. Dans ce cas, il admet un plus petit prolongement fermé, noté* $\overline{T}$, *appelé fermeture de* T.

Lorsque T est fermable, sa fermeture $\overline{T}$ est complètement déterminée par son graphe $G(\overline{T})$ qui n'est autre que l'adhérence $\overline{G(T)}$ de $G(T)$ dans $H \times H$.

Opérateur adjoint. - T étant à nouveau un opérateur quelconque (toujours à domaine dense), considérons l'ensemble des points $x \in H$ tels que la forme linéaire $y \to (Ty \mid x)$ soit continue sur $D(T)$ pour la norme induite par celle de H. Pour un tel point x, cette forme linéaire se prolonge par continuité à l'espace H tout entier, donc il existe un élément de H, noté T^*x, unique puisque $D(T)$ est dense dans H, et déterminé par les égalités :

$$(Ty|x) = (y|T^*x) \ \forall \ y \in D(T)$$

De cette clause d'unicité, on déduit aisément que T^* est un opérateur. Ainsi :

(4.1.5) DEFINITION. - *Pour tout opérateur* T, *on appelle adjoint de* T, *l'opérateur* T^* *défini sur le domaine* $D(T^*) = \{ x \in H \ ; \ y \to (Ty|x)$ *est continue sur* $D(T)\}$ *par les égalités :*

$$(Ty|x) = (y|T^*x) \ \forall \ y \in D(T), \ \forall \ x \in D(T^*)$$

Remarque - Par définition, il est clair que $D(T^*)$ est un sous-espace vectoriel de H, mais rien n'assure en général, qu'il soit dense dans H. On donnera plus loin une condition nécessaire et suffisante portant sur T pour qu'il en soit ainsi. On notera que si on a $T \subseteq S$, alors $D(S^*) \subseteq D(T^*)$ et on a alors $S^* \subseteq T^*$.

Nous allons maintenant examiner quelques propriétés de l'opération d'adjonction. Auparavant, notons que l'on peut munir l'espace produit $H \times H$ d'une structure hilbertienne en posant :

$$((x_1,y_1)|(x_2,y_2)) = (x_1|x_2) + (y_1|y_2)$$

et désignons par J l'opérateur continu sur $H \times H$ défini par $J(x,y) = (y,-x)$
Alors J est unitaire et on a $J^2 = -I$

(4.1.6) PROPOSITION. - *L'opérateur* T^* *est fermé et plus précisément on a :*

$$G(T^*) = J[\overline{G(T)}^{\perp}] = J[\overline{G(T)}]^{\perp} = J[G(T)]^{\perp}$$

Preuve - Il est clair que pour toute partie A de $H \times H$, on a $J(A^{\perp}) = J(A)^{\perp}$ et $J(\overline{A}) = \overline{J(A)}$. Ainsi, tout revient à prouver l'égalité $G(T^*) = J[G(T)]^{\perp}$. Or, si $x \in D(T^*)$, pour tout $z \in D(T)$, on a :

$$((x, T^*x) \mid (Tz - z)) = (x \mid Tz) - (T^*x \mid z) = 0$$

d'où l'inclusion $G(T^*) \subseteq J[G(T)]^{\perp}$. Réciproquement, si $(x,y) \in J[G(T)]^{\perp}$ pour tout $z \in D(T)$, on a :

$$(x \mid Tz) - (y \mid z) = 0$$

soit encore $(Tz \mid x) = (z \mid y)$. Ainsi l'applicaqtion $z \to (Tz \mid x)$ est continue sur $D(T)$, donc x appartient à $D(T^*)$ et on a $T^*x = y$. Alors (x,y) appartient à $G(T^*)$, ce qui suffit. □

Les propriétés de l'adjonction relativement aux opérations classiques effectuées sur les opérateurs, sont résumées dans le résultat suivant :

(4.1.7) PROPOSITION :

a) Si T^{-1} *existe et si* Im T *est dense dans* H, *alors* T^* *est inversible et on a* $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$

b) Si S *est un opérateur borné sur* H, *alors*

$(S+T)^* = S^* + T^*$

$(ST)^* = T^* S^*$ et $S^* T^* \subseteq (TS)^*$

c) $\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Im} T)^{\perp}$

Preuve - L'assertion c) est immédiate.

a) : On en déduit que si $\overline{\operatorname{Im} T} = H$, alors $\operatorname{Ker} T^* = \{0\}$, donc T^{*-1} existe. Remarquons que si Δ est l'opérateur symétrie de $H \times H$ défini par $\Delta(x,y) = (y,x)$, alors on a :

$$G[T^{*-1}] = \Delta G(T^*) = \Delta[J(G(T))^{\perp}] = [\Delta J(G(T))]^{\perp}$$

or $\Delta J = -\Delta J$, donc :

$$G[T^{*-1}] = [-J\Delta(G(T))]^{\perp} = [J\Delta(G(T))]^{\perp} = J[G(T^{-1})]^{\perp}$$

Finalement :

$$G[T^{*-1}] = G[T^{-1*}]$$

ce qui suffit.

b) : Comme S est partout défini, on a $D(S+T) = D(T)$ et la continuité de S assure l'égalité $D(T^*) = D((S+T)^*)$. On vérifie alors sans difficulté que l'on a $(S+T)^* = S^* + T^*$. Montrons maintenant que l'on a $(ST)^* = T^* S^*$. Déjà, si $x \in D[(ST)^*]$, l'application $y \to (Ty|S^*x)$ est continue sur $D(T)$ puisque l'on a $(Ty|S^*x) = (STy|x) = (y|(ST)^* x)$; on a donc $S^*x \in D(T^*)$, soit $x \in D(T^* S^*)$.

Inversement, pour $x \in D(T^* S^*)$, on a :

$$(STy|x) = (Ty|S^*x) = (y|T^* S^*x) \quad \forall\, y \in D(ST)$$

donc x appartient à $D[(ST)^*]$ et on a aussi

$$(ST)^*x = T^* S^* x$$

d'où le résultat. On démontre de même que l'on a $S^* T^* \subseteq (TS)^*$.

On peut donner une caractérisation des opérateurs fermables définis ci-dessus en termes d'opérateur adjoint.

(4.1.8) PROPOSITION. - *Pour qu'un opérateur* T *soit fermable, il faut et il suffit que* $D(T^*)$ *soit dense dans* H. *Dans ce cas, l'opérateur* $(T^*)^*$, *noté* T^{**}, *est précisément la fermeture* $\overline{T}$ *de* T. *En particulier,* $T = T^{**}$ *si* T *est fermé, et on a toujours* $(T^{**})^* = T^*$

Preuve - Déjà si $D(T^*)$ est dense dans H, on peut définir l'adjoint T^{**} de T^* et d'après (4.1.6) on a :

$$G(T^{**}) = J[G(T^*)]^{\perp} = J^2(G(T))^{\perp\perp} = \overline{G(T)}$$

$\overline{G(T)}$ est donc le graphe d'un opérateur, ce qui suffit à prouver que T est fermable et de plus $G(T^{**}) = G(\overline{T})$, donc T^{**} est la fermeture de T. Réciproquement, supposons que T soit fermable et montrons que $D(T^*)$ est dense dans H, c'est-à-dire que son orthogonal $D(T^*)^{\perp}$ est réduit à $\{0\}$. Or si x est orthogonal à $D(T^*)$, $(x,0)$ est orthogonal à $G(T^*)$. De plus on a :

$$G(T^*)^{\perp} = (J(\overline{G(T)})^{\perp})^{\perp} = J[\overline{G(T)}] = J[G(\overline{T})]$$

Il existe donc un point $y \in D(\overline{T})$ tel que :

$$(x,0) = J(y,\overline{T}y) = (\overline{T}y, -y)$$

Ainsi $y = 0$ et $x = \overline{T}\, y = 0$. □

Venons en maintenant au résultat essentiel de ce paragraphe, qui a pour but d'associer à tout opérateur fermé, un opérateur hermitien et borné défini sur H tout entier. Nous verrons, au paragraphe 3, que ceci nous permettra, entre autres, de construire un calcul fonctionnel borélien pour un opérateur normal non borné et donc d'obtenir la résolution spectrale d'un tel opérateur.

(4.1.9) <u>THEOREME</u> (VON NEUMANN). - *Soit* T *un opérateur fermé. Alors* $(I+T^*T)$ *est une bijection de* $D(T^*T)$ *sur* H ; *l'opérateur inverse* $B = (I+T^*T)^{-1}$ *est continu sur* H, *hermitien et tel que* $\sigma(B) \subseteq [0,1]$.

<u>*Preuve*</u> - Déjà, d'après (4.1.6), on peut décomposer $H \times H$ sous la forme $H \times H = G(T) \oplus J[G(T^*)]$, la somme directe étant hilbertienne. Alors, pour tout $x \in H$, il existe un unique $y \in D(T)$ et un unique $z \in D(T^*)$ tels que :

$$(x,0) = (y,Ty) + (T^*z, -z)$$

Ceci permet de définir, sur l'espace H tout entier, deux opérateurs B et C selon :

$$Bx = y \text{ et } Cx = z$$

et tels que $\operatorname{Im} B \subseteq D(T)$ et $\operatorname{Im} C \subseteq D(T^*)$. De plus pour des raisons d'orthogonalité on a, pour tout $x \in H$:

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|Ty\|^2 + \|z\|^2 + \|T^*z\|^2$$

et ainsi $\|Bx\| \leq \|x\|$ et $\|Cx\| \leq \|x\|$, ce qui prouve la continuité des opérateurs B et C. Par ailleurs, par construction même on a :

$$\begin{cases} x = y + T^*z = Bx + T^*Cx \\ 0 = Ty - z = TBx - Cx \end{cases}$$

donc $TB = C$ et a fortiori $\operatorname{Im} B \subseteq D(T^*T)$. Il en résulte que l'opérateur T^*TB est défini sur H tout entier et on a donc l'égalité :

$$I = B + T^*\, TB = (I + T^*T)B$$

On déduit de là que $(I+T^*T)$ est surjectif : montrons qu'il est aussi injectif. Soit $x \in D(T^*T)$ tel que $x + T^*Tx = 0$; alors on a aussi :

$$0 = (x+T^*Tx \mid x) = \|x\|^2 + (T^*Tx \mid x)$$

or $x \in D(T)$ et $T = T^{**}$, donc $(T^*Tx \mid x) = \|Tx\|^2$. L'égalité précédente implique que l'on a nécessairement $x = 0$. En résumé, $(I+T^*T)$ est une bijection de $D(T^*T)$ sur H, dont l'inverse B est un opérateur continu. En particulier B est fermé, et il en est de même pour T^*T en vertu de (4.1.2). Pour voir que B est hermitien, il suffit d'établir que l'on a $(Bx_1 \mid x_2) = (x_1 \mid Bx_2)$, pour tout $x_1, x_2 \in H$, ce qui découle aisément de la décomposition d'un point quelconque $x \in H$, donnée précédemment. Pour terminer, notons que l'inégalité $\|Bx\| \leq \|x\|$ implique que le spectre $\sigma(B)$ est inclus dans $[-1,+1]$. De plus l'égalité $(x+T^*Tx \mid x) = \|x\|^2 + \|Tx\|^2$, vraie pour $x \in D(T^*T)$, l'est a fortiori pour $x \in \operatorname{Im} B$ et on a donc :

$$(u \mid Bu) = \|Bu\|^2 + \|Cu\|^2 \geq 0 \quad \forall\, u \in H$$

Ainsi B est positif, ce qui entraîne, comme on l'a vu au chapitre 2, que le spectre $\sigma(B)$ de B est inclus dans $\mathbb{R}^+$, et en définitive on a bien $\sigma(B) \subseteq [0,1]$. □

Une première conséquence importante de ce théorème est la suivante :

(4.1.10) <u>COROLLAIRE</u>. - *Si* T *est un opérateur fermé, alors le domaine de* T^*T *est dense dans* H *et on a l'égalité* $(T^*T)^* = T^*T$.

<u>*Preuve*</u> - Désignons par T' l'opérateur T restreint à $D(T^*T)$. Pour montrer que $D(T^*T)$ est dense dans H, il suffit de montrer que $G(T')$ est dense dans $G(T)$. En effet, ceci entraîne que l'on a $D(T) \subseteq \overline{D(T')}$ et comme $D(T)$ est dense dans H, il en est de même pour $D(T') = D(T^*T)$.
Soit donc $x \in D(T)$ tel que (x,Tx) soit orthogonal à $G(T')$. pour tout $y \in D(T^*T)$, on a donc :

$$((x,Tx) \mid (y,Ty)) = 0$$

Or, on a aussi $((x,Tx) \mid (y,Ty)) = (x \mid y) + (Tx \mid Ty) = (x \mid y + T^*Ty)$
Ainsi : $(x \mid (I + T^*T)y) = 0 \quad \forall y \in D(T^*T)$
Comme $\operatorname{Im}(I+T^*T) = H$, on en déduit $x = 0$, ce qui suffit. Enfin, pour

établir la dernière assertion, on applique la proposition (4.1.7.a) à l'opérateur B ; on en déduit l'égalité $(B^*)^{-1} = (B^{-1})^*$; or B est hermitien et $B^{-1} = I + T^*T$, donc en fait, on a aussi :

$$I + T^*T = (I+T^*T)^* = I + (T^*T)^*$$

et finalement $T^*T = (T^*T)^*$. □

Pour voir ce que signifie en clair le résultat de (4.1.10), introduisons les définitions suivantes :

(4.1.11) DEFINITION. - *Un opérateur* T *est dit auto-adjoint si on a* $T = T^*$, *c'est-à-dire en d'autres termes :*

$$D(T) = D(T^*) \text{ et } (Tx|y) = (x|Ty) \quad \forall\, x,y \in D(T)$$

Ainsi un opérateur auto-adjoint, défini et borné sur H tout entier, n'est rien d'autre qu'un opérateur hermitien.

(4.1.12) DEFINITION. - *Soit* T *un opérateur fermé ; on dit qu'un sous-espace* $D_o \subseteq D(T)$ *est un "coeur" (= core en anglais) pour* T *lorsque* $T = \overline{T_o}$, *où* T_o *est l'opérateur* T *restreint à* D_o.

Cette définition signifie en fait que D_o est un "coeur" pour T, lorsque le graphe $G(T_o)$ de T_o est dense dans G(T). En particulier, cette définition implique la condition $D(T) \subseteq \overline{D_o}$ et si D(T) est dense dans H, il en est de même pour $D_o = D(T_o)$.

Remarque - Dans le corollaire (4.1.10), on a en fait établi que pour tout opérateur fermé T, l'opérateur T^*T est auto-adjoint et que son domaine $D(T^*T)$ est un "core" pour T.

Poursuivons par deux exercices, le premier fournissant un exemple classique d'opérateur auto-adjoint, le second étant une simple application du théorème de Von-Neumann.

(4.1.13) EXERCICES. :

Exerc. 1. - Soit $H = L^2(\mathbb{R})$ et soit T l'opérateur de multiplication par x défini sur le domaine :

$$D(T) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \ ;\ xf \in L^2(\mathbb{R})\}$$

Montrer que T est auto-adjoint.

Exerc. 2. - Soit T un opérateur fermé sur un espace de Hilbert H tel que D(T) soit dense dans H et tel que l'on ait $T[D(T)] \subseteq D(T^*)$. Montrer alors que D(T) = H et que T est en fait borné sur H.

Opérateurs normaux :

(4.1.14) DEFINITION. - *Un opérateur* T *est dit normal s'il est fermé et si on a* $TT^* = T^*T$ *(avec égalité des domaines).*

Il est clair que si T est normal, alors T* est aussi normal. Donnons, comme conséquence du théorème de Von-Neumann une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur soit normal.

(4.1.15) PROPOSITION. - *Soit* T *un opérateur fermé. Pour que* T *soit normal, il faut et il suffit que l'on ait :*

$$D(T) = D(T^*) \text{ et } \|Tx\| = \|T^*x\| \quad \forall\, x \in D(T)$$

Preuve - Supposons d'abord que T soit normal et soit T' la restriction de T à $D(T^*T)$; on a vu, dans la preuve de (4.1.10) que G(T') est dense dans G(T). Ainsi, si $x \in D(T)$, il existe $(x_n) \in D(T^*T)$ telle que $x = \lim x_n$ et $Tx = \lim Tx_n$. Or, pour tout $y \in D(T^*T)$, on a :

$$\| Ty\|^2 = (Ty|Ty) = (y|T^*Ty) = (y|TT^*y) = \| T^*y\|^2$$

puisque $TT^* = T^*T$. En appliquant ce résultat à l'élément $y = x_n - x_m$, il en résulte que la suite (T^*x_n) est de Cauchy, donc converge dans H. Comme T* est fermé, on en déduit que x appartient à D(T*) et de plus $T^*x = \lim T^*x_n$. En particulier :

$$\| T^*x\| = \lim \|T^*x_n\| = \lim \|Tx_n\| = \|Tx\|$$

On a déjà l'inclusion $D(T) \subseteq D(T^*)$; mais T* est lui aussi normal donc on a $D(T^*) \subseteq D(T^{**}) = D(T)$ puisque T est fermé et finalement $D(T) = D(T^*)$. Réciproquement, il suffit de montrer que l'on a $TT^* \subseteq T^*T$; en effet, on aura alors $(T^*T)^* \subseteq (TT^*)^*$, mais les opérateurs TT^* et T^*T sont auto-adjoints d'après (4.1.10), donc en fait $TT^* = T^*T$. Soit $x \in D(TT^*)$; déjà $x \in D(T^*) = D(T)$ et il suffit de voir que l'on a $Tx \in D(T^*)$, c'est-à-dire que l'application $y \to (Ty|Tx)$ est continue sur $D(T)$. Or, en partant de l'égalité $\|Tz\| = \|T^*z\|$, pour tout $z \in D(T)$, on obtient aisément $(Ty|Tx) = (T^*y|T^*x)$ $\forall\, y \in D(T)$. Mais $T^*x \in D(T)$ donc en fait $(Ty|Tx) = (y|TT^*x)$ et l'application est continue. Ainsi, Tx appartient à $D(T^*)$ et on a :

$$T^*Tx = TT^*x$$

ce qui achève la démonstration. □

Remarque - On déduit aisément de ce théorème qu'un opérateur normal ne possède aucune extension normale propre.

Spectre et résolvant d'un opérateur non borné. - Comme dans le chapitre 3, on peut associer à un opérateur non borné quelconque (mais toujours supposé à domaine dense) son spectre et son résolvant. Ainsi un nombre complexe λ appartient au résolvant de T, noté $\rho(T)$, lorsque l'opérateur $(\lambda-T)$ est inversible (c'est-à-dire injectif) et tel que $(\lambda-T)^{-1}$ soit défini et borné sur H tout entier. Il faut noter que, contrairement au cas des opérateurs bornés, la propriété pour $(\lambda-T)$ de posséder un inverse défini sur H, ne suffit pas pour que λ soit dans $\rho(T)$; il faut de plus imposer à cet inverse $(\lambda-T)^{-1}$ d'être continu. On appelle encore spectre de T, noté $\sigma(T)$, le complémentaire dans $\mathbb{C}$, de l'ensemble $\rho(T)$, et comme précédemment on peut affiner un peu l'étude du spectre en introduisant les spectres ponctuel, continu et résiduel de T, notés encore respectivement $\sigma_p(T)$, $\sigma_c(T)$ et $\sigma_r(T)$ et définis comme en (3.2.1). Il est clair que l'on obtient ainsi des parties disjointes de $\sigma(T)$ mais, contrairement au cas des opérateurs bornés, on a seulement l'inclusion :

$$\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T) \subseteq \sigma(T)$$

En effet, un nombre complexe λ tel que $(\lambda-T)$ soit inversible et d'inverse $(\lambda-T)^{-1}$ défini sur H tout entier mais non borné, appartient à $\sigma(T)$ sans être dans $\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$. Toutefois, cet inconvénient disparaît lorsqu'on se limite aux opérateurs fermés, puisqu'alors, si T est fermé et inversible, l'opérateur $(\lambda-T)^{-1}$ est aussi fermé, donc continu dès qu'il est défini sur H tout entier, et ce d'après (4.1.3). Ainsi pour un opérateur fermé T, on a encore :

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$$

Pour tout $\lambda \in \rho(T)$, on pose $R(\lambda,T) = (\lambda-T)^{-1}$ (c'est donc un élément de $L(H)$) et on appelle fonction résolvante, la fonction $R(.,T)$ définie sur $\rho(T)$. Comme pour les opérateurs bornés, on a pour un opérateur T quelconque :

(4.1.16) PROPOSITION :

a) $\rho(T)$ *est un ouvert de* $\mathbb{C}$

b) La fonction résolvante $R(.,T)$ *est analytique sur* $\rho(T)$.

c) L'équation résolvante suivante est satisfaite :

$$R(\lambda,T) - R(\mu,T) = (\mu-\lambda)\, R(\lambda,T)\, R(\mu,T) \quad \forall\ \lambda,\mu \in \rho(T)$$

Preuve - Elle est identique à celle faite dans le cas d'un opérateur borné. □

On a vu, au chapitre 3, que si T est un opérateur borné, le résolvant $\rho(T^*)$ de l'opérateur T^* n'est autre que le conjugué $\overline{\rho(T)}$ de $\rho(T)$ dans $\mathbb{C}$. Si maintenant, l'opérateur T est quelconque, on a seulement :

(4.1.17) PROPOSITION :

a) $\lambda \in \rho(T) \Rightarrow \overline{\lambda} \in \rho(T^*)$

b) $R(\overline{\lambda},T^*) = R(\lambda,T)^* \ \forall \lambda \in \rho(T)$

Preuve - Soit $\lambda \in \rho(T)$; $(\lambda-T)$ est donc une bijection $D(T) \to H$ et de plus, $S = R(\lambda,T)$ appartient à $L(H)$, donc S^* est aussi défini et borné sur H. Comme S est inversible et comme $\operatorname{Im} S = D(T)$ est dense dans H, d'après (4.1.7), S^* est aussi inversible et on a $(S^*)^{-1} = (S^{-1})^*$, c'est-à-dire $(S^*)^{-1} = (\lambda-T)^* = \overline{\lambda} - T^*$. Ainsi, $\overline{\lambda} - T^*$ est lui-même inversible et son inverse S^* appartient à $L(H)$, donc $\overline{\lambda}$ est élément de $\rho(T^*)$ et on a :

$$R(\overline{\lambda},T^*) = R(\lambda,T)^* \text{ . } \square$$

Lorsque l'opérateur T est fermé, on a l'égalité $T = T^{**}$ et la proposition (4.1.17) se précise selon :

(4.1.18) COROLLAIRE. - *Soit* T *un opérateur fermé ; alors :*

$$\lambda \in \rho(T) \Leftrightarrow \overline{\lambda} \in \rho(T^*)$$

Enfin, comme en (3.2.2), on obtient sans difficulté :

(4.1.19) PROPOSITION. :

a) $\lambda \in \sigma_p(T) \Rightarrow \overline{\lambda} \in \sigma_p(T^*) \cup \sigma_r(T^*)$

b) $\lambda \in \sigma_r(T) \Rightarrow \overline{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$

Pour terminer ce paragraphe, il faut insister sur une différence essentielle entre les opérateurs bornés et non bornés. On a établi précédemment que le spectre d'un opérateur borné sur H est un compact non vide de $\mathbb{C}$. Avec (4.1.16), on peut seulement dire a priori, que le spectre d'un opérateur non borné est un fermé de $\mathbb{C}$. En fait, il se peut très bien que ce spectre soit, ou bien vide, ou bien au contraire non borné dans $\mathbb{C}$, et donc non compact. Pour illustrer ces faits, on se reportera au paragraphe (4.4) où sont développés un certain nombre d'exemples.

(4.2) OPERATEURS NORMAUX NON BORNES ASSOCIES A UNE MESURE SPECTRALE.

Le point de départ est donc la donnée d'une mesure spectrale sur un espace de Hilbert H, c'est-à-dire d'un espace mesurable (Ω,Σ) et d'une mesure $E : \Sigma \to L(H)$ satisfaisant aux conditions énoncées en (3.1.1). On a déjà vu, au chapitre 3, qu'à partir de là, on peut construire un calcul fonctionnel associant à chaque fonction f, Σ-mesurable et bornée, un opérateur borné $T_f = \int f(\lambda)\, dE(\lambda)$. De plus, l'application $\Phi : BM(\Omega,\Sigma) \to L(H)$ ainsi définie est un $*$-morphisme d'algèbres stellaires tel que :

a) $\| \Phi(f) \| \leq \| f \|$

b) $\| \Phi(f)x \|^2 = \int |f|^2\, dE_x \quad \forall\, x \in H$

En fait, l'intérêt de ces mesures spectrales $\Sigma \to L_S(H)$ est de permettre la construction d'opérateurs normaux non bornés, intérêt d'autant plus grand qu'un opérateur normal quelconque s'obtient toujours ainsi, comme on le verra au paragraphe (4.3). Pour construire ces opérateurs normaux non bornés à partir de la mesure spectrale E, il faut donc voir comment prolonger le morphisme Φ aux applications Σ-mesurables et non bornées ; les difficultés qui surgissent étant principalement liées à la définition des domaines de ces opérateurs, on commence par établir :

(4.2.1) <u>PROPOSITION</u>. - *Soit* f *une fonction* Σ*-mesurable. Alors l'ensemble*

$$\Delta(f) = \{x \in H \ ; \int |f|^2 dE_x < +\infty\}$$

est un sous-espace dense de H. *Plus généralement l'espace* $\Delta^\infty(f) = \bigcap_p \Delta(f^p)$ *est aussi dense dans* H.

Preuve - Montrons déjà que $\Delta(f)$ est un sous-espace vectoriel de H. Il est clair déjà que $\Delta(f)$ est stable par homothétie ; soient donc $x, y \in \Delta(f)$ et posons $z = x + y$. Pour tout $A \in \Sigma$, on a :

$$\begin{aligned} \| E(A)z\|^2 &\leq [\| E(A)x\| + \| E(A)y\|]^2 \\ &\leq 2\| E(A)x\|^2 + 2\| E(A)y\|^2 \end{aligned}$$

Or, $\| E(A)z\|^2 = (E(A)z \mid E(A)z) = (E(A)z \mid z) = E_z(A)$.

On en déduit donc :

$$E_z \leq 2(E_x + E_y)$$

et ainsi z appartient à $\Delta(f)$. Reste à prouver que $\Delta^\infty(f)$ est dense dans H. Fixons donc $x \in H$ et soit, pour tout n,

$$A_n = \{\omega \in \Omega \ ; \ |f(\omega)| \leq n\}$$

On pose $x_n = E(A_n)x$; comme la suite (A_n) d'éléments de Σ est croissante et a pour réunion Ω, on en déduit que la suite $(E(A_n))$ converge vers I pour la topologie simple forte de L(H) et en particulier $E(A_n)x = x_n$ converge vers x. Pour conclure, il suffit de voir que les x_n sont dans $\Delta^\infty(f)$. Comme on l'a déjà noté en (2.2.7), pour toute fonction g Σ-mesurable et bornée, on a $E_{\Phi(g)x,y} = g.E_{x,y}$. En particulier $E_{x_n} = 1_{A_n} . E_x$, et pour tout $p \geq 1$, on a donc :

$$\int |f|^{2p} \, dE_{x_n} = \int_{A_n} |f|^{2p} \, dE_x \leq n^{2p} \| E_x\| = n^{2p} \| x\|^2 < +\infty$$

Ainsi, $x_n \in \Delta(f^p)$, pour tout $p \geq 1$, ce qui suffit. □

(4.2.2) <u>PROPOSITION</u>. - *Soit* $x \in \Delta(f)$; *pour tout* $y \in H$, *la fonction* f *est intégrable par rapport à la variation* $|E_{x,y}|$ *et on a :*

$$\int |f| \, d|E_{x,y}| \leq \left(\int |f|^2 \, dE_x\right)^{1/2} . \ \| y \|$$

Preuve - On a déjà :

$$\int |f| \, d|E_{x,y}| = \text{Sup} \left\{ \left| \int g \, d \, E_{x,y} \right| \; ; \; g \in BM(\Omega,\Sigma), \; |g| \leqslant |f| \right\}$$

Soit donc $g \in BM(\Omega,\Sigma)$ telle que $|g| \leqslant |f|$. Alors :

$$\int g \, d \, E_{x,y} = (\Phi(g)x|y)$$

Ainsi :

$$\left| \int g \, d \, E_{x,y} \right| \leqslant \| \Phi(g)x \| \, \| y \|$$

Or, d'après (3.1.3.b) on a $\| \Phi(g)x \| = \| f \|_{L^2(E_x)}$, d'où finalement :

$$\left| \int g \, d \, E_{x,y} \right| \leqslant \left(\int |f|^2 d \, E_x \right)^{1/2} . \; \| y \|$$

ce qui fournit le résultat. □

Si x est fixé dans $\Delta(f)$, pour tout $y \in H$, la fonction f est a fortiori $E_{x,y}$-intégrable, ce qui permet de définir l'application $y \to fdE_{x,y}$, celle-ci étant évidemment anti-linéaire et continue d'après (4.2.2). Cette application définit donc un élément de H, noté $\Phi(f)x$ et on a ainsi introduit un opérateur noté $\Phi(f)$, défini sur le domaine $\Delta(f)$, selon :

$$(\Phi(f)x \mid y) = \int f \, d \, E_{x,y} \quad \forall \, x \in \Delta(f), \forall \, y \in H.$$

En résumé, on a le résultat fondamental suivant :

(4.2.3) THEOREME. - *A toute fonction Σ-mesurable* f *correspond un opérateur* $\Phi(f)$ *défini sur le domaine dense* $D(\Phi(f)) = \Delta(f)$ *et tel que :*

a) $(\Phi(f)x|y) = \int f \, d \, E_{x,y} \quad \forall \, x \in \Delta(f), \; \forall \, y \in H$

b) $\| \Phi(f)x \|^2 = \int |f|^2 d \, E_x \quad \forall \, x \in \Delta(f)$

Preuve - Il suffit de prouver b). On commence par remarquer que l'égalité $E_{\Phi(f)x,y} = f.E_{x,y}$ reste valable lorsque f est une fonction Σ-mesurable non nécessairement bornée. En effet, pour tout $A \in \Sigma$, on a :

$$E_{\Phi(f)x,y}(A) = (E(A)\Phi(f)x \mid y) = (\Phi(f)x \mid E(A)y)$$

$$= \int f \, d \, E_{x,E(A)y}$$

or $E_{x,E(A)y} = 1_A.E_{x,y}$ puisque 1_A est bornée, d'où finalement :

$$E_{\Phi(f)x,y}(A) = \int f 1_A \, d\, E_{x,y} = \int_A f \, d\, E_{x,y}$$

En tenant compte du fait que l'on a $\overline{E_{x,y}} = E_{y,x}$ on établit de même l'égalité $E_{x,\Phi(f)y} = \overline{f}.E_{x,y}$, pour toute f Σ-mesurable. De tout cela, il résulte

$$\|\Phi(f)x\|^2 = (\Phi(f)x|\Phi(f)x) = \int f \, d\, E_{x,\Phi(f)x} = \int f \, \overline{f} \, d\, E_x$$

Soit encore :

$$\|\Phi(f)x\|^2 = \int |f|^2 d\, E_x \quad \square$$

Remarque - Notons que l'on aurait pu introduire l'opérateur non borné $\Phi(f)$ d'une manière différente. En effet, si f est une fonction Σ-mesurable désignons par f_n les fonctions "tronquées" définies par $f_n(\omega) = f(\omega)$ si $|f(\omega)| < n$ et $f_n(\omega) = n$ sinon. A chaque fonction f_n, Σ-mesurable et bornée, on peut associer l'opérateur borné $\Phi(f_n) = \int f_n(\omega) \, d\, E(\omega)$ selon la méthode exposée en (3.1). On peut alors établir que pour $x \in H$, la fonction f appartient à $L^2(E_x)$si et seulement si la suite $x_n = \Phi(f_n)x$ converge dans H. Pour un tel x, on convient alors de poser $\Phi(f)x = \lim_n x_n$. Reste à prouver que l'opérateur $\Phi(f)$ ainsi défini coïncide avec l'opérateur $\Phi(f)$ défini ci-dessus. Or, pour tout $y \in H$, on a :

$$(\Phi(f)x|y) = \lim(x_n|y) = \lim_n(\Phi(f_n)x|\, y)$$

Donc

$$(\Phi(f)x|y) = \lim_n \int f_n \, d\, E_{x,y}$$

Comme f appartient à $L^2(E_x)$, on en déduit que f est $E_{x,y}$-intégrable, et on obtient, comme conséquence du théorème de Lebesgue :

$$(\Phi(f)x|y) = \int f \, d\, E_{x,y}$$

Les opérateurs $\Phi(f)$ étant à domaine dense, on peut définir leurs adjoints. Ils sont caractérisés par le résultat suivant :

(4.2.4) PROPOSITION. :

a) On a $D[\Phi(f)^*] = D[\Phi(f)]$ et $\Phi(f)^* = \Phi(\overline{f})$

b) Pour toute f *Σ-mesurable,* $\Phi(f)$ *est un opérateur normal.*

c) Si f *est réelle,* $\Phi(f)$ *est auto-adjoint.*

d) Si f *est positive,* $\Phi(f)$ *est auto-adjoint positif.*

Preuve :

a) Montrons déjà que l'on a $\Phi(\overline{f}) \subseteq \Phi(f)^*$. Soit $y \in D[\Phi(\overline{f})] = \Delta(\overline{f}) = \Delta(f)$ et considérons l'application $x \to (\Phi(f)x|y)$ définie sur $\Delta(f)$. On a :

$$(\Phi(f)x|y) = \int f \, d\, E_{x,y} = \int f \, d\, \overline{E_{y,x}} = \overline{\int \overline{f} \, d\, E_{y,x}}$$
$$= \overline{(\Phi(\overline{f})y|x)} = (x|\Phi(\overline{f})y)$$

Cette application est donc continue sur $\Delta(f)$; ainsi y appartient au domaine de $\Phi(f)^*$ et de plus :

$$\Phi(f)^*y = \Phi(\overline{f})y$$

Il reste seulement à prouver l'inclusion $D[\Phi(f)^*] \subseteq \Delta(f)$. La suite des parties $A_n = \{|f| < n\}$ est croissante, de réunion Ω, et les fonctions $f_n = f 1_{A_n}$ sont bornées ; on vérifie de plus aisément que l'on a $\Phi(f_n) = \Phi(f)\, E(A_n)$. En appliquant (4.1.7.b) à l'opérateur borné $E(A_n)$, on obtient alors :

$$E(A_n)\Phi(f)^* \subseteq [\Phi(f)E(A_n)]^* = \Phi(f_n)^* = \Phi(\overline{f}_n)$$

Fixons $x \in D[\Phi(f)^*]$, pour tout n, on a

$$\int |f_n|^2 d\, E_x = \| \Phi(\overline{f}_n)x\|^2 = \| E(A_n)\ \Phi(f)^*x\|^2$$

On en déduit :

$$\int |f_n|^2 d\, E_x < \| \Phi(f)^* x \|^2$$

ce qui donne, par passage à la limite :

$$\int |f|^2 d\, E_x < \| \Phi(f)^*x\|^2$$

Ainsi, x appartient à $\Delta(f)$ et tout est démontré.

b) Déjà $\Phi(f)$ est fermé grâce à a). Comme on a $D[\Phi(f)] = D[\Phi(f)^*]$, pour montrer que $\Phi(f)$ est normal, il suffit, d'après (4.1.15), de montrer que l'on a :

$$\| \Phi(f)x\| = \| \Phi(f)^*x\| \quad \text{pour } x \in \Delta(f)$$

ce qui découle aisément de (4.2.3.b) et de l'égalité $\Phi(f)^* = \Phi(\overline{f})$.
Les assertions c) et d) sont immédiates. □

On peut se demander quelles sont les fonctions Σ-mesurables f telles que l'opérateur associé $\Phi(f)$ soit borné sur H. On sait déjà qu'il en est ainsi dès que f est elle-même bornée. En fait, on peut préciser un peu les choses en introduisant les ensembles E-négligeables de Σ, comme étant ceux qui sont $E_{x,x}$-négligeables pour tout $x \in H$ (on obtient ainsi une classe stable par réunion dénombrable). Ceci permet de définir l'espace $L^\infty(E) = BM(\Omega,\Sigma) /_{\mathcal{N}}$ où $\mathcal{N}$ est l'idéal des fonctions E-négligeables, muni de la norme quotient $\|\,.\,\|_\infty$ et on obtient :

(4.2.5) PROPOSITION. - *Pour que* $\Phi(f)$ *soit borné sur* H *il faut et il suffit que* f *appartienne à* $L^\infty(E)$, *et on a* $\|\Phi(f)\| = \|f\|_\infty$

Preuve - Si $f \in L^\infty(E)$, on a $\Delta(f) = H$ et comme l'opérateur $\Phi(f)$ est fermé, il est aussi borné sur H d'après (4.1.3). De plus, avec (4.2.3.b), on a déjà $\|\Phi(f)\| \leq \|f\|_\infty$. Par ailleurs, soit r tel que $\|f\|_\infty > r$. L'ensemble $A = \{\omega \; ; \; |f(\omega)| > r\}$ n'étant pas E-négligeable, il existe $x \in H$ tel que $E_x(A) = 1$, si bien qu'en posant $y = \Phi(1_A)x$, on a $\|y\|^2 = 1$. De plus, $\Phi(f)y = \Phi(f1_A)x$, d'où il résulte :

$$\|\Phi(f)y\|^2 = \int_A |f|^2 d\,E_x \geq r^2$$

On a donc $\|\Phi(f)\| \geq r$ et finalement $\|\Phi(f)\| = \|f\|_\infty$. Réciproquement, supposons que l'opérateur $\Phi(f)$ soit borné sur H, et pour tout n, soit $A_n = \{\omega \; ; |f(\omega)| \leq n\}$. On pose $f_n = f1_{A_n}$; d'après ce qui précède, on a $\|\Phi(f_n)\| = \|f_n\|_\infty$. Or, pour tout $x \in H$:

$$\|\Phi(f_n)x\|^2 = \int |f_n|^2 d\,E_x \leq \int |f|^2 d\,E_x = \|\Phi(f)x\|^2$$

On a donc $\|\Phi(f_n)\| \leq \|\Phi(f)\|$ soit encore $\|f_n\|_\infty \leq \|\Phi(f)\|$. Il en résulte l'inégalité $\|f\|_\infty \leq \|\Phi(f)\|$ et f appartient à $L^\infty(E)$.□

On sait que le morphisme Φ restreint à $BM(\Omega,\Sigma)$ est multiplicatif ; lorsqu'on raisonne avec un produit de fonctions Σ-mesurables quelconques, la liaison n'est plus aussi simple puisqu'il faut déjà tenir compte du domaine de définition des opérateurs. On obtient toutefois :

(4.2.6) PROPOSITION. - *Pour des fonctions* f *et* g Σ*-mesurables quelconques on a :*

a) $D[\Phi(f)\,\Phi(g)] = D[\Phi(g)] \cap D[\Phi(fg)] = \Delta(g) \cap \Delta(fg)$

b) $\Phi(f)\ \Phi(g) \subseteq \Phi(fg)$

Si de plus, la fonction g *appartient à* $L^\infty(E)$, *alors* $\Phi(fg) = \Phi(f)\ \Phi(g)$

Preuve :

a) Le domaine $D[\Phi(f)\ \Phi(g)]$ est défini par les conditions $x \in D[\Phi(g)]$ et $y = \Phi(g)x \in D[\Phi(f)]$, soit encore, $x \in \Delta(g)$ et $y \in \Delta(f)$. Or on a :

$$\int |f|^2 d\, E_y = \int |f|^2\ |g|^2 d\, E_x$$

donc $y \in \Delta(f)$ si et seulement si $x \in \Delta(fg)$, et finalement l'assertion a) est démontrée.

b) Tout repose sur l'égalité $E_{\Phi(g)x,y} = g\ .\ E_{x,y}$ valable pour $x \in \Delta(g)$ et $y \in H$. En effet, soit $x \in D[\Phi(f)\ \Phi(g)]$; pour tout $y \in H$, on a :

$$(\Phi(f)\ \Phi(g)\ x|y) = \int f\ d\ E_{\Phi(g)x,y} = \int fg\ d\ E_{x,y} = (\Phi(fg)\ x|y)$$

ce qui suffit.

