Abdel-Ilah Benabdallah

Générateurs de l'algèbre $\mathcal{U}(G)^K$ avec $G = SO(m)$ ou $SO_o(1, m-1)$ et $K = SO(m-1)$

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1982, fascicule 4B
« Journées d'analyse harmonique », , p. 1-2
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1982___4B_A3_0>

GENERATEURS DE L'ALGEBRE $\mathcal{U}(G)^K$

AVEC $G = SO(m)$ OU $SO_o(1,m-1)$ ET $K = SO(m-1)$

Par Abdel-Ilah BENABDALLAH

(Université Claude Bernard - Lyon-I)

Soient G un groupe de Lie connexe, K un sous-groupe compact de G, π une représentation irréductible de K d'espace V, E le fibré homogène associé à la représentation π, $\Gamma(E)$ l'espace des sections C^∞ de ce fibré, $C^\infty(G,V)^\pi$ l'espace des applications C^∞ de G dans V vérifiant : $f(gk) = \pi(k^{-1})f(g)$, $(g \in G,\ k \in K)$, et enfin $\mathcal{D}_\pi$ l'algèbre complexe des opérateurs différentiels sur E invariants par l'action naturelle de G sur $\Gamma(E)$. Rappelons que $\Gamma(E)$ est en correspondance bijective avec l'espace $C^\infty(G,V)$. Cette correspondance sera notée $\sim$ dans la suite.

Soient aussi $\mathcal{U}(G)$ (resp. $\mathcal{U}(K)$) l'algèbre réelle des opérateurs différentiels sur G (resp. sur K) invariants par les translations à gauche de G, (resp. de K) et $\mathcal{U}(G)^K$ la sous-algèbre de $\mathcal{U}(G)$ formée des éléments de $\mathcal{U}(G)$ qui sont invariants par les translations à droite de K. On note $\mathcal{U}(G) \otimes \mathbb{C}$ (resp. $\mathcal{U}(K) \otimes \mathbb{C}$) la complexifiée de l'algèbre de $\mathcal{U}(G)$ (resp. $\mathcal{U}(K)$), $(\mathcal{U}(G) \otimes \mathbb{C})^K$ le commutant de $\mathcal{U}(K) \otimes \mathbb{C}$ dans $\mathcal{U}(G) \otimes \mathbb{C}$ et enfin $d\pi$ la représentation infinitésimale de π, J le noyau de $d\pi$ dans $\mathcal{U}(K) \otimes \mathbb{C}$ et $J^* = S^*(J)$ où S^* est l'anti-automorphisme principal de $\mathcal{U}(K) \otimes \mathbb{C}$.

Minemura [2] a démontré le résultat suivant : pour $D \in \mathcal{U}(G) \otimes C)^K$, soit $\mu(D)$ l'élément de $\mathcal{D}_\pi$ défini par

$$\widetilde{\mu(D)}u = \tilde{D}u \qquad (u \in \Gamma(E)).$$

Alors $\operatorname{Ker} \mu = (\mathcal{U}(G) \otimes \mathbb{C})^K \cap (\mathcal{U}(G) \otimes \mathbb{C})J^*$ et l'application μ_K définie à partir de μ par passage au quotient est un isomorphisme d'algèbres.

Ce résultat nous montre que l'étude de $\mathscr{D}_{\pi}$ se ramène à celle de $(\mathscr{U}(G) \otimes \mathbb{C})^K$. Nous calculons explicitement les générateurs de l'algèbre réelle $\mathscr{U}(G)^K$ dans le cas où G est le groupe SO(m) ou $SO_o(1, m-1)$ et K le sous-groupe SO(m - 1), $(m \geqslant 3)$. Ces générateurs sont des générateurs de l'algèbre complexe $(\mathscr{U}(G) \otimes \mathbb{C})^K$.

Le résultat obtenu est le suivant :

<u>THEOREME</u>. - *Pour* $G = SO(m)$ ou $SO_o(1, m-1)$ et $K = SO(m-1)$, *l'algèbre* $\mathscr{U}(G)^K$ *admet* (m-1) *générateurs constitués par les générateurs du centre de* $\mathscr{U}(G)$ *et les générateurs du centre de* $\mathscr{U}(K)$. *En particulier cette algèbre est commutative.*

****