Enfin, la dernière assertion est évidente, car si g appartient à $L^\infty(E)$ alors $\Delta(g) = H$, et ainsi $D[\Phi(f)\ \Phi(g)] = D[\Phi(fg)]$. □

Remarque - On a donc $D[\Phi(f)\ \Phi(g)] = \Delta(g) \cap \Delta(fg)$ et $D[\Phi(g)\ \Phi(f)] = \Delta(f) \cap \Delta(fg)$ et ainsi ces deux domaines sont distincts en général et on ne peut comparer les opérateurs $\Phi(f)\ \Phi(g)$ et $\Phi(g)\ \Phi(f)$. Toutefois, si f appartient à $L^\infty(E)$, on obtient aisément $\Phi(f)\ \Phi(g) \subseteq \Phi(g)\ \Phi(f)$.

Liaison avec le spectre - Avec la technique déjà utilisée, il est facile de voir que pour toute fonction Σ-mesurable, on a : $\sigma[\Phi(f)] \subseteq \overline{f(\Omega)}$. En fait, une analyse un peu plus fine nous permet d'établir :

(4.2.7) PROPOSITION. - *Soit* f *une fonction* Σ*-mesurable :*

a) Pour que $\Phi(f)$ *soit inversible et d'inverse borné sur* H, *il faut et il suffit que la fonction* $\frac{1}{f}$ *appartienne à* $L^\infty(E)$.

b) $$\sigma[\Phi(f)] = \bigcap_{\substack{A \in \Sigma \\ E(A) = I}} \overline{f(A)}$$

Preuve - Déjà, si $\frac{1}{f} \in L^\infty(E)$, d'après (4.2.5) $\Phi\left(\frac{1}{f}\right)$ est un opérateur défini et borné sur H. De plus, d'après (4.2.6) on a :

$$\Phi\left(\tfrac{1}{f}\right)\ \Phi(f) \subseteq I \quad \text{et} \quad \Phi(f)\ \Phi\left(\tfrac{1}{f}\right) = I$$

La première inégalité montre que pour tout $x \in \Delta(f)$ on a :

$$\| x \| \leq \| \Phi(\tfrac{1}{f}) \| \; \| \Phi(f)x \|$$

Ainsi $\Phi(f)$ est injectif et d'inverse borné ; la seconde égalité montre que $\Phi(f)$ et surjectif, ce qui suffit. Réciproquement, supposons que $\Phi(f)^{-1}$ existe et appartienne à $L(H)$. Pour établir que $\frac{1}{f}$ est dans $L^{\infty}(E)$, il suffit, en vertu de (4.2.5) de montrer que l'opérateur $\Phi(\frac{1}{f})$ est borné sur H. Pour tout $x \in H$, on a $x = \Phi(f)\ \Phi(f)^{-1}x$, donc $E_x = |f|^2.E_{\Phi(f)^{-1}x}$.

On en déduit :

$$\int |\tfrac{1}{f}|^2 d\ E_x = \int 1_{\Omega} d\ E_{\Phi(f)^{-1}x} \leq \| \Phi(f)^{-1}x \|^2 < +\infty$$

c'est-à-dire $\Delta(\frac{1}{f}) = H = D[\Phi(f)]$. Reste à voir que $\Phi(f)$ est borné. De l'égalité $\Phi(f)\ \ \Phi(\frac{1}{f}) = I$, vraie grâce à (4.2.6), on déduit aisément que l'on a $\Phi(\frac{1}{f}) = \Phi(f)^{-1}$, ce qui suffit.

b) Supposons que λ_o n'appartienne pas à $\bigcap\{\overline{f(A)},\ A \in \Sigma,\ E(A) = I\}$ et montrons que λ_o appartient à $\rho[\Phi(f)]$. Or la fonction $\frac{1}{\lambda_o - f}$ appartient à $L^{\infty}(E)$, donc $\Phi(\lambda_o - f) = \lambda_o - \Phi(f)$ est inversible, d'inverse borné sur H d'après ce qui précède. Réciproquement, soit $\lambda_o \in \rho[\Phi(f)]$, l'assertion a) prouve encore que la fonction $\frac{1}{\lambda_o - f}$ appartient à $L^{\infty}(E)$. Il existe donc $A \in \Sigma$, $E(A) = I$ tel que $\lambda_o \notin \overline{f(A)}$ et tout est démontré. □

Remarque - Si maintenant on fixe une fonction Σ-mesurable $f : \Omega \to \mathbb{C}$ et si on s'intéresse au seul opérateur normal $T = \Phi(f)$, on peut supposer que E est définie sur $\mathbb{C}$ en la remplaçant par la mesure image $f(E)$, qui reste spectrale et telle que $f(E)(B) = E(f^{-1}(B))$, pour tout borélien B de $\mathbb{C}$. On a alors, de manière évidente :

$$D(T) = \{x\ ;\ \int |\lambda|^2 d\ E_x < +\infty\}$$

$$T = \int_{\mathbb{C}} \lambda\ d\ E(\lambda)$$

$$(Tx|x) = \int_{\mathbb{C}} \lambda\ d\ E_x(\lambda) \quad \forall\ x \in D(T)$$

$$\| Tx \|^2 = \int |\lambda|^2 d\ E_x(\lambda)$$

Dans le paragraphe qui suit, nous allons en fait montrer qu'un opérateur normal quelconque sur H s'obtient toujours de cette manière, en d'autres termes, nous allons contruire la résolution spectrale associée à un opérateur normal et non borné.

(4.3) <u>RESOLUTION SPECTRALE ET CALCUL FONCTIONNEL ASSOCIES A UN OPERATEUR NORMAL NON BORNE.</u>

Pour résoudre le problème que l'on s'est posé, le point-clé est de voir qu'un opérateur normal non borné se décompose d'une certaine manière en une "somme" d'opérateurs normaux bornés, et d'utiliser les résultats déjà acquis au chapitre 2 pour de tels opérateurs. Nous allons donc commencer par étudier la décomposition d'un opérateur normal en opérateurs normaux bornés, en examinant d'abord le cas d'un opérateur fermé.

(4.3.1) <u>PROPOSITION</u>. - *Soit* (H_n) *une suite de sous-espaces fermés de* H *tels que* H *soit la somme directe hilbertienne des* H_n, *et pour tout* n, *soit* T_n *un opérateur borné sur* H_n. *Il existe alors un unique opérateur fermé* T *tel que :*

a) $H_n \subseteq D(T)$.

b) $T/_{H_n} = T_n$

c) $T\pi_n x = \pi_n Tx \quad \forall\, x \in D(T)$, *où* π_n *est la projection orthogonale de* H *sur* H_n.

De plus, D(T) *est l'ensemble des points* $x = \Sigma x_n \in H$ *tels que* $\Sigma \, \| T_n \, x_n \|^2 < +\infty$ *et on a :*

$$Tx = \sum_n T_n \, x_n$$

<u>Preuve</u> - Considérons l'ensemble $F = \{x \in H \,;\, \Sigma \| T_n \, x_n \|^2 < +\infty\}$. En vertu de l'inégalité $\| y + z \|^2 \leq 2[\| y \|^2 + \| z \|^2]$, il est clair que F est un sous-espace vectoriel de H, et comme il contient tous les points x n'admettant qu'un nombre fini de composantes, il est évidemment dense dans H. Par ailleurs, compte-tenu de l'orthogonalité des sous-espaces H_n, on a :

$$\| \sum_p^q T_n \, x_n \|^2 = \sum_p^q \| T_n \, x_n \|^2$$

et si $x \in F$, la série $\sum_n T_n \, x_n$ converge donc dans H, ce qui permet de poser $Tx = \sum_n T_n \, x_n$. Comme cette application T est linéaire, on a défini un opérateur dont le domaine D(T) est l'ensemble F. Les assertions a), b) et c) sont alors vérifiées de manière immédiate. Montrons maintenant que T est un opérateur fermé.

Soit (y_m) une suite de D(T) telle que (y_m) converge vers x et (Ty_m) converge vers z. Les projections π_n étant continues, on a alors :

$$\pi_n\, Ty_m \to \pi_n z$$

or $\pi_n\, Ty_m = T\pi_n\, y_m = T_n\, \pi_n\, y_m$

Par ailleurs, $(\pi_n\, y_m)$ converge vers $\pi_n x$ dans H_n et les opérateurs T_n étant bornés, on a :

$$T_n\, \pi_n\, y_m \to T_n\, \pi_n x$$

Ainsi, $\pi_n z = T_n\, \pi_n\, x$, pour tout n, et x appartient à D(T). Par ailleurs, $Tx = \Sigma\, T_n\, \pi_n x = \Sigma \pi_n z = z$

Il ne reste plus qu'à prouver l'unicité d'un tel opérateur T. Soit donc T' un autre opérateur fermé satisfaisant aux conditions a), b) et c) de la proposition. On a déjà $T' \subseteq T$; en effet, si $x \in D(T')$ alors :

$$\sum_1^p \|T_n\, x_n\|^2 = \sum_1^p \|T'\, \pi_n x\|^2 = \sum_1^p \|\pi_n\, T'x\|^2 = \|\sum_1^p \pi_n T'x\|^2$$

En passant à la limite, on obtient $\sum_1^\infty \|T_n\, x_n\|^2 = \|T'x\|^2$, et ainsi, x appartient à D(T). De plus, par des considérations analogues, on a aussi $Tx = T'x$. Comme on a l'inclusion $G(T') \subseteq G(T)$, et comme les opérateurs T et T' sont fermés, pour conclure, il suffit d'établir que G(T') est dense dans G(T). Soit donc $(x,Tx) \in G(T)$. Or $x = \lim y_n$ avec $y_n = \sum_1^n x_k$. Comme on a $H_k \subseteq D(T')$, on a aussi $y_n \in D(T')$ pour tout n, et de plus :

$$T'y_n = \sum_1^n T'x_k = \sum_1^n T_k\, \pi_k x = \sum_1^n \pi_k\, Tx \to Tx$$

ce qui suffit. □

On conserve les hypothèses de la proposition (4.3.1), mais on suppose de plus que les opérateurs bornés T_n sont normaux, alors le résultat précédent se précise selon :

(4.3.2) PROPOSITION. - *Avec les notations de* (4.3.1), *il existe un unique* *opérateur normal* T *satisfaisant aux conditions a), b) et c) de la proposition précédente et tel que de plus :*

$$T^*x = \sum_n T_n^* x_n \quad \forall\, x \in D(T)$$

<u>*Preuve*</u> - Déjà l'unicité de T est évidente compte-tenu de ce qui précède et du fait que tout opérateur normal est fermé. Il suffit donc de voir que l'opérateur T défini en (4.3.1) est normal dès que les T_n le sont. Or la proposition (4.3.1) appliquée à la suite (T_n^*) d'opérateurs bornés sur H_n, montre déjà l'existence d'un unique opérateur fermé T' vérifiant a), b) et c) et dont le domaine D(T') est l'ensemble des points $x \in H$ tels que $\Sigma \| T_n^* x_n \|^2 < +\infty$. Or $\|T_n x_n\| = \|T_n^* x_n\|$ puisque T_n est normal et on a ainsi D(T') = D(T). Montrons maintenant que T* est une extension de T'. Si $x \in D(T)$, l'égalité $T'x = \Sigma\, T_n^* x_n$ implique aisément que l'on a $(Ty|x) = (y|T'x)$ pour tout $y \in D(T)$; ainsi $x \in D(T^*)$ et $T'x = T^*x$. De ceci, il résulte que l'opérateur fermé T* vérifie, pour tout n :

$$H_n \subseteq D(T^*) \text{ et } T^*|_{H_n} = T^*_n$$

Pour établir que T* coïncide avec T', il suffit donc de voir que l'on a $T^* \pi_n x = \pi_n T^* x$, pour tout $x \in D(T^*)$. Fixons $x \in D(T^*)$, pour tout $y_n \in H_n \subseteq D(T)$, on a :

$$(\pi_n T^*x|y_n) = (T^*x|y_n) = (x|Ty_n) = (x|T_n y_n) = (x_n|T_n y_n)$$

Or $x_n \in H_n \subseteq D(T^*)$, d'où :

$$(\pi_n T^*x|y_n) = (T^*x_n|y_n) = (T^*\pi_n x|y_n)$$

De là, on passe aisément à l'égalité :

$$(\pi_n T^*x|y) = (T^*\pi_n x|y) \quad \forall\, y \in H$$

ce qui suffit. En résumé, on a donc prouvé que T* = T'et on a en particulier D(T*) = D(T') = D(T). pour voir que T est normal, il suffit donc, en vertu de (4.1.15), de montrer que l'on a $\|Tx\| = \|T^*x\|$, pour $x \in D(T)$ ce qui est évident compte-tenu de la décomposition des vecteurs Tx et T*x et de l'orthogonalité des sous-espaces H_n. □

L'intérêt de ce résultat est qu'il admet en fait une réciproque ; auparavant, il nous faut établir un lemme technique intermédiaire :

(4.3.3) LEMME. - *Soit* T *un opérateur normal et soit* $B = (I + T^*T)^{-1}$ *l'opérateur hermitien borné associé grâce à* (4.1.9). *Pour toute* $f \in Ba\,[\sigma(B)]$, *on a :*

a) $f(B)\,[D(T)] \subseteq D(T)$

b) $f(B)Tx = Tf(B)x \quad \forall\, x \in D(T)$

Preuve - Supposons déjà que f soit la fonction $x \to x$. Il faut donc prouver que l'on a $B\,[D(T)] \subseteq D(T)$ et $BTx = TBx$ pour $x \in D(T)$. Comme $\mathrm{Im}\, B \subseteq D(T)$, la première assertion est immédiate ; comme on a de plus $\mathrm{Im}\, TB \subseteq D(T^*)$ et $T^*TBx = x - B(x)$ pour $x \in D(T)$, on obtient, toujours pour $x \in D(T)$:

$$BTx = BT(I + T^*T)Bx = B(T + TT^*T)Bx = B(I + TT^*)TBx$$

or $TT^* = T^*T$, ainsi :

$$BTx = B(I + T^*T)TBx = TBx$$

De là, on déduit, par récurrence sur n, que l'on a aussi $B^n[D(T)] \subseteq D(T)$ et $B^nTx = TB^nx$ pour $x \in D(T)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, et il en résulte que les assertions du lemme sont satisfaites si f est un polynôme réel. Pour un tel polynôme P, on a alors :

(α) $\quad (P(B)Tx|y) = (P(B)x|T^*y) \;\forall\, x,y \in D(T) = D(T^*)$

Ainsi, la classe $\mathscr{M}$ des fonctions $f \in C(\sigma(B))$ telles que $(f(B)Tx|y) = (f(B)x|T^*y)$ contient les polynômes réels (restreints à $\sigma(B)$) et est fermée pour la norme uniforme sur $\sigma(B)$. Il résulte du théorème de Stone-Weierstrass qu'elle est égale à l'espace $C(\sigma(B))$. Pour établir que la propriété (α) est en fait satisfaite pour toute $f \in Ba(\sigma(B))$, il suffit de faire à nouveau un raisonnement classique par engendrement. Pour terminer, fixons $f \in Ba\,[\sigma(B)]$ et un point $x \in D(T)$. Or l'application $y \to (T^*y|f(B)x)$, définie sur $D(T^*) = D(T)$ est continue d'après la propriété (α), ainsi $f(B)x \in D(T^{**})$ et $T^{**}f(B)x = f(B)Tx$. Comme T est fermé, on a bien le résultat voulu.

On peut maintenant établir :

(4.3.4) THEOREME. - *Soit* T *un opérateur normal. Alors* H *est somme directe hilbertienne de sous-espaces fermés* H_n *tels que :*

a) $H_n \subseteq D(T)$

b) Les H_n *sont stables pour* T *et* T*

c) La restriction T_n *de* T *au sous-espace* H_n *est un opérateur normal borné.*

<u>Preuve</u> - Considérons les ensembles $A_o = \{0\}$ et $A_n =]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$, pour $n \geq 1$ et posons $f_n = 1_{A_n}$. Soit B l'opérateur associé à T comme précédemment ; les opérateurs $f_n(B)$ sont des projecteurs hermitiens et ainsi les sous-espaces vectoriels $H_n = \text{Im } f_n(B)$ sont fermés dans H. De plus, comme les ensembles A_n sont deux à deux disjoints, les sous-espaces H_n sont orthogonaux. Enfin, de l'égalité $1_{[0,1]}(x) = \Sigma f_n(x)$ vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, on déduit l'égalité $B = \Sigma f_n(B)$ au sens de la topologie simple-forte de L(H). Ainsi, pour tout x de H, on a $x = \Sigma x_n$ avec $x_n = f_n(B)x \in H_n$. En résumé, H est bien somme directe hilbertienne des sous-espaces fermés H_n. Notons que l'on a $H_o = \text{Im } f_o(B) = E\{0\}H$, où E désigne la résolution spectrale de B ; ainsi $H_o = \text{Ker } B = \{0\}$ puisque B est injectif. Pour conclure, il suffit de voir que les assertions a), b) et c) sont satisfaites. Désignons tout d'abord par T_n la restriction de T au sous-espace $H_n \cap D(T)$. En vertu de (4.3.3) appliqué à la fonction $f_n \in Ba(\sigma(B))$, pour tout $x \in H_n \cap D(T)$, on a :

$$T_n x = Tx = Tf_n(B)x = f_n(B)Tx \in H_n$$

puisque $x = f_n(B)x$. Ainsi, T_n opère de $H_n \cap D(T)$ dans H_n. Montrons que cet opérateur T_n est en fait borné. Pour cela, désignons par g_n la fonction définie sur [0,1] par $g_n(\lambda) = \frac{f_n(\lambda)}{\lambda}$ si $\lambda \neq 0$ et $g_n(0) = 0$. Il est clair que g_n est une fonction de Baire sur [0,1] et que l'on a $B\, g_n(B) = f_n(B)$ sur H. Puisque $f_n(B)\, [D(T)] \subseteq D(T)$, on en déduit aussi :

$$TB\, g_n(B)x = Tf_n(B)x \quad \text{pour } x \in D(T)$$

A fortiori, pour tout $x \in H_n \cap D(T)$, on a :

$$T_n x = TB\, g_n(B)x$$

Comme on l'a vu dans la preuve de (4.1.9) l'opérateur TB est continu sur H, et ainsi, l'opérateur T_n est continu sur $H_n \cap D(T)$. Par ailleurs, il est facile de voir que T_n est fermé dans H_n, et ainsi $H_n \cap D(T)$ est fermé dans

H_n d'après (4.1.3). Mais on a aussi $f_n(B)[D(T)] \subseteq H_n \cap D(T)$, et comme $D(T)$ est dense dans H, $f_n(B)[D(T)]$ est dense dans $f_n(B)H = H_n$ et il en est de même pour $H_n \cap D(T)$. En définitive, on a $H_n \cap D(T) = H_n$ et donc $H_n \subseteq D(T)$. De plus, $TH_n = T_n H_n \subseteq H_n$, et T_n est un opérateur borné sur H_n. Pour conclure, on note que si l'on remplace T par T^* l'opérateur B ne change pas, puisque $TT^* = T^*T$, on peut donc appliquer ce qui précède aux opérateurs $T'_n = T^*|_{H_n}$ qui sont alors bornés sur H_n, et tels que $T^*_n = T'_n$. Enfin, de l'égalité $\| T_n x\| = \| T^*_n x\|$ vraie pour tout $x \in H_n$, on déduit que les opérateurs T_n sont normaux, ce qui achève la démonstration. □

Nous allons maintenant examiner les relations qui existent entre le spectre d'un opérateur normal et les spectres des opérateurs normaux bornés qui lui sont associés. Ceci nous permettra ultérieurement de construire le calcul fonctionnel borélien associé à un opérateur normal et non borné.

(4.3.5) <u>PROPOSITION.</u> - *Soit* T *un opérateur normal ; avec les notations de* (4.3.4), *on a :*

a) $\sigma(T) = \overline{\bigcup_n \sigma(T_n)}$

b) $\sigma_p(T) = \bigcup_n \sigma_p(T_n)$

c) $\sigma_r(T) = \emptyset$

<u>*Preuve*</u> - a) Si $\lambda \in \rho(T)$, il est facile de voir que l'opérateur $(\lambda-T_n)$ est bijectif ; de plus $(\lambda-T_n)^{-1}$ est nécessairement borné d'après le théorème des isomorphismes. On a déjà $\bigcup\sigma(T_n) \subseteq \sigma(T)$, d'où $\overline{\bigcup\sigma(T_n)} \subseteq \sigma(T)$, puisque $\sigma(T)$ est fermé dans $\mathbb{C}$ d'après (4.1.16). Inversement, si $\lambda \notin \overline{\bigcup\sigma(T_n)}$, il existe $r > 0$ tel que $d(\lambda, \sigma(T_n)) \geqslant r$ pour tout n, ce qui implique $\| R(\lambda,T_n)\| < \frac{1}{r}$. L'équation $(\lambda-T)x = y$ admet déjà pour solution le point $x = \Sigma x_n$ avec $x_n = R(\lambda,T_n)y_n$, et ainsi $(\lambda-T)$ est surjectif. Par ailleurs on a :

$$\| x_n\| < \frac{1}{n} \|y_n\|$$

et ainsi $\| x\|^2 = \Sigma \| x_n\|^2 < \frac{1}{r^2} \| y\|^2$

L'opérateur $(\lambda-T)$ est donc aussi injectif et l'inégalité précédente montre que l'on a $\|(\lambda-T)^{-1}\| \leq \frac{1}{r}$, donc $(\lambda-T)$ admet un inverse borné sur H et λ appartient à $\rho(T)$, ce qui suffit.

L'assertion b) est immédiate.

c) Les opérateurs normaux T_n étant bornés, on a $\sigma_r(T_n) = \emptyset$ d'après (3.2.4.c). Supposons qu'il existe $\lambda \in \sigma_r(T)$, alors $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$ d'après (4.1.19.b). Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T_n{}^*)$, et comme $\sigma_r(T_n) = \emptyset$, on a nécessairement $\lambda \in \sigma_p(T_n)$, soit encore $\lambda \in \sigma_p(T)$, ce qui est absurde. □

(4.3.6) COROLLAIRE :

a) T est autoadjoint si et seulement si son spectre est réel.

b) T est autoadjoint positif, c'est-à-dire que l'on a $(Tx|x) \geq 0$ *pour tout* $x \in D(T)$, *si et seulement si* $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}^+$

Preuve - Il est facile de voir que T est autoadjoint (resp. positif) si et seulement si les opérateurs T_n sont hermitiens (resp. positifs), et ainsi, tout découle du résultat précédent joint à (2.4.8) □

Donnons maintenant comme conséquence de ces théorèmes de décomposition, la construction d'un calcul fonctionnel associé à un opérateur normal et non borné T. Comme le spectre de T n'est plus nécessairement borné, ce calcul fonctionnel opérera, bien entendu, sur des fonctions complexes définies sur $\mathbb{C}$ tout entier.

On commence par fixer une fonction complexe f borélienne (ou Baire-mesurable) bornée sur $\mathbb{C}$, et à T, on associe les opérateurs normaux bornés $T_n \in L(H_n)$ comme en (4.3.4). Pour chaque n, on peut donc définir l'opérateur normal borné $f(T_n) : H_n \to H_n$ tel que $\|f(T_n)\| \leq \|f\|$. En appliquant (4.3.2) à la suite d'opérateurs $(f(T_n))$, on en déduit qu'il existe un unique opérateur normal, noté $f(T)$, tel que $f(T)|_{H_n} = f(T_n)$. Montrons que $f(T)$ est en fait défini et borné sur H tout entier. Toujours avec (4.3.2), on a :

$$D[f(T)] = \{x = \Sigma x_n \in H \ ; \ \Sigma \|f(T_n)\, x_n\|^2 < +\infty\}$$

Or, $\Sigma \|f(T_n)x_n\|^2 \leq \Sigma \|f(T_n)\|^2 \|x_n\|^2 \leq \|f\|^2 \ \Sigma \ \|x_n\|^2 = \|f\|^2 \|x\|^2$

Ainsi $D[f(T)] = H$ et pour tout $x \in H$, on a :

$$\| f(T)x\|^2 = \|\Sigma f(T_n)x_n\|^2 = \Sigma\| f(T_n)x_n\|^2 \leq \| f\|^2\| x\|^2$$

Donc $f(T)$ est borné, et $\| f(T)\| \leq \| f\|$. Si on désigne par Bo^∞ l'algèbre (stellaire) des fonctions complexes boréliennes bornées, on a donc défini une application $\Phi : Bo^\infty \to L(H)$ et il est facile de vérifier que Φ est un $*$-morphisme.

Passons maintenant au cas d'une fonction f borélienne quelconque. On considère les ensembles $A_n = \{n \leq |f| < n + 1\}$ qui sont deux à deux disjoints et forment une partition de $\mathbb{C}$. Les fonctions 1_{A_n} étant boréliennes et bornées, il résulte de ce qui précède que les opérateurs $\Phi(1_{A_n}) = 1_{A_n}(T)$ sont des projecteurs hermitiens (bornés) sur H, et ainsi $H_n = \mathrm{Im}\, 1_{A_n}(T)$ est un sous-espace vectoriel fermé de H. De plus, H est somme directe hilbertienne des sous-espaces H_n. On pose alors $f_n = f\, 1_{A_n}$; chaque fonction f_n étant encore borélienne et bornée, les opérateurs $T_n = f_n(T)$ sont normaux et bornés sur H. Or, il est facile de voir que $T_n(H_n) \subseteq H_n$ et $T_n(H_n^\perp) = \{0\}$; ainsi, T_n opère en réalité de H_n dans H_n. En appliquant à nouveau (4.3.2) à la suite d'opérateurs (T_n), on en déduit qu'il existe un unique opérateur normal (non nécessairement borné), noté $f(T)$, tel que $f(T)|_{H_n} = T_n$.

En résumé, on a obtenu :

(4.3.7) THEOREME. - *Soit* T *un opérateur normal. A toute fonction borélienne* f , *on peut associer un opérateur normal* $f(T)$ *tel que* $f(T)^* = \overline{f}(T)$. *De plus, si* e *désigne l'application* $z \to z$, *on a* $e(T) = T$.

Preuve - A la fonction borélienne f, on associe comme précédemment la suite (H_n) de sous-espaces vectoriels fermés de H, qui ne change pas lorsqu'on remplace f par $\overline{f}$. Ainsi, avec les notations précédentes on a :

$$D[\overline{f}(T)] = \{x = \Sigma x_n \ ; \ \Sigma\|\overline{f}_n(T)x_n\|^2 < +\infty\}$$

$$= \{x = \Sigma x_n \ ; \ \Sigma\| f_n(T)^*x_n\|^2 < +\infty\}$$

or $f_n(T)$ est un opérateur normal, donc $\| f_n(T)^*x_n\| = \| f_n(T)x_n\|$. Donc :

$$D[\overline{f}(T)] = \{n \ ; \ \Sigma \| f_n(T)x_n\|^2 < +\infty\} = D[f(T)] = D[f(T)^*]$$

puisque $f(T)$ est normal par construction. Par ailleurs, on voit de même que $\overline{f}(T)x = f(T)^*x$, pour tout $x \in D[\overline{f}(T)]$, ce qui prouve notre assertion. Enfin, pour établir l'égalité $T = e(T)$, il suffit de considérer la décomposition de H en sous-espaces (H_n), associée à la partition de $\mathbb{C}$ par les ensembles $A_n = \{n \leq |z| < n+1\}$, et de montrer que T est un opérateur normal tel que $H_n \subseteq D(T)$ et tel que $T|_{H_n} = e_n(T)$ où $e_n = e1_{A_n}$. □

Remarque - On peut établir que le calcul fonctionnel borélien associé à T, ainsi construit, vérifie une condition de convergence dominée sous la forme : pour toute suite (f_k) de fonctions boréliennes telle que $|f_k| \leq 1$ et qui converge simplement vers zéro, on $f_k(T) \to 0$ dans $L(H)$ pour la topologie simple-forte. Tout provient du fait que, pour chaque n, les opérateurs $f_k(T_n)$ satisfont à la condition de convergence dominée et que de plus, la suite $(f_k(T))$ est uniformément bornée dans $L(H)$ puisque l'on a :

$$\| f_k(T) \| \leq \| f_k \| \leq 1$$

Pour conclure, notons que ce "calcul fonctionnel borélien" ainsi construit nous permet d'associer, à chaque opérateur normal T, la résolution spectrale E. En effet, on peut déjà définir l'application $E : bo(\mathbb{C}) \to L(H)$ selon $E(A) = 1_A(T)$, et on vérifie aisément que E satisfait aux conditions a), b) et c) de la définition (3.1.1), la condition c) s'obtenant grâce à la remarque précédente. Considérons alors une fonction f borélienne positive et bornée sur $\mathbb{C}$. En procédant comme dans la preuve de la proposition (2.4.3), c'est-à-dire en approchant f uniformément par des fonctions boréliennes étagées ψ_ε, on prouve de même que l'on a :

$$f(T) = \int_{\mathbb{C}} f(\lambda)\,dE(\lambda)$$

formule qui se généralise bien sûr au cas des fonctions boréliennes bornées quelconques. Maintenant, si f est une fonction borélienne non bornée, on va établir que l'opérateur $f(T)$ construit ci-dessus n'est autre que l'opérateur $\Phi(f) = \int f(\lambda)\,dE(\lambda)$ associé, comme au paragraphe (4.2), à la mesure spectrale E sur l'espace mesurable $(\mathbb{C}, bo(\mathbb{C}))$, et dont le domaine est l'ensemble $\Delta(f) = \{x \in H \ ; \ f \in L^2(E_x)\}$. Fixons donc une fonction borélienne f quelconque et associons-lui, avec les notations précédentes, la décomposition de H par les sous-espaces H_n, obtenue grâce à la partition de $\mathbb{C}$ par les ensembles $A_n = \{n < |f| < n+1\}$. On a alors :

$$\int |f|^2 dE_x = \sum_n \int 1_{A_n} |f|^2 dE_x = \sum_n \int |f_n|^2 dE_x$$

Or, les fonctions f_n sont bornées, donc en vertu de ce qui précède, on a :

$$\int |f_n|^2 dE_x = (|f_n|^2(T)x|x) = \|f_n(T)x\|^2$$

Ainsi :

$$\int |f|^2 dE_x = \sum_n \|f_n(T)x\|^2 = \sum_n \|f_n(T)x_n\|^2$$

Il résulte aisément de là que l'on a déjà $\Delta(f) = D[f(T)]$. Par ailleurs, pour tout $x \in \Delta(f)$ et tout $y \in H$, on a :

$$(f(T)x|y) = (\sum_n f_n(T)x|y) = \sum_n (f_n(T)x|y)$$

Or f_n est bornée, donc $(f_n(T)x|y) = \int f_n(\lambda) dE_{x,y}$ et finalement on obtient :

$$(f(T)x|y) = \sum_n \int f_n(\lambda) dE_{x,y} = \sum_n \int (1_{A_n} f)(\lambda) dE_{x,y} = \int f(\lambda) dE_{x,y}$$

c'est-à-dire encore $(f(T)x|y) = (\Phi(f)x|y)$. On déduit de là, l'égalité des opérateurs $f(T)$ et $\Phi(f)$. En particulier, on a, comme pour les opérateurs normaux bornés :

$$T = \int \lambda dE(\lambda)$$

Il est facile de voir alors, que le calcul fonctionnel borélien associé à T jouit des propriétés suivantes :

(4.3.8) PROPOSITION. - *Soient* f *et* g *des fonctions boréliennes ; on a :*

a) $f(T) + g(T) \subseteq (f+g)(T)$

b) $f(T)g(T) \subseteq (fg)(T)$. *Si de plus, la fonction* g *est bornée alors* $f(T)g(T) = (fg)(T)$

Preuve - L'assertion b) n'est autre que le résultat établi en (4.2.6). Pour établir a), on remarque déjà que $D[f(T) + g(T)] = \Delta(f) \cap \Delta(g)$ et ainsi on a bien :

$$D[f(T) + g(T)] \subseteq D[(f+g)(T)] = \Delta(f+g)$$

Le reste est évident lorsqu'on exprime les opérateurs $f(T)$ et $g(T)$ sous forme intégrale. □

Remarque- On vient de construire la résolution spectrale d'un opérateur normal T en s'appuyant sur l'existence d'un calcul fonctionnel borélien associé à T. On aurait pu procéder différemment, en construisant d'abord la mesure spectrale, ce qui, après coup, nous aurait permis de définir le calcul fonctionnel comme au paragraphe (4.2). Pour cela, il suffit encore une fois d'utiliser la décomposition de T en opérateurs normaux bornés T_n, ce qui assure, pour chaque n, l'existence d'une mesure spectrale $E^{(n)}$ à valeurs dans $L(H_n)$ et dont le support est inclus dans la couronne $\{\sqrt{n-1} < |z| < \sqrt{n}\}$. La mesure E cherchée est alors déterminée par les égalités $E_{x,y} = \Sigma\, E^{(n)}_{x_n,y_n}$, où $x = \Sigma\, x_n$ et $y = \Sigma\, y_n$. On vérifie que cette mesure E est bien spectrale, que $D(T)$ est l'ensemble des points $x \in H$ tels que l'application $z \to z$ soit dans l'espace $L^2(E_{x,x})$ et que l'on a enfin $T = \int \lambda dE(\lambda)$.

(4.4) OPERATEURS SYMETRIQUES ET OPERATEURS AUTOADJOINTS.

Dans le cas des opérateurs non bornés T, définis toujours sur un domaine $D(T)$ dense dans H, il convient de faire une distinction précise et importante entre la notion d'opérateur autoadjoint ($T^*=T$) et celle d'opérateur symétrique.

(4.4.1) DEFINITION. - *On dit que* T *est symétrique lorsque l'on a* $(Tx|y) = (x|Ty)$ *pour tous* $x,y \in D(T)$.

Tout opérateur autoadjoint est évidemment symétrique, mais la réciproque est fausse comme on verra plus loin. Si T est symétrique on a seulement $T \prec T^*$, c'est à dire $D(T) \subset D(T^*)$, et $\overline{T} = T^{**}$. Comme de plus $T^* = (\overline{T})^*$, on pourra souvent, dans l'étude de l'adjoint, supposer T symétrique et fermé.

(4.4.2) EXEMPLES :

Ex. 1. - Soit $H = L^2[0,1]$ et $T = iD$, défini sur le domaine $D(T)$ formé des fonctions f absolument continues telles que $f(0) = f(1) = 0$ et $f' \in L^2$. Alors T est symétrique et fermé et $T^* = iD$ sur le domaine $D(T^*)$ formé des fonctions f absolument continues telles que $f' \in L^2$. Donc

$D(T) \neq D(T^*)$ et T n'est pas autoadjoint. On remarquera que dans la définition de $D(T^*)$ les conditions aux limites $f(0) = f(1) = 0$ ont disparu. Par ailleurs $(T^*)^* = \overline{T} = T$ et l'on n'a pas $D(T^*) \subset D(T)$ donc T^* n'est pas symétrique. D'une façon générale un opérateur symétrique fermé T n'est autoadjoint que si T^* est symétrique.

Ex. 2. - On reprend le même exemple avec $T = iD$, défini cette fois sur le domaine $D(T)$ des fonctions f absolument continues telles que $f' \in L^2$ et $f(1) = \alpha f(0)$, où $\alpha \in \mathbb{C}$ est fixé. La formule d'intégration par parties

$$\int_0^1 if'\,\overline{g}\,dt = \int_0^1 f\,\overline{ig}'dt + i[f\overline{g}]_0^1$$

$$(Tf|g) = (f|Tg) + i(|\alpha|^2 - 1)(f\overline{g})(0)$$

pour $f, g \in D(T)$, montre que T n'est symétrique que si $|\alpha| = 1$. Pour ces valeurs de α et pour g absolument continue et telle que $g' \in L^2$ on aura :

$$(Tf|g) = (f|iDg) + if(0)[\alpha\overline{g}(1) - g(0)]$$

$$= (f|iDg) + i\alpha f(0)[\overline{g(1) - \alpha g(0)}]$$

qui ne peut être continu en f que si $g(1) = \alpha g(0)$. Autrement dit, pour $|\alpha| = 1$, T est autoadjoint et pour $|\alpha| \neq 1$, T n'est pas symétrique. On remarquera qu'une condition aux limites unilatérale , du type $f(0) = 0$ ou $f(1) = 0$, ne conduit pas à un opérateur symétrique.

Sur ces deux exemples simples on voit que le caractère d'autoadjonction pour les opérateurs différentiels dépend principalement de conditions aux frontières convenables. Dans la théorie des équations différentielles ou des équations aux dérivées partielles, ces questions de valeurs aux frontières joueront un rôle prédominant.

Le spectre des opérateurs symétriques. - On suppose ici T opérateur symétrique et fermé tel que $\overline{D(T)} = H$. Alors $T = T^{**}$ et $D(T^*)$ est dense dans H. On rappelle que T^* n'est pas symétrique en général, ou plus précisément qu'il ne l'est que si T est autoadjoint. De façon évidente le spectre ponctuel $\sigma_p(T)$ est réel car $(Tx|x)$ est réel. Pour $\lambda = \alpha + i\beta$ on a en développant

$$\|(\lambda-T)x\|^2 = \|(\alpha-T)x\|^2 + \beta^2\|x\|^2$$

donc $\|(\lambda-T)x\| \geqslant |\beta|\,\|x\|$. Si $\beta \neq 0$, c'est-à-dire si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, alors

$\text{Ker}(\lambda-T) = 0$. Par ailleurs $\text{Im}(\lambda-T)$ est fermé (pour $\beta \neq 0$) car si $(\lambda-T)x_n \to z$, alors la suite (x_n) est de Cauchy, donc $x_n \to x$ et $z = (\lambda-T)x$ puisque T est fermé. Il reste donc deux cas, suivant que $\text{Im}(\lambda-T) \neq H$, et alors $\lambda \in \sigma_r(T)$, ou $\text{Im}(\lambda-T) = H$. Dans ce dernier cas $\lambda - T$ est une bijection de H sur lui-même donc $\lambda \in \rho(T)$ et de plus $\|R(\lambda,T)\| < 1/_{|\beta|}$ d'après ce qui précède.

On peut aller plus loin en remarquant que si $\lambda \in \rho(T)$, alors, avec (1.1.6), on voit que tout $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda-\mu| < |\beta|$ est élément de $\rho(T)$. Autrement dit le résolvant $\rho(T)$ contient le disque ouvert $\mathring{D}(\lambda,|\beta|)$ de centre λ tangent à l'axe réel dès qu'il contient λ. Il suit aisément de là que $\rho(T)$ contient le demi-plan ouvert $\pi_+ = \{\lambda, \mathcal{I}m\,\lambda > 0\}$ ou $\pi_- = \{\lambda, \mathcal{I}m\,\lambda < 0\}$ qui contient λ. On a donc obtenu à peu de frais :

(4.4.3) <u>THEOREME</u>. - *Soit* T *un opérateur symétrique fermé. On a toujours* $\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \subset \mathbb{R}$ *et* $\text{Im}(\lambda-T)$ *est fermé pour tout* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. *De plus on se trouve nécessairement dans l'un des 4 cas disjoints :*

a) $\sigma_r(T) = \emptyset$, *donc* $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ *et* T *est autoadjoint.*

b) $\sigma_r(T) \supset \pi_+$ *et* $\sigma(T) = \overline{\pi}_+ = \{\lambda, \mathcal{I}m\,\lambda \geq 0\}$

c) $\sigma_r(T) \supset \pi_-$ *et* $\sigma(T) = \overline{\pi}_- = \{\lambda, \mathcal{I}m\,\lambda \leq 0\}$

d) $\sigma_r(T) \supset \pi_+ \cup \pi_-$ *et* $\sigma(T) = \mathbb{C}$

<u>*Preuve*</u> - Si $\rho(T) = \emptyset$ on est dans le cas d). Si $\rho(T)$ coupe π_+ sans couper π_- on a $\sigma_r(T) \supset \pi_-$ et $\rho(T) \supset \pi_+$, donc on est dans le cas c). Enfin si $\rho(T)$ coupe π_+ et π_- alors il les contient, donc $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$. Montrons qu'on est dans le cas a) : pour cela soit $\lambda \in \pi_+$ et $y \in D(T^*)$. Puisque $\text{Im}(\overline{\lambda}-T) = H$ il existe $x \in D(T)$ tel que $(\overline{\lambda}-T)x = (\overline{\lambda} - T^*)y$ et puisque $Tx = T^*x$ alors $x - y \in \text{Ker}\,(\overline{\lambda}-T^*) = [\text{Im}(\lambda-T)]^{\perp} = (0)$ puisque $\text{Im}(\lambda-T) = H$; donc $y = x \in D(T)$ et $T^* = T$, de sorte que T est autoadjoint. Enfin $\sigma_r(T)$ est vide car $\lambda \in \sigma_r(T) \Rightarrow \overline{\lambda} \in \sigma_p(T^*) = \sigma_p(T)$, d'où il suit que λ est réel et que $\lambda \in \sigma_r(T) \cap \sigma_p(T)$, ce qui est absurde. □

On déduit de là des critères pratiques pour que T soit autoadjoint quand on sait qu'il est symétrique et fermé.

(4.4.4) <u>THEOREME</u>. - *Relativement à un opérateur symétrique et fermé* T *les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) T *est autoadjoint.*

b) Le spectre résiduel $\sigma_r(T)$ *est vide.*

c) Le spectre $\sigma(T)$ *est contenu dans* $\mathbb{R}$.

d) Pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ *on a* $\mathrm{Im}(\lambda - T) = H$

d') On a $\mathrm{Im}(\lambda - T) = H$ *pour un point de* π_+ *et un point de* π_-.

d") On a $\mathrm{Im}(T \pm i) = H$.

e) Pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ *on a* $\mathrm{Ker}(\lambda - T^*) = (0)$.

e') On a $\mathrm{Ker}(\lambda - T^*) = (0)$ *pour un point de* π_+ *et un point de* π_-.

e") On a $\mathrm{Ker}(T^* \pm i) = (0)$.

Une conséquence intéressante, par exemple pour le cas des opérateurs semi-bornés est la suivante :

(4.4.5) PROPOSITION. - *Si* $\rho(T)$ *contient un point réel alors* T *est autoadjoint.*

Preuve - Car $\rho(T)$ étant ouvert coupe nécessairement π_+ et π_-. □

Lorsque T n'est pas supposé fermé, mais toujours symétrique, on le remplace par $\overline{T} = T^{**}$. On dira dans ce cas que T est *essentiellement autoadjoint* lorsque $\overline{T}$ est autoadjoint. On a alors :

(4.4.6) THEOREME. - *Soit* T *un opérateur symétrique. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) T *est essentiellement autoadjoint.*

b) On a $\mathrm{Ker}(T^* \pm i) = (0)$

c) Les espaces $\mathrm{Im}(T+i)$ *et* $\mathrm{Im}(T-i)$ *sont denses dans* H.

Preuve - L'équivalence a ⇔ b provient du fait que $T^* = (\overline{T})^*$, et b ⇔ c provient des égalités $\mathrm{Ker}(T^*+i) = [\mathrm{Im}(T-i)]^{\perp}$ et $\mathrm{Ker}(T^*-i) = [\mathrm{Im}(T+i)]^{\perp}$. □

Revenons à un opérateur symétrique fermé T. On voit avec les équivalences e ⇔ e' ⇔ e" de (4.4.4), que $\mathrm{Ker}(\lambda - T^*) \neq (0)$ ssi $\mathrm{Ker}(i - T^*) \neq (0)$ lorsque $\mathcal{I}m\, \lambda > 0$. On va préciser ce point en introduisant la dimension hilbertienne du sous-espace fermé $\mathrm{Ker}(\lambda - T^*)$ soit $N(\lambda) = \dim \mathrm{Ker}(\lambda - T^*)$. Il s'agit d'un cardinal, fini ou non. Cela étant on a :

(4.4.7) THEOREME. - *La fonction* $N(\lambda)$ *est constante sur chacun des demi-plans ouverts* π_+ *et* π_-. *Ainsi* :

a) $N(\lambda) = N(i) = n_+$ *si* $\lambda \in \pi_+$

b) $N(\lambda) = N(-i) = n_-$ *si* $\lambda \in \pi_-$

Les cardinaux n_+ *et* n_- *ainsi introduits portent le nom d'indices de défaut de l'opérateur symétrique fermé* T.

Preuve - Il suffit de prouver que $N(.)$ est localement constante sur π_+ par exemple. Soit donc $\lambda = \alpha + i\beta$ avec $\beta > 0$ et $\mu \in \mathring{D}(\lambda,\beta)$, donc $\mu = \lambda + \eta$ avec $|\eta| < \beta$. Montrons l'égalité :

$$(*) \quad \mathrm{Ker}(\mu - T^*) \cap \mathrm{Ker}(\lambda - T^*)^{\perp} = (0)$$

Pour cela soit $y \in D(T^*)$ tel que $T^*y = \mu y$ et tel aussi que $y \in \mathrm{Ker}(\lambda-T^*)^{\perp} = \mathrm{Im}(\bar{\lambda}-T)$, où cette dernière égalité est obtenue puisque $\mathrm{Im}(\bar{\lambda}-T)$ est fermé. Donc $y = (\bar{\lambda}-T)x$ avec $x \in D(T)$ et par suite $\|y\| \geqslant \beta\|x\|$ avec ce qu'on a vu plus haut. De plus :

$$\begin{aligned} 0 &= ((\mu-T^*)y|x) = (y|(\bar{\mu}-T)x) \\ &= (y|(\bar{\lambda} - T)x + \bar{\eta}x) = \|y\|^2 + \eta(y|x) \end{aligned}$$

et $\|y\|^2 \leqslant |\eta|\,|(y|x)| \leqslant \frac{|\eta|}{\beta}\|y\|^2$ et $y = 0$.

Posons alors $M = \mathrm{Ker}(\mu-T^*)$ et $N = \mathrm{Ker}(\lambda-T^*)$, de sorte que $M \cap N^{\perp} = (0)$ et décomposons H selon $H = N \oplus N^{\perp}$ en introduisant les projections p et $q = 1 - p$ sur N et $N^{\perp}$ respectivement. Alors $M \cap N^{\perp} = (0)$ implique que $p|_M : M \to N$ est injective, donc $\dim M \leqslant \dim N$.

On a donc obtenu $N(\mu) \leqslant N(\lambda)$. Si on suppose alors $|\eta| < \frac{\beta}{2}$ soit $\mu \in \mathring{D}(\lambda, \frac{\beta}{2})$ on obtient à la fois $\mu \in \mathring{D}(\lambda;\beta)$ et $\lambda \in \mathring{D}(\mu, \mathcal{I}m\,\mu)$, donc $N(\lambda) = N(\mu)$, ce qui suffit. □

EXEMPLES :

Ex. 1. - Reprenons l'exemple 1 de (4.4.2). Alors $f \in \mathrm{Ker}(i-T^*)$ ssi $f' = f$ donc $f = \alpha e^x$ et $n_+ = 1$. De même $f \in \mathrm{Ker}(i+T^*)$ ssi $f' = -f$, donc $f = \beta e^{-x}$ et $n_- = 1$. Ainsi $n_+ = n_- = 1$.

<u>Ex. 2</u>. - Soit $H = L^2([0,\infty])$ et $T = iD$, défini sur le domaine $D(T)$ formé des fonctions absolument continues telles que $f' \in L^2$ et $f(0) = 0$. Avec l'égalité :

$$\int_0^\infty if' \, \overline{g} \, dt = \int_0^\infty f \, \overline{ig}' \, dt + i[f\overline{g}]_0^\infty$$

on voit que T est symétrique car $(f\overline{g})(\infty) = 0$. En effet soit $h = f\overline{g}$, avec $f,g \in D(T)$; alors $h' \in L^1$ et $h \in L^1$, d'où suit facilement l'égalité $\lim_{x\to\infty} h(x) = 0$ et $(f\overline{g})(\infty) = 0$.

Par ailleurs $D(T^*)$ est formé des fonctions $f \in L^2$, absolument continues telles que $f' \in L^2$. Il suit de là que $\mathrm{Ker}(i-T^*) = (0)$ car on est conduit à $f' = f$ donc $f = \alpha e^x \notin L^2$. Par contre $e^{-x} \in L^2$ donc $\mathrm{Ker}\ (i+T^*) \neq (0)$ et $n_- = 1$. Ainsi $n_+ = 0$ et $n_- = 1$.

En remplaçant T par $-T$ on aurait obtenu $n_+ = 1$ et $n_- = 0$.

<u>Ex. 3</u>. - Soit I et J deux cardinaux quelconques. On fixe $I + J$ copies de l'espace H précédent, soit H_i et H_j. On définit l'opérateur S sur l'espace $K = (\oplus H_i) \oplus (\oplus H_j)$ en choisissant $S|_{H_i} = -T$ et $S|_{H_j} = T$ où T est l'opérateur iD sur H avec son domaine $D(T)$. Alors S laisse invariant chaque H_i et H_j, ainsi que chaque $H_i^\perp$ et $H_j^\perp$, de sorte que $S^*|_{H_i} = T^*$ et $S^*|_{H_j} = -T^*$. Il est alors facile de vérifier que $n_+ = I$ et $n_- = J$. On voit donc sur cet exemple que l'on peut obtenir pour n_+ et n_- deux cardinaux quelconques fixés a priori.

<u>Prolongements symétriques d'un opérateur symétrique</u>. - Si T est symétrique et fermé et si S est symétrique et prolonge T, on aura $T \prec S$, donc $S^* \prec T^*$ et $T \prec S \prec S^* \prec T^*$, de sorte que S est à chercher entre T et T^*. Ainsi $D(S)$ est un sous-espace compris entre $D(T)$ et $D(T^*)$ et comme on peut remplacer S par $\overline{S} = S^{**}$, on supposera S fermé. Pour construire ces prolongements S il convient donc de bien examiner la structure de l'espace $D(T^*)$.

Rappelons que sur $D(T^*)$ on introduit une norme hilbertienne, dite norme de Sobolev, et notée $|||\cdot|||$ ou mieux $\|\cdot\|_*$, cette dernière notation se prêtant mieux au passage au produit scalaire :

$$\|x\|_*^2 = \|x\|^2 + \|T^*x\|^2$$

$$(x|y)_* = (x|y) + (T^*x|T^*y)$$

L'intérêt essentiel est que $D(T^*)$, ainsi normé, est complet, et devient un espace de Hilbert.

On introduit maintenant les *espaces de défaut* $D_+ = \mathrm{Ker}(T^*-i)$ et $D_- = \mathrm{Ker}(T^*+i)$, tels que $\dim D_+ = n_+$ et $\dim D_- = n_-$. On remarquera d'ailleurs que pour $x \in D_+$ on a $\|x\|_*^2 = 2\|x\|^2$, de sorte que ces dimensions sont les mêmes que l'on plonge D_+ et D_- dans H ou dans l'espace de Hilbert $D(T^*)$.

Cela étant, on a le premier résultat important :

(4.4.8) THEOREME. - *Dans l'espace de Hilbert* $D(T^*)$ *on a la décomposition hilbertienne :*

$$D(T^*) = D(T) \oplus D_+ \oplus D_-$$

Preuve - Déjà $D(T)$ est fermé dans $D(T^*)$, car T étant fermé, $D(T)$ est complet pour la norme du graphe. Quant à D_+ et D_- ils sont déjà fermés dans H, donc a fortiori dans $D(T^*)$. Un exercice simple assure que $D(T)$, D_+ et D_- sont deux à deux orthogonaux dans $D(T^*)$ et il reste donc à voir que la somme hilbertienne de droite est bien égale à $D(T^*)$. Pour cela on introduit les sous-espace fermés de H

$$\Delta_+ = \mathrm{Im}(T + i) = (D_+)^\perp$$

$$\Delta_- = \mathrm{Im}(T - i) = (D_-)^\perp$$

et on fixe $x \in D(T^*)$. On décompose alors $(T^*+i)x$ selon $(T^*+i)x = u_+ + v$, avec $u_+ \in D_+$ et $v \in \Delta_+ = \mathrm{Im}(T+i)$, donc il existe $w \in D(T)$ tel que :

$$(T^* + i)x = u_+ + (T + i)w$$

d'où l'on déduit :

$$(T^* + i)(x - w) = u_+ = (T^* + i)\frac{u_+}{2i}$$

puisque $T^*u_+ = iu_+$. Ainsi $x - w - \frac{u_+}{2i} \in D_-$ et comme $u_+ \in D_+$ et $w \in D(T)$ la décomposition cherchée est établie. □

Il résulte du théorème qu'un opérateur symétrique et fermé S prolongeant T est complètement déterminé quand on connaît son domaine $D(S) = D(T) \oplus G$, où $G = D(S) \cap (D_+ \oplus D_-)$. Il y a donc correspondance bijective entre ces extensions S et *certains* sous-espaces fermés de

$D_+ \oplus D_-$. Cela étant la précision est apportée avec :

(4.4.9) THEOREME. - *Pour qu'un sous-espace fermé* G *de* $D_+ \oplus D_-$ *soit tel que l'opérateur* S, *égal à la restriction de* T* *sur l'espace* $D(T) \oplus G$, *soit symétrique (et fermé) il faut et il suffit que* G *soit le graphe d'une isométrie* J *d'un sous-espace fermé* M *de* D_+ *sur un sous-espace fermé* N *de* D_-.

Preuve - Remarquons d'abord que dans D_+ ou dans D_- (mais pas dans $D_+ \oplus D_-$) les notions de fermés ou d'orthogonalité sont les mêmes, que l'on raisonne dans H ou dans l'espace de Hilbert $D(T^*)$.

Fixons donc l'opérateur S et $x = u + v \in G$ avec $u \in D_+$ et $v \in D_-$, de sorte que $Sx = T^*x = iu - iv$. On sait, S étant symétrique, que $(Sx|x)$ est réel. Or

$$(Sx|x) = i(u-v|u+v) = i[\|u\|^2 - \|v\|^2]$$

ce qui donne $\|u\| = \|v\|$, et par suite aussi $\|u\|_* = \|v\|_* = \frac{1}{\sqrt{2}}\|x\|_*$ puis- $\|x\|_*^2 = \|u\|_*^2 + \|v\|_*^2 = 2\|u\|_*^2$. De là on déduit que les projections p_+ et p_-, de $D_+ \oplus D_-$ sur D_+ et D_- respectivement, sont telles que les espaces images $p_+(G) = M$ et $p_-(G) = N$ sont fermés dans D_+ et D_- respectivement. De plus l'application $J : M \to N$, définie par $Ju = v$ est bien une isométrie surjective de M sur N, dont le graphe G_J est précisément égal à G. Réciproquement fixons M,N et l'isométrie surjective $J : M \to N$, de graphe $G_J = G$ et définissons S par $D(S) = D(T) \oplus G$ et $S = T^*|_{D(S)}$. Puisque le graphe de S est fermé, l'opérateur S est lui-même fermé. Reste à voir qu'il est symétrique, et pour cela il suffit de prouver que $(Sz|z)$ est réel pour tout $z \in D(S)$. Or z s'écrit $z = x + u + Ju$ avec $x \in D(T)$ et $u \in M$, et $Sz = Tx + iu - iJu$. Donc

$$(Sz|z) = (Sx|x) + i[\|u\|^2 - i\|Ju\|^2] + i[(u|Ju) - (Ju|u)]$$
$$+ i(u|x) + (Sx|u) - i(Ju|x) + (Sx|Ju)$$

Mais $\|Ju\|^2 = \|u\|^2$ et $(Sx|u) = (x|T^*u) = -i(x|u)$ et de même $(Sx|Ju) = i(x|Ju)$. Donc

$$(Sz|z) = (Sx|x) - 2\,\mathcal{I}m[(u|Ju) + (u|x) - (Ju|x)]$$

et comme $(Sx|x) = (Tx|x)$ est réel, le résultat est acquis. □

On peut encore dire un peu plus :

(4.4.10) PROPOSITION. - *Les notations étant les mêmes les espaces de défaut* $D_+(S)$ *et* $D_-(S)$ *sont respectivement les sous-espaces orthogonaux* $M^\perp$ *et* $N^\perp$ *de* M *dans* D_+ *et de* N *dans* D_- *, de sorte que :*

$$D(S^*) = D(S) \oplus M^\perp \oplus N^\perp = D(T) \oplus G \oplus M^\perp \oplus N^\perp$$

Preuve - Il est clair que $S^*z = iz$ implique $z \in D_+ \cap D(S^*)$. Décomposons z en $z = z_1 + z_2$ avec $z_1 \in M$ et $z_2 \in M^\perp$. Avec $x = u + v \in G$, où $u \in M$ et $v = Ju$, on a $Sx = iu - iv$ et $S^*z = iz = i(z_1 + z_2)$. Or :

$$(x|S^*z) = -i(u+v|z) = -i(v|z) - i(u|z_1)$$

$$(Sx|z) = i(u-v|z) = -i(v|z) + i(u|z_1)$$

d'où $(u|z_1) = 0$ pour tout $u \in M$ et $z_1 = 0$. Ainsi $z \in M^\perp$.

Réciproquement fixons $z \in M$ et $x = x_o + u + Ju \in D(S)$ avec $x_o \in D(T)$ et $u \in M$. Alors :

$$\begin{aligned}(Sx|z) &= (Tx_o|z) + i(u|z) - i(Ju|z) = (Tx_o|z) - i(Ju|z)\\ &= (x_o|T^*z) - i(Ju|z)\\ &= -i(x_o|z) - i(Ju|z) - i(u|z)\\ &= (x_o + u + Ju|iz) = (x|iz)\end{aligned}$$

donc $z \in D(S^*)$ et $S^*z = iz$, soit $z \in D_+(S)$. □

Remarque - Si l'on pose $\nu = \dim M = \dim N$ (dimension hilbertienne) alors $n_+(T) = \nu + n_+(S)$ et $n_-(T) = \nu + n_-(S)$. En particulier si $n_+(T)$ et $n_-(T)$ sont finis on aura $n_+(S) - n_-(S) = n_+(T) - n_-(T)$.

La formule donnée en (4.4.10) a pour conséquence que S ne peut être autoadjoint que si $M^\perp = N^\perp = (0)$, ce qui revient à dire que $M = D_+$ et $N = D_-$. Mais M et N étant isométriques on en tire que $n_+ = n_-$. D'où :

(4.4.11) THEOREME. - *Pour qu'un opérateur symétrique fermé* T *admette des extensions autoadjointes il faut et il suffit que ses indices de défaut* n_+ *et* n_- *soient égaux. On obtient dans ce cas toutes les extensions autoadjointes de* T *à partir de toutes les isomé-*

tries surjectives J *de* D_+ *sur* D_- *selon le procédé de* (4.4.9).

Exemple - Reprenons l'exemple 1 de (4.4.2), pour lequel $D_+ = \mathbb{C}e^x$ et $D_- = \mathbb{C}e^{1-x}$. Comme $\| e^x \| = \| e^{1-x} \|$, on voit que l'isométrie J est déterminée selon $J(e^x) = \beta e^{1-x}$ avec $|\beta| = 1$, et le graphe $G = G_J$ est engendré par la fonction $f = e^x + \beta e^{1-x}$. Pour cette fonction on a $f(1) = \beta + e$ et $f(0) = 1 + \beta e$, d'où la relation $f(1) = \alpha f(0)$ avec $\alpha = \frac{\beta + e}{1 + \beta e}$. On vérifie aisément que $|\alpha| = 1$, et que réciproquement tout nombre α, tel que $|\alpha| = 1$, peut ainsi s'écrire avec $\beta = \frac{\alpha - e}{1 - \alpha e}$. Par ailleurs dans D(T) on a $f(0) = f(1) = 0$, ce qui montre bien que l'opérateur S associé à l'isométrie J est celui construit dans l'exemple 2 de (4.4.2).

Il arrive qu'on puisse facilement prévoir qu'un opérateur T symétrique possède des extensions autoadjointes. Pour cela introduisons la notion de conjugaison.

(4.4.12) DEFINITION. - *On dit qu'un opérateur antilinéaire* $V : H \to H$ *est une conjugaison lorsque* $V^2 = I$ *et* $(Vx|Vy) = (y|x)$.

On a alors :

(4.4.13) THEOREME. - *Soit* T *un opérateur symétrique fermé qui commute avec une conjugaison* V. *Alors les indices de défaut* n_+ *et* n_- *sont égaux et* T *admet des extensions autoadjointes.*

Preuve - Puisque TV = VT on a déjà $VD(T) \subset D(T)$ donc $VD(T) = D(T)$ avec $V^2 = I$. On sait que $D_+ = \mathrm{Im}\,(T + i)^\perp$ donc si $x \in D_+$ alors, pour tout y :

$$\begin{aligned} 0 &= ((T + i)y|x) = (Vx|V(T + i)y) \\ &= (Vx|(T - i)Vy) \end{aligned}$$

de sorte que Vx est orthogonal à $(T - i)VD(T) = \mathrm{Im}\,(T - i)$ puisque $VD(T) = D(T)$. Ainsi $Vx \in D_-$ et l'on voit donc que $VD_+ \subset D_-$ et $VD_- \subset D_+$. Mais, puisque $V^2 = I$, alors $VD_+ = D_-$ et ainsi V est une anti-isométrie de D_+ sur D_-, ce qui assure l'égalité des indices de défaut. □

En pratique, l'opérateur V sera fréquemment la conjugaison $f \to \overline{f}$ sur un espace de type L^2. Dans l'exemple traité après (4.4.11) on peut choisir pour V la conjugaison définie par $(Vf)(x) = \overline{f}(1-x)$.

Terminons ce paragraphe par une remarque essentielle : tout l'intérêt que possèdent les opérateurs symétriques admettant des extensions autoadjointes tient au fait, que nous allons démontrer (ou redémontrer) dans le paragraphe suivant, à savoir qu'un opérateur autoadjoint est représentable par une mesure spectrale définie sur $\mathbb{R}$. Le calcul fonctionnel associé pourra donc s'appliquer à l'opérateur symétrique de départ.

(4.5) MESURE SPECTRALE D'UN OPERATEUR AUTOADJOINT.

Il y a plusieurs façons de construire la mesure spectrale $E(.)$ associée à un opérateur autoadjoint mais l'une des plus rapides est basée sur la notion de transformation de Cayley.

On sait déjà que $n_+ = n_- = 0$, de sorte que $\mathrm{Im}(T+i) = \mathrm{Im}(T-i) = H$. Or, pour tout $x \in D(T)$ on a :

$$\|(T+i)x\|^2 = \|Tx\|^2 + \|x\|^2 = \|(T-i)x\|^2$$

d'où il résulte déjà que l'opérateur $(T+i)^{-1}$ existe sur le domaine $\Delta_+ = \mathrm{Im}(T+i) = H$ car $(T+i)x = 0$ implique $x = 0$. Ainsi $T + i : D(T) \to H$ est une bijection et $(T+i)^{-1}$ est la bijection réciproque $H \to D(T)$. On introduit ensuite l'opérateur $U = (T-i)(T+i)^{-1} : H \to H$, défini par

$$z = Uy \Leftrightarrow \begin{array}{l} y = (T+i)x \\ \qquad\qquad\qquad x \in D(T) \\ z = (T-i)x \end{array}$$

et la formule donnée plus haut montre que U est une isométrie bijective de H sur lui-même. On dit que l'opérateur unitaire U est la transformée de Cayley de l'opérateur T.

Connaissant U on reconstruit facilement T en remarquant que $y = (T+i)x$ et $Uy = (T-i)x$, donc $2ix = y - Uy$ et $2Tx = y + Uy$. Il s'ensuit que $(I-U)y = 0$ implique $x = 0$, donc aussi $y = 0$, et ainsi $(I-U)^{-1}$ existe sur le domaine $\mathrm{Im}(I-U) = D(T)$. De plus,

$$(I+U)(I-U)^{-1}(2ix) = (I+U)y = 2Tx$$

et ainsi $T = i(I+U)(I-U)^{-1}$ avec égalité des domaines.

En résumé :

(4.5.1) THEOREME. - *Soit* T *un opérateur autoadjoint sur* H. *Alors l'opérateur* $U = (T-i)(T+i)^{-1}$ *est unitaire sur* H *et permet de reconstruire* T *selon* $T = i(I+U)(I-U)^{-1}$.

Remarque - On prendra garde que U, transformée de Cayley de T, n'est pas n'importe quel opérateur unitaire. Par exemple U = I ne peut ainsi être obtenu.

Passer de T à U présente un avantage considérable puisqu'on remplace T par un opérateur borné et unitaire, donc normal et borné, pour lequel on connait parfaitement le calcul fonctionnel. On sait en effet que U possède une mesure spectrale E, concentrée sur le tore $\mathbb{T}$ et telle que $U = \int u d\widetilde{E}(u)$. On a alors :

(4.5.2) LEMME. - *On a* $\widetilde{E}(\{1\}) = 0$ *ou encore* $\mathrm{Ker}(I-U) = 0$.

Preuve - Elle est évidente car si $z = Uy = y$ alors $y = (T+i)x = (T-i)x$, d'où $x = 0$ et $y = 0$. □

Il suit de là que la mesure spectrale $\widetilde{E}$ est concentrée sur l'espace localement compact $\Omega = \mathbb{T} \setminus \{1\}$. Or une transformation élémentaire réalise un homéomorphisme de Ω sur $\mathbb{R}$, donné par :

$$t = \phi(u) = i\,\frac{1+u}{1-u} \qquad u = \psi(t) = \frac{t-i}{t+i}$$

et c'est bien entendu l'existence de cette transformation qui a donné l'idée à Von Neumann d'introduire la transformée cayleyenne de T.

Mais maintenant ϕ va transporter la mesure spectrale $\widetilde{E}(.)$ en une mesure image $E(.)$ sur $\mathbb{R}$, ce qui permet d'introduire l'opérateur autoadjoint

$$\widetilde{T} = \int t dE(t) = i\int \frac{1+u}{1-u}\, d\widetilde{E}(u)$$

On va montrer que $\widetilde{T} = T$. Pour cela soit $x \in H$ et $y = (I-U)x$. Les résultats du paragraphe 1 assurent que $\widetilde{E}_y = |1-u|^2 . \widetilde{E}_x$, ce qui garantit $y \in D(\widetilde{T})$ car :

$$\int \left|\frac{1+u}{1-u}\right|^2 d\widetilde{E}_y(u) = \int |1+u|^2\, d\widetilde{E}_x(u) < +\infty$$

De plus,

$$\widetilde{T}y = \widetilde{T}(I-U)x = i\int (1+u)\, d\widetilde{E}(u)x = i(I+U)x$$
$$= T(I-U)x$$

d'où $\tilde{T}(I-U) = T(I-U)$. Ceci prouve que $\tilde{T}$ coïncide avec T sur $Im(I-U) = D(T)$ autrement dit $\tilde{T}$ prolonge T. Mais T étant lui-même autoadjoint n'admet aucun prolongement autoadjoint strict et ainsi $\tilde{T} = T = \int t dE(t)$, ce qui fournit l'existence d'une mesure spectrale E(.) sur $\mathbb{R}$ permettant la représentation de T. Donc déjà :

(4.5.3) <u>THEOREME</u>. - *Tout opérateur autoadjoint* T *sur* H *provient d'une mesure spectrale* E *sur* $\mathbb{R}$ *selon* $T = \int t dE(t)$.

Il reste à voir , pour être complet, que cette mesure spectrale est unique et est concentrée sur le spectre $\sigma(T)$ de T. Cela provient essentiellement du fait que E(.) peut être reconstruite à partir de la résolvante $R(\lambda,T)$, pour $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. C'est la célèbre formule de Stone :

(4.5.4) <u>THEOREME</u>. - (Formules de Stone).- *Soit* [a,b] *un intervalle compact de* $\mathbb{R}$. *Alors au sens de la topologie simple-forte on a :*

a) $\lim\limits_{\beta \downarrow 0} i\beta R(a + i\beta,T) = E(\{a\})$

b) $\lim\limits_{\beta \downarrow 0} \frac{1}{2i\pi} \int_b^a [R(\alpha-i\beta,T) - R(\alpha+i\beta,T)]\, d\alpha$

$= E(]a,b[) + \frac{1}{2} E(\{a\}) + \frac{1}{2} E(\{b\})$

<u>*Preuve*</u> - L'intégrale d'opérateurs de b) est évidemment définie comme une intégrale de Riemann à valeurs dans L(H), vu les propriétés d'analyticité de la fonction résolvante ; soit S_β sa valeur. Par ailleurs pour tout $x \in H$ et tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ on a :

$$R(\lambda,T)x = \int \frac{dE(t)x}{\lambda-t}$$

donc, avec le théorème de Fubini appliqué à toutes les mesures $E_{x,y}$:

$$S_\beta x = \frac{1}{2i\pi} \int_a^b \int \frac{2i\beta dE(t)x}{(\alpha-t)^2+\beta^2}\, d\alpha$$

$$= \int \left[\frac{\beta}{\pi} \int_b^a \frac{d\alpha}{(\alpha-t)^2+\beta^2}\right] dE(t)x$$

$$= \int \frac{1}{\pi} \left[\text{Arctg}\, \frac{b-t}{\beta} - \text{Arctg}\, \frac{a-t}{\beta}\right] dE(t)x$$

Or quand $\beta \downarrow 0$ les fonctions continues $f_\beta(t) = \frac{1}{\pi}\left[\mathrm{Arctg}\,\frac{b-t}{\beta} - \mathrm{Arctg}\,\frac{a-t}{\beta}\right]$ restent uniformément majorées et convergent simplement vers la fonction f donnée par :

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \,]a,b[\\ \frac{1}{2} & \text{si } t = a \text{ ou } t = b \\ 0 & \text{si } t \notin [a,b] \end{cases}$$

Les propriétés du calcul fonctionnel impliquent donc $S_\beta \to f(T)$ pour la topologie simple-forte et ici $f(T) = E(]a,b[) + \frac{1}{2}E(\{a\}) + \frac{1}{2}E(\{b\})$, ce qui prouve b). Quant à l'assertion a) elle s'obtient encore plus vite avec les fonctions $g_\beta(t) = \frac{i\beta}{a-t+i\beta}$ qui restent uniformément bornées par 1 et tendent simplement , quand $\beta \downarrow 0$, vers $1_{\{a\}}$. □

(4.5.5) <u>COROLLAIRE</u>. - *La mesure spectrale* E(.)*associée à l'opérateur autoadjoint* T *est unique. De plus son support est le spectre* $\sigma(T)$.

<u>*Preuve*</u> - Supposons connues deux mesures spectrales E(.) et F(.) associées à T. Alors pour chaque $x \in H$ les mesures positives E_x et F_x coïncident sur les intervalles [a,b] d'après (4.5.4), ceci implique classiquement qu'elles sont égales. Ainsi, $E_x = F_x$ pour tout x, donc $E_{x,y} = F_{x,y}$ pour tous x,y et E(.) = F(.).

Pour régler la question du support commençons par remarquer que si S = Supp E, alors S est un fermé de $\mathbb{R}$ tel que E(.) soit concentrée sur S, d'où $T = \int_S t\,dE(T)$. Par suite le spectre $\sigma(T)$ est contenu dans l'adhérence de l'image de S par la fonction identique $t \to t$, donc $\sigma(T) \subset S$. Pour examiner la réciproque fixons $\lambda \in \rho(T)$; il existe alors un intervalle compact [a,b] centré au point λ et une boule $\mathring{B}(\lambda,r)$ de $\mathbb{C}$ tels que $[a,b] \subset \mathring{B}(\lambda,r) \subset \rho(T)$. L'analyticité de la fonction résolvante assure aisément la condition :

$$\| R(\alpha-i\beta,T) - R(\alpha+i\beta,T)\| = O(\beta)$$

uniformément en $\alpha \in [a,b]$, pour β assez petit. Avec (4.5.4.b) on en déduit la condition $E([a,b]) = 0$, ce qui prouve amplement que $\lambda \notin \mathrm{Supp}\,E$. Donc $\mathrm{Supp}\,E \subset \sigma(T)$ et l'égalité est obtenue. □

Pour terminer ce chapitre 4 rassemblons sous forme d'exercices plus ou moins détaillés quelques résultats importants pour les applications ultérieures.

(4.5.6) EXERCICES :

Exerc. 1. (Retour sur le théorème de Stone) :

On reprend les notations de l'exercice 5 du (3.1.6). Montrer alors que tous les groupes unitaires fortement continus (U_t) sont de la forme $U_t = e^{itT}$ pour un opérateur autoadjoint unique T. Etablir aussi que iT est "le générateur infinitésimal" du groupe (U_t), c'est-à-dire que

$$Tx = -i \lim_{t \to o} \frac{U_t x - x}{t}$$

avec la précision supplémentaire que le domaine D(T) est exactement l'ensemble des $x \in H$ pour lesquels la limite considérée existe dans H.

Exerc. 2. :

Soit T un opérateur autoadjoint et soit D_o un sous-espace de D(T) tel que $\overline{D_o} = H$ et tel que D_o soit invariant par les opérateurs $U_t = e^{itT}$. Démontrer, en utilisant le critère (4.4.6), que D_o est un coeur pour T, c'est-à-dire que l'opérateur $T_o = T|_{D_o}$ est essentiellement autoadjoint et tel que $T = \overline{T}_o$ (on pourra pour chaque $y \in \mathrm{Ker}(T^*_o \pm i)$ et chaque $x \in D_o$, considérer la fonction $g(t) = (U_t x|y)$ et prouver qu'elle est dérivable avec $g'(t) = \pm g(t)$, puis en déduire que $g(t) = o$ ce qui donnera $\mathrm{Ker}(T^*_o \pm i) = (o)$). En particulier le domaine $D^\infty(T) = \bigcap_n D(T^n)$ est un coeur pour T.

Exerc. 3. (Questions de commutation) :

Pour deux opérateurs non bornés S et T l'expression ST -TS peut ne pas avoir de sens, par exemple si $D(ST) \cap D(TS) = (0)$. Il faut donc chercher à ramener la question de commutation au cas d'opérateurs bornés. Maintenant si S et T sont bornés on voit immédiatement que S et T commutent ssi les groupes unitaires $U(s) = e^{isS}$ et $V(t) = e^{itT}$ commutent. Dans le cas où S et T sont autoadjoints on dira donc qu'ils commutent (par définition) lorsque leurs mesures spectrales $E(.) = E_S$ et $F(.) = E_T$ commutent, au sens où $E(A)F(B) = F(B)E(A)$ pour tous boréliens A et B de $\mathbb{R}$. Cela étant, démontrer les équivalences suivantes :

a) S et T commutent,

b) $E(A)F(B) = F(B)E(A)$ lorsque $A = [a,b]$ et $B = [c,d]$,

c) $f(S)$ et $g(T)$ commutent pour toutes fonctions boréliennes bornées f et g,

d) $U(s) = e^{isS}$ et $V(t) = e^{itT}$ commutent pour s,t réels quelconques,

e) $R(\lambda,S)$ et $R(\mu,T)$ commutent pour tous $\lambda,\mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$,

Pour passer de e) à b) on utilisera la formule de Stone. Pour récupérer l'assertion d) on pourra, soit passer de d) à c) par un raisonnement analogue à celui de l'exercice 5 de (3.1.6), soit passer directement de d) à e) en utilisant les égalités

$$\frac{1}{\lambda - t} = \begin{cases} -i\displaystyle\int_0^\infty e^{is\lambda}\, e^{-ist}\, ds & \text{pour } \lambda = \alpha + i\beta,\ \beta > 0 \\ i\displaystyle\int_0^\infty e^{-is\lambda}\, e^{ist}\, ds & \text{pour } \lambda = \alpha + i\beta,\ \beta < 0 \end{cases}$$

qui permettent d'exprimer simplement $R(\lambda,S)$ et $R(\mu,T)$ à partir des groupes unitaires associés selon

$$R(\lambda,S) = \begin{cases} -i\displaystyle\int_0^\infty e^{is\lambda}\, U(-s)\, ds & \text{si } \beta > 0 \\ i\displaystyle\int_0^\infty e^{-is\lambda}\, U(s)\, ds & \text{si } \beta < 0 \end{cases}$$

Exerc. 4. (Application au problème des moments sur $\mathbb{R}$) :

On reviendra plus tard en détail sur le problème des moments sur $\mathbb{R}$, mais d'ores et déjà on peut aborder la question. On dit qu'une suite (m_k) est une suite de moments sur $\mathbb{R}$ lorsqu'il existe une mesure positive μ sur $\mathbb{R}$ (non nécessairement unique) telle que $m_k = \int t^k d\mu(t)$ pour tout $k \geqslant 0$.

a) Montrer que si (m_k) est une suite de moments, alors pour toute suite finie (u_k) de nombres complexes on a la condition

(*) $\sum\limits_{p,q} m_{p+q}\, u_p\, \overline{u_q} \geqslant 0$

On dit souvent que la "matrice" $[m_{p+q}]$ est de type positif.

b) On examine la réciproque en supposant la condition (*) vérifiée. Montrer alors que sur l'espace $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ des suites complexes à support fini, on peut définir un semi-produit scalaire selon

$$(u|v) = \sum_{p,q} m_{p+q}\, u_p\, \overline{v_q}$$

On introduit maintenant l'espace de Hilbert H, séparé complété de $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ pour ce semi-produit scalaire.

c) Etablir que l'opérateur de "shift" T, défini par $(Tu)_o = 0$ et $(Tu)_{n+1} = u_n$ sur $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$, se prolonge en un opérateur sur H, noté encore T, qui est symétrique et qui commute avec l'opérateur de conjugaison $V : u \to \overline{u}$. En déduire que T admet, s'il n'est pas autoadjoint, une infinité d'extensions autoadjointes S sur H.

d) Soit S une telle extension et $E(.) = E_S$ sa mesure spectrale. On désigne par $e_o = (1,0,0,\ldots)$ la suite unité et par (e_k) la base canonique de $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$, telle que $e_k = T^k e_o$. On introduit ensuite la mesure positive $\mu = E_{e_o}$. Montrer alors les égalités

$$m_k = (e_k|e_o) = \int t^k d\mu(t)$$

et déduire de tout cela l'énoncé qui convient.

Exerc. 5. :

On reprend l'espace $H = L^2[0,1]$ et l'opérateur $T_\alpha = iD$ de l'exemple 2 de (4.4.2), défini sur le domaine $D(T_\alpha)$ formé des fonctions absolument continues f telles que $f' \in L^2$ et $f(1) = \alpha f(0)$ avec $|\alpha| = 1$. On pose $\alpha = e^{-i\theta}$ avec $0 \leqslant \theta < 2\pi$.

a) Montrer que $\sigma(T_\alpha) = \sigma_p(T_\alpha) = \theta + 2\pi\mathbb{Z}$ et déterminer la multiplicité de chaque valeur propre $\lambda_k = \theta + 2k\pi$.

b) On suppose $\alpha = 1$, donc $\theta = 0$. Montrer comment la décomposition spectrale de T_1 est reliée au développement en série de Fourier des fonctions périodiques de période 1. Expliciter la mesure spectrale E_1 et montrer que l'opérateur unitaire e^{itT_1} s'obtient selon $(e^{itT_1}f)(x) = \tilde{f}(x-t)$, où $\tilde{f}$ est la prolongée 1-périodique de f sur $\mathbb{R}$.

c) On revient au cas α quelconque. Expliciter la mesure spectrale E_α. Les mesures spectrales E_α commutent-elles ? Expliciter la fonction $e^{itT_\alpha}f$ pour $f \in L^2[0,1]$, en faisant intervenir la fonction $\tilde{f}$ sur $\mathbb{R}$ ainsi que les fonctions $h_\theta : x \to e^{i\theta x}$ et $\tilde{h}_\theta$.

d) Montrer qu'il existe une mesure μ_α sur $\mathbb{R}$, dont le support est $\sigma(T_\alpha)$, telle que l'opérateur T_α soit unitairement équivalent à l'opérateur de multiplication par X : $t \to t$ sur l'espace $L^2(\mu_\alpha)$.

Exerc. 6. (Un théorème de perturbation) :

Soit T un opérateur autoadjoint sur H et soit A un opérateur hermitien (c'est-à-dire autoadjoint et borné).

a) Montrer que l'opérateur $S = T + A$ défini sur le domaine $D(S) = D(T)$, est symétrique et fermé.

b) Soit $\lambda = \alpha + i\beta$. On suppose $|\beta| > \|A\|$. Démontrer que λ appartient au résolvant $\rho(T+A)$ et que

$$R(\lambda, T + A) = \sum_{n=0}^{\infty} R(\lambda,T)[AR(\lambda,T)]^n$$

c) Déduire de là que $T + A$ est autoadjoint.

d) Soit λ un point fixé de $\rho(T)$. On pose $d = d(\lambda,\sigma(T))$. Montrer, en utilisant la mesure spectrale de T, l'inégalité

$$\| R(\lambda,T)\| \leqslant \frac{1}{d}$$

e) Déduire de d) que tout élément $\lambda \in \sigma(T+A)$ est tel que $d(\lambda,\sigma(T)) \leqslant \|A\|$ et que tout élément $\mu \in \sigma(T)$ est tel que $d(\mu,\sigma(T+A)) \leqslant \|A\|$, autrement dit que la distance de Hausdorff

$$\delta(\sigma(T), \sigma(T+A)) = \operatorname{Max}\{ \sup_{\lambda \in \sigma(T)} d(\lambda,\sigma(T+A)), \sup_{\mu \in \sigma(T+A)} d(\mu,\sigma(T))\}$$

des deux spectres est majorée par $\| A\|$. On a ainsi obtenu une propriété de "continuité" du spectre d'un opérateur autoadjoint quand on le perturbe par un opérateur hermitien.

Exerc. 7. (Comparaison d'opérateurs autoadjoints) :

De l'inégalité $S \leqslant T$ entre opérateurs hermitiens (bornés), on ne peut en général rien tirer sur la comparaison des opérateurs $f(S)$ et $f(T)$ quand f est une fonction croissante bornée sur $\mathbb{R}$. La raison en est qu'on n'a aucun moyen de comparaison des mesures spectrales $E^S(.)$ et $E^T(.)$, comme on s'en assure facilement en choisissant $S = I$ ou $T = I$. Il en résulte que toute information partielle allant dans ce sens est riche de signification.

Avant de commencer donnons une définition précise : étant donné deux opérateurs autoadjoints S et T, on dit que $S \leqslant T$ lorsque $D(T) \subset D(S)$ et

$(Sx|x) \prec (Tx|x)$ pour $x \in D(T)$. On notera bien l'inversion de l'inégalité pour les domaines. On notera aussi que $S \prec T$ n'équivaut à $-T \prec -S$ que si $D(S) = D(T)$. Enfin, il est facile de voir que $S \prec T$ et $T \prec S$ impliquent $S = T$, avec égalité des domaines.

a) On suppose S et T bornés et $0 \prec S \prec T$. Montrer que l'on a $S^2 \prec T^2$ lorsque S et T commutent, mais que ce résultat est faux en général lorsque S et T ne commutent pas.

b) On notera $S > 0$ lorsque $S \succ 0$ et S est inversible, c'est-à-dire lorsque $0 \in \rho(S)$. Montrer qu'il existe une constante $a > 0$ telle que $aI \prec S$, ce qu'on notera $S \succ a$.

c) Soient $S > 0$ et $T > 0$. Montrer que l'on a $S \prec T$ si et seulement si $\| S^{1/2}\, T^{-1/2} \| \prec 1$. En déduire alors que $0 < T^{-1} \prec S^{-1}$.

d) Soit $T \succ 0$. Montrer que pour tout $u > 0$ l'opérateur $(T+u)^{-1}$ est borné et que l'on a $\mathrm{Im}(T+u)^{-1} \subset D(T)$, $\| (T+u)^{-1} \| \prec \frac{1}{u}$ et $\| T(T+u)^{-1} \| \prec 1$

e) En remarquant que $T(T+u)^{-1} = I - u(T+u)^{-1}$, démontrer que $0 \prec S \prec T$ implique $0 \prec S(S+u)^{-1} \prec T(T+u)^{-1}$ pour tout $u > 0$.

f) Soit $\phi(t)$ une fonction borélienne positive pour $t > 0$, telle que $\int \frac{\phi(u)\,du}{u+1} < +\infty$. Pour tout $t > 0$ on pose :

$$f(t) = \int_0^\infty \frac{t\phi(u)\,du}{t+u}$$

Montrer que f est définie, positive, croissante et continue pour $t > 0$. Démontrer que $f(t) \to 0$ quand $t \downarrow 0$ (on remarquera que $t(1+u) \prec t + u$ pour $t \prec 1$). Quelle condition doit vérifier la fonction ϕ pour que f soit bornée ?

g) On fixe l'opérateur $T \succ 0$ et la fonction ϕ, et on introduit l'opérateur

$$f(T) = \int_0^\infty f(t)\; dE(t)$$

où $E(.)$ est la mesure spectrale associée à T, de support contenu dans $[0,\infty]$. Etablir que l'on a $f(T) \succ 0$ et, avec le théorème de Fubini, que :

$$(*)\quad D[f(T)] = \{x \; ; \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty (T(T+u)^{-1}\, T(T+v)^{-1}x|x)\, \phi(u)\phi(v)\,du\,dv < +\infty\}$$

$$(**)\quad (f(T)x|x) = \int_0^\infty (T(T+u)^{-1}x|x)\phi(u)\,du \quad \text{si } x \in D[f(T)]$$

h) Tirer de là que $0 \leqslant S \leqslant T$ implique $0 \leqslant f(S) \leqslant f(T)$ lorsque f est bornée.

i) On ne suppose plus f bornée et l'on pose $f_n(t) = \int_0^n \frac{t\phi(u)du}{t+u}$.
On fixe les opérateurs S et T tels que $0 \leqslant S \leqslant T$, ainsi qu'un point $x \in D[f(T)]$. Montrer que la suite $(f_n(S))$ est une suite croissante d'opérateurs positifs bornés telle que $f_n(S) \leqslant f(T)$, et déduire de là que la suite $z_n = f_n(S)x$ est faiblement bornée (et même faiblement convergente), donc bornée en norme. Montrer alors que $x \in D[f(S)]$ et prouver enfin que l'on a $0 \leqslant f(S) \leqslant f(T)$. On remarquera ici que cette preuve indirecte de l'inclusion $D[f(T)] \subset D[f(S)]$ est nécessitée par le fait que l'égalité (*) de g) ne peut être utilisée, car $0 \leqslant S \leqslant T$ n'implique pas nécessairement l'inégalité $S(S+u)^{-1}\, S\,(S+v)^{-1} \leqslant T(T+u)^{-1}\, T\,(T+v)^{-1}$ à cause de a).

j) On choisit ici $\phi(u) = u^{\alpha-1}$, avec $0 < \alpha < 1$. Montrer que

$$f(t) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}\, t^\alpha$$

et déduire de là que $0 \leqslant S \leqslant T$ implique $0 \leqslant S^\alpha \leqslant T^\alpha$ pour $0 < \alpha < 1$. En particulier, pour $\alpha = \frac{1}{2}$, on obtient que $0 \leqslant S \leqslant T \Rightarrow 0 \leqslant S^{1/2} \leqslant T^{1/2}$ (*théorème de monotonie de la racine carrée).*

k) Montrer que $\frac{t^\alpha - 1}{\alpha} \downarrow \mathrm{Log}\, t$ pour $t > 0$ quand $\alpha \downarrow 0$. En déduire que $\left|\frac{t^\alpha-1}{\alpha}\right|^2 \to |\mathrm{Log}\, t|^2$ quand $\alpha \downarrow 0$, de façon monotone suivant que l'on a $0 < t \leqslant 1$ ou $t \geqslant 1$. Déduire de là que pour tout opérateur $T > 0$ on a $x \in D[\mathrm{Log}\, T]$ si et seulement si on a $x \in D(T^*)$ pour α assez petit. Montrer alors que :

$$(\mathrm{Log}\, T)x = \lim_{\alpha \downarrow o} \frac{T^\alpha x - x}{\alpha}$$

et prouver enfin que l'inégalité $0 < S \leqslant T$ implique l'inégalité $\mathrm{Log}\, S \leqslant \mathrm{Log}\, T$ (on prendra garde que ni Log S, ni Log T ne sont des opérateurs positifs en général).

Ainsi avec j) et k) on a obtenu un théorème de monotonie de la racine carrée et du logarithme, théorèmes d'autant plus intéressants que les théorèmes "réciproques" de monotonie du carré ou de l'exponentielle sont faux.

CHAPITRE 5 - LE PROBLEME DES MOMENTS EN LIAISON AVEC LA THEORIE DES OPERATEURS

Dans ce chapitre, nous allons développer une autre application de la théorie des opérateurs non bornés, en étudiant certains aspects du "problème des moments". Auparavant, formulons ce problème de manière plus précise. Etant donnés un intervalle I de $\mathbb{R}$, borné ou non, et μ une mesure positive sur I telle que, pour tout $n \geq 0$, l'application $t \to t^n$ soit μ-intégrable, on appelle moment d'ordre n de μ, et on note $\alpha_n = \alpha_n(\mu)$ le scalaire $\int_I t^n d\mu(t)$. Deux problèmes se posent alors :

- Problème d'existence : comment caractériser les suites (α_n) de nombres réels pour lesquelles il existe une mesure positive μ sur I (bornée a posteriori), telle que (α_n) soit la suite de moments associée à μ.

- Problème d'unicité : si une telle solution μ existe, est-elle unique ?

Il est clair que la réponse à ces problèmes est complètement différente selon que l'intervalle I est borné ou non. Ainsi, si on choisit pour I l'intervalle borné [0,1] de $\mathbb{R}$, et on étudie alors le problème des moments dit de Hausdorff, la réponse au problème d'unicité est immédiate, puisque si deux mesures μ et ν sur [0,1] ont même suite de moments, elles coïncident sur les polynômes, et par densité des polynômes dans l'espace C[0,1], elles coïncident en réalité partout. Par contre, cet argument tombe en défaut si on remplace [0,1] par la droite réelle par exemple, et on conçoit donc déjà que l'étude du problème des moments sur $\mathbb{R}$, dit de Hamburger, sera beaucoup plus complexe, et par là même beaucoup plus riche.

Pour ce qui concerne le problème d'existence, dans le cas où $I = [0,1]$ ce problème est complètement résolu. Nous nous contenterons de rappeler l'expression des deux conditions nécessaires et suffisantes connues, les techniques utilisées pour les obtenir étant étrangères aux idées que nous avons développées dans ce cours. La première des conditions constitue le théorème classique de Hausdorff :

<u>THEOREME</u> (HAUSDORFF). - *Une condition nécessaire et suffisante pour que la suite* (α_n) *soit une suite de moments sur* $[0,1]$ *est que l'on ait les inégalités :*

$$\sum_{k=o}^{q} (-1)^k C_q^k \alpha_{p+k} \geq 0$$

pour tous les entiers $p,q \geq 0$.

La seconde condition, basée sur la représentation des polynômes positifs sur $[0,1]$, fait intervenir la notion de matrice (infinie) de type positif. On dit que la matrice réelle $M = [m_{ij}]$ est de type positif, si, pour toute suite finie (x_i) de nombres complexes on a :

$$\sum_{i,j} m_{ij}\, x_i\, \overline{x_j} \geq 0.$$

Cela étant, et sachant que tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, positif sur l'intervalle $[0,1]$, peut se mettre sous la forme $P = A^2 + X(1-X)B^2$, avec $A,B \in \mathbb{R}[X]$, on peut établir :

<u>THEOREME</u>. - *Une condition nécessaire et suffisante pour que la suite* (α_n) *soit une suite de moments sur* $[0,1]$ *est que les matrices :*

$$M = [\alpha_{i+j}]$$

$$N = [\alpha_{i+j+1} - \alpha_{i+j+2}]$$

soient de type positif.

Il faut noter que l'on peut montrer directement, c'est-à-dire sans passer par l'intermédiaire de la mesure μ solution, l'équivalence de ces deux conditions d'existence. Déjà, il est assez facile de voir que la seconde condition implique la condition de Hausdorff ; le point difficile est d'établir la réciproque, et pour cela, on s'appuie sur les propriétés des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ qui sont strictement positifs sur $]0,1[$.

Nous allons donc maintenant nous intéresser uniquement au problème des moments sur $\mathbb{R}$, en traitant d'abord le problème d'existence, puis enfin celui d'unicité.

5.1 LE PROBLEME DES MOMENTS SUR $\mathbb{R}$: LA CONDITION D'EXISTENCE.

Considérons une suite (α_n) de nombres réels ; déjà, si (α_n) est la suite des moments d'une mesure positive μ sur $\mathbb{R}$, alors la matrice $M = [\alpha_{i+j}]$ est de type positif. En effet, pour toute suite finie (x_i) de nombres complexes on a :

$$\sum_{i,j} \alpha_{i+j}\, x_i\, \overline{x_j} = \int_{\mathbb{R}} (\sum_i x_i t^i)(\sum_j \overline{x_j}\, t^j)\, d\mu(t)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |\sum_i x_i t^i|^2\, d\mu(t) \geq 0$$

En utilisant les résultats du chapitre 4 concernant les prolongements auto-adjoints d'opérateurs symétriques, on peut en fait établir que cette condition nécessaire est aussi suffisante et ainsi :

(5.1.1) THEOREME. - *Une condition nécessaire et suffisante pour que la suite* (α_n) *soit une suite de moments sur* $\mathbb{R}$, *est que la matrice* $M = [\alpha_{i+j}]$ *soit de type positif.*

Preuve. - Supposons donc la matrice M de type positif et désignons par X le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ formé des suites $x = (x_i)$ à support fini, c'est-à-dire telles que $x_i = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices. L'application $\varphi : X \times X \to \mathbb{C}$ définie par

$$\varphi(x,y) = \sum_{i,j \geqslant o} \alpha_{i+j} x_i \overline{y_j}$$

est évidemment une forme sesquilinéaire sur X telle que de plus, $\varphi(x,x) \geqslant 0$, pour tout $x \in X$, grâce à l'hypothèse faite sur la matrice M. Ceci nous permet de définir une application $N : X \to \mathbb{R}^+$ en posant $N(x) = \varphi(x,x)^{1/2}$ et on obtient aisément l'inégalité suivante, analogue à celle de Cauchy-Schwarz :

$$|\varphi(x,y)| \leqslant N(x)N(y)$$

d'où l'on déduit que N est une semi-norme sur X. Désignons alors par X_o le sous-espace vectoriel de X formé des points x tels que $N(x) = 0$, et considérons l'espace quotient $\tilde{X} = X/_{X_o}$. En posant $\|\tilde{x}\| = N(x)$, où x est un représentant de la classe $\tilde{x}$, il est clair que l'on définit ainsi une norme $\|.\|$ sur l'espace $\tilde{X}$. De plus l'espace $H = \overline{\tilde{X}}$, adhérence de $\tilde{X}$ (pour la norme) dans son bidual $(\tilde{X})''$, est un espace de Banach. En fait, on peut même affirmer que H est un espace de Hilbert. En effet, on peut prolonger φ en une forme sesquilinéaire sur $\tilde{X}\times\tilde{X}$, notée $(.|.)$, en posant $(\tilde{x}|\tilde{y}) = \varphi(x,y)$ et on a encore :

$$|(\tilde{x}|\tilde{y})| \leqslant \|\tilde{x}\| \, \|\tilde{y}\|.$$

Ainsi la forme $(.|.)$ se prolonge par continuité à l'espace $H\times H$, et définit en fait un produit scalaire sur H, faisant de la norme $\|.\|$ une norme hilbertienne. Cela étant, désignons par T l'opérateur "shift" $X \to X$ qui, à toute suite $x = (x_i) \in X$, associe la suite $Tx = (y_i)$ telle que $y_o = 0$, $y_{i+1} = x_i$ pour $i \geqslant 1$. Pour x et $y \in X$, on a :

$$\varphi(Tx,y) = \sum_{i,j \geqslant o} \alpha_{i+j} (Tx)_i \overline{y_j} = \sum_{\substack{i \geqslant 1 \\ j \geqslant o}} \alpha_{i+j} \, x_{i-1} \overline{y_j}$$

$$= \sum_{i,j \geqslant o} \alpha_{i+j+1} \, x_i \overline{y_j} = \varphi(x,Ty)$$

En particulier, on obtient pour tout $x \in X$:

$$0 \leq \varphi(Tx,Tx) = \varphi(T^2x,x) \leq N(T^2x)N(x).$$

Il en résulte que si x appartient au sous-espace X_o, il en est de même pour la suite Tx. Ceci nous permet de définir un opérateur S sur l'espace $\tilde{X}$ selon :

$$S\tilde{x} = \widetilde{Tx}.$$

Il est clair que l'on a :

$$(S\tilde{x}|\tilde{y}) = \varphi(Tx,y) = \varphi(x,Ty) = (\tilde{x}|S\tilde{y})$$

et ainsi l'opérateur S, dont le domaine $D(S) = \tilde{X}$ est dense dans H, est un opérateur symétrique. Par ailleurs, l'application $U : X \to X$ définie par $Ux = \bar{x}$, où $\bar{x} = (\overline{x_i})$, est évidemment une application antilinéaire telle que $U^2 = I$ et $\varphi(Ux,Uy) = \overline{\varphi(x,y)}$. Comme le sous-espace X_o est stable par U, on peut prolonger U en une application $V : \tilde{X} \to \tilde{X}$ en posant $V\tilde{x} = \widetilde{Ux}$, puis prolonger V par continuité à l'espace H tout entier ; il est clair qu'on définit ainsi une conjugaison sur H telle que, de plus :

$$SV\tilde{x} = VS\tilde{x} \qquad \forall\tilde{x} \in D(S).$$

Il résulte alors du théorème (4.4.13), que l'opérateur symétrique S possède une extension auto-adjointe, notée S_1. Désignons par E la mesure spectrale sur $\mathbb{R}$ associée à l'opérateur S_1, et soit e la suite $(1,0,\dots,0,\dots)$ appartenant à $\tilde{X}$. Pour tout $n \geq 0$, la suite $T^n e$ est encore dans X et ainsi $S^n\tilde{e}$ appartient à $\tilde{X}$, pour tout $n \geq 0$, c'est-à-dire encore $\tilde{e} \in \bigcap_{n \geq o} D(S^n)$. Or, dire que $\tilde{e}$ appartient au domaine $D(S^n)$ signifie que l'application $t \to t^n$ est dans l'espace $L^2(E_{\tilde{e}})$ et on a donc :

$$\int_{\mathbb{R}} |t|^{2n} \, dE_{\tilde{e},\tilde{e}}(t) < +\infty \qquad \forall n \geq 0.$$

De plus : $(S^n \tilde{e}|\tilde{e}) = \int_{\mathbb{R}} t^n dE_{\tilde{e},\tilde{e}} \qquad \forall n \geq 0.$

Or $(S^n\tilde{e}|\tilde{e}) = \varphi(T^n e,e) = \alpha_n$.

Ainsi la mesure positive $\mu = E_{\tilde{e},\tilde{e}}$ admet la suite (α_n) pour suite de moments, et notre condition est bien suffisante. □

5.2 ETUDE DU CONVEXE M(α) DE SOLUTIONS. - Comme on l'a déjà noté dans l'introduction, $\mathbb{R}$ n'étant pas compact, il n'y a en général aucun résultat d'unicité puisque l'espace $\mathbb{C}[X]$ des polynômes ne permet pas de reconstituer l'espace $L^2(\mu)$. L'exemple suivant, dû à Stieltjes, fournit d'ailleurs une illustration très simple de ce fait.

Exemple. - On considère la suite (α_n) avec $\alpha_n = 4(4n+3)!$, et on définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f(t) = 0$ si $t < 0$ et $f(t) = \exp[-t^{1/4}]$ si $t \geq 0$. Alors la mesure $\nu_1 = f.dt$ est une mesure positive sur $\mathbb{R}$ admettant (α_n) pour suite de moments. En remarquant que l'on a :

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t^{1/4}} \sin(t^{1/4})dt = 0 \qquad \forall n \geq 0$$

on en déduit aisément que la mesure positive $\nu_2 = g.dt$, où $g(t) = \exp[-t^{1/4}]\,(1-\sin(t^{1/4}))1_{\mathbb{R}^+}(t)$, admet aussi (α_n) pour suite de moments, et pourtant les mesures ν_1 et ν_2 ne sont pas égales.

Ainsi, partant d'une suite (α_n) de nombres réels vérifiant la condition de (5.1.1), la question de savoir si la solution μ exhibée est unique (dans ce cas, on dit que le problème est *déterminé*), ou non (le problème est alors *indéterminé*), constitue un problème important et complexe que nous aborderons au paragraphe (5.3). Nous allons tout d'abord donner, dans le cas indéterminé, une description de l'ensemble de toutes les mesures qui sont solutions pour une même suite (α_n). On fixe donc une suite $\alpha = (\alpha_n)$ vérifiant la condition de (5.1.1) et on désigne par M(α) l'ensemble non vide des mesures positives μ sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\alpha_n = \int_{\mathbb{R}} t^n \, d\mu(t) \qquad \forall n \geqslant 0.$$

Il est clair déjà que $M(\alpha)$ est un ensemble convexe de mesures. Par ailleurs, désignons par $\mathscr{C}_T(\mathbb{R}) = \mathscr{C}_T$ l'espace vectoriel des fonctions continues tempérées $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour lesquelles il existe un polynôme P tel que $|f| \leqslant P$. On a évidemment $\mathscr{C}_T \subseteq L^2(\mu)$ pour chaque $\mu \in M(\alpha)$ et l'application $L_\mu : \mathscr{C}_T \to \mathbb{R}$ définie par $L_\mu(f) = \int f d\mu$ est une forme linéaire sur $\mathscr{C}_T$, donc un élément de l'espace $\mathscr{C}_T^*$, dual algébrique de $\mathscr{C}_T$. De plus, l'application $\mu \to L_\mu$ est injective et permet donc d'identifier le convexe $M(\alpha)$ à une partie convexe de l'espace $\mathscr{C}_T^*$. De manière plus précise, on a :

(5.2.1) <u>THEOREME</u>. - *L'ensemble* $M(\alpha)$ *des mesures solutions, muni de la topologie faible associée à l'espace* $\mathscr{C}_T$ *des fonctions continues tempérées, est un convexe compact métrisable.*

Preuve. - Fixons une fonction $f \in \mathscr{C}_T$; pour toute $\mu \in M(\alpha)$, on a :

$$\left|\int f d\mu\right| \leqslant \int |f| d\mu \leqslant \int P d\mu$$

où P est un polynôme tel que $|f| \leqslant P$. Or la valeur $\theta(P) = \int P d\mu$

est indépendante de μ et ne dépend que de la suite α choisie au départ. Ainsi, $M(\alpha)$ est déjà une partie faiblement bornée, donc faiblement relativement compacte de l'espace $\mathscr{C}_T^*$. Pour conclure, il suffit donc de voir que $M(\alpha)$ est fermé pour la topologie faible $\sigma(.,\mathscr{C}_T)$. Soit donc (μ_i) une suite généralisée de $M(\alpha)$ telle que $\mu_i \to L \in \mathscr{C}_T^*$ pour cette topologie faible. En particulier, si f est une fonction positive appartenant à l'espace $\mathscr{C}_o(\mathbb{R})$ des fonctions continues qui tendent vers zéro à l'infini, alors $f \in \mathscr{C}_T$ et on a :

$$L(f) = \lim_i \int f d\mu_i \geqslant 0.$$

Ainsi, L est une forme linéaire positive sur l'espace $\mathscr{C}_o(\mathbb{R})$, donc elle s'identifie, grâce au théorème de Riesz-Alexandroff, à une mesure positive λ sur $\mathbb{R}$ selon :

$$L(f) = \int f d\lambda \qquad \forall f \in \mathscr{C}_o(\mathbb{R}).$$

On va montrer que cette égalité est encore valable si f est choisie dans l'espace $\mathscr{C}_T$. On fixe $f \in \mathscr{C}_T$ et on considère une suite $\varphi_n \in \mathscr{K}(\mathbb{R})$, espace des fonctions continues à support compact, telle que $\varphi_n \uparrow \mathbb{1}$, $\varphi_n = 1$ sur $[-n,+n]$ et Supp $\varphi_n \subseteq [-n-1,n+1]$. Avec la propriété de Beppo-Lévi, on obtient :

$$\int |f| d\lambda = \lim_n \int |f|\, \varphi_n d\lambda = \lim_n\ L[|f|\, \varphi_n]$$

puisque $|f|\, \varphi_n \in \mathscr{K}(\mathbb{R})$. Compte tenu de la positivité de L et des inégalités $|f|\, \varphi_n \leqslant |f|$, on obtient :

$$\int |f|\, d\lambda \leqslant L[|f|]$$

et la fonction f est λ-intégrable. Remarquons que ceci prouve que la mesure λ admet des moments de tous ordres. Par ailleurs, fixons $g \in \mathscr{C}_T$, $g \geqslant 1$, telle que $\lim\limits_{|x| \to \infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} = 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc un entier N tel que, pour $|x| \geqslant N$, on ait : $|f(x)| \leqslant \varepsilon g(x)$.

Alors, pour tout $n \geqslant N$, on a aussi $|f(x)|\ [1-\varphi_n(x)] \leqslant \varepsilon\, g(x)$ si $|x| \geqslant n$ et $|f(x)|\ [1-\varphi_n(x)] = 0$ si $|x| < n$. On déduit de là les inégalités :

$$L[|f|(1-\varphi_n)] \leqslant \varepsilon\, L(g) \qquad \forall n \geqslant N$$

et ainsi $L(|f|) = \lim L(|f|\ \varphi_n) = \int |f| d\lambda$, de sorte que $L(f) = \int f d\lambda$ pour toute $f \geqslant 0$, donc aussi pour toute $f \in \mathscr{C}_T$. En particulier, pour tout $n \geqslant 0$, on a :

$$\int t^n d\lambda = L(t \to t^n) = \lim \int t^n d\mu_i = \alpha_n.$$

Ainsi, la mesure λ est élément du convexe $M(\alpha)$, ce qui suffit.

Reste à prouver la métrisabilité de $M(\alpha)$; or sur le compact $M(\alpha)$ la topologie faible associée à $\mathscr{C}_T$ coïncide avec la topologie étroite associée à $\mathscr{C}_o(\mathbb{R})$, qui est moins fine et séparée. Or cette dernière est métrisable puisque l'espace $C_o(\mathbb{R})$ est séparable, et tout est démontré. □

<u>Remarque</u> : Notons que l'on ne peut pas remplacer la topologie faible associée à $\mathscr{C}_T$ par celle associée à l'espace $\mathscr{P}$ des polynômes, puisque cette dernière n'induit pas sur le compact $M(\alpha)$ une topologie séparée.

Le résultat précédent incite à la détermination des points extrêmaux du compact $M(\alpha)$. Le résultat ci-dessous nous donne une caractérisation simple de ceux-ci :

(5.2.2) <u>THEOREME</u> (NAIMARK. 1943). - *Pour qu'une mesure* $\mu \in M(\alpha)$ *soit un point extrêmal du convexe compact métrisable* $M(\alpha)$ *il faut et il suffit que l'espace* $\mathscr{P}$ *des polynômes soit dense dans l'espace* $L^1(\mu)$.

Preuve. - Supposons tout d'abord que μ soit un point extrêmal de $M(\alpha)$. Grâce au théorème de Hahn-Banach, il suffit de prouver que si une fonction $f \in L^\infty(\mu)$ est telle que $\int fP d\mu = 0$, pour tout polynôme $P \in \mathscr{P}$, alors $f=0$ μ.p.p. . Fixons une telle fonction f ; on peut supposer que f est réelle et que l'on a $|f| < 1$ μ.p.p. et ainsi les fonctions $g = 1+f$ et $h = 1-f$ véfifient presque partout les inégalités $0 < g < 2$ et $0 < h < 2$, en particulier elles sont dans l'espace $L^1(\mu)$. On peut alors considérer les mesures positives sur $\mathbb{R}$ $\mu_1 = g.\mu$ et $\mu_2 = h.\mu$ qui vérifient :

$$\int_{\mathbb{R}} t^n d\mu_1 = \int_{\mathbb{R}} t^n(1+f(t))d\mu = \int_{\mathbb{R}} t^n d\mu = \alpha_n \qquad \forall n > 0.$$

De même on a : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} t^n d\mu_2 = \alpha_n \qquad \forall n > 0.$

Ainsi μ_1 et μ_2 sont éléments de $M(\alpha)$; or on a $\frac{1}{2}(\mu_1+\mu_2) = \mu$, et par extrêmalité de μ on en déduit l'égalité $\mu_1 = \mu_2$, ce qui implique $f=0$ μ.p.p. . Réciproquement, fixons une mesure $\mu \in M(\alpha)$ telle que $\overline{\mathscr{P}} = L^1(\mu)$, et supposons que l'on puisse décomposer μ sous la forme $\lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2$, avec $0 < \lambda < 1$, $\mu_i \in M(\alpha)$. Déjà, pour tout borélien A de $\mathbb{R}$ tel que $\mu(A) = 0$, on a $\mu_1(A) = \mu_2(A) = 0$, donc μ_1 et μ_2 sont absolument continues par rapport à μ. Grâce au théorème de Radon-Nikodym, on en déduit l'existence de deux fonctions f_1 et $f_2 \in L^1(\mu)$, qui sont d'ailleurs positives μ.p.p. et telles que :

$$\mu_1 = f_1.\mu \qquad \text{et} \qquad \mu_2 = f_2.\mu .$$

En remarquant que pour tout $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, on a :

$$\int_A d\mu = \int_A (\lambda f_1 + (1-\lambda) f_2) d\mu$$

on en déduit l'égalité $\lambda f_1 + (1-\lambda) f_2 = 1$ μ.p.p. et en particulier les fonctions f_1 et f_2 sont μ.p.p. bornées. Montrons maintenant que $\mu_1 = \mu_2$, ce qui suffira. Pour cela, on fixe $\varphi \in \mathscr{K}(\mathbb{R})$; φ étant μ-intégrable, il existe une suite $P_n \in \mathscr{P}$ telle que $P_n \to \varphi$ dans l'espace $L^1(\mu)$. Alors (P_n) converge aussi vers φ dans les espaces $L^1(\mu_1)$ et $L^1(\mu_2)$ puisque l'on a :

$$\int_{\mathbb{R}} |P_n - \varphi| d\mu_1 = \int_{\mathbb{R}} | P_n - \varphi | f_1 d\mu < M \| P_n - \varphi \|_{L^1(\mu)}$$

et en particulier $\int \varphi \, d\mu_1 = \lim \int P_n d\mu_1$.

Or les mesures μ_1 et μ_2 étant dans $M(\alpha)$, elles coïncident sur les polynômes et ainsi :

$$\int \varphi \, d\mu_1 = \int \varphi \, d\mu_2 \qquad \forall \varphi \in \mathscr{K}(\mathbb{R})$$

ce qui suffit à assurer l'égalité $\mu_1 = \mu_2$. □

<u>Remarque</u> : On a déjà noté que pour une mesure $\mu \in M(\alpha)$, on a les inclusions :

$$\mathscr{P} \subseteq L^2(\mu) \subseteq L^1(\mu)$$

et il est alors naturel de se demander quelles sont les mesures $\mu \in M(\alpha)$ telles que $\mathscr{P}$ soit dense dans $L^2(\mu)$. Ces mesures, appelées N-extrêmales, sont bien sûr des points extrêmaux de $M(\alpha)$, d'après ce qui précède, mais on n'obtient pas ainsi tous les points extrêmaux. On donnera, au paragraphe (5.3) une caractérisation de ces mesures N-extrêmales.

5.3 LE PROBLEME D'UNICITE PAR LA METHODE DES OPERATEURS.

La transformée de Stieltjes. - A toute mesure positive et bornée μ sur $\mathbb{R}$, on associe sa transformée de Stieltjes définie par :

$$I_\mu(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(t)}{z-t} \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Il est clair qu'on obtient ainsi une fonction I_μ holomorphe sur l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Par ailleurs, on démontre aussi sans difficulté que l'on a :

$$- \ I_\mu(\bar{z}) = \overline{I_\mu(z)}$$

$$- \ \mathscr{I}m\, I_\mu(z) < 0 \quad \text{dès que} \quad \mathscr{I}m\, z > 0.$$

Enfin, en procédant comme dans la preuve de (4.5.4), par application du théorème de Lebesgue, on établit les formules d'inversions de Stieltjes-Perron :

(5.3.1) LEMME :

$$\lim_{\beta \downarrow 0} \ i\beta \ I_\mu(a+i\beta) = \mu(\{a\})$$

$$\lim_{\beta \downarrow 0} \frac{1}{2i\pi} \int_a^b [I_\mu(\alpha-i\beta) - I_\mu(\alpha+i\beta)]d\alpha =$$

$$= \mu(]a,b[) + \frac{1}{2}\mu(\{a\}) + \frac{1}{2}\mu(\{b\}).$$

On déduit de là qu'une mesure positive et bornée sur $\mathbb{R}$ est complètement déterminée par la donnée de sa transformée de Stieltjes, d'où l'intérêt de ces fonctions I_μ lorsqu'on étudie de telles mesures.

Cet intérêt est d'autant plus grand en ce qui nous concerne que, partant de la formule :

$$\frac{1}{z-t} = \sum_{k=o}^{n} \frac{t^k}{z^{k+1}} + \frac{t^{n+1}}{z^{n+1}(z-t)}$$

on obtient immédiatement :

$$I_\mu(z) = \sum_{k=o}^{n} \frac{\alpha_k}{z^{k+1}} + \frac{1}{z^{n+1}} \int_{\mathbb{R}} \frac{t^{n+1}}{z-t}\, d\mu(t)$$

et ainsi les moments de la mesure μ interviennent dans le développement asymptotique de $I_\mu(z)$.

<u>L'espace de Hilbert fondamental $H = H(\alpha)$ et les mesures quasi-spectrales E^μ</u>. - Avant d'introduire les outils nécessaires à l'étude de la théorie, il faut préciser que désormais nous considérerons une suite $\alpha = (\alpha_n)$ telle que la matrice $M = [\alpha_{i+j}]$ associée soit de type *défini positif*, c'est-à-dire de type positif avec en plus la condition :

$$\sum_{i,j} x_i \overline{x_j} \ \alpha_{i+j} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_i = 0 \qquad \forall i.$$

En effet, dire que la matrice M de type positif ne vérifie pas cette condition supplémentaire signifie exactement que la mesure μ solution du problème associé, est à support fini. Pour le voir, remarquons déjà que si le support de μ est réduit à un nombre fini de points $a_1, \ldots, a_n$, on peut construire un polynôme P non nul dont les racines sont ces points a_i, et qui est donc nul dans l'espace $L^2(\mu)$. Ainsi on a :

$$\|P\|^2_{L^2(\mu)} = 0 = \sum_{i,j} \beta_i \overline{\beta_j} \ \alpha_{i+j}$$

où les β_i sont les coefficients du polynôme P, et la matrice M n'est pas de type défini positif. Réciproquement, s'il existe un nombre fini de complexes β_i, non tous nuls, tels que $\sum_{i,j} \beta_i \overline{\beta_j} \alpha_{i+j} = 0$, alors le polynôme $P = \sum_i \beta_i X^i$ est nul dans l'espace $L^2(\mu)$, ce qui entraîne évidemment que la masse de μ est concentrée en un nombre fini de points de $\mathbb{R}$. Par ailleurs, comme on peut établir que les mesures solutions μ à support fini correspondent au cas où le problème est déterminé, on peut, sans restreindre en rien la généralité de la théorie, imposer cette condition supplémentaire à la matrice M.

Cela étant, on fixe donc une suite α telle que la matrice M associée soit de type défini positif. On peut alors placer sur l'espace $\mathscr{P} = \mathbb{C}[X]$ une norme hilbertienne associée au produit scalaire :

$$(P|Q) = \sum_{i,j} \alpha_{i+j} p_i \overline{q_j} \qquad \text{avec} \qquad P = \sum p_i X^i \text{ et } Q = \sum q_j X^j .$$

Cette norme sur $\mathscr{P}$ est évidemment celle induite par l'espace $L^2(\mu)$, pour toute solution $\mu \in M(\alpha)$. En utilisant le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, on peut alors introduire le système orthonormal (P_k), $k \geq 0$, et la condition sur la matrice M assure qu'on obtient ainsi une infinité de polynômes, que l'on peut choisir de plus tels que, pour chaque k, P_k soit un polynôme à coefficients réels, de degré égal à k, et dont le coefficient du terme de plus haut degré soit strictement positif. Désignons alors par $H = H(\alpha)$ l'espace obtenu en complétant abstraitement l'espace $\mathscr{P}$. Il est clair que le système (P_k) constitue alors une base orthonormale de H, et ainsi H s'identifie à l'espace $\ell^2(\mathbb{N})$ dans la représentation $h = \sum_k h_k P_k$ avec $h_k = (h|P_k)$. De plus, on peut considérer aussi que, pour chaque $\mu \in M(\alpha)$, H s'identifie à un sous-espace fermé de $L^2(\mu)$ qui n'est autre que l'adhérence $\overline{\mathscr{P}}$ de $\mathscr{P}$ dans cet espace $L^2(\mu)$.

Par ailleurs, sur chaque espace $L^2(\mu)$, on peut considérer l'opérateur $T = T^\mu$ de multiplication par X dont le domaine est formé des fonctions $f \in L^2(\mu)$ telles que $Xf \in L^2(\mu)$. Il est clair que cet opérateur est symétrique et il est assez facile de voir qu'il est même auto-adjoint. En effet, pour cela, il suffit qu'on ait l'inclusion $D(T^*) \subseteq D(T)$; or si $f \in D(T^*)$, il existe h ($= T^*f$) $\in L^2(\mu)$ telle que, pour toute $g \in D(T)$, on ait :

$$\int_{\mathbb{R}} tg(t)\overline{f(t)}d\mu(t) = \int_{\mathbb{R}} g(t)\overline{h(t)}d\mu(t).$$

Or, comme la mesure μ possède des moments, pour tout borélien A de $\mathbb{R}$, la fonction 1_A appartient à $D(T)$ et ainsi :

$$\forall A \in B(\mathbb{R}), \qquad \int_A \overline{tf(t)}d\mu(t) = \int_A \overline{h(t)}d\mu(t)$$

on en déduit que $h(t) = tf(t)$ μ.p.p., donc f appartient à $D(T)$.

Cet opérateur auto-adjoint T^μ possède alors une résolution spectrale $\widetilde{E}^\mu$ sur $\mathbb{R}$, d'ailleurs définie selon :

$$\widetilde{E}^\mu(A)f = 1_A f \qquad \forall A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}), \ \forall f \in L^2(\mu).$$

Désignons alors par Π_H^μ l'opérateur de projection orthogonal $L^2(\mu) \to H$ défini par :

$$\Pi_H^\mu(f) = \sum_0^\infty (f|P_k)P_k.$$

Comme dans (3.1.16) exercice 2, on en déduit l'existence d'une mesure quasi-spectrale E^μ : $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \to L(H)$ où l'on pose $E^\mu(A)h = \Pi_H^\mu(1_A h)$, pour $h \in H$. On déduit d'ailleurs de là, que pour tous polynômes P et $Q \in \mathscr{P}$, on a :

$$(E^\mu(A)P|Q) = (\Pi_H^\mu(1_A P)|Q) = (1_A P|Q) = \int_A PQ\, d\mu.$$

Inversement, partant des égalités $(E^\mu(A)P|Q) = \int_A PQd\mu$, pour $P,Q \in \mathscr{P}$, on obtient aisément, en décomposant h sur la base orthonormale (P_k), les égalités :

$$E^\mu(A)h = \Pi_H^\mu(1_A h) \qquad \forall h \in H.$$

Cela étant, en reprenant l'énoncé de (3.1.16) exercice 2, on obtient :

(5.3.2) PROPOSITION. - *Pour que la mesure quasi-spectrale* E^{μ} *soit spectrale, il faut et il suffit que* $\mathscr{P}$ *soit dense dans* $L^2(\mu)$, *c'est-à-dire que* μ *soit* N-*extrêmale.*

Le problème de l'unicité par la méthode des opérateurs.

Nous sommes maintenant en mesure de donner une condition nécessaire et suffisante pour que le problème des moments associé à une suite (α_n) soit déterminé. Celle-ci s'exprime par l'intermédiaire des polynômes orthonormés P_k que l'on vient d'introduire, et auparavant, il nous faut noter :

(5.3.3) PROPOSITION. - *Les polynômes orthonormaux* P_n *vérifient la relation fondamentale :*

$$XP_n = b_n P_{n+1} + a_n P_n + b_{n-1} P_{n-1}$$

où $b_{-1} = 0$, $b_n = (XP_n | P_{n+1})$, $a_n = (XP_n, P_n)$, *le produit scalaire sur* $\mathscr{P}$ *étant évidemment celui induit par l'espace* $L^2(\mu)$, *pour* $\mu \in M(\alpha)$.

Preuve. - Comme le polynôme XP_{n+1} est de degré $(n+2)$, il se décompose sur la base (P_k) selon :

$$XP_{n+1} = aP_{n+2} + bP_{n+1} + cP_n + \sum_{k=o}^{n-1} \beta_k P_k .$$

Or, pour tout $k < n-1$, on a $\beta_k = (XP_{n+1} | P_k) = (P_{n+1} | XP_k)$. Comme $d^\circ XP_k < n$ et par orthogonalité des P_k, on obtient :

$$\beta_k = 0 \qquad k=0,\dots,n-1.$$

De même, $a = (XP_{n+1} | P_{n+2})$, $b = (XP_{n+1} | P_{n+1})$,
$c = (XP_{n+1} | P_n) = (P_{n+1} | XP_n) = (XP_n | P_{n+1})$, ce qui fournit le résultat. □

Remarque : Notons que pour $n > 0$, on a $b_n > 0$. En effet, le polynôme P_n se décompose sous la forme $\sum_{k=o}^{n} p_k X^k$ avec $p_n > 0$, et par des arguments d'orthogonalité, on obtient encore :

$$b_n = (XP_n | P_{n+1}) = p_n (X^{n+1} | P_{n+1}) = \frac{p_n}{p_{n+1}} (P_{n+1} | P_{n+1}) .$$

Ainsi $\quad b_n = \frac{P_n}{P_{n+1}} > 0.$

Considérons à nouveau l'opérateur T de multiplication par X, considéré cette fois comme opérant de l'espace $\mathscr{P}$ dans lui-même ; la relation précédente nous permet de représenter matriciellement cet opérateur sur la base orthonormale (P_n) par la matrice, dite de Jacobi :

$$J = \begin{bmatrix} a_o & b_o & 0 & 0 \ldots\ldots \\ b_o & a_1 & b_1 & 0 \ldots\ldots \\ 0 & b_1 & a_2 & b_2 \ldots\ldots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

On a déjà noté plus haut que cet opérateur T est symétrique, mais considéré sur le domaine $\mathscr{P}$, il n'est plus fermé. Toutefois, il est fermable, en tant qu'opérateur non borné sur H, puisque son domaine $D(T) = \mathscr{P}$ est dense dans H et que T^* est une extension de T. Désignons encore par T sa fermeture (dans H) ; les résultats acquis au chapitre 4 nous permettent d'affirmer que le domaine de T est l'espace des fonctions $f \in H$ pour lesquelles il existe une suite $Q_n \in \mathscr{P}$ telle que $f = \lim Q_n$ et $Xf = \lim XQ_n$ (au sens de la norme de H), et on a $Tf = Xf$. On vient donc de mettre en évidence un opérateur non borné T sur H, à domaine dense, et qui est symétrique et fermé. La théorie générale exposée au chapitre 4 nous invite donc à déterminer ses indices de défaut, et plus généralement les noyaux $\mathrm{Ker}(\lambda - T^*)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Les résultats obtenus sont résumés dans le théorème suivant :

(5.3.4) <u>THEOREME</u> (STONE - 1932). - *L'opérateur symétrique fermé* T *sur* H *admet comme indices de défaut le couple* (0,0) *ou* (1,1).

a) Dans le premier cas, l'opérateur T *est auto-adjoint et* $\Sigma |P_k(\lambda)|^2 = +\infty$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, *et tout* λ *réel qui n'est pas valeur propre de* T.

b) Dans le deuxième cas, T *n'est pas auto-adjoint, mais admet des prolongements auto-adjoints ; de plus*
$\Sigma |P_k(\lambda)|^2 < +\infty \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}$.

Preuve. – Rappelons que l'on désigne par $N(.)$ la fonction définie pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ par $N(\lambda) = \dim \operatorname{Ker}(\lambda - T^*)$, et que cette fonction N est constante sur chacun des demi-plans ouverts Π_+ et Π_-. Fixons donc $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, et considérons une fonction $f \in D(T^*)$ telle que $T^* f = \lambda f$. En décomposant f sur la base orthonormale (P_k) selon $f = \Sigma\, \xi_k P_k$, on obtient :

$$(T^* f | P_k) = \lambda (f | P_k) = \lambda \xi_k$$

or $$(T^* f | P_k) = (f | T P_k) = (f | X P_k).$$

En utilisant la relation fondamentale vue en (5.3.3), on obtient :

$$\lambda \xi_k = b_k\, \xi_{k+1} + a_k\, \xi_k + b_{k-1}\, \xi_{k-1} \qquad \forall k \geqslant 0.$$

Comme on a $b_n > 0$, pour $n \geqslant 0$, on voit que la donnée de ξ_o détermine les autres coefficients ξ_k qui sont tous proportionnels à ξ_o, et ainsi $N(\lambda) \leqslant 1$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. De plus, si on choisit $\xi_o = P_o(\lambda) = p_o$, où p_o est une constante > 0, on a nécessairement $\xi_n = P_n(\lambda)$. Donc si une fonction f non nulle appartient à $\operatorname{Ker}(\lambda - T^*)$, elle est nécessairement de la forme $\frac{\xi_o}{p_o}\ \Sigma\, P_k(\lambda) P_k$, et on a $\Sigma |P_k(\lambda)|^2 < +\infty$.

En résumé :

- ou bien $\Sigma |P_k(\lambda)|^2 = +\infty$, alors $\operatorname{Ker}(\lambda - T^*) = \{0\}$ et $N(\lambda) = 0$.
- ou bien $\Sigma |P_k(\lambda)|^2 < +\infty$, alors la fonction $f_\lambda = \Sigma\, P_k(\lambda) P_k$ appartient à $\operatorname{Ker}(\lambda - T^*)$ et $N(\lambda) = 1$. Comme les polynômes P_k sont à coefficients réels $\Sigma |P_k(\overline{\lambda})|^2 = \Sigma\, |P_k(\lambda)|^2$, et on a aussi $N(\overline{\lambda}) = 1$.

Finalement les restrictions de N à chacun des demi-plans Π_+ et Π_- coïncident et valent soit 0, soit 1, ce qui prouve déjà la première assertion du théorème. Pour terminer la preuve de a), il suffit d'utiliser (4.4.4), puis de voir que si $\lambda \in \mathbb{R}$ n'est pas valeur propre de $T = T^*$, alors $\operatorname{Ker}(\lambda - T^*) = \{0\}$ donc $\Sigma |P_k(\lambda)|^2 = +\infty$. Pour montrer, dans le second cas, que T possède des extensions autoadjointes, il suffit d'utiliser le théorème (4.4.11). Reste à prouver que la condition $\Sigma|P_k(\lambda)|^2 < +\infty$, pour $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, reste encore vraie pour λ réel. Or les polynômes P_k ont toutes leurs racines réelles donc admettent une décomposition en facteurs premiers de la forme $p_k \prod_1^k (X-a_j)$, où $a_j \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $\lambda = a+ib \in \mathbb{C}$, on a :

$$|P_k(\lambda)| = p_k \prod_1^k |(a-a_j) + ib| \geq p_k \prod_1^k |a-a_j| = |P_k(a)|$$

ce qui suffit. □

<u>Remarque</u> : Dans le cas où l'opérateur T est auto-adjoint, on a vu que la série $\Sigma|P_k(\lambda)|^2$ diverge pour tout λ réel qui n'est pas valeur propre de T. Comme l'espace H est séparable, T possède au plus une famille dénombrable de valeurs propres, et ainsi lorsque la série $\Sigma|P_k(\lambda)|^2$ n'est pas partout convergente dans $\mathbb{C}$, elle diverge pour tout λ n'appartenant pas à une partie de $\mathbb{R}$ au plus dénombrable.

Il convient maintenant de tirer les conclusions du théorème de Stone, pour le problème qui nous intéresse, à savoir l'unicité ou la non-unicité de la mesure μ solution du problème des moments associé à la suite $\alpha = (\alpha_n)$. Déjà, en examinant le premier cas du théorème précédent, on obtient :

(5.3.5) <u>THEOREME.</u> - *Lorsque* $\Sigma|P_k(\lambda)|^2 = +\infty$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ *(ou pour un seul* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$*), l'opérateur* T *est auto-adjoint. Si* E *désigne la mesure spectrale associée à* T, *alors le problème des moments admet une solution unique qui est la mesure* $\mu = E_{\mathbb{1}} = E_{\mathbb{1},\mathbb{1}}$. *De plus,* $\mathcal{P}$ *est alors dense dans* $L^2(\mu)$.

Preuve. - Soit donc E la mesure spectrale canonique de l'opérateur auto-adjoint T ; il est clair que la mesure positive et bornée $\mu = E_{\mathbb{1}}$ est solution du problème des moments, puisque l'on a, pour tout $k \geq 0$:

$$\int_{\mathbb{R}} t^k dE_{\mathbb{1}}(t) = (T^k \mathbb{1} \mid \mathbb{1}) = (X^k \mid \mathbb{1}) = \alpha_k$$

par définition du produit scalaire sur $\mathscr{P}$. Montrons maintenant que cette solution μ est unique. Or, tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est dans le résolvant $\rho(T)$ de T, et pour un tel λ on a :

$$R(\lambda,T) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dE(t)}{\lambda-t}$$

c'est-à-dire encore $(R(\lambda,T)\mathbb{1} \mid \mathbb{1}) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(t)}{\lambda-t}$. Or $R(\lambda,T)$ opère de H sur D(T), donc la fonction $f_\lambda = R(\lambda,T)\mathbb{1}$ appartient à D(T) et on a $(\lambda-T)f_\lambda = \mathbb{1}$ dans H, d'où $(\lambda-X)f_\lambda = \mathbb{1}$ dans tout espace $L^2(\nu)$, pour $\nu \in M(\alpha)$. On déduit aisément de là :

$$(f_\lambda \mid \mathbb{1}) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(t)}{\lambda-t} = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\nu(t)}{\lambda-t} \qquad \forall\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Ainsi, les mesures μ et ν ont même transformée de Stieltjes, donc elles coïncident. Pour terminer, prouvons que dans ce cas, $\mathscr{P}$ est dense dans $L^2(\mu)$, donc en fait $H = L^2(\mu)$. Considérons pour cela une fonction $f \in L^2(\mu)$, orthogonale au sous-espace $\mathscr{P}$, et montrons que $f=0$ μ.p.p. . Rappelons que l'opérateur non borné f(T) a pour domaine l'ensemble des fonctions $g \in H$ telles que $\int |f|^2 \, dE_g < +\infty$. Ainsi la fonction $\mathbb{1}$ appartient à D[f(T)], et pour tout $n \geq 0$, on a :

$$(f(T)\mathbb{1} \mid T^n\mathbb{1}) = \int f(t)t^n d\mu(t) = (f \mid X^n) = 0.$$

Donc la fonction $f(T)\mathbb{1}$, qui est élément de H, est orthogonale à $\mathscr{P}$, ce qui implique $f(T)\mathbb{1} = 0$. Or on a : $\|f(T)\mathbb{1}\| = \|f\|_{L^2(\mu)}$.
Donc $f=0$ dans $L^2(\mu)$, ce qui suffit. □

Si on s'intéresse maintenant au second cas du théorème (5.3.4), lorsque $\Sigma|P_k(\lambda)|^2 < +\infty$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on sait déjà que l'opérateur T n'est pas auto-adjoint mais qu'il admet des prolongements auto-adjoints. En utilisant les résultats obtenus au chapitre 4, et en particulier le théorème (4.4.11), on peut alors affirmer que toutes les extensions auto-adjointes de T s'obtiennent à partir de toutes les isométries surjectives de D_+ sur D_-, où $D_+ = \mathrm{Ker}(T^*-i)$ et $D_- = \mathrm{Ker}(T^*+i)$. Or, dans notre cas, $\dim D_+ = \dim D_- = 1$, et on a vu que les fonctions f_i et f_{-i} $(= \overline{f_i})$, définies par $f_i = \Sigma\, P_k(i)P_k$, engendrent respectivement D_+ et D_-. Ainsi, toutes les isométries surjectives de D_+ sur D_- sont en fait déterminées par la donnée d'une constante θ telle que $|\theta| = 1$, selon $J_\theta(f_i) = \theta f_{-i}$. De plus, l'extension auto-adjointe de T correspondante, notée T_θ, est caractérisée par son domaine :

$$D(T_\theta) = D(T) \oplus D_\theta$$

où D_θ est le sous-espace de $D_+ \oplus D_-$ identifié au graphe de J_θ. Ainsi on a :

$$D_\theta = \mathbb{C}\, G_\theta \quad \text{avec} \quad G_\theta = f_i + \theta f_{-i}.$$

Enfin, T_θ est la restriction de T^* au sous-espace $D(T_\theta)$, ce qui implique en particulier :

$$T_\theta G_\theta = T^* G_\theta = i f_i - i\theta f_{-i}.$$

Chacune de ces extensions auto-adjointes T_θ de T possède une résolution spectrale, notée E_θ, et on peut alors établir :

(5.3.6) THEOREME. - *Lorsque* $\Sigma |P_k(\lambda)|^2 < +\infty$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}$, *l'opérateur* T *n'est pas autoadjoint, mais il possède une infinité d'extensions auto-adjointes* T_θ, *indexées par le tore* $|\theta| = 1$. *Le problème des moments possède alors une infinité de solutions, parmi lesquelles on trouve les mesures* $\nu_\theta = (E_\theta(.)\mathbb{1} \,|\, \mathbb{1})$, *associées aux mesures spectrales* E_θ *des* T_θ. *Ces mesures sont N-extrêmales, c'est-à-dire que* $\mathcal{P}$ *est dense dans chaque espace* $L^2(\nu_\theta)$.

Preuve. - Il est déjà facile de voir que chaque mesure positive et bornée ν_θ est solution du problème des moments. En effet, pour tout $n \geq 0$, la fonction $T^n \mathbb{1} = X^n$ est élément de D(T) donc de $D(T_\theta)$. De plus, la restriction de T_θ à D(T) n'est autre que T, si bien que $T_\theta^n \mathbb{1} = X^n$. On en déduit :

$$(T_\theta^n \mathbb{1} \,|\, \mathbb{1}) = (X^n \,|\, \mathbb{1}) = \alpha_n.$$

Par ailleurs, on a aussi :

$$(T_\theta^n \mathbb{1} \,|\, \mathbb{1}) = \int_{\mathbb{R}} t^n d\nu_\theta(t)$$

ce qui suffit. La densité de $\mathcal{P}$ dans l'espace $L^2(\nu_\theta)$, s'obtient comme dans la preuve de (5.3.5). Il reste donc seulement à prouver que ces solutions sont toutes distinctes. Pour cela, notons que la propriété d'auto-adjonction de T_θ assure que l'on a $i \in \rho(T_\theta)$, donc, on peut considérer $R(i,T_\theta) : H \to D(T_\theta)$. En particulier, la fonction $R(i,T_\theta)\mathbb{1}$ appartient au sous-espace $D(T_\theta)$ donc se décompose sous la forme :

$$R(i,T_\theta)\mathbb{1} = \varphi + c\, G_\theta$$

avec $\varphi \in D(T)$ et $c \in \mathbb{C}$. On a donc :

$$(i-T_\theta)(\varphi + c\, G_\theta) = \mathbb{1}\,.$$

De plus, $T_\theta\, \varphi = T\varphi = X\varphi$, et en utilisant l'expression de la fonction $T_\theta\, G_\theta$, on obtient finalement :

$$(i-X)\varphi + 2ic\, \theta f_{-i} = \mathbb{1}$$

soit encore :

$$((i-X)\varphi \mid f_{-i}) + (2ic\, \theta f_{-i} \mid f_{-i}) = (\mathbb{1} \mid f_{-i})$$

or $\quad ((i-X)\varphi \mid f_{-i}) = ((i-T)\varphi \mid f_{-i}) = -(\varphi \mid (i+T^*)f_{-i}) = 0.$

Par ailleurs $(f_{-i} \mid f_{-i}) = \Sigma\, |P_k(-i)|^2 = \Sigma\, |P_k(i)|^2$.

Enfin :

$$(\mathbb{1} \mid f_{-i}) = \frac{1}{P_\circ}\,(P_\circ \mid \sum_{k>0} P_k(-i)P_k) = 1$$

si bien que φ et c sont déterminées par les égalités suivantes, où l'on a posé $\Delta^2 = \Sigma\, |P_k(i)|^2$:

$$\begin{cases} (i-X)\,\varphi = 1 - \dfrac{1}{\Delta^2}\, f_{-i} \\[2mm] c = -\dfrac{i\bar\theta}{2\Delta^2} \end{cases}$$

et en particulier on peut noter que φ est indépendante de θ. De tout ceci, on déduit que l'on a :

$$\begin{aligned} I_{\nu_\theta}(i) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{d_{\nu_\theta}(t)}{i-t} = (R(i,T_\theta)\mathbb{1} \mid \mathbb{1}) \\ &= (\varphi \mid \mathbb{1}) + c(G_\theta \mid \mathbb{1}) \\ &= (\varphi \mid \mathbb{1}) - i\, \frac{1+\bar\theta}{2\Delta^2} \end{aligned}$$

et ainsi, les transformées de Stieltjes des mesures ν_θ, calculées au point i, sont toutes distinctes, ce qui implique que les mesures ν_θ sont toutes distinctes, et on est bien dans le cas d'indétermination. □

Remarque : On peut même préciser, grâce à ce qui précède, que ces valeurs $I_{\nu_\theta}(i)$ décrivent, lorsque θ décrit le tore, le pourtour Γ d'un disque de centre ω et de rayon R avec :

$$\omega = (\varphi|\Pi) - \frac{i}{2\Delta^2} \quad ; \quad R = \frac{1}{2\Delta^2} .$$

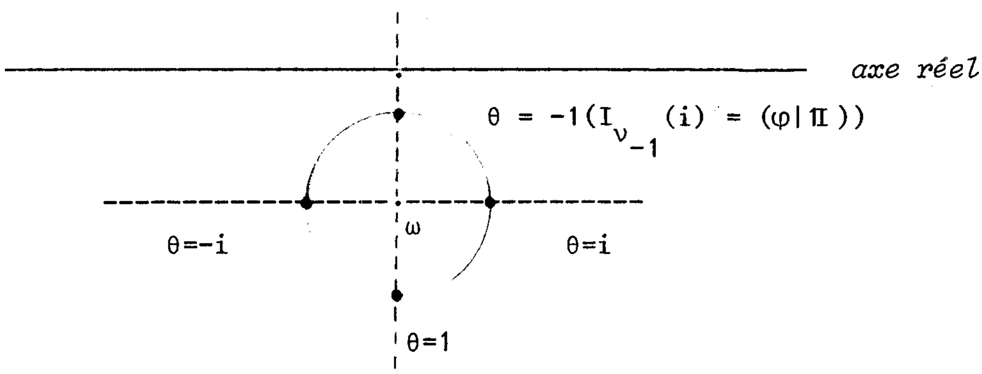
On peut remarquer aussi que ce disque est tout entier contenu dans le demi-plan Π_- puisque l'on a :

$$I_{\nu_\theta}(i) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\nu_\theta(t)}{i-t} = -\int_{\mathbb{R}} \frac{i+t}{1+t^2}\, d\nu_\theta(t)$$

et donc $\mathscr{I}m\,[I_{\nu_\theta}(i)] < 0$. En revenant à l'expression

$$I_{\nu_\theta}(i) = (\varphi|\Pi) - i\,\frac{1+\bar{\theta}}{2\Delta^2}$$

on peut d'ailleurs localiser sur le cercle Γ les valeurs de $I_{\nu_\theta}(i)$ correspondant aux valeurs particulières $\theta = 1, -1, i, -i$



Ainsi, pour tout point ξ du cercle frontière $\Gamma(i)$, il existe une mesure N-extrêmale ν_θ telle que $\xi = I_{\nu_\theta}(i)$. Maintenant, si ξ est un point du disque $D(i)$, on peut décomposer ξ sous la forme $\lambda z_1 + (1-\lambda) z_2$ avec $0 < \lambda < 1$, où z_1 et z_2 appartiennent à $\Gamma(i)$, donc sont associés à des mesures N-extrêmales ν_{θ_1} et ν_{θ_2}. On déduit de là que $\xi = I_\mu(i)$ où μ est la mesure $\lambda\nu_{\theta_1} + (1-\lambda)\nu_{\theta_2}$, donc est une mesure solution. Ainsi, tout point du disque $D(i)$ est la transformée de Stieltjes, calculée au point i, d'une mesure $\mu \in M(\alpha)$. Ceci nous amène à localiser toutes les transformées de Stieltjes $I_\mu(i)$, lorsque μ décrit $M(\alpha)$, ou même, de manière plus générale, les transformées de Stieltjes $I_\mu(z)$, pour toute mesure $\mu \in M(\alpha)$, et tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Les résultats obtenus sont résumés dans le théorème suivant :

(5.3.7) THEOREME. - *Pour tout* $z = a + ib$, $b > 0$, *la transformée de Stieltjes* $I_\mu(z)$ *décrit, lorsque* μ *décrit le convexe compact* $M(\alpha)$ *des solutions, l'ensemble des points d'un disque fermé* $D(z)$ *de centre :*

$$\omega(z) = \frac{1}{2ib\ \Delta^2(z)} \left[1 + 2ib \sum_{k \geq 1} \overline{P_k(z)Q_k(z)}\right]$$

et de rayon $R(z) = \dfrac{1}{2b\ \Delta^2(z)}$, *où l'on a posé :*

$$\Delta^2(z) = \sum_{k=o}^{\infty} |P_k(z)|^2$$

et où Q_k *est la suite des polynômes :*

$$Q_k(z) = \int \frac{P_k(z)-P_k(t)}{z-t}\, d\mu(t)$$

d'ailleurs indépendants de la mesure μ *choisie dans* $M(\alpha)$.

Preuve. - Commençons déjà par localiser la valeur $I_\mu(i)$ pour une mesure solution $\mu \in M(\alpha)$, et pour cela, revenons à l'expression de la fonction φ introduite dans la preuve de (5.3.6). On a :

$$(i-X)\varphi = 1 - \frac{1}{\Delta^2} f_{-i}.$$

D'où on déduit :

$$(\varphi|\Pi) = \int \frac{d\mu(t)}{i-t} - \frac{1}{\Delta^2} \int \frac{\overline{f_i}}{i-t}\, d\mu(t).$$

Alors $I_\mu(i) - \omega = (\varphi|\Pi) - \omega + \frac{1}{\Delta^2}(\frac{1}{i-t}\ |f_i)$

$$= \frac{i}{2\Delta^2} + \frac{1}{\Delta^2}\left(\frac{1}{i-t} \mid f_i\right) = \frac{1}{2i\Delta^2}\left(\frac{i+t}{i-t} \mid f_i\right)$$

puisque $(\mathbb{1} \mid f_i) = 1$. Le but est d'évaluer la quantité $|I_\mu(i)-\omega|^2$ et pour cela on considère la projection $h = h_\mu$ de la fonction $\frac{i+t}{i-t} \in L^2(\mu)$ sur le sous-espace H.

Comme la fonction f_i appartient à H, on a évidemment

$$\left(\frac{i+t}{i-t} \mid f_i\right) = (h \mid f_i).$$

De plus, on peut décomposer h sous la forme $h = \tilde{h} + rf_i$ où $\tilde{h} \perp f_i$ et ainsi :

$$\left(\frac{i+t}{i-t} \mid f_i\right) = r\|f_i\|^2 = r\,\Delta^2.$$

On déduit de là que l'on a :

$$(*) \qquad I_\mu(i) - \omega = \frac{r}{2i}$$

et finalement, tout revient à calculer la valeur de r $(=r_\mu)$.
Or, on a évidemment $\|h\|^2 = \|\tilde{h}\|^2 + r^2\,\Delta^2$, soit encore :

$$r_\mu^2 = \frac{1}{\Delta^2}\left[\|h_\mu\|^2 - \|\tilde{h}_\mu\|^2\right].$$

Nous allons montrer qu'en fait la fonction $\tilde{h}$ ne dépend pas de la mesure μ choisie dans $M(\alpha)$ (bien que h en dépende). Pour cela, notons déjà que pour toute $g \in D(T)$, on a :

$$((\bar{i}-T)g \mid h) = \left((\bar{i}-X)g \mid \frac{i+t}{i-t}\right) = \int g(t)(\bar{i}+t)d\mu(t) = (g \mid i+t).$$

Ainsi h appartient à $D(T^*)$ et de plus $(i-T^*)h = i+t$. Si ν est une autre mesure solution, de l'égalité :

$$(i-T^*)(h_\mu - h_\nu) = 0$$

on déduit :
$$(i-T^*)(\tilde{h}_\mu - \tilde{h}_\nu) = 0.$$

Alors $\tilde{h}_\mu - \tilde{h}_\nu \in \mathrm{Ker}(i-T^*) = \mathbb{C}\, f_i$, et comme par hypothèse on a $(\tilde{h}_\mu - \tilde{h}_\nu) \perp f_i$, il en résulte que $\tilde{h}_\mu = \tilde{h}_\nu$. Ainsi, pour calculer $\tilde{h}$, on peut choisir pour μ une mesure solution de la forme ν_θ (avec les notations de (5.3.6). On a vu que dans ce cas, l'espace $\mathscr{P}$ est dense dans $L^2(\nu_\theta)$, c'est-à-dire encore $H = L^2(\nu_\theta)$, et ainsi $\frac{i+t}{i-t} = h$ dans $L^2(\nu_\theta)$ ce qui permet d'écrire :

$$\| \mathbb{1} \|^2 = \| h \|^2 = \| \tilde{h} \|^2 + r^2_{\nu_\theta} \Delta^2 .$$

Par ailleurs, grâce à ce qui précède, on a encore :

$$| I_{\nu_\theta}(i) - \omega |^2 = R^2 \qquad \text{avec} \quad R = \frac{1}{2\Delta^2}$$

et d'après (*) on a aussi :

$$| I_{\nu_\theta}(i) - \omega |^2 = \frac{r^2_{\nu_\theta}}{4} .$$

D'où finalement $r^2_{\nu_\theta} = 4R^2$ et $\| \tilde{h} \|^2 = \| \mathbb{1} \|^2 - 4R^2 \Delta^2$.

En revenant à une solution μ quelconque, on obtient, toujours d'après (*) :

$$| I_\mu(i) - \omega |^2 = \frac{r^2_\mu}{4} = \frac{\| h_\mu \|^2 - \| h \|^2}{4\Delta^2}$$

$$= R^2 - \frac{1}{4\Delta^2} [\| \mathbb{1} \|^2 - \| h_\mu \|^2] .$$

Or $\| \frac{i+t}{i-t} - h_\mu \|^2 = \| \frac{i+t}{i-t} \|^2 - \| h_\mu \|^2 = \| \mathbb{1} \|^2 - \| h_\mu \|^2$ puisque $| \frac{i+t}{i-t} | = 1$, et ainsi :

(**) $$| I_\mu(i) - \omega |^2 = R^2 - \frac{R}{2} \| \frac{i+t}{i-t} - h_\mu \|^2 .$$

Cette égalité prouve que la transformée de Stieltjes $I_\mu(i)$ appartient au disque $D(i)$ limité par le cercle $\Gamma(i)$ de centre ω et de rayon R. Avant d'examiner le cas d'un point z quelconque de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, revenons sur l'expression de ω ($= \omega(i)$). A partir de l'égalité

$$(\varphi | \mathbb{1}) = \int \frac{d\mu(t)}{i-t} - \frac{1}{\Delta^2} \int \frac{\overline{f_i}(t)}{i-t} d\mu(t)$$

et comme $\overline{f_i}(i) = \Delta^2$, on obtient :

$$(\varphi | \mathbb{1}) = \frac{1}{\Delta^2} \int \frac{\overline{f_i}(i) - \overline{f_i}(t)}{i-t} d\mu(t)$$

$$= \frac{1}{\Delta^2} \sum_k P_k(-i) \int \frac{P_k(i)-P_k(t)}{i-t} \, d\mu(t)$$

$$= \frac{1}{\Delta^2} \sum_k \overline{P_k(i)} \, Q_k(i)$$

ce qui permet de retrouver l'expression de $\omega(i)$ donnée dans l'énoncé (5.3.7). Si maintenant on fixe un point $z = a + ib$, $b > 0$, on peut déjà noter :

$$I_\mu(z) = \int \frac{d\mu(t)}{z-t} = \frac{1}{b} \int \frac{d\mu(t)}{i - \frac{t-a}{b}}$$

et ainsi on a $I_\mu(z) = I_\nu(i)$ où ν est la mesure sur $\mathbb{R}$, image de la mesure $\frac{1}{b} \cdot \mu$ par l'application $t \to \frac{t-a}{b}$. Il est clair qu'on obtient une suite orthonormale dans $L^2(\nu)$ en considérant les polynômes $\tilde{P}_n$ définis par :

$$\tilde{P}_n(s) = \sqrt{b} \, P_n(a + bs)$$

et avec la théorie précédente, on en déduit que les transformées de Stieltjes $I_\mu(z)$ appartiennent au disque $D(z)$ de rayon $R(z)$ donné par :

$$R(z) = \frac{1}{2\tilde{\Delta}^2} \qquad \text{avec} \qquad \tilde{\Delta}^2 = \sum_k |\tilde{P}_k(i)|^2 = b \sum_k |P_k(z)|^2$$

et ainsi $R(z) = \dfrac{1}{2b\Delta^2(z)}$ où $\Delta^2(z) = \sum_k |P_k(z)|^2$.

Ce disque a pour centre le point $\omega(z)$ tel que :

$$\omega(z) = \frac{1}{\tilde{\Delta}^2} \sum \overline{\tilde{P}_k(i)} \tilde{Q}_k(i) - \frac{i}{2\tilde{\Delta}^2}$$

et en revenant aux expressions des polynômes P_k et Q_k, on obtient finalement :

$$\omega(z) = \frac{1}{2ib\Delta^2(z)} \left[1 + 2ib \sum_{k \geq 1} \overline{P_k(z)} Q_k(z) \right]$$

ce qui termine la démonstration. □

Remarque : L'égalité $|I_\mu(i) - \omega|^2 = R^2 - \frac{R}{2} \left\|\frac{i+t}{i-t} - h_\mu\right\|^2$, obtenue dans la preuve de (5.3.7) montre de plus qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $I_\mu(i)$ appartienne à la frontière $\Gamma(i)$ du disque $D(i)$, est que la fonction $\frac{i+t}{i-t}$, ou encore la fonction $\frac{1}{i-t}$, appartienne à H. Nous allons démontrer qu'une telle propriété caractérise en fait les mesures N-extrêmales.

(5.3.8) THEOREME (RIESZ - 1923). - *On suppose le problème des moments indéterminé et on fixe* $\mu \in M(\alpha)$. *Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) $\mathscr{P}$ *est dense dans* $L^2(\mu)$, *c'est-à-dire* μ *est N-extrêmale.*

b) μ *est l'une des mesures* ν_θ.

c) On a $I_\mu(i) \in \Gamma(i)$.

d) Il existe $z = a+ib$, $b > 0$, *tel que* $I_\mu(z) \in \Gamma(z)$.

e) On a $I_\mu(z) \in \Gamma(z)$, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Preuve. - On a déjà prouvé b $\Rightarrow$ c, et il est clair que l'on a c $\Rightarrow$ d).

d $\Rightarrow$ e : On fixe le point $z = a+ib$ pour lequel on a $I_\mu(z) \in \Gamma(z)$, ou encore tel que la fonction $f : t \to \frac{1}{z-t}$ appartienne à H. Or :

$$\forall n \geq 1 \qquad \frac{1}{z-t} = \sum_{o}^{n-1} \frac{t^k}{z^{k+1}} + \frac{t^n}{z^n(z-t)}$$

et ainsi $t^n f$ appartient à H pour tout n, soit $Pf \in H$, $\forall P \in \mathscr{P}$. On déduit de là que $gf \in H$, $\forall g \in H$. En effet, pour une telle g, il existe une suite de polynômes Q_k tels que $Q_k \to g$, et comme f est bornée, on a aussi $fQ_k \to fg$ dans $L^2(\mu)$. Or $fQ_k \in H$ pour tout k, il en est donc de même pour la fonction fg. En particulier, pour tout k, la fonction $f^k : t \to (\frac{1}{z-t})^k$ est dans H. De plus, la fonction $z \to \frac{1}{z-t}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, donc développable en série de Taylor au voisinage du point z. Pour tout z' tel que $|z-z'| < b$, on a donc :

$$\frac{1}{z'-t} = \sum_{k \geq o} \frac{(z'-z)^k}{(z-t)^{k+1}} .$$

Or $\left|\frac{z-z'}{z-t}\right| < \frac{|z-z'|}{b}$, donc cette série converge uniformément en t et a fortiori dans l'espace $L^2(\mu)$; comme H est fermé dans $L^2(\mu)$, on en déduit que $\frac{1}{z'-t} \in H$, pour tout $z' \in D(z,b[$, et finalement pour tout $z' \in \Pi^+$, d'où e).

e $\Rightarrow$ a : Pour montrer que $\mathcal{P}$ est dense dans $L^2(\mu)$, il suffit de voir que l'on a $H = L^2(\mu)$; soit donc $f \in L^2(\mu)$ telle que f soit orthogonale à H. Comme par hypothèse $\frac{1}{z-t} \in H$, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, on en déduit :

$$(f|\frac{1}{z-t}) = \int \frac{f(t)}{\bar{z}-t}\, d\mu(t) = 0 \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Ainsi la mesure $f.\mu$ a une transformée de Stieltjes nulle ce qui suffit à prouver que $f.\mu = 0$, ou encore $f = 0$ dans l'espace $L^2(\mu)$.

a $\Rightarrow$ b : Considérons sur l'espace $H = L^2(\mu)$ l'opérateur X de multiplication par t, défini par $(Xf)(t) = tf(t)$, sur le domaine $D(X) = \{f \in L^2(\mu) \; ; \; Xf \in L^2(\mu)\}$. Il est clair que X est symétrique et prolonge T. De plus, X est auto-adjoint ; en effet, si $g \in D(X^*)$, pour tout $f \in D(X)$ on a :

$$(Xf|g) = (f|h) \qquad \text{avec} \qquad h = X^* g \in L^2(\mu).$$

Ainsi pour tout $P \in \mathcal{P}$, on a aussi :

$$\int P(t)\overline{tg(t)}\,d\mu(t) = \int P(t)\,\overline{h(t)}\,d\mu(t).$$

Comme on est dans le cas où $\mathcal{P}$ est dense dans $L^2(\mu)$ on en déduit l'égalité :

$$\int f(t)\overline{tg(t)}\,d\mu(t) = \int f(t)\overline{h(t)}\,d\mu(t)$$

pour toute $f \in L^2(\mu)$, et finalement $tg(t) = h(t)$ dans l'espace $L^2(\mu)$, donc $Xg \in L^2(\mu)$ et $g \in D(X)$, ce qui assure l'égalité $D(X) = D(X^*)$. Comme on est dans le cas d'indétermination, cet opérateur X est nécessairement l'un des prolongements auto-adjoints T_θ de T. Comme on a $R(z,X)\mathbb{1} = \frac{1}{z-t}$, on en déduit :

$$\int \frac{d\mu(t)}{z-t} = (\frac{1}{z-t} \mid \mathbb{1}) = (R(z,X)\mathbb{1} \mid \mathbb{1}) = (R(z,T_\theta)\mathbb{1} \mid \mathbb{1}) = \int \frac{d\nu_\theta}{z-t}$$

et ainsi les mesures μ et ν_θ sont égales puisqu'elles ont même transformée de Stieltjes. □

Pour terminer, nous allons examiner les propriétés de continuité des disques $D(z)$, lorsque z varie dans Π^+ par exemple. Ceci nous permettra de voir que le problème des moments sur $\mathbb{R}$ peut aussi s'interpréter en termes de fonctions holomorphes, et de découvrir ainsi un autre aspect de la théorie que, faute de temps, nous ne développerons malheureusement pas.

(5.3.9) <u>PROPOSITION.</u> - *Pour tous points* z *et* $z' \in \Pi_+$, *on a les inégalités :*

$$|R(z)-R(z')| < \frac{\alpha_\circ |z-z'|}{bb'}$$

$$|\omega(z)-\omega(z')| < \frac{\alpha_\circ |z-z'|}{bb'}$$

avec $z = a+ib$ *et* $z' = a'+ib'$. *Ainsi les disques* $D(z)$ *varient continuement avec* $z \in \Pi_+$. *En particulier, la fonction* $\Delta^2(z) = \Sigma |P_k(z)|^2$ *est continue sur* $\mathbb{C}$ *et la série converge uniformément sur tout compact de* $\mathbb{C}$.

Preuve. - Déjà, si μ est fixée dans $M(\alpha)$, pour tous $z,z' \in \Pi_+$, on a :

$$|I_\mu(z) - I_\mu(z')| = \left| \int \frac{d\mu(t)}{z-t} - \int \frac{d\mu(t)}{z'-t} \right|$$

$$< \int \frac{|z-z'|}{bb'}\, d\mu(t) = \alpha_\circ \,.\, \frac{|z-z'|}{bb'} \,.$$

Comme tout point $\xi' \in D(z')$ est de la forme $I_\mu(z')$, pour une certaine mesure $\mu \in M(\alpha)$, on en déduit :

$$d(\xi', D(z)) < \alpha_\circ \,.\, \frac{|z-z'|}{bb'}$$

ce qui permet d'obtenir :

$$2R(z') < 2R(z) + 2\alpha_\circ \frac{|z-z'|}{bb'}$$

soit encore, par symétrie :

$$|R(z') - R(z)| < \alpha_\circ \,.\, \frac{|z-z'|}{bb'} \,.$$

Par un argument du même type, on obtient aussi que pour tout $\xi' \in \Gamma(z')$, on a $d(\xi', \Gamma(z)) < \alpha_o \frac{|z-z'|}{bb'}$, ce qui permet de voir que le cercle $\Gamma(z')$ est contenu dans la couronne de centre $\omega(z)$ et de rayons $R(z) \pm \delta$, avec $\delta = \alpha_o \frac{|z-z'|}{bb'}$, et conduit enfin à l'inégalité $|\omega(z)-\omega(z')| < \delta$. Comme on a $\Delta^2(z) = \frac{1}{2R(z)}$, il en résulte que cette fonction est continue sur $\mathbb{C}$, et la dernière assertion est alors conséquence immédiate du théorème de Dini. □

(5.3.10) <u>COROLLAIRE 1.</u> - *La fonction noyau*

$$K(z,z') = \sum_{k=o}^{\infty} P_k(z)P_k(z')$$

est une fonction entière des deux variables complexes z *et* z'. *De même, pour toute suite* $(a_k) \in \ell^2$, *la fonction* $A(z) = \sum_o^{\infty} a_k P_k(z)$ *est une fonction entière de* z. *En particulier, tout élément* $h \in H$ *est la restriction à* $\mathbb{R}$ *d'une fonction entière.*

Preuve. - Seul le dernier point demande peut-être à être précisé. Mais une fonction $h \in H$ est de la forme $h(t) = \sum_o^{\infty} (h|P_k)P_k(t)$, où la suite $((h|P_k))$ appartient à ℓ^2. Ainsi, h est la restriction à $\mathbb{R}$ de la fonction entière $A(z) = \sum_o^{\infty} (h\ P_k)P_k(z)$. □

Comme conséquence immédiate de ce corollaire, on obtient :

(5.3.11) <u>COROLLAIRE 2.</u> - *Pour toute* $f \in L^2(\mu)$, *la projection* $\Pi_H^{\mu} f$ *est la restriction à* $\mathbb{R}$ *d'une fonction entière définie par :*

$$\Pi_H^{\mu} f(z) = \sum_o^{\infty}(f|P_k)P_k(z) = \int_{\mathbb{R}} K(z,t)f(t)d\mu(t).$$

Preuve. - La première égalité provient de (5.3.10) puisque l'on a $(f|P_k) = (\Pi_H^{\mu} f|P_k)$. Par ailleurs, pour tout $n > 0$, on pose $K_n(z,t) = \sum_o^{n} P_k(z)P_k(t)$. Alors :

$$\|K(z,.)-K_n(z,.)\|^2_{L^2(\mu)} = \sum_{n+1}^{\infty} |P_k(z)|^2.$$

Ainsi $K_n(z,.)$ converge vers $K(z,.)$ dans l'espace $L^2(\mu)$, cette convergence étant d'ailleurs uniforme lorsque z décrit un compact de $\mathbb{C}$. Puisque f appartient à $L^2(\mu)$, on a a fortiori :

$$(K(z,.)|f) = \lim_n (K_n(z,.)|f)$$

c'est-à-dire encore :

$$\int K(z,t)f(t)d\mu(t) = \lim_n \sum_o^n P_k(z)(f|P_k)$$

$$= \Pi_H^\mu f(z)$$

et ce, uniformément par rapport à z sur tout compact de $\mathbb{C}$. □

Pour conclure, donnons, comme dernière conséquence de ces résultats, une autre caractérisation des mesures N-extrêmales en termes de fonctions holomorphes.

(5.3.12) <u>THEOREME.</u> - *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) μ *est* N-*extrêmale.*

b) Toute fonction entière, qui appartient à $L^2(\mu)$, *est en réalité dans* H.

En particulier, le support d'une mesure N-*extrêmale est une partie discrète de* $\mathbb{R}$.

Preuve. - Il est clair que a) ⇒ b) puisqu'alors $H = L^2(\mu)$.
b ⇒ a : Déjà, grâce à (5.3.11), pour toute fonction entière $f \in L^2(\mu)$, on a :

$$(*) \qquad f(z) = \int K(z,t)f(t)d\mu(t)$$

où cette égalité est à lire dans l'espace $L^2(\mu)$, c'est-à-dire μ-presque partout en z. On déduit de là que le support de μ est une partie discrète de $\mathbb{R}$. En effet, dans le cas contraire, on peut trouver un point $x_o \in \mathrm{Supp}\,\mu$ non isolé, donc limite d'une suite $(x_n) \in \mathrm{Supp}\,\mu$. On alors, pour $n > 0$:

$$f(x_n) = \int K(x_n,t)f(t)d\mu(t)$$

et le point x_o est un zéro non isolé de la fonction holomorphe

$g(z) = f(z) - \int K(z,t)f(t)d\mu(t)$. Cette fonction g est donc partout nulle, ce qui signifie encore que l'égalité (*) ci-dessus est réalisée en fait pour tout $z \in \mathbb{C}$. Pour aboutir à une contradiction, on choisit la fonction f définie par $f(z) = \exp[-nz^2]$, qui est entière et dont la restriction à $\mathbb{R}$ appartient à $L^2(\mu)$. Ce qui précède nous permet alors d'affirmer que l'on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\exp[-nx^2] = \int K(x,t)\exp[-nt^2]d\mu(t).$$

Par application du théorème de Lebesgue, on obtient lorsque $n \to +\infty$:

$$1_{\{0\}}(x) = \int K(x,t)1_{\{0\}}(t)d\mu(t) = K(x,0)\mu\{0\}.$$

En particulier, si $x=0$, on a $1 = K(0,0)\ \mu\{0\}$, et comme μ est une mesure positive, on a nécessairement $\mu\{0\} > 0$ et $K(0,0) > 0$. Alors, pour $x \neq 0$, on obtient $K(x,0) = 0$, ce qui est absurde puisque le noyau K est continu. Donc, sous l'hypothèse b) on sait déjà que la mesure solution μ a un support discret. Pour établir qu'elle est N-extrêmale, il suffit, en vertu de (5.3.2) de voir que la mesure quasi-spectrale E^μ qui lui est canoniquement associée, est en réalité spectrale. Pour cela, on applique l'hypothèse b) à la fonction entière $f(z) = \exp[-n(z-a)^2]$, où $a \in \operatorname{Supp}\mu$. Comme μ est discrète, pour tout $x \in \operatorname{Supp}\mu$, on a :

$$\exp[-n(x-a)^2] = \int K(x,t)\exp[-n(t-a)^2]d\mu(t).$$

En choisissant $x=a$ et en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient :

$$1 = K(a,a)\ \mu\{a\}.$$

Si maintenant x est un point de $\operatorname{Supp}\mu$, distinct de a, on obtient, toujours par passage à la limite :

$$K(x,a) = 0.$$

Rappelons que la mesure quasi-spectrale E^μ est définie par les égalités :

$$E^\mu(A)h = \Pi_H^\mu(1_A h) \qquad A \in B(\mathbb{R}),\ h \in H.$$

Ainsi, pour tout $a \in \operatorname{Supp} \mu$, on a :

$$E^{\mu}(A)h(a) = \Pi_H^{\mu}(1_A h)(a) = \int K(a,t)1_A(t)h(t)d\mu(t)$$

$$= \sum_{x \in \operatorname{Supp} \mu} K(a,x)1_A(x)h(x)\ \mu\{x\}$$

$$= K(a,a)1_A(a)h(a)\ \mu\{a\} = (1_A h)(a).$$

Il en résulte que les fonctions $E^{\mu}(A)h$ et $1_A h$ coïncident sur le support de μ, elles sont donc égales dans l'espace $L^2(\mu)$, ce qui suffit à prouver que la mesure E^{μ} est spectrale, et donc μ est N-extrêmale. □

CHAPITRE 6 - INTRODUCTION AU FORMALISME DE LA MECANIQUE QUANTIQUE

Il ne s'agit pas, dans le peu de temps que nous consacrons au sujet, de faire un exposé général des méthodes de la mécanique quantique et de l'historique de ces méthodes. D'ailleurs la théorie n'est pas, à l'heure actuelle, totalement achevée et il n'existe pas "une" axiomatique de la mécanique quantique, mais plusieurs, suivant que l'on prend en compte différents phénomènes, de sorte que la théorie "définitive", si elle existe, n'est pas encore élaborée. Rajoutons à cela que des pans entiers restent en chantier, du point de vue mathématique essentiellement, lorsqu'on aborde certaines généralisations importantes : théorie des champs quantiques (à une infinité de particules), introduction des effets relativistes (nécessaires pour les hautes énergies). Enfin nous laisserons aussi de côté le rapport avec la théorie des groupes, pourtant essentiel, lorsqu'on veut tenir compte des effets dus au spin.

Notre objectif restera donc modeste et sera centré sur la théorie des opérateurs. Il s'agira d'apercevoir (à défaut d'examiner en détail) comment s'introduisent les opérateurs auto-adjoints (bornés ou non) par leurs propriétés spectrales. Pour ce faire nous suivrons principalement la monographie classique de MACKEY (The mathematical foundations of quantum mechanics, 1963), en faisant appel quelquefois à la synthèse récente présentée par BELTRAMETTI et CASSINELLI (The logic of quantum mechanics : Encyclopedia of Mathematics and its applications, vol. 15, 1981). Mais, même dans ce cadre suffisamment restreint, nous devrons encore beaucoup résumer, en choisissant d'exposer quelques-uns des résultats principaux, sans nous préoccuper de la manière dont ils ont été élaborés, c'est-à-dire sans faire l'analyse théorique précise des expériences physiques qui leur ont donné naissance. Comme pour toute théorie physique, la justification de la validité d'une axiomatique est fournie par la précision avec laquelle elle permet de prévoir les résultats expérimentaux cruciaux. De ce point de vue, le succès est exceptionnel, puisque la mécanique quantique a permis d'expliquer, depuis les années 1924-26, une quantité incroyable de faits physiques avec une précision jamais mise en défaut. Le problème se poserait même plutôt à l'envers : pour trancher entre différentes axiomatiques (par exemple l'introduction ou non des "variables cachées"), ou même différentes "philosophies" de l'interprétation du monde physique (partiellement déterministe ou totalement indéterministe), il faut pouvoir bâtir certaines expériences physiques d'une finesse prodigieuse et savoir correctement les interpréter. Pour un exemple d'une telle situation, fondamental pour l'avenir de la théorie, on pourra consulter l'article de M. ARVONNY : *"Dieu joue probablement aux dés"* dans le Monde des Sciences et Techniques du 15.12.82. Dans cet article de vulgarisation scientifique au bon sens du terme, l'auteur explique pourquoi certaines expériences récemment faites à Orsay, ont toutes les chances de permettre le rejet des hypothèses qu'Einstein avait toujours formulées, quant à l'existence d'une théorie partiellement déterministe englobant la théorie quantique actuelle.

Mais revenons à notre sujet qui sera exposé en trois parties : l'une décrivant la "statique", c'est-à-dire où le temps n'intervient pas en théorie ; l'autre décrivant la "dynamique", c'est-à-dire explicitant l'équation de propagation de Schrödinger ; enfin la troisième ramenant l'intérêt aux problèmes mathématiques liés à la caractérisation des opérateurs auto-adjoints, ou essentiellement auto-adjoints, où l'on retrouvera quelques rapports inattendus avec le problème des moments.

6.1 L'AXIOMATIQUE DU FORMALISME STATIQUE.

Le problème essentiel, et les difficultés essentielles d'interprétation de certaines expériences paradoxales (trous de Young) qui, surmontées, ont permis l'élaboration de la théorie, concerne la liaison qui existe entre un système physique "quantique", et les mesures que l'on peut faire sur lui, à travers tel ou tel appareillage, de telle ou telle quantité caractéristique de ce système (énergie, position d'une particule, moment cinétique, ...). En mécanique classique, "macroscopique", une mesure se fait en principe par la mise en dérivation d'une partie "infime" du système, partie que l'on observe à travers l'appareil de mesure, et dont le prélèvement ne modifie pas, de façon significative, l'état du système. On pourra penser par exemple à la mesure d'une intensité électrique, d'un potentiel, de la vitesse d'un véhicule. On traduit cela en disant, au moins idéalement, qu'il n'y a pas d'interaction entre le système et l'appareil de mesure (ou l'observateur). Par ailleurs, et ce point est lui aussi essentiel, deux mesures d'un même système physique, prises dans les mêmes conditions physiques et pas nécessairement à des temps voisins, donneront les mêmes valeurs.

En mécanique quantique il n'en est rien. D'une part la mesure d'une quantité physique peut prendre "simultanément" plusieurs valeurs, où l'on entend par là que des mesures faites sur des systèmes analogues donnent des résultats différents ; d'autre part la mesure une fois faite, et donnant tel résultat, donne non seulement une information sur l'état du système (relativement à cette quantité) mais laisse ensuite le système dans un état modifié (perturbé par la mesure). Enfin certaines règles expérimentales, connues depuis longtemps, ont établi que certaines quantités (par exemple une énergie) ne pouvaient prendre que des valeurs bien particulières (raies spectrales traduisant physiquement le fait que le "spectre d'énergie" d'un atome par exemple, est discret et caractéristique de cet atome).

La résolution des contradictions apparentes se fait en admettant qu'un système physique peut se trouver "simultanément" dans plusieurs états différents, c'est-à-dire qu'on ignore en fait exactement dans quel état il se trouve et d'ailleurs des transitions entre états peuvent se produire "spontanément". Faire une mesure c'est obtenir la valeur "probable" d'une certaine quantité E, laissant le système dans un état nouveau tel que si l'on répète "immédiatement" la mesure sur le système modifié (et non sur un système analogue indépendant du premier mais ayant les mêmes caractéristiques), on obtient de nouveau la valeur E, le nouveau système modifié étant alors identique au précédent. On voit, par ces réflexions grossières, qu'une notion de probabilités intervient, de même qu'un "spectre" de valeurs, et que faire une mesure sur le système, c'est lui appliquer une certaine opération idempotente. Cette opération idempotente va se traduire en fait par un projecteur, le spectre des valeurs par une mesure spectrale, et il restera à préciser la notion d'état. Comme la quantité mesurée est liée à la mesure spectrale, on lui donnera le nom d'*observable* (exprimant en clair que l'observateur est quelque part, représenté par l'appareillage de mesure) et on admettra que c'est un opérateur auto-adjoint (pour qu'il ait une mesure spectrale et qu'il soit déterminé par elle).

L'axiomatique de base. - On en arrive ainsi à considérer, en première approximation, qu'un système physique étant donné, on lui associe un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, supposé complexe et séparable. Chaque vecteur $x \in \mathcal{H}$ représente un état du système, quand on le suppose unitaire et défini d'ailleurs à un nombre complexe de module 1 près. Chaque quantité à mesurer, c'est-à-dire chaque observable, est représentée par un opérateur auto-adjoint A, borné ou non, défini par sa mesure spectrale $E(.) = E^A(.)$ selon $A = \int \lambda dE(\lambda)$. Que se passe-t-il quand on mesure l'observable A ? Supposant le système dans l'état x, l'observable A (ou la mesure associée) est seulement connue par sa loi de probabilité sur la droite numérique $\mathbb{R}$, laquelle est précisément la mesure scalaire $E_x(.) = (E(.)x|x)$, qui est une probabilité puisque $\|x\|^2 = 1$.

A partir de là se posent deux questions importantes : la première est de connaître l'état du système après la mesure, et la seconde est de déterminer de quelle façon il dépend effectivement de l'état initial x. Répondre à ces deux questions, c'est en fait pousser plus loin l'analyse.

L'expérimentation physique constate que certaines quantités à mesurer (par exemple l'énergie) ne peuvent prendre que des valeurs particulières (d'où la notion de quantification). La traduction axiomatique est que l'opérateur A a un spectre discret, formé uniquement de valeurs propres. On a donc $\sigma(A) = \sigma_p(A)$ et $\sigma_c(A) = \emptyset$. Le spectre $\sigma_p(A)$ étant au plus dénombrable (car $\mathscr{H}$ est séparable), soit (λ_n) les valeurs propres de A, et soit H_n l'espace propre associé à λ_n et $P_n : \mathscr{H} \to H_n$ la projection correspondante, avec l'égalité $P_n = E(\{\lambda_n\})$. La mesure spectrale E(.) est déterminée, sur les boréliens ω de $\mathbb{R}$, par

$$E(\omega) = \sum_{\lambda_k \in \omega} P_k$$

de sorte que, si le système est dans l'état $x \in \mathscr{H}$, la loi de l'observable A est donnée par

$$p(x,A,\omega) = \sum_{\lambda_k \in \omega} (P_k x|x) = \sum_{\lambda_k \in \omega} \|P_k x\|^2 .$$

C'est donc la probabilité définie par la masse $\|P_k x\|^2$ placée au point λ_k, ce qui signifie que la mesure prendra les valeurs λ_k (en fait l'une de ces valeurs) avec la probabilité $p_k = \|P_k x\|^2$.

Supposons maintenant une mesure effectuée ayant donné la valeur λ_k. Si on la répète immédiatement après, *sur le système modifié*, on doit toujours retrouver le résultat λ_k. Ceci signifie que l'état modifié y donne pour loi p(y,A,.) de l'observable A la probabilité de Dirac au point λ_k. On a donc $\|P_k y\|^2 = 1$ et $\|P_j y\|^2 = 0$ si $j \neq k$, autrement dit $y \in H_k$. Si la multiplicité de la valeur λ_k est un, alors $H_k = \mathbb{C}\varphi_k$, où φ_k est le vecteur propre correspondant, et $y = \varphi_k$, donc y est indépendant de x. Si la multiplicité de λ_k est supérieure à 2 (éventuellement même infinie), la condition $y \in H_k$ ne détermine pas explicitement y, et on admet alors que y n'est autre que la projection normée de x sur H_k, soit

$$y = \frac{P_k x}{\|P_k x\|} .$$

Exemple 1. L'expérience "oui-non". - On choisit pour A un projecteur hermitien. Les valeurs propres sont 0 et 1, de sorte que la mesure de A dans l'état x donne la valeur 1 avec la probabilité $\|Ax\|^2$ et la valeur 0 avec la probabilité $\|(I-A)x\|^2$. Si la mesure a donné 1, alors $y = \frac{Ax}{\|Ax\|}$ et si elle a donné zéro, alors $y = \frac{(I-A)x}{\|(I-A)x\|}$.

Exemple 2. Les états "préparés". - Supposons donnée une observable A ayant un spectre discret de valeurs propres (λ_k) *simples*. Alors tout état x est transformé en l'état φ_k, indépendant de x, lorsque la mesure de A a donné λ_k. Si l'on suppose construit un dispositif de filtrage arrêtant tous les états φ_j, $j \neq k$, et ne laissant passer que l'état φ_k, on obtient à la sortie du filtre un système "préparé dans l'état $\varphi = \varphi_k$", sur lequel on peut faire la mesure d'une autre observable B (à spectre discret). Savoir si φ est vecteur propre de B ou non devient alors important et la question de la commutation de A et B se pose immédiatement. On verra plus loin ce qu'il faut dire de la notion "d'observables simultanées".

Revenons maintenant au cas général d'une observable A à spectre quelconque possédant une partie discrète $\sigma_p(A)$ et une partie continue $\sigma_c(A)$. Alors la probabilité $p(x,A,.)$ n'est plus discrète sur $\mathbb{R}$, ce qui signifie, si par exemple elle est diffuse, que la probabilité d'obtenir une valeur "exacte" λ_o dans la mesure est nulle. On peut seulement parler de la probabilité d'obtenir une valeur λ contenue dans un intervalle $[\lambda_o-\varepsilon, \lambda_o+\varepsilon]$, qui est $p(x,A,[\lambda_o-\varepsilon, \lambda_o+\varepsilon])$. Après une mesure, ayant donné une valeur $\lambda \in [\lambda_o-\varepsilon, \lambda_o+\varepsilon]$ le système, initialement dans l'état x, se trouvera dans l'état y, égal à la projection normée de x sur l'espace $\mathscr{I}m\, E([\lambda_o-\varepsilon, \lambda_o+\varepsilon])$. Plus généralement on aura donc :

(6.1.1) DEFINITION. - *Soit* $A = \int \lambda dE(\lambda)$ *une observable quelconque. Si le système est dans l'état* x, *alors la loi de la mesure de l'observable* A *est la probabilité* $E_x(.) = (E(.)x|x)$. *Pour tout borélien* ω *de* $\mathbb{R}$, *l'état du système après une mesure de* A *ayant* *donné la valeur $\lambda \in \omega$ est représenté par le vecteur*

$$y = \frac{E(\omega)x}{\|E(\omega)x\|} .$$

Cet énoncé fournit donc l'essentiel de l'axiomatique de base. On remarquera que la loi de la mesure de A dans l'état y, soit E_y, est donnée par $E_y = \frac{1}{\|E(\omega)x\|^2} 1_\omega . E_x$, soit encore

$$E_y(\delta) = \frac{E_x(\omega \cap \delta)}{E_x(\omega)}$$

ce qu'on peut écrire aussi

$$p(y,A,\delta) = \frac{p(x,A,\omega \cap \delta)}{p(x,A,\omega)}$$

faisant apparaître le conditionnement par rapport à ω. Une nouvelle mesure de A dans l'état y donnera donc presque sûrement une valeur $\mu \in \omega$, pas nécessairement égale à λ, et le système se retrouvera après cette mesure dans l'état $z = \frac{E(\omega)y}{\|E(\omega)y\|} = y$.

Valeur moyenne et écart quadratique moyen. - La loi de la mesure de A dans l'état x, soit p(x,A,.), nécessite pour être connue la décomposition spectrale E(.) de A. On peut toutefois l'apprécier en connaissant seulement sa moyenne et son écart-type, pour autant qu'ils existent. Si l'on choisit $x \in D(A)$, domaine de A, alors

$$m(A,x) = \int \lambda dE_x(\lambda) = (Ax|x)$$
$$v(A,x) = \int (\lambda-m)^2 dE_x(\lambda) = \|Ax\|^2 - (Ax|x)^2.$$

Ainsi la moyenne et la variance $v = \sigma^2$ s'expriment uniquement à partir de A.

Observables simultanées. - Fixons deux observables A et B, de mesures spectrales respectives E et F. Le système étant dans l'état x, on effectue une mesure de A, puis une mesure de B immédiatement après, c'est-à-dire avant que le système ait eu le temps d'évoluer dynamiquement. Que se passe-t-il alors et quel est l'état du système après ces deux mesures ? Comme les valeurs des mesures de A et B sont probabilisées, cherchons la probabilité $p(x,A,\sigma,B,\tau)$ pour que la mesure de A donne une valeur $\lambda \in \sigma$, puis celle de B une valeur $\mu \in \tau$. Elle s'obtient par le principe des probabilités composées

$$p(x,A,\sigma,B,\tau) = p(x,A,\sigma)p(y,B,\tau)$$

où y est l'état du système après la mesure de A. Or on a, avec (6.1.1) les égalités

$$p(x,A,\sigma) = (E(\sigma)x|x) \ ; \ y = \frac{E(\sigma)x}{\|E(\sigma)x\|} \ ; \ p(y,B,\tau) = (F(\tau)y\ y)$$

de sorte que

$$p(x,A,\sigma,B,\tau) = (F(\tau)E(\sigma)x|E(\sigma)x) = (E(\sigma)F(\tau)E(\sigma)x|x)$$

puisque $\|E(\sigma)x\|^2 = (E(\sigma)x|x)$. L'état z du système après la mesure de B est

$$z = \frac{F(\tau)y}{\|F(\tau)y\|} = \frac{F(\tau)E(\sigma)x}{\|F(\tau)E(\sigma)x\|} .$$

Echangeons maintenant les rôles de A et B et cherchons la condition pour que les probabilités $p(x,A,\sigma,B,\tau)$ et $p(x,B,\tau,A,\sigma)$ soient les mêmes. Les opérateurs $E(\sigma)F(\tau)E(\sigma)$ étant hermitiens, cette condition n'est autre que l'égalité $E(\sigma)F(\tau)E(\sigma) = F(\tau)E(\sigma)F(\tau)$. Posant $P = E(\sigma)$ et $Q = F(\tau)$, on obtient deux projecteurs tels que $PQP = QPQ$. On tire de là $(PQ-QP)^2 = 0$ en développant, de sorte que l'opérateur $R = PQ-QP$ est tel que $R^2=0$ et $R^* = -R$. On en déduit $R=0$ car $\|Rx\|^2 = (R^*Rx|x) = -(R^2x|x) = 0$ et ainsi $PQ = QP$. On obtient donc que les mesures spectrales $E(.)$ de A et $F(.)$ de B commutent, autrement dit que les opérateurs A et B commutent au sens de (4.5.6), Exerc. 3. On peut alors concevoir que les deux mesures de A et B pouvant être faites dans un ordre quelconque, peuvent se faire "simultanément". Quant à l'état z du système, il reste évidemment inchangé en permutant les rôles de A et B, lorsque ces opérateurs commutent. En résumé :

(5.1.2) PROPOSITION :

a) On dit que les opérateurs A *et* B *définissent deux obser-*

vables simultanées lorsqu'ils commutent au sens où leurs mesures spectrales commutent.

b) Pour le cas de deux observables simultanées A *et* B, *de mesures spectrales* E(.) *et* F(.), *la probabilité pour que le système dans l'état* x *fournisse une mesure de* A *(resp. de* B*) appartenant au borélien* σ *(resp.* τ*), ces deux mesures étant faites dans l'ordre que l'on voudra, est*

$$p(x,A,\sigma,B,\tau) = (E(\sigma)F(\tau)x|x)$$

et le système se trouve alors dans l'état $z = \dfrac{E(\sigma)F(\tau)x}{\|E(\sigma)F(\tau)x\|}$ *après ces deux mesures.*

Remarque : On peut voir qu'alors se trouve définie une mesure spectrale produit $G(.) = E(.) \otimes F(.)$ sur le plan $\mathbb{R}^2$, telle que l'opérateur normal $N = \iint \zeta \, dG(\zeta)$ coïncide avec $A + iB$.

L'inégalité de Heisenberg. - Lorsque A et B ne commutent pas, introduisons le commutateur $[A,B] = AB-BA$, supposé défini sur le domaine

$$D([AB]) = D(AB) \cap D(BA).$$

On a alors :

(6.1.3) PROPOSITION (Inégalité de Heisenberg). - *Pour tout état* $x \in D([AB])$ *on a l'inégalité*

$$v(A,x)v(B,x) \geq \frac{1}{4} \, |([AB]x|x)|^2.$$

Preuve. - Déjà $((AB-BA)x|x) = (Bx|Ax) - (Ax|Bx) = 2\,\mathcal{I}m(Bx|Ax)$, de sorte que

$$|([AB]x|x)|^2 \leq 4\,|(Bx|Ax)|^2 \leq 4 \, \|Ax\|^2 \, \|Bx\|^2.$$

Mais en posant $a = m(A,x)$ et $b = m(B,x)$, qui existent puisque $x \in D(A) \cap D(B)$, on voit qu'en remplaçant A par (A-a) et B par (B-b), on ne change pas le commutateur [AB]. On peut donc remplacer $\|Ax\|^2$ par $\|Ax-ax\|^2 = v(A,x)$, d'où le résultat. □

Exemple. - Dans l'étude du mouvement d'une particule se déplaçant sur la droite, on introduit l'espace $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$, l'opérateur de position Q=X, égal à la multiplication par x, et l'opérateur d'impulsion $P = -i \frac{d}{dx}$. Sur l'espace $\mathcal{S}$ de Schwartz des fonctions indéfiniment différentiables à décroissance rapide, le commutateur $[P,Q]$ est bien défini et $[P,Q] = -iI$. Alors pour tout état $\varphi \in \mathcal{S}$, on a l'inégalité

$$v(P,\varphi)v(Q,\varphi) \geq \frac{1}{4}$$

qui prouve que si la position de la particule est connue avec une bonne précision, par exemple si $v(Q,\varphi) \leq \varepsilon$, alors sa vitesse est mal déterminée puisque sa loi de probabilité, vérifiant $v(P,\varphi) \geq \frac{1}{4\varepsilon}$, est très étalée. En fait la relation $[P,Q] = -iI$ n'est valable qu'avec un choix spécial d'unités. Pour les unités habituelles on a plutôt $[P,Q] = -ikI$, où k est une constante proportionnelle à la constante de Planck $\hbar$.

<u>Etats purs et mélanges.</u> - En fait un système physique, sauf s'il est "préparé" pour cela, n'est jamais dans un état précis x. C'est en général un mélange d'états. Or faire une combinaison du type $\Sigma\, \alpha_i x_i$ avec $\|x_i\| = 1$, c'est détruire en général cette condition de norme. Par ailleurs un vecteur unitaire $x \in \mathcal{H}$ détermine le même état que le vecteur αx, $|\alpha| = 1$, de sorte qu'il n'y a pas correspondance bijective entre l'ensemble des états tels que nous les avons définis et l'ensemble des vecteurs unitaires. La contradiction est levée en considérant que l'état défini par x est en fait le projecteur orthogonal $\mathcal{H} \to \mathbb{C}x$ de $\mathcal{H}$ sur le "rayon" défini par x, autrement dit l'opérateur $P_x = x \otimes x : z \to (z|x)x$. On voit alors que $P_x = P_{\alpha x}$ si $|\alpha| = 1$, et cette interprétation permet la considération de mélange d'états puisqu'il suffit d'additionner des opérateurs.

On appellera donc "état mélangé" ou mélange d'états, tout opérateur T de la forme $T = \Sigma\, \alpha_n x_n \otimes x_n$ avec $\alpha_n \geq 0$ et $\Sigma\, \alpha_n = 1$. La décomposition précédente n'est évidemment pas unique et l'examen des propriétés de T doit se faire en tenant compte de ce fait.

C'est ici qu'il faut introduire la notion d'opérateur à trace sur un espace de Hilbert. Rappelons sommairement la théorie : un opérateur à trace est par définition un opérateur $T = RS$ produit de deux opérateurs de Hilbert-Schmidt et il est facile de voir qu'il est alors compact, et qu'un opérateur compact T est à trace si et seulement si l'opérateur $[T] = (T^*T)^{1/2}$ est à trace (ceci en utilisant la décomposition polaire de T). L'opérateur T étant à trace, on voit grâce à la représentation $T = RS$, que pour toute base orthonormale (φ_i) de $\mathscr{H}$, le nombre

$$\operatorname{tr} T = \sum_i (T\varphi_i | \varphi_i) = (S | R^*)_2$$

est indépendant de la base choisie, et appelé la trace de T. Ici $(R|S)_2$ désigne le produit scalaire des deux opérateurs R et S dans l'espace $L_2(\mathscr{H})$ des opérateurs de Hilbert-Schmidt. Cela étant on peut structurer l'ensemble des opérateurs à trace en un espace vectoriel $L_1(\mathscr{H})$ sur lequel on peut définir une norme, dite norme-trace

$$\|T\|_1 = \operatorname{tr}([T]) = \Sigma([T]\varphi_i | \varphi_i)$$

pour laquelle l'application trace $T \to \operatorname{tr} T$ est continue puisque $|\operatorname{tr} T| < \|T\|_1$. Introduisons encore l'espace $K(\mathscr{H})$ des opérateurs compacts, qui n'est autre que l'adhérence dans $L(\mathscr{H})$ de l'espace des opérateurs de rang fini. On a alors les inclusions

$$L_1(\mathscr{H}) \subset L_2(\mathscr{H}) \subset K(\mathscr{H}) \subset L(\mathscr{H}).$$

Par ailleurs on sait avec (3.2.7), que tout $T \in L_1(\mathscr{H})$ admet une décomposition du type $T = \Sigma\, \alpha_n\, \varepsilon_n \otimes e_n$, où (ε_n) et (e_n) sont deux suites orthonormées et où (α_n) est la suite décroissante des valeurs propres de $[T] = \Sigma\, \alpha_n e_n \otimes e_n$. On a alors $\|T\|_1 = \Sigma\alpha_n < +\infty$ et $\operatorname{tr} T = \Sigma\, \alpha_n(\varepsilon_n | e_n)$. Il suit de là assez facilement que $L_1(\mathscr{H})$ est complet pour la norme $\|.\|_1$, et que la décomposition $T = \Sigma\alpha_n\varepsilon_n \otimes e_n$ est valable au sens de la norme-trace. On en déduit aussi que pour tout $A \in L(\mathscr{H})$, l'opérateur AT et l'opérateur TA sont à trace, avec

$$\operatorname{tr}(AT) = \operatorname{tr}(TA) = \Sigma\, \alpha_n(A\varepsilon_n | e_n).$$

ce qui permet de fournir les deux égalités essentielles

(1) $$\|T\|_1 = \sup_{\substack{\|A\| \leq 1 \\ A \in K(\mathcal{H})}} |\mathrm{tr}(AT)| = \sup_{\substack{\|A\| \leq 1 \\ A \in L(\mathcal{H})}} |\mathrm{tr}(AT)|$$

(2) $$\|A\| = \sup_{\|T\|_1 \leq 1} |\mathrm{tr}(AT)|$$

qui sont la base de la théorie de la dualité des espaces d'opérateurs. En effet on tire de (1), grâce à la densité dans $K(\mathcal{H})$ des opérateurs de rang fini, et de (2) l'énoncé :

(6.1.4) <u>THEOREME</u> :

a) L'espace dual $K(\mathcal{H})'$ *s'identifie naturellement à l'espace* $L_1(\mathcal{H})$, *la forme bilinéaire canonique étant*

$$< A,T > = \mathrm{tr}(AT) = \mathrm{tr}(TA).$$

b) L'espace dual $L_1(\mathcal{H})'$ *s'identifie naturellement à l'espace* $L(\mathcal{H})$, *la forme bilinéaire canonique étant*

$$< T,A > = \mathrm{tr}(AT) = \mathrm{tr}(TA).$$

c) En particulier on a $K(\mathcal{H})'' = L(\mathcal{H})$.

Il est d'ailleurs intéressant de comparer ces formules aux formules classiques $(c_o)' = \ell^1$, $[\ell^1]' = \ell^\infty$ et $(c_o)'' = \ell^\infty$.

En revenant à nos états mélangés, de la forme $T = \Sigma\alpha_i x_i \otimes x_i$, avec $\alpha_i \geq 0$, $\Sigma\, \alpha_i = 1$ et $\|x_i\| = 1$ (le système (x_i) n'étant pas nécessairement orthonormé), on voit alors que $T \in L_1(\mathcal{H})$, que T est hermitien positif et que

$$\mathrm{tr}\ T = \Sigma\ \alpha_i \|x_i\|^2 = \Sigma\alpha_i = 1.$$

Réciproquement tout opérateur hermitien à trace peut s'écrire, par décomposition spectrale (3.2.6),

$$T = \Sigma\ \alpha_n\ e_n \otimes e_n$$

où (e_n) est un système orthonormé et où $\mathrm{tr}\ T = \Sigma\ \alpha_n$. Si l'on impose la condition que T soit positif et tr T = 1, on obtient $\alpha_n \geqslant 0$ et $\Sigma\, \alpha_n = 1$. D'où la définition :

(6.1.5) DEFINITION. - *On appelle état mélangé (ou plus simplement état) sur* $\mathscr{H}$ *tout opérateur* T *hermitien positif à trace tel que* tr T = 1. *Un opérateur* T *du type* $T = P_x = x \otimes x$, *avec* $\|x\| = 1$ *prend alors le nom d'état pur.*

En utilisant (6.1.4.a) on voit que l'espace $\mathscr{E}$ des états mélangés s'identifie à une partie convexe de la boule unité du dual $K(\mathscr{H})'$. Cette partie n'est malheureusement pas faiblement compacte, la situation étant analogue à celle du convexe des probabilités sur $\mathbb{R}$. On peut maintenant chercher à préciser le rôle des états purs dans $\mathscr{E}$. On a alors :

(6.1.6) PROPOSITION. - *Soit* $T \in \mathscr{E}$ *un état. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) T *est un état pur.*

b) T *est un projecteur, c'est-à-dire que* $T^2 = T$.

c) T *est tel que* tr $T^2 = 1$.

d) T *est un point extrêmal du convexe* $\mathscr{E}$.

Preuve. - En décomposant T selon $T = \Sigma\, \alpha_n\, e_n \otimes e_n$, où (e_n) est un système orthonormé et où l'on a $\alpha_n \geqslant 0$ et $\Sigma\, \alpha_n = 1$, on voit aisément les équivalences a $\Leftrightarrow$ b $\Leftrightarrow$ c et l'implication d $\Rightarrow$ a. Il faut surtout prouver a $\Rightarrow$ d. Fixons donc l'état pur $T = a \otimes a$ et supposons $T = \alpha R + (1-\alpha)S$ avec $R,S \in \mathscr{E}$ et $0 < \alpha < 1$. Pour tout $x \perp a$ on a $Tx = 0$, donc $(Rx|x) = 0$ par positivité de R et S, d'où l'on déduit $Rx = 0$. Si x est quelconque, soit $x = (x|a)a + z$ avec $z \perp a$; alors $Rx=(x|a)Ra$, de sorte que $R = Ra \otimes a$. En écrivant $Ra = \lambda a+b$ avec $b \perp a$, on voit que $\lambda = (Ra|a) = \mathrm{tr}\, R = 1$, donc $Ra = a+b$. Par le fait que $R^*=R$ on trouve, avec $Rb = 0$,

$$\|b\|^2 = (Ra|b) = (a|Rb) = 0$$

d'où $Ra = a$ et $R = a \otimes a = T$. Ainsi $R = S = T$ et T est bien point extrêmal de $\mathscr{E}$. □

Etats mélangés et processus de mesure. - Lorsque le système est dans un état pur $T = x \otimes x$, on a vu que la mesure d'une observable A avait pour loi la probabilité $p(x,A,.) = (E(.)x|x)$. On peut écrire $(E(\omega)x|x)$ sous la forme $tr(E(\omega)x \otimes x)$, soit encore $tr(E(\omega)T) = tr(TE(\omega))$. La fonction trace étant linéaire et continue sur l'espace $L_1(\mathscr{H})$, on aura donc, en toute généralité :

(6.1.7) PROPOSITION. - *Soit* $A = \int \lambda dE(\lambda)$ *une observable. Si le système est dans l'état mélangé* $T \in \mathscr{H}$, *alors la loi de la mesure de l'observable* A *est la probabilité*

$$p(T,A,.) = tr(E(.)T) = tr(TE(.)).$$

Il reste un point délicat à préciser, qui est de définir l'état du système après la mesure de A, lorsque cette mesure a donné une valeur $\lambda \in \omega$, où ω est un borélien de $\mathbb{R}$. Pour un état pur $T = x \otimes x$ on sait que l'état S après la mesure est pur lui aussi, et défini par un vecteur proportionnel au vecteur $y = E(\omega)x$. Or $y \otimes y = E(\omega)x \otimes E(\omega)x = E(\omega)TE(\omega)$, de sorte que lorsque $T = \Sigma\alpha_n e_n \otimes e_n$ est un état mélangé, on peut hésiter pour définir S entre S_1 et S_2 avec

$$S_1 = \frac{E(\omega)TE(\omega)}{tr(E(\omega)TE(\omega))} = \frac{E(\omega)TE(\omega)}{tr(E(\omega)T)}$$

$$S_2 = \Sigma\, \alpha_n \frac{E(\omega)e_n \otimes E(\omega)e_n}{\|E(\omega)e_n\|^2} .$$

En fait la définition de S_2 n'est pas cohérente, car rien ne permet d'affirmer son invariance quand la représentation de T sous la forme $\Sigma\, \alpha_n e_n \otimes e_n$ est changée. Il faut donc choisir S_1 et ainsi :

(6.1.8) DEFINITION. - *Soit* $T \in \mathscr{E}$ *un état quelconque. Si la mesure d'une observable* $A = \int \lambda dE(\lambda)$ *a donné une valeur* $\lambda \in \omega$ *du système dans l'état* T, *alors après cette mesure le système se trouve dans l'état*

$$S = \frac{E(\omega)TE(\omega)}{tr(E(\omega)T)} .$$

Remarque : Une distinction essentielle doit être expliquée ici. Supposons choisi un système orthonormé (e_n) et des constantes α_n telles que $\Sigma|\alpha_n|^2 = 1$. On peut alors considérer les états e_n (ou $e_n \otimes e_n$), puis l'état $x = \Sigma\, \alpha_n e_n$ (ou $x \otimes x$), qui est un état pur. On peut aussi considérer l'état mélangé $T = \Sigma|\alpha_n|^2 e_n \otimes e_n$ et la différence tient au fait que dans le premier cas l'addition est faite dans $\mathscr{H}$, tandis que dans le second elle est faite dans l'espace $L(\mathscr{H})$. Supposons maintenant donnée une expérience "oui-non", c'est-à-dire une observable A=P, qui est un projecteur hermitien non nul. Il admet la valeur propre $\lambda=1$ et $E(\{1\}) = E(1) = P$, de sorte que la probabilité d'une réponse "oui" dans l'état pur x est $\|Px\|^2$, tandis qu'elle est $\Sigma|\alpha_n|^2\|Pe_n\|^2$ dans l'état mélangé T. On peut donc avoir une probabilité nulle dans le premier cas (si Px=0) et non nulle dans le second, ce qui met bien en évidence la différence entre les deux états. C'est pourquoi on dit que x est un état pur, *superposition* d'états purs, et que T est un *mélange statistique* d'états. C'est aussi la raison pour laquelle T porte quelquefois le nom d'opérateur statistique, ou encore de matrice de densité (quand on sous-entend sa représentation sur une base orthonormale de $\mathscr{H}$). Il y a encore, cachée là-dessus, une difficulté supplémentaire qui est le défaut d'unicité de la représentation $T = \Sigma\, \alpha_n e_n \otimes e_n$, laquelle ne permet pas de dire que T est un mélange des états (e_n) ; il peut très bien être considéré comme un mélange d'autres états purs, de sorte qu'il est a priori impossible d'extraire les états e_n de l'état mélangé T. Toutefois cela peut se faire dans le cas où T est un opérateur simple puisque sa décomposition spectrale $\Sigma\, \alpha_n\, e_n \otimes e_n$, avec $\alpha_n > 0$ et le système (e_n) étant orthonormé, ne fait alors apparaître que des valeurs propres simples. Si l'on considère T comme une observable sa décomposition spectrale est donnée par $E(\omega) = \sum_{\alpha_n \in \omega} e_n \otimes e_n$, de sorte que la mesure de l'observable T, le système étant dans l'état T, donne les valeurs α_n, avec les probabilités $p_n = \alpha_n$, le système étant dans l'état $S_n = e_n \otimes e_n$ après l'obtention de α_n.

Valeur moyenne et variance. - Si $T = \Sigma\, \alpha_n e_n \otimes e_n$ et si A est une observable alors la valeur moyenne de la mesure de A dans l'état T est donnée par

$$m(A,T) = \int \lambda dp(T,A,\lambda) = \mathrm{tr} \int \lambda dE(\lambda)T$$
$$= \mathrm{tr}(AT) = \mathrm{tr}(TA) = \Sigma\ \alpha_n (Ae_n | e_n).$$

Bien entendu cette moyenne peut être infinie, mais ce ne sera pas le cas si A est un opérateur borné. Si $m = m(A,T)$ est finie alors la variance est donnée par

$$v(A,T) = \int (\lambda-m)^2 dp(T,A,\lambda)$$
$$= \int \lambda^2 dp(T,A,\lambda) - m^2$$
$$= \mathrm{tr}(\int \lambda^2 dE(\lambda)T) - m^2 = \mathrm{tr}(A^2T) - [\mathrm{tr}(AT)]^2.$$

Pour illustrer toutes ces généralités donnant des exemples simples, choisis en dimension 1 et sans effet de spin.

Exemple 1. La particule libre. - Il s'agit d'une particule susceptible de se déplacer sur $\mathbb{R}$ en mouvement libre, c'est-à-dire sans potentiel. L'espace $\mathcal{H}$ est choisi égal à $L^2 = L^2(\mathbb{R})$, et avec un bon choix d'unité les opérateurs intéressants sont Q=X, opérateur de position égal à la multiplication par x, et $P = -i \frac{d}{dx} = -iD$ représentant l'impulsion. On leur adjoint l'opérateur d'énergie, hamiltonien libre $H_o = \frac{P^2}{2m}$ (correspondant à la seule prise en compte de l'énergie cinétique $\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2m} (mv)^2$) et on supposera $H_o = P^2$ pour simplifier.

Pour $\varphi \in L^2$ on aura donc $E^Q(\omega) = 1_\omega . \varphi$, de sorte que si la particule est dans l'état φ (avec $\|\varphi\|_2 = 1$), c'est-à-dire est représentée par sa "fonction d'onde" φ, alors la probabilité $p(\varphi,Q,.)$ n'est autre que la mesure $|\varphi|^2 dt$. Ainsi plus la fonction φ est concentrée sur un intervalle petit $[a,b]$, plus la probabilité de trouver la particule dans $[a,b]$ est grande. On voit de plus qu'il est impossible de faire une mesure exacte (avec une probabilité 1) car le spectre $\sigma(Q) = \mathbb{R}$ est continu et n'a pas de partie ponctuelle puisque $\sigma_p(Q) = \emptyset$. Dans une mesure de Q donnant une valeur $\lambda \in [a,b]$, la particule change d'état et φ est remplacée par ψ, proportionnelle à $1_{[a,b]}\varphi$, ce qui explicite bien l'effet de "troncature" de la mesure.

Pour étudier l'opérateur P il convient d'utiliser la transformation de Fourier, définie sur L^2 par

$$\varphi(x) = \hat{\varphi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int e^{-itx}\varphi(t)dt.$$

On sait, par le théorème de Plancherel, que $\mathscr{F} = U$ est une transformation unitaire de L^2, telle que $U^{-1} = \mathscr{F}^{-1} = \overline{\mathscr{F}}$ (où on a remplacé i par -i). En écrivant $\varphi = \overline{\mathscr{F}}\hat{\varphi}$, et en supposant par exemple $\varphi \in \mathscr{S}$ (espace de Schwartz) on voit que

$$P\varphi(x) = -i\varphi'(x) = \overline{\mathscr{F}}(Q\hat{\varphi})$$

de sorte que $P = \overline{\mathscr{F}} Q \mathscr{F} = U^{-1}QU$. Cette égalité montre que le domaine d'auto-adjonction de P se définit par les conditions :

$$\begin{aligned} D(P) &= \{\varphi \; ; \quad \hat{\varphi} \in D(Q)\} \\ &= \{\varphi \; ; \quad \varphi \in L^2 \text{ et } X\hat{\varphi} \in L^2\}. \end{aligned}$$

Elle montre aussi que la mesure spectrale $E^P(.)$ se calcule selon

$$E^P(\omega) = \overline{\mathscr{F}}\, E^Q(\omega)\, \mathscr{F}.$$

Pour le cas $\omega = [a,b]$, ou plus généralement si ω est borné, désignons par g_ω la fonction $\overline{\mathscr{F}}\, 1_\omega \in L^2$, telle que $1_\omega = \mathscr{F} g_\omega$. On a alors, pour $\varphi \in L^2$

$$\begin{aligned} E^P(\omega)\varphi &= \overline{\mathscr{F}}(1_\omega \mathscr{F}\varphi) = \overline{\mathscr{F}}(\mathscr{F} g_\omega . \mathscr{F}\varphi) \\ &= \overline{\mathscr{F}}\mathscr{F}(g_\omega * \varphi) = g_\omega * \varphi. \end{aligned}$$

En particulier pour $\omega = [a,b]$ on trouve

$$g_{[a,b]}(x) = \int_a^b e^{itx} \frac{dt}{\sqrt{2\Pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \frac{e^{ibx}-e^{iax}}{ix}.$$

La conclusion sommaire à tirer de là, et justifiant d'une façon qualitative l'inégalité de Heisenberg $v(P,\varphi)v(Q,\varphi) \geqslant \frac{1}{4}$ vue en (6.1.3), est que pour toute particule dans l'état φ, une mesure de P donnant une valeur $\lambda \in [a,b]$ change l'état φ en l'état $\psi = g_{[a,b]} * \varphi$ (à une constante de normalisation près). On voit donc bien, là-dessus, que mieux la particule sera localisée (par la mesure de Q), plus φ présentera un pic (ou une masse concentrée) et plus cette masse sera étalée ensuite par l'opération de convolution par $g_{[a,b]}$, d'où l'imprécision dans la mesure de P.

On peut voir cela autrement en explicitant la loi de la mesure de P dans l'état φ. Cette loi est donnée par

$$p(\varphi,P,\omega) = (E^P(\omega)\varphi|\varphi) = (\overline{\mathscr{F}}\, 1_\omega \hat{\varphi}|\varphi)$$

$$= (\overline{\mathscr{F}}\, 1_\omega \hat{\varphi}|\overline{\mathscr{F}}\hat{\varphi}) = (1_\omega \hat{\varphi}|\hat{\varphi})$$

autrement dit, c'est exactement la mesure $|\hat{\varphi}|^2 dx$. On remarque donc que si φ gouverne le comportement de la mesure de Q, c'est $\hat{\varphi} = \mathscr{F}\varphi$ qui gouverne celui de la mesure de P. Or si φ tend, au moins formellement, vers une masse de Dirac δ_t, ce qui assimile la particule à un corpuscule placé au point t, alors $\hat{\varphi}$ tend vers la fonction $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-itx}$, ce qui assimile la particule à une onde. On voit donc apparaître, par ce cas limite, la dualité onde-corpuscule comme conséquence des propriétés de la transformation de Fourier.

Venons-en maintenant à l'opérateur d'énergie $H = H_o = P^2$, qui s'explicite par $H\varphi = \overline{\mathscr{F}}(Q^2\hat{\varphi})$ sur le domaine d'auto-adjonction

$$D(H) = \{\varphi \in L^2 \ ; \ x^2\, \hat{\varphi} \in L^2\}.$$

Il a évidemment les propriétés spectrales de Q^2, donc son spectre est continu et égal à $[0,+\infty)$, la mesure d'une énergie ne pouvant être que positive ou nulle. Quant à la loi de la mesure de H dans l'état φ, elle s'obtient aisément puisque la mesure spectrale $E^H(.)$ est la mesure image de la mesure spectrale $E^P(.)$ par l'application $x \to x^2$. Elle est donc donnée pour $\omega \subset [0, \infty)$ par

$$p(\varphi,H,\omega) = \int_{\omega'} |\hat{\varphi}|^2 dx \quad \text{où} \quad \omega' = \{x,\ x^2 \in \omega\}$$

ce qui donne encore par un court calcul :

$$p(\varphi,H,\omega) = \int_\omega [\,|\hat{\varphi}|^2(\sqrt{z}) + |\hat{\varphi}|^2(-\sqrt{z})\,]\,\frac{dz}{2\sqrt{z}}$$

explicitant ainsi la densité sur $[0,\infty)$ de la mesure $p(\varphi,H,.)$.

Exercice. En mesurant l'énergie de la particule dans l'état φ, on obtient une valeur $\lambda \in [a,b]$ avec $0 < a < b$. Montrer qu'après la mesure, la particule est dans l'état ψ, où ψ est proportionnelle à la fonction

$$\frac{\sin x\sqrt{b} - \sin x\sqrt{a}}{x} * \varphi .$$

Nous en resterons là pour l'étude de la particule libre. Une constatation s'impose : nous n'avons trouvé aucun résultat de "quantification" à proprement parler, c'est-à-dire aucun opérateur (en particulier celui de l'énergie) à spectre discret, et par ailleurs la théorie est passablement plus compliquée que la théorie classique du mouvement uniforme ! Ces réserves vont disparaître dans l'exemple suivant.

Exemple 2 : L'oscillateur harmonique à une dimension. - C'est là un cas très important pour la physique car il sert de modèle pour l'oscillateur à trois dimensions, lequel permet d'étudier le comportement de systèmes physiques couplés : molécules di-atomiques, système de deux molécules. Son importance tient aussi au fait que (comme pour l'étude de l'atome d'hydrogène) les calculs peuvent être menés jusqu'au bout et donnent des résultats précis confirmés par l'expérience. Enfin il permet de très vastes variations pour l'étude de situations plus complexes (couplages d'une infinité d'oscillateurs, mélange statistique d'oscillateurs et théorie du corps noir, perturbation par divers potentiels). En particulier le lien avec la théorie du corps noir (qui est à l'origine de la découverte des quanta d'énergie par Max PLANCK en 1900), donc la relation directe avec la physique, a suggéré, grâce aux facilités du calcul, la mise en forme des premiers axiomes de la mécanique quantique par HEISENBERG, Max BORN et SCHRÖDINGER dans les années 1925-1926, après l'énoncé, presque simultané, de la généralité de la dualité onde-corpuscule par DE BROGLIE en 1924.

Avec des unités mathématiquement bien choisies (mais qui ont le tort de faire disparaître la constante de Planck des calculs, donc de faire disparaître la possibilité d'interpréter la mécanique classique comme un cas limite de la mécanique quantique), on étudie une particule en mouvement sur $\mathbb{R}$, sous l'action d'un potentiel d'attraction proportionnel à x^2. Cela revient à compléter l'hamiltonien $H_o = P^2$ du cas libre en lui rajoutant un terme en $X^2 = Q^2$, d'où l'opérateur d'énergie $H = P^2+Q^2 = Q^2+P^2$, agissant sur le même espace $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$. La théorie se fait en introduisant les deux opérateurs fondamentaux

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q+iP) = \frac{1}{\sqrt{2}}(X+D) \quad \text{et} \quad A^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q-iP) = \frac{1}{\sqrt{2}}(X-D).$$

Considérons que le domaine (au moins provisoire) de tous ces opérateurs est l'espace $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ de Schwartz et rappelons que

$$[Q,P] = QP - PQ = iI.$$

Alors en posant $N = A^*A$, appelé "opérateur nombre", on a les relations

(1) $$N = A^*A \quad ; \quad H = 2N+I \quad ; \quad [A,A^*] = I$$

(2) $$AA^* = \frac{1}{2}(H+I) \quad ; \quad A^*A = N = \frac{1}{2}(H-I).$$

De l'égalité $[A,A^*] = I$ on déduit, par une récurrence immédiate la relation

(3) $$[A,(A^*)^m] = m(A^*)^{m-1} \quad \text{pour } m \geq 1.$$

Introduisons maintenant la fonction gaussienne

(4) $$\varphi_o(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \exp(-\frac{t^2}{2})$$

choisie telle que $\int |\varphi_o|^2 dt = \|\varphi_o\|_2^2 = 1$, et remarquons que $D\varphi_o = -X\varphi_o$, donc $A\varphi_o = 0$. On a alors le résultat :

(6.1.9) <u>THEOREME.</u> - *La suite des fonctions*

$$\varphi_m = \frac{1}{\sqrt{m!}} (A^*)^m \varphi_o$$

constitue la base orthonormale des fonctions d'Hermite dans l'espace $L^2(\mathbb{R})$.

Preuve. - Posons $\tilde{\varphi}_m = (A^*)^m \varphi_o$ pour simplifier. On a déjà pour $n \geqslant 1$, en tenant compte de $A\varphi_o = 0$:

$$\begin{aligned}(\tilde{\varphi}_m|\tilde{\varphi}_n) &= (AA^{*m} \varphi_o|A^{*(n-1)}\varphi_o)\\ &= ([A,A^{*m}]\varphi_o|A^{*(n-1)}\varphi_o)\\ &= m(A^{*(m-1)}\varphi_o|A^{*(n-1)}\varphi_o)\\ &= m!\ \delta_{m,n} \quad \text{si} \quad m \geqslant n \geqslant 1\end{aligned}$$

d'où l' orthonormalité de la suite (φ_n), $n \geqslant 0$. Il reste à voir que c'est bien la base d'Hermite. Or pour $f \in \mathscr{S}$ on a

$$D[\exp(-\frac{x^2}{2})f] = \exp(-\frac{x^2}{2})(Df-Xf)$$

d'où les relations

$$A^*f = -\frac{1}{\sqrt{2}} \exp(\frac{x^2}{2})D[\exp(-\frac{x^2}{2})f] \tag{5}$$

$$(A^*)^m f = (-\frac{1}{\sqrt{2}})^m \exp(\frac{x^2}{2})D^m [\exp(-\frac{x^2}{2})f]. \tag{6}$$

En faisant $f = \varphi_o$, on obtient

$$\begin{aligned}\varphi_m(x) &= \varphi_o(x) \frac{H_m(x)}{(2^m m!)^{1/2}}\\ H_m(x) &= (-1)^m \exp(x^2)D^m[\exp(-x^2)]\end{aligned} \tag{7}$$

ce qui permet de reconnaître les polynômes d'Hermite. □

On déduit de là toutes les conséquences importantes :

(6.1.10) <u>COROLLAIRE 1</u> :

a) On a $A^*\varphi_m = \sqrt{m+1}\ \varphi_{m+1}$ *et* $A\varphi_m = \sqrt{m}\ \varphi_{m-1}$, *ce qui permet* *de dire que* A^* *est l'opérateur de création et* A *l'opérateur d'annihilation (ou de destruction).*

b) On a $N\varphi_m = m\varphi_m$ *et* $H\varphi_m = (2m+1)\varphi_m$, *ce qui justifie l'appellation d'opérateur nombre pour* N.

(6.1.11) COROLLAIRE 2. - *La base orthonormale d'Hermite* (φ_n) *est propre pour l'hamiltonien* H, *de sorte que le spectre de* H *est discret et formé des nombres*

$$E_m = 2m+1$$

Dans l'oscillateur harmonique quantique, l'énergie est donc quantifiée. L'état fondamental φ_o *correspond à la plus basse énergie et cette énergie n'est pas nulle, puisqu'elle est égale au demi-quantum d'énergie, si l'on appelle quantum d'énergie la quantité* $E_{m+1} - E_m$ *nécessaire minimum pour changer de niveau d'énergie.*

On comprend mieux maintenant pourquoi A^* est l'opérateur de création (d'un niveau d'énergie) et A celui de destruction. Quant à N, ses niveaux propres lui donnent justement les valeurs m.

Le corollaire 2 permet encore de voir que le domaine d'auto-adjonction de H est clairement défini par les conditions

$$D(H) = \{f \in L^2 \; ; \; \sum_o^\infty (2m+1)^2 |(f|\varphi_m)|^2 < +\infty\}$$

et la liaison avec $\mathcal{S}$ est claire aussi puisque

$$\mathcal{S} = D^\infty(H) = \bigcap_{k \geq 1} D(H^k).$$

Etude des observables P et Q dans les états stationnaires.

La question se pose de savoir comment se comportent P et Q dans chacun des états φ_m, appelés états stationnaires, et correspondant aux niveaux d'énergie E_m. La réponse est fournie avec les calculs de l'exemple 1, couplés avec la propriété suivante des fonctions d'Hermite.

(6.1.12) PROPOSITION. - *La transformation de Fourier* $\mathscr{F} = U$, *opérateur unitaire de* $L^2(\mathbb{R})$, *admet les fonctions* φ_m *pour fonctions propres et* $\mathscr{F}\varphi_m = (-i)^m \varphi_m$.

Preuve. - On rappelle que $\mathscr{F}$ est définie ici par

$$\mathscr{F}f(x) = \hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-itx} f(t)\,dt \quad ; \quad f \in \mathscr{S}$$

et que le coefficient $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ choisi garantit, par la formule de Plancherel, le caractère unitaire de $\mathscr{F}$. Il est alors facile de voir, au moins sur l'espace $\mathscr{S}$, que l'on a les relations

$$(8) \qquad iD\mathscr{F} = \mathscr{F}X \quad \text{et} \quad iX\mathscr{F} = \mathscr{F}D$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$(9) \qquad \mathscr{F}A^* = -i\,A^*\mathscr{F} \quad \text{et} \quad \mathscr{F}(A^*)^m = (-i)^m (A^*)^m \mathscr{F}.$$

Il reste à voir que $\mathscr{F}\varphi_\circ = \varphi_\circ$, ce qui est une propriété bien connue de la fonction gaussienne. On a alors $\mathscr{F}\varphi_m = (-i)^m \varphi_m$ avec (9). □

En conséquence on a :

(6.1.13) THEOREME. - *Dans l'état propre* φ_m, *les mesures des observables* Q *et* P *ont la même loi, définie par la densité* $|\varphi_m|^2$

$$p(\varphi_m, Q, .) = p(\varphi_m, P, .) = |\varphi_m|^2 dt.$$

La moyenne et la variance communes sont données par

$$m(Q,\varphi_m) = m(P,\varphi_m) = 0$$
$$v(Q,\varphi_m) = v(P,\varphi_m) = m + \frac{1}{2}\,.$$

Preuve. - La première partie vient du fait que dans l'état $f \in \mathscr{S}$ (ou $f \in L^2$), la loi de Q est $|f|^2 dt$ et celle de P est $|\hat{f}|^2 dt$, donc si $\varphi = \varphi_m$ ces deux lois sont identiques. Par les propriétés de symétrie des polynômes d'Hermite, on a évidemment des moyennes $\int t|\varphi_m|^2 dt = 0$. Quant aux variances $\int t^2 |\varphi_m|^2 dt$, elles se calculent selon

$$v(Q,\varphi_m) = v(P,\varphi_m) = (Q^2\varphi_m|\varphi_m) = (P^2\varphi_m|\varphi_m)$$

$$= \frac{1}{2}((P^2+Q^2)\varphi_m|\varphi_m) = \frac{1}{2}(H\varphi_m|\varphi_m) = \frac{2m+1}{2} . \square$$

On constate que l'inégalité de Heisenberg

$$v(Q,\varphi_m)v(P,\varphi_m) = (m+\frac{1}{2})^2 \geqslant \frac{1}{4}$$

est bien vérifiée, et qu'elle se transforme en égalité pour le niveau fondamental m=0 (oscillateur au "repos").

Nous en resterons là pour les généralités sur l'oscillateur harmonique, en complétant toutefois l'exemple 2, par une étude faisant intervenir (et illustrant donc leur intérêt physique) un opérateur statistique T.

Exemple 3. L'oscillateur harmonique en équilibre thermodynamique.

On étudie ici les propriétés physiques d'un oscillateur harmonique à une dimension en équilibre thermodynamique avec une source de chaleur à la température absolue T (thermostat). On peut montrer, avec les hypothèses de la mécanique statistique, qu'un tel oscillateur ne peut être dans un état pur. On le caractérise en fait par un état mélangé, noté S ici (pour éviter la confusion avec la température T), mélange statistique d'états stationnaires (ou propres) φ_n avec des poids proportionnels à $e^{-E_m/kT}$, où k est la constante de Boltzmann. L'opérateur S s'écrit donc

$$S = \frac{1}{Z} \sum_{m=o}^{\infty} \exp(-\frac{E_m}{kT})\ \varphi_m \otimes \varphi_m$$

soit encore $S = \frac{1}{Z}\exp(-\frac{H}{kT})$, la constante Z étant définie par la condition tr S = 1, d'où

$$(1) \qquad Z = \operatorname{tr} \exp(-\frac{H}{kT}) = \sum_{m=o}^{\infty} \exp(-\frac{E_m}{kT})$$

soit, avec $E_m = 2m+1$ (le quantum d'énergie étant donc égal à 2)

$$Z = \frac{\exp(-\frac{1}{kT})}{1-\exp(-\frac{2}{kT})} \ . \tag{2}$$

Si l'on veut maintenant définir la valeur moyenne de l'énergie dans l'état S, on obtient

$$m(H,S) = tr(HS) = \frac{1}{Z} \sum_{m=o}^{\infty} (2m+1)\exp(-\frac{2m+1}{kT}) .$$

En posant $r = \exp(-\frac{1}{kT})$ pour simplifier, on doit calculer

$\sum_{o}^{\infty}(2m+1)r^{2m+1} = rh'(r)$ avec $h(r) = \sum_{o}^{\infty} r^{2m+1} = \frac{r}{1-r^2}$, d'où la valeur, après simplification par Z

$$m(H,S) = \frac{1+r^2}{1-r^2} = \coth \frac{1}{kT} \ . \tag{3}$$

Sans vouloir aller beaucoup plus loin signalons que cette formule est le point départ de la théorie du rayonnement du corps noir, retrouvant assez facilement les résultats, d'ailleurs conformes à l'expérience, que PLANCK avait obtenus avec sa célèbre hypothèse des quanta.

On remarquera toutefois que pour T=0 (c'est-à-dire au zéro absolu) il reste une énergie moyenne "de repos", égale à un demi-quantum. On retrouve la même situation que pour l'étude de l'état fondamental φ_o de l'oscillateur harmonique.

Pour terminer donnons encore un calcul, qui soulève des questions intéressantes. La loi du déplacement Q (qui est la même que celle de P) dans l'état statistique S est donnée par

$$\begin{aligned} p(S,Q,\omega) &= tr(E^Q(\omega)S) = tr(SE^Q(\omega)) \\ &= \sum_{m=o}^{\infty} (E^Q(\omega)\varphi_m | S\varphi_m) . \end{aligned}$$

Mais $S\varphi_m = \frac{1}{Z} r^{2m+1} \varphi_m = \frac{1}{1-r^2} r^{2m} \varphi_m$, donc

$$p(S,Q,\omega) = \frac{1}{1-r^2} \sum_{m=o}^{\infty} r^{2m}(1_\omega \varphi_m | \varphi_m)$$

$$= \frac{1}{1-r^2} \int_\omega \sum_{m=o}^{\infty} r^{2m} \varphi_m(x)^2 dx.$$

On voit donc que cette loi est en réalité définie par une densité g_Q :

(4) $$g_Q(x) = \frac{1}{1-r^2} \sum_{m=o}^{\infty} r^{2m} \varphi_m(x)^2$$

et le problème se pose de savoir si on peut simplifier l'expression obtenue. Or la réponse est positive en vertu d'une formule bien connue, en théorie des polynômes d'Hermite, qui est la formule de Mehler, explicitant complètement le noyau

$$K(r,x,y) = \sum_{m=o}^{\infty} r^m \varphi_m(x)\varphi_m(y)$$

selon (avec $|r| < 1$)

(5) $$K(r,x,y) = \frac{1}{\sqrt{\Pi}} \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \exp\left\{- \frac{(1+r^2)(x^2+y^2)-4rxy}{2(1-r^2)}\right\}.$$

Pour y=x, on obtient la formule simplifiée

(6) $$K(r,x,x) = \frac{1}{\sqrt{\Pi}} \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \exp\left\{- \frac{1-r}{1+r} x^2\right\}.$$

En changeant r en r^2 et en revenant à (4) on obtient

(7) $$g_Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \frac{1}{\sigma} \exp(- \frac{x^2}{2\sigma^2}) \qquad \text{avec} \quad \sigma^2 = \frac{1}{2} \frac{1+r^2}{1-r^2}$$

ce qui donne le résultat suivant :

(6.1.14) PROPOSITION. - *Les variables* Q *et* P *suivent, dans l'équilibre thermodynamique à la température* T, *la même loi gaussienne centrée, de variance*

$$v = \sigma^2 = \frac{1}{2} \coth \frac{1}{kT} .$$

Ce résultat est tout à fait compatible avec l'égalité (3), car $H = P^2+Q^2$ implique $m(H) = 2v$. Il l'est aussi avec les hypothèses statistiques de départ (choix de S), puisque les déplacements sont régis par le hasard. Ce qui est plus intéressant est le comportement de σ^2 quand T varie. En effet pour $T \downarrow 0$ (ou $T=0$), on obtient $\sigma^2 = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire que $g_Q(x) = \varphi_\circ(x)^2$, en accord avec le fait (déjà signalé pour l'énergie) que S n'est autre que l'état fondamental. Avec les unités choisies le nombre $\frac{1}{2}$ représente donc la localisation de la molécule qui vibre, c'est-à-dire est de l'ordre de la dimension de cette molécule. Lorsque T augmente, on voit maintenant que σ^2 augmente aussi, pour devenir infini quand $T \uparrow \infty$. On conçoit donc que, dès que σ^2 atteint une valeur $\frac{M}{2}$, où M est une constante de proportionnalité donnée par le physicien, la molécule est suffisamment "délocalisée" pour qu'on puisse admettre que la température de fusion a été atteinte. Toutes ces questions, dans le détail desquelles nous ne pouvons entrer, sont reliées à la théorie de la chaleur spécifique des solides.

Pour terminer donnons quelques propriétés des polynômes d'Hermite sous forme d'exercice.

(6.1.15) EXERCICE :

a) Expliciter les polynômes $H_\circ$, H_1, H_2.

b) Vérifier la formule

$$\exp(2rx-r^2) = \sum_{o}^{\infty} \frac{r^m H_m(x)}{m!}$$

c) En déduire le système des égalités :

$$H_{m+1} = 2x\, H_m - H'_m$$

$$H'_m = 2m\, H_{m-1}$$

$$H_{m+1} = 2x\, H_m - 2m\, H_{m-1}$$

$$H''_m = 2x\, H'_m - 2m\, H_m\ .$$

d) *Prouver l'égalité* $H_m(x) = 2^m \int (x+it)^m \exp(-t^2)\frac{dt}{\sqrt{\pi}}$.

e) *En déduire la formule de Mehler.*

f) *Utiliser la formule de Mehler pour expliciter le noyau* $\mathcal{S}(x,y)$ *de l'opérateur statistique* S, *et vérifier que* $S = \varphi_o \otimes \varphi_o$ *pour* T=0.

6.2 L'EQUATION DE SCHRÖDINGER.

Pour expliquer la "dynamique quantique", c'est-à-dire l'évolution dans le temps d'un système quantique, on admet des hypothèses simplificatrices. Le fait essentiel qui demeure est l'aspect déterministe de l'évolution. A partir de là l'analyse est semblable à celle de l'évolution d'un système classique. En clair si l'on suppose le système dans un état $T \in \mathcal{E}$ au temps t_1, alors il sera dans un état $S \in \mathcal{E}$ au temps t_2, état qui ne dépendra que de T et de la différence de temps (t_2-t_1). On admet donc en fait (et c'est là l'hypothèse simplificatrice qui n'est pas toujours vérifiée) que le système évolue sans mémoire du passé, autrement dit est markovien. On admet encore que les combinaisons convexes d'états sont conservées, donc que S dépend "linéairement" de T. Il suit que la transformation $T \to S$ se traduit mathématiquement par l'action d'un opérateur $V(t_2-t_1)$, agissant dans l'espace $L_1(\mathcal{H})$, et conservant le convexe des états $\mathcal{E}$. Comme V(.) ne dépend que d'une variable, la propriété de semi-groupe doit être réalisée, c'est-à-dire que $V(s+t) = V(s)V(t) = V(t)V(s)$. On rajoute enfin une hypothèse de "réversibilité" par rapport au temps (qui n'est pas toujours vérifiée, surtout lorsque la thermodynamique entre en jeu), ce qui impose à V(.) d'être en réalité un groupe d'opérateurs sur $\mathbb{R}$, de sorte que $V(-t) = V(t)^{-1}$ puisque $V(0) = I$. Ainsi V(t) agit sur $\mathcal{E}$ de façon linéaire et bijective, de sorte que V(t) conserve les états purs. Il existe donc une bijection $U(t) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ telle que

$$V_t(x \otimes x) = U(t)x \otimes U(t)x$$

et comme $\mathrm{tr}\, V_t(x \otimes x) = 1 = \|U(t)x\|^2$, on voit que U(t) est une bijection isométrique. On tire de là par un théorème classique de Banach, que $U(t)$ est linéaire ou antilinéaire. En écrivant

$$V(s+t)(x \otimes x) = V(s)V(t)(x \otimes x)$$
$$= U(s+t)x \otimes U(s+t)x = U(s)U(t)x \otimes U(s)U(t)x$$

on voit alors qu'il existe une fonction $h(s,t)$ telle que

$$(1) \qquad |h(s,t)| = 1 \quad \text{et} \quad U(s+t) = h(s,t)U(s)U(t).$$

Comme U_o est évidemment l'identité sur $\mathcal{H}$, on a $h(0,t) = 1$, et l'égalité $V(s)V(t) = V(t)V(s)$ donne $h(t,s) = h(s,t)$.

En écrivant alors $U(s+t+r)$ de deux manières, on montre que $h(s,t)$ vérifie les conditions, pour tous $r,s,t \in \mathbb{R}$

$$(2) \qquad \begin{cases} h(s+t,r)h(s,t) = h(s,t+r)h(t,r) \\ h(s,t) = h(t,s), \quad |h(s,t)| = 1, \quad h(0,t) = 1 \\ h \text{ est continue} \end{cases}$$

où la dernière condition est exigée par le fait qu'on admet la continuité de l'évolution. Il n'est pas trop difficile de voir que les solutions de (2) sont de la forme $h(s,t) = F(s+t)F(s)^{-1}F(t)^{-1}$ avec F arbitraire telle que $|F(t)| = 1$, de sorte qu'en remplaçant $U(t)$ par $F(t)^{-1}U(t)$, on conserve la propriété $V_t(x \otimes x) = U(t)x \otimes U(t)x$ en ajoutant la propriété de groupe pour $U(t)$. Il en résulte que $U(t) = U(\frac{t}{2})^2$, ce qui assure que $U(t)$ est nécessairement unitaire. En résumé et sous les hypothèses faites, on admet que l'évolution du système est régie par la donnée d'un groupe unitaire fortement continu $U(t)$ agissant sur $\mathcal{H}$ de façon que tout état pur x au temps $t=0$, se retrouve au temps t sous l'état pur $U(t)x$. En termes d'opérateurs on aura $V(t)(x \otimes x) = U(t)x \otimes U(t)x$ soit, en posant $T = x \otimes x$:

$$(3) \qquad V(t)T = U(t)T\,U(t)^{-1}$$

puisque l'opérateur $U(t)T\,U(t)^{-1} = U(t)T\,U(t)^*$ transforme tout vecteur z en le vecteur

$$U(t)[(U(t)^{*}z|x)x] = (z|U(t)x)U(t)x.$$

La formule (3) donne la généralisation souhaitée. D'où

(6.2.1) <u>THEOREME.</u> - *L'évolution d'un système quantique réversible et markovien est régie par la donnée d'un groupe unitaire* $U(t)$ *sur* $\mathcal{H}$ *à un paramètre. Si le système est dans l'état* $T \in \mathcal{E}$ *au temps* t_1, *alors il est (ou il était si* $t_2 < t_1$*) dans l'état*

$$S = U(t_2-t_1)T\ U(t_2-t_1)^{-1}$$

au temps t_2.

<u>L'équation de Schrödinger.</u> - Le groupe $U(t)$ prend le nom de groupe dynamique du système en évolution. Avec (4.5.6) ex. 1, on voit que le groupe $U(t)$ est un groupe de Stone, donc peut se mettre sous la forme

$$U(t) = \exp(-it\ H)$$

où H est un opérateur auto-adjoint (non nécessairement borné). On dit que H est l'opérateur dynamique du système, ou encore l'opérateur d'énergie, ou encore l'opérateur hamiltonien. La donnée de H permet alors, via la théorie des semi-groupes, de mettre l'équation d'évolution (3) sous la forme, dite infinitésimale, d'une équation différentielle. En effet si $x \in \mathcal{H}$ est un état pur, choisi dans le domaine $D(H)$, on sait que l'état pur $x(t)$, qui est l'état du système au temps t lorsqu'il est dans l'état x au temps $t = 0$, est donnné par

$$x(t) = \exp(-it\ H)x.$$

Il vérifie donc l'équation différentielle, dite de Schrödinger

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = -\ iHx(t) \\ \\ x(0) = x \end{cases}$$

<u>Exemple</u>. <u>Etats stationnaires.</u> - Si l'on cherche les états stationnaires, c'est-à-dire tels que $x(t) = x(0)e^{-i\omega t}$, on voit que

$Hx(t) = \omega x(t)$ et en particulier $Hx(0) = \omega x(0)$. Le vecteur $x(0)$ est donc un vecteur propre de H, et ω est nécessairement réel. Ainsi $x(t)$ et $x(0)$ représentent en fait le même état $x(0) \otimes x(0)$, d'où le nom de "stationnaire".

Cas où le spectre de H est ponctuel. - Il existe alors une base orthonormale de $\mathscr{H}$, soit (φ_n), propre pour H. Et si $H\varphi_n = \omega_n \varphi_n$, alors

$$\exp(-it\,H)\varphi_n = e^{-it\omega_n}\,\varphi_n$$

de sorte que l'action du groupe $U(t)$ est complètement explicitée sur $\mathscr{H}$ selon

$$U(t)x = \Sigma\, e^{-it\omega_n}(x|\varphi_n)\varphi_n$$

ce qui donne une importance fondamentale aux états stationnaires, et peut bien entendu s'appliquer à l'oscillateur harmonique.

Liaison avec les observables. - Soit A une observable. Elle n'évolue pas en principe en tant qu'opérateur sur $\mathscr{H}$. Ce qui évolue est la probabilité $p(x,A,.)$ de la mesure de A dans l'état x quand cet état x dépend du temps. Si on prend x pour t=0 on notera $p_t(x,A,.)$ la probabilité

$$p_t(x,A,.) = p(x(t),A,.)$$

qui se calcule selon

$$\begin{aligned} p_t(x,A,.) &= (E(.)x(t)|x(t)) \\ &= (E(.)U(t)x|U(t)x) \end{aligned}$$

soit

$$p_t(x,A,.) = (U(t)^{-1}E(.)U(t)x|x). \tag{5}$$

Cette formule montre qu'on peut considérer un autre point de vue (qui est celui dit de Heisenberg) selon lequel l'état x du système n'évolue pas, mais que c'est l'observable A qui évolue selon $A(t) = U(t)^{-1}A\,U(t)$, puisque la probabilité $p_t(x,A,.)$ est aussi la probabilité $p(x,A(t),.)$. Mais nous ne développerons pas cette idée.

Derrière l'égalité (5) il y a d'autres sources d'intérêt. On peut, par exemple, chercher à connaître les observables A dont la mesure n'évolue pas, observables qu'on pourra appeler H-stationnaires (et qui généralisent ou qui remplacent les intégrales premières des systèmes classiques). Pour cela il faut et il suffit que $p_t(x,A,.)$ soit indépendant de t, ce qui n'a lieu que si

$$U(t)^{-1}E(\omega)U(t) = E(\omega)$$

soit encore $E(\omega)U(t) = U(t)E(\omega)$. Avec les résultats de (4.5.6) ex. 3, on voit que cela signifie que A et T commutent (au sens où leurs mesures spectrales commutent). Ainsi :

(6.2.2) PROPOSITION. - *Pour toute observable* A *qui commute avec* H, *la loi de probabilité de sa mesure dans l'état* x(t) *est indépendante de* t.

Et ceci est évidemment valable pour l'observable particulière A=H. Mais laissons là les généralités (par manque de temps) et pour terminer la question traitons plus en détail les deux exemples donnés au paragraphe 1.

La particule libre. - Ici $H = P^2 = \overline{\mathcal{F}}\, Q^2 \mathcal{F}$, de sorte que

$$\exp(-it\, H) = \overline{\mathcal{F}} \exp(-it\, Q^2)\, \mathcal{F}.$$

Cette égalité signifie que pour toute $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ on a

$$\exp(-it\, H)\varphi = \overline{\mathcal{F}}\, [e^{-itx^2}\, \hat{\varphi}(x)].$$

Il y a une difficulté pour représenter $e^{-itx^2}\, \hat{\varphi}(x)$ comme produit de deux transformées de Fourier car la fonction $\exp(-it\, x^2)$ n'est pas une image de Fourier. On procède alors par approximation en remarquant que pour $z = s+it$, $s > 0$, l'opérateur $\exp(-zQ^2)$, qui opère multiplicativement dans $L^2(\mathbb{R})$, est borné puisque $|\exp(-zx^2)| = \exp(-sx^2) < 1$. On a de plus $\exp(-zx^2) \in L^2(\mathbb{R})$ et, par transformée de Fourier des gaussiennes,

$$\exp(-zx^2) = \mathscr{F}\left\{\frac{1}{\sqrt{4\Pi z}}\exp(\frac{x^2}{4z})\right\}$$

où $\sqrt{z}$ est calculée de façon que $\mathscr{R}e\ \sqrt{z} > 0$. On peut donc définir l'opérateur $\exp(-zH)$ selon

$$(6) \qquad \exp(-zH)\varphi = \frac{1}{\sqrt{4\Pi z}}\exp(-\frac{x^2}{4z}) * \varphi .$$

Maintenant introduisons la mesure spectrale $E(.)$ de H, sans l'expliciter. On a alors pour chaque φ

$$\|\exp(-zH)\varphi - \exp(-it\ H)\varphi\|^2 = \int_0^\infty \left|e^{-zu} - e^{-itu}\right|^2 dE_\varphi(u)$$

$$= \int_0^\infty (1-e^{-su})^2 dE_\varphi(u) \downarrow 0 \qquad \text{quand } s \downarrow 0$$

d'où l'énoncé.

(6.2.3) <u>THEOREME.</u> - *Le groupe dynamique de la particule libre en dimension un (on parle quelquefois du propagateur libre) est explicité selon*

$$[\exp(-itH)\varphi](x) = \lim_{s \downarrow o} \frac{1}{\sqrt{4\Pi it}} \int \exp\left[-\frac{(x-u)^2}{4(s+it)}\right]\varphi(u)du$$

pour toute $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$. *Lorsque* $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ *on peut écrire plus simplement*

$$[\exp(-itH)\varphi](x) = \frac{1}{\sqrt{4\Pi it}} \int \exp\left[i\,\frac{(x-u)^2}{4t}\right]\varphi(u)du.$$

Lorsque $\varphi \in D(H)$, c'est-à-dire lorsque $X^2\ \varphi \in L^2(\mathbb{R})$ et $X^2\ \hat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R})$, on a ainsi résolu l'équation de Schrödinger mise sous la forme

$$\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x,t) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,t).$$

(6.2.4) <u>EXERCICE.</u> - *Etudier la particule libre et le propagateur libre en dimension* n.

<u>L'oscillateur harmonique</u>. - L'opérateur hamiltonien H est ici $H = P^2+Q^2$, et l'on sait qu'il admet la base des fonctions d'Hermite comme base orthonormale propre, avec les énergies propres $E_m = 2m+1$. On a donc immédiatement

$$\exp(-itH) = \sum_{m=o}^{\infty} e^{-(2m+1)it} \varphi_m \otimes \varphi_m .$$

Si l'on veut l'opérateur sous forme intégrale en explicitant son noyau, il faut reprendre la même idée d'approximation qu'à l'exemple 1, basée d'ailleurs sur le fait que dans les deux cas le spectre de H est contenu dans $[0, \infty)$. On introduit donc $z = s+it$, $s > 0$, et l'opérateur

$$\exp(-zH) = \sum_{m=o}^{\infty} e^{-(2m+1)z} \varphi_m \otimes \varphi_m$$

qui est ici de Hilbert-Schmidt puisque

$$\sum_{o}^{\infty}\left|e^{-(2m+1)z}\right|^2 = \sum_{o}^{\infty} e^{-(2m+1)2s} < +\infty.$$

Cet opérateur a donc un noyau $\mathscr{K}_z(x,y)$ qui se calcule en posant $r = e^{-2z}$, de sorte que $r \in \mathbb{C}$ avec $|r| = e^{-2s} < 1$. Le noyau est alors

$$\mathscr{K}_z(x,y) = e^{-z} \sum_{m=o}^{\infty} r^m \varphi_m(x) \varphi_m(y)$$

et se calcule par la formule de Mehler donnée en (6.1). Ainsi

$$\mathscr{K}_z(x,y) = e^{-z} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \exp\left\{- \frac{(1+r^2)(x^2+y^2)-4rxy}{2(1-r^2)}\right\}$$

où $\sqrt{1-r^2}$ est déterminée par la condition que sa partie réelle soit positive. En écrivant le numérateur de l'exposant sous la forme

$$(1+r^2)(x-y)^2 + 2xy(1-r)^2$$

et en revenant à la variable z plutôt que r, on a

$$(7)\qquad \mathscr{K}_z(x,y) = \frac{e^{-z}}{\sqrt{\pi}}\ \frac{1}{\sqrt{1-e^{-4z}}}\ \exp\left\{-\left[\frac{(x-y)^2}{2\text{th } 2z} + \frac{xy}{\text{th } z}\right]\right\}$$

et le raisonnement, développé à l'exemple 1, montre que

$$\exp(-it\ H)\varphi = \lim_{s \downarrow o} \exp(-zH)\varphi \qquad z = s+it$$

d'où :

(6.2.5) <u>THEOREME.</u> - *Le groupe dynamique de l'oscillateur harmonique s'explicite selon*

$$[\exp(-it\ H)\varphi](x) = \lim_{s \downarrow o} \int \mathscr{K}_z(x,y)\varphi(y)dy \qquad z = s+it$$

où $\mathscr{K}_z$ *est le noyau* (7).

<u>Le cas de l'équilibre thermodynamique.</u> - Lorsque le système est dans l'état mélangé S, correspondant à l'équilibre thermodynamique à la température T, il n'y a pas d'évolution (d'où la raison du mot équilibre). En effet on rappelle, avec (6.1), exemple 3, que $S = \frac{1}{Z}\exp(-\frac{H}{kT})$, de sorte que S commute avec le groupe dynamique $U(t) = \exp(-it\ H)$. Il est alors clair que

$$S(t) = U(t)S\ U(t)^{-1} = S$$

si $S = S(0)$. Le problème dynamique se confond dans ce cas avec le problème statique étudié en (6.1).

<u>Remarque</u> : Dans les deux cas étudiés on n'obtient pas pour exp(-it H) un opérateur défini par un noyau ; on se contente de l'approcher par des opérateurs à noyaux d'ailleurs de Hilbert-Schmidt. En fait il n'y a là rien d'étonnant puisque exp(-it H) est un opérateur unitaire (et même l'identité si t=0). Néanmoins les formules "à noyaux" ont l'intérêt de permettre une expression de l'opérateur exp(-it H) qui ne fait pas appel à la mesure spectrale E(.) de H, mesure spectrale qui n'est, en général, pas explicitement connue.

6.3 LIAISON AVEC LE PROBLEME DES MOMENTS.

On voit que dans la théorie précédente on n'utilise en définitive que des opérateurs auto-adjoints (observables, hamiltoniens). De plus pour expliciter la dynamique quantique, il faut construire le groupe de Stone exp(-it H). Il est donc essentiel de savoir que l'opérateur hamiltonien est, sinon auto-adjoint, du moins essentiellement auto-adjoint. En pratique cet hamiltonien est donné par un "hamiltonien libre", représentant l'énergie cinétique du système, auquel on ajoute un potentiel traduisant l'effet des forces extérieures agissant sur le système et les interactions entre les différents éléments du système. On pourra penser, par exemple, à l'opérateur d'énergie de l'atome d'hydrogène (un électron gravitant autour d'un proton) ou d'un atome avec plusieurs électrons interagissant entre eux. La complication de H fait donc que bien souvent H n'est proprement défini que sur un sous-espace D de $\mathcal{H}$, dense dans $\mathcal{H}$, sur lequel l'hamiltonien est "trivialement" symétrique. Il faut alors chercher à savoir si H possède une fermeture $\overline{H} = H^{**}$ auto-adjointe, ce qui implique retrospectivement que D est un coeur pour $\overline{H}$. Depuis le célèbre théorème de KATO, prouvant que l'opérateur hamiltonien d'un atome quelconque à plusieurs électrons, est (essentiellement) auto-adjoint (1951), différentes techniques, qui sont en général des techniques fines de preturbations, ont été mises au point pour résoudre le problème dans des cas de plus en plus généraux. L'une de ces techniques, mais ce n'est pas la plus puissante, relève de la théorie du problème des moments, et c'est pourquoi elle nous intéresse ici.

Revenons donc aux notations générales en désignant par T un opérateur symétrique sur un espace de Hilbert H. On suppose (hypothèse toujours vérifiée si T est auto-adjoint) que le sous-espace $D_\infty = D^\infty(T) = \bigcap D(T^n)$ est dense dans H, et pour chaque $x \in D_\infty$, on introduit l'espace D(x) engendré par les vecteurs $T^n x$, $n \geq 0$, ainsi que son adhérence H(x) dans H. On définit alors l'opérateur T_x sur H(x) par $D(T_x) = D(x)$ et $T_x z = Tz$ si $z \in D(x)$. Par ailleurs, on vérifie comme d'habitude que la suite

$$\alpha(x) = (\alpha_n(x)) \quad \text{avec } \alpha_n(x) = (T^n x|x)$$

est une suite de moments sur $\mathbb{R}$, puisque le critère de Hamburger (5.1.1) est satisfait. On introduit alors la définition :

(6.3.1) DEFINITION. - *On dit que* $x \in D^\infty(T)$ *est un vecteur d'unicité pour* T *lorsque le problème des moments de Hamburger associé à la suite* $\alpha_n(x) = (T^n x|x)$ *est déterminé, c'est-à-dire qu'il n'admet qu'une seule solution.*

On a alors le premier résultat :

(6.3.2) THEOREME. - *Si* $x \in D^\infty(T)$ *est un vecteur d'unicité pour* T, *alors l'opérateur* T_x *est essentiellement auto-adjoint sur l'espace* $H(x)$.

Preuve. - En remplaçant H par $H(x)$ et en posant $D = D(x)$ puis $S = T|_D$ il faut prouver que S est essentiellement auto-adjoint sur H. Soit $\mathscr{P} = \mathbb{C}[X]$ l'espace des polynômes et soit ν l'unique mesure solution du problème des moments associé à la suite $\alpha(x)$. Pour $P \in \mathscr{P}$ on a donc

$$\|P(T)x\|^2 = \int |P|^2 d\nu$$

de sorte que l'application $D \to \mathscr{P}$, définie par $P(T)x \to P$ est une isométrie. Or $\mathscr{P}$ est dense dans $L^2(\nu)$ par (5.3.5) et D l'est aussi dans H, de sorte que l'application précédente se prolonge en une isométrie surjective de H sur $L^2(\nu)$. On peut donc considérer que $H = L^2(\nu)$, $D = \mathscr{P}$, et que S est l'opérateur de multiplication par X sur $\mathscr{P}$. D'après (5.3.4) l'opérateur $\overline{S}$ (qui est l'opérateur T de (5.3.4)) est auto-adjoint, puisqu'on est dans le cas d'unicité du problème des moments. Comme l'opérateur X, défini sur son domaine naturel $D(X) = \{f \in L^2(\nu),\ Xf \in L^2\}$ est aussi auto-adjoint et prolonge S, on a nécessairement $X = \overline{S}$, ce qui démontre le résultat. □

On tire de là le résultat-clé :

(6.3.3) THEOREME (NUSSBAUM, 1965). - *Soit* T *un opérateur symétrique sur* H. *On suppose que* T *possède dans* H *un ensemble total de* *vecteurs d'unicité. Alors* T *est essentiellement auto-adjoint.*

Preuve. - D'après (4.4.6) il suffit de prouver que $\mathrm{Im}(T \pm i)$ est dense dans H. Fixons $x \in H$ et $\varepsilon > 0$. D'après l'hypothèse il existe une combinaison linéaire finie $u = \Sigma\, \alpha_k u_k$ de vecteurs d'unicité u_k, telle que $\|x-u\| < \frac{\varepsilon}{2}$. D'après (6.3.2) et (4.4.6) il existe, pour chaque indice k, un vecteur $v_k \in D(u_k)$ tel que

$$\|u_k - (T+i)v_k\| \leq \frac{\varepsilon}{2} (\Sigma |\alpha_k|)^{-1}$$

ce qui implique que le vecteur $v = \Sigma\, \alpha_k v_k$ est élément de D(T) et que l'on a $\|x - (T+i)v\| \leq \varepsilon$, d'où la densité de Im(T+i), celle de Im(T-i) s'obtenant de la même façon. □

Remarque : La notion de vecteurs d'unicité, quoiqu'assez intéressante à première vue, pêche par deux défauts principaux. D'une part le critère d'unicité du problème des moments dans toute sa généralité, n'est pas des plus faciles à vérifier. D'autre part l'ensemble des vecteurs d'unicité n'a pas, apparemment, de structure bien définie, en particulier ce n'est pas en général un sous-espace vectoriel. C'est pourquoi on préfère souvent affaiblir la portée de (6.3.3) en remplaçant les vecteurs d'unicité par d'autres familles plus faciles à manier (vecteurs analytiques de NELSON, vecteurs quasi-analytiques ou vecteurs semi-analytiques de NUSSBAUM). Pour ne pas alourdir l'exposé, parlons seulement des vecteurs analytiques.

(6.3.4) DEFINITION. - *On dit qu'un vecteur* $x \in D^{\infty}(T)$ *est analytique pour* T *lorsque la série entière en*

$$\sum_{o}^{\infty} \frac{r^n \|T^n x\|}{n!}$$

a un rayon de convergence non nul.

Il est alors clair que l'ensemble $\mathscr{A}(T)$ des vecteurs analytiques de T est un sous-espace vectoriel de H. On vérifiera sans problème que si $T = \int \lambda\, dE(\lambda)$ est auto-adjoint, alors pour tout $z \in H$ les vecteurs $x_a = E([-a,+a])z$ sont analytiques, de sorte que $\mathscr{A}(T)$ est dense dans H lorsque T est auto-adjoint. La réciproque intéressante est fournie avec le théorème de Nelson :

(6.3.5) THEOREME (NELSON, 1959). - *Soit* T *un opérateur symétrique. On considère un sous-espace* $D_0 \subset D(T)$, *invariant par* T *et tel que le sous-espace* $D_0 \cap \mathscr{A}(T)$ *soit dense dans* H. *Alors l'opérateur* $T_0 = T|_{D_0}$ *est essentiellement auto-adjoint. En particulier l'opérateur* $T_{\mathscr{A}}$, *égal à la restriction de* T *au sous-espace* $\mathscr{A}(T)$, *est essentiellement auto-adjoint pourvu que* $\mathscr{A}(T)$ *soit dense dans* H.

Preuve. - Puisque D_0 est invariant par T, on voit que $\mathscr{A}(T_0) = \mathscr{A}(T) \cap D_0$, ce qui ramène à la fin de l'énoncé. Il suffit alors de vérifier, avec (6.3.3), que tout vecteur analytique est un vecteur d'unicité. Soit $x \in \mathscr{A}(T)$ et soit μ une mesure solution du problème des moments

$$\alpha_n = (T^n x|x) = \int t^n d\mu(t).$$

On supposera, pour simplifier, que $\alpha_0=1$, c'est-à-dire que μ est une probabilité. On a alors l'inégalité

$$\int |t|^n d\mu(t) \leq (\alpha_{2n})^{1/2} = (T^{2n}x|x)^{1/2} = \|T^n x\|$$

par Cauchy-Schwarz, de sorte que la série

$$\Sigma \frac{|a|^n}{n!} \int |t|^n d\mu(t)$$

est convergente pour $|a| < r$, r fixé strictement positif. Il suit aisément de là, par Fubini, que la fonction de la variable complexe $z = a+ib$

$$\Phi(z) = \int e^{tz} d\mu(t)$$

transformée de Laplace de μ, est holomorphe dans la bande $|\mathscr{R}e z| < r$, de sorte que la transformée de Fourier de μ est déterminée par les valeurs

$$\Phi^{(n)}(0) = \int t^n d\mu(t) = \alpha_n$$

ce qui implique évidemment l'unicité de μ et justifie en même temps le vocable "vecteur analytique". $\square$

Malheureusement ce résultat, facile à obtenir, n'est pas très puissant et il faut beaucoup le généraliser pour en déduire des moyens, utiles en pratique, pour reconnaître des opérateurs essentiellement auto-adjoints. Nous donnerons toutefois un exemple.

Exemple. - Dans l'étude de l'oscillateur harmonique on a vu que les opérateurs Q,P, N et $H = P^2+Q^2 = 2N+I$ étaient auto-adjoints sur leurs domaines naturels d'auto-adjonction. La question est de savoir jusqu'où l'on peut réduire ces domaines, c'est-à-dire jusqu'à quel espace D_o, pour que les opérateurs restent essentiellement auto-adjoints (D_o est alors un coeur pour l'opérateur étudié). Une réponse est donnée avec :

(6.3.6) PROPOSITION. - *Chacun des opérateurs* Q, P, N, H *est essentiellement auto-adjoint sur le domaine formé du sous-espace* $\mathscr{P}\varphi_o$ *engendré par les fonctions d'Hermite* φ_k, *et aussi sur le domaine formé du sous-espace* $\mathscr{S}$ *de Schwartz.*

Preuve. - Il suffit de vérifier que chaque φ_k est un vecteur analytique pour l'opérateur T égal à l'un des Q, P, H, N. C'est évident pour H et N car $N\varphi_k = k\varphi_k$ et $H\varphi_k = (2k+1)\varphi_k$ donc

$$\|N^n \varphi_k\| = k^n \quad \text{et} \quad \|H^n \varphi_k\| = (2k+1)^n .$$

En écrivant $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}(A+A^*)$ et $P = -\frac{i}{\sqrt{2}}(A-A^*)$ et en se rappelant que

$$A^* \varphi_k = \sqrt{k+1} \quad \varphi_{k+1}, \qquad A \varphi_k = \sqrt{k}\ \varphi_{k-1}$$

il suffit de remarquer, que pour un produit $B_1B_2\ldots B_n$ où chaque B_j est soit A, soit A^*, on a la majoration

$$\|B_1B_2\ldots B_n \varphi_k\| \leqslant [(k+1)\ldots(k+n)]^{1/2} \leqslant [(n+k)!]^{1/2}$$

pour obtenir les majorations

$$\|Q^n \varphi_k\| \leqslant (\sqrt{2})^n [(n+k)!]^{1/2}$$

$$\|P^n \varphi_k\| \leqslant (\sqrt{2})^n [(n+k)!]^{1/2}$$

En résumé les quatre séries $\Sigma \dfrac{r^n\|R^n\varphi_k\|}{n!}$, R = Q, P, H, N, k fixé, sont convergentes pour tout $r > 0$. □

Pour renforcer le résultat précédent donnons, au moins sous forme d'exercices, un énoncé plus élaboré. Tout repose sur la question de l'existence d'extensions auto-adjointes d'un opérateur symétrique semi-borné inférieurement (théorie de Friedrichs et annexes).

EXERCICE 1.

On étudie quelques propriétés des extensions auto-adjointes d'un opérateur symétrique T sur un espace de Hilbert complexe H, lorsque T est supposé semi-borné inférieurement, c'est-à-dire tel qu'il existe une constante $a \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$(1) \qquad (Tx|x) \geq a\|x\|^2 \qquad \text{pour tout } x \in D(T).$$

On suppose évidemment que le domaine $D = D(T)$ est dense dans H.

On suppose ici a=1, de sorte que (1) devient

$$(2) \qquad (Tx|x) \geq \|x\|^2 \qquad \text{pour tout } x \in D(T)$$

et l'on veut prouver que T possède une extension auto-adjointe S vérifiant la même condition (2) pour tout $x \in D(S)$. La construction qui suit est celle, dite de Friedrichs.

1° Montrer qu'on peut supposer T fermé sans changer la condition (2).

2° Pour $x,y \in D = D(T)$, on pose

$$(3) \qquad [x|y] = (Tx|y) \qquad \text{et} \qquad N(x) = [x|x]^{1/2}.$$

Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire et sa norme associée sur D. En notant $D_N = (D,N)$ l'espace préhilbertien obtenu, vérifier que l'injection canonique $j : D_N \to H$ est continue. On désigne maintenant par $\hat{D}_N$ le complété de D_N et par $\hat{j} : \hat{D}_N \to H$ le prolongement canonique continu de j.

a) Etablir que $\hat{j}$ est injective. Dans toute la suite on identifiera $\hat{D}_N$ à un sous-espace de H, de sorte que l'on aura

(4) $$D = D_N \subset \hat{D}_N \subset H$$

b) On fixe $z \in H$ et on considère l'application $L_z : x \to (x|z)$ définie pour $x \in \hat{D}_N$. Montrer que L_z est une forme linéaire continue sur $\hat{D}_N$ et déduire de là qu'il existe dans H un élément Bz tel que

(5) $$Bz \in \hat{D}_N \quad \text{et} \quad (x|z) = [x|Bz] \quad \text{pour tout } x \in \hat{D}_N.$$

Montrer que l'opérateur $B : H \to \hat{D}_N$ est linéaire et continu, de norme $\leqslant 1$. En considérant B comme un opérateur linéaire $H \to H$, montrer que B est hermitien positif, de norme $\leqslant 1$, puis prouver que B est injectif et que son image Im B est dense à la fois dans $\hat{D}_N$ (pour sa propre norme) et dans H.

c) On définit maintenant l'opérateur $S = B^{-1} : D(S) = \text{Im } B \to H$. Prouver que S est auto-adjoint et vérifie la condition (2) pour tout $x \in D(S)$.

d) Prouver l'égalité $[x|BTz] = [x|z]$ pour tous $x,z \in D(T)$ et en déduire que S est une extension de T.

3° Démontrer le théorème de Friedrichs, à savoir que tout opérateur symétrique vérifiant (1) possède (au moins) une extension auto-adjointe vérifiant (1) avec la même constante a. En déduire que les indices de défaut de T sont égaux.

4° On suppose T fermé vérifiant (1) et tel que $n_+(T) = n_-(T) = 1$, et soit $S = \int t\,dE(t)$ une extension auto-adjointe *quelconque*. Montrer que D(T) est de codimension 1 dans D(S) et en déduire que pour tout $\lambda < a$ le projecteur $P_\lambda = E([\lambda, a[)$ est de dimension $\leqslant 1$. On prouvera que si l'on a $x = P_\lambda x \neq 0$, alors $(Sx|x) < a\|x\|^2$ et on regardera ce qui se passe pour deux tels vecteurs orthogonaux. En déduire qu'il existe une constante $b < a$ telle que $E((-\infty, b[) = 0$ et $(Sx|x) \geqslant b\|x\|^2$ pour tout $x \in D(S)$, de sorte que S est bornée inférieurement.

5° On suppose T symétrique fermé semi-borné inférieurement et non auto-adjoint, et soit S une extension auto-adjointe de T, semi-bornée inférieurement. Montrer qu'on peut trouver une extension symétrique fermée T' de T telle que $T' \preccurlyeq S$ et telle que $n_+(T') = n_-(T') = 1$. En déduire que T admet une infinité d'extensions auto-adjointes semi-bornées inférieurement.

Démontrer alors le théorème de Barry SIMON.

(6.5.7) <u>THEOREME</u> (B. SIMON, 1971). - *Tout opérateur symétrique semi-borné inférieurement, qui n'admet qu'une seule extension auto-adjointe semi-bornée inférieurement, est essentiellement auto-adjoint.*

<u>EXERCICE 2.</u>

On fixe l'espace de Hilbert H et un opérateur symétrique T sur H, défini sur un domaine D = D(T) dense dans H, et supposé positif, c'est-à-dire vérifiant la condition (1) avec a=0. On pose

$$D^{\infty}(T) = \bigcap_{n \geqslant 1} D(T^n)$$

1° Montrer que pour tout $x \in D^{\infty}(T)$ on a $(T^n x|x) \geqslant 0$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

2° On dit que $x \in D^{\infty}(T)$ est un vecteur pseudo-analytique de T lorsque la condition suivante est vérifiée :

(6) Il existe $t > 0$ tel que $\displaystyle\sum_{n=o}^{\infty} \frac{t^{2n}(T^n x|x)}{(2n)!} < +\infty$

et on désigne par $\mathscr{P}(T)$ l'ensemble de ces vecteurs.

a) Prouver que tout vecteur analytique est pseudo-analytique.

b) Démontrer que $\mathscr{P}(T)$ est un sous-espace vectoriel de $D^{\infty}(T)$.

c) Prouver encore que $\mathscr{P}(T) \subset \mathscr{P}(T + aI)$ pour tout $a \geqslant 0$.

Dans toute la suite de l'exercice on suppose vérifiée la condition supplémentaire

(7) $\mathscr{P}(T)$ est dense dans H.

3° Soit S une extension auto-adjointe de T, supposée positive (il en existe d'après le théorème de Friedrichs), de mesure spectrale $E^S(.) = E(.)$. On fixe un vecteur $x \in \mathscr{D}(T)$ et soit μ la mesure $\mu = E_x(.) = (E(.)x|x)$.

a) Montrer que μ a son support dans $[0, +\infty)$.

b) En utilisant la majoration $|\cos z| \leqslant \exp[|\mathscr{I}m\, z|]$ pour $z \in \mathbb{C}$, montrer que la fonction

$$\Phi(z) = \int \cos(z\sqrt{u})d\mu(u)$$

est analytique dans une bande convenable $|\mathscr{I}m\, z| < \rho$, avec $\rho > 0$. En déduire que l'intégrale

$$\Phi(t) = \int \cos(t\sqrt{u})d\mu(u)$$

peut, pour tout t réel s'exprimer à partir des nombres $(T^n x|x)$.

c) Soient σ et τ deux mesures positives bornées sur $[0, \infty)$, telles que les intégrales $\int \cos(t\sqrt{u})d\sigma(u)$ et $\int \cos(t\sqrt{u})d\tau(u)$ soient égales pour tout $t \geqslant 0$. Montrer que $\sigma=\tau$.

d) Déduire de b) et c) que T n'admet qu'une seule extension auto-adjointe positive.

4° Démontrer, de façon analogue, que T n'admet qu'une seule extension auto-adjointe semi-bornée inférieurement.

Démontrer alors le théorème suivant, qui généralise légèrement un théorème de MASSON-Mc CLARY (1972) relatif aux vecteurs, dits semi-analytiques, où la condition (6) est écrite en remplaçant $(T^n x|x)$ par $\|T^n x\|$:

(6.3.8) <u>THEOREME.</u> - *Tout opérateur symétrique et positif, qui admet un sous-espace dense de vecteurs pseudo-analytiques, est essentiellement auto-adjoint.*

<u>Exemple.</u> - On introduit dans l'étude de l'oscillateur anharmonique, l'opérateur hamiltonien perturbé

$$H = P^2 + Q^2 + \lambda Q^4 \qquad \lambda > 0$$

par un terme quartique. En reprenant les calculs de (6.3.6), on peut montrer sans difficulté, qu'il existe une constante $M > 0$ telle que, pour toute fonction φ_k d'Hermite on ait la majoration

$$\|H^n \varphi_k\| \leq M^n \, [(4n+k)!]^{1/2}$$

qui fournit alors le fait que chaque φ_k est un vecteur semi-analytique (et a fortiori pseudo-analytique) de H. D'où, avec (6.3.8), l'extension suivante de (6.3.6), qui terminera ce cours :

(6.3.9) PROPOSITION. - *L'opérateur* $H_\lambda = P^2 + Q^2 + \lambda Q^4$, $\lambda > 0$, *est essentiellement auto-adjoint sur chacun des domaines* $\mathscr{P}\varphi_o$ *et* $\mathscr{S}$.

* * *
*

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

CHAPITRES 1 ET 2 :

[1] N. BOURBAKI, *Théories spectrales, chap. 1 et 2*, Hermann, Paris, (1967).

[2] L.H. LOOMIS, *An introduction to Abstract Harmonic Analysis*, Van Nostrand, New-York, (1953).

[3] N. DUNFORD et J.T. SCHWARTZ, *Linear operators I et II*, Interscience Publishers, New-York, (1957).

CHAPITRES 3 ET 4 :

[4] M. REED et B. SIMON, *Methods of modern mathematical physics, I, (Functional Analysis), II (Fourier Analysis, self-adjointness)*, Academic Press, (1975).

[5] F. RIESZ et B.S. NAGY, *Leçons d'Analyse Fonctionnelle*, Gauthier-Villars, Paris, (1953).

CHAPITRE 5 :

[6] M. STONE, *Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 15, (1932).

[7] N.I. AKHIEZER, *The classical moment problem*, Oliver and Boyd, Edimbourg, (1965).

[8] J.A. SHOHAT et J.D. TAMARKIN, *The problem of moments*, Amer. Math. Soc., Math., Surv., 1, (1943).

CHAPITRE 6 :

[9] G.W. MACKEY, *The mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Benjamin Inc., New-York, (1963).

[10] E.G. BELTRAMETTI et G. CASSINELLI, *The Logic of Quantum Mechanics*, Encyclopedia of Math. and its Appl., Addison-Wesley, (1981).

[11] C. COHEN-TANNOUDJI, B. DIU et F. LALOE, *Mécanique quantique I*, Hermann, Paris, (1973).

[12] A. BÖHM, *Quantum Mechanics*, Springer Verlag, Berlin, (1979).

[13] A.E. NUSSBAUM, *Quasi-analytic vectors*, Arkiv für Math., 6-10, (1965), 179-191.

[14] D. MASSON et W.K. Mc CLARY, *Classes of* C^∞ *Vectors and Essential Self-Adjointness*, J. Funct. Analysis, 10, (1972), 19-32.

*