

SAMUEL DIEUDONNÉ EKONG

Sur l'algèbre de Poisson des symboles d'une algèbre de polynômes

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1980, tome 17, fascicule 2
, p. 57-77

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1980__17_2_57_0

© Université de Lyon, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR L'ALGÈBRE DE POISSON DES SYMBOLES
D'UNE ALGÈBRE DE POLYNÔMES
par Samuel Dieudonné EKONG

Dans cet article, nous étudions certaines propriétés de l'algèbre des symboles (munie du crochet de Poisson) d'une algèbre de polynômes. Nous explicitons la forme des dérivations (de Poisson) de cette algèbre, ce qui nous permet d'élucider la structure du groupe des automorphismes localement finis.

In this paper, we study some properties of the symbols algebra, under Poisson bracket, of a polynomial algebra in n variables. The form of (Poisson) derivations of such an algebra is given, which able us to elucidate the structure of the group of its locally finite automorphisms.

INTRODUCTION.

On porte actuellement aux algèbres de Poisson un intérêt de plus en plus grand. Introduites pour généraliser le crochet de Poisson que l'on sait construire sur l'espace des fonctions différentiables à valeurs réelles définies sur une variété symplectique, les algèbres de Poisson possèdent une structure particulièrement riche qui a séduit géomètres et algébristes.

Grâce aux travaux de A. Lichnérowicz, [10], [11], M. Flato, [6], [7], A. Avez [1], D. Sternheimer [11], les dérivations et les déformations (au sens de Gerstenhaber) des algèbres de Poisson associées à une variété symplectique sont complètement explicitées.

Les opérateurs différentiels algébriques sur une algèbre associative unifère commutative A , forment une algèbre filtrée dont l'algèbre graduée associée est l'algèbre des symboles de A qu'on peut munir d'une structure d'algèbre de Poisson. Dans cet article, nous nous intéressons à certaines propriétés de ces algèbres ; c'est ainsi que l'étude des dérivations et des automorphismes de l'algèbre de Poisson des symboles d'une algèbre de polynômes à n indéterminées, nous a conduit à l'étude des dérivations et des automorphismes d'une algèbre de Poisson de polynômes à $2n$ indéterminées ; ceci nous a naturellement amené à adopter un point de vue voisin de ceux de L. S. Wollenberg [13], [14], J. Braconnier [5] et A. M. Vinogradov et I. S. Krasil'shchik [12].

Toute ma gratitude à Monsieur le Professeur M. Flato, ses suggestions, remarques et indications avant et pendant l'élaboration de cet article m'ont été particulièrement utiles pour sa réalisation.

1. GÉNÉRALITÉS ET NOTATIONS.

1.2. - Soient K un anneau commutatif unitaire, A une K -algèbre associative, commutative, unifère, $\text{End}_K(A)$, la K -algèbre des endomorphismes du K -module A ; $\text{Der}(A)$ le A -module des K -dérivations de A , $\Omega(A)$, le A -module des K -différentielles de A , $d : A \rightarrow \Omega(A)$, la dérivation canonique de A ; on a un isomorphisme $\phi \rightarrow \phi \circ d$, de $\text{Hom}_A(\Omega(A), A) = \Omega(A)^*$ sur $\text{Der}(A)$; cet isomorphisme permet d'identifier $\text{Der}(A)$ au dual $\Omega(A)^*$ de $\Omega(A)$.

Les applications $(a, \phi) \rightarrow a\phi$ et $(a, \phi) \rightarrow \phi a = a * \phi$ de $A \times \text{End}_K(A)$ dans $\text{End}_K(A)$ définies par $(a\phi)(x) = a\phi(x)$ et $(a * \phi)(x) = \phi(ax)$ pour tout x de A , induisent sur $\text{End}_K(A)$ une structure de A -bimodule.

Notons ad l'application de A dans $\text{End}_K(\text{End}_K(A))$ définie par

$$\text{ad}(a)(\phi) = a \star \phi - a\phi, \quad \forall a \in A, \quad \forall \phi \in \text{End}_K(A)$$

ad est K-linéaire et pour tout a de A, $\text{ad}(a) \in \text{Der}(\text{End}_K(A))$.

1.2. - OPERATEURS DIFFERENTIELS DE A.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et D un endomorphisme du K-module A.

DEFINITION. - On dit que D est un opérateur différentielle d'ordre $\leq n$, si $\forall (a_i)_{0 \leq i \leq n} \in A^{n+1}$

$$\text{ad}(a_0) \circ \text{ad}(a_1) \circ \dots \circ \text{ad}(a_n) (D) = 0$$

pour tout n de \mathbb{N} , on note $\text{Dif}^n(A)$ l'ensemble des opérateurs différentiels de A d'ordre $\leq n$ et on pose

$$\text{Dif}(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Dif}^n(A).$$

$\forall n \in \mathbb{N}$; $\text{Dif}^n(A)$ est un sous-A-bimodule de $\text{End}_K(A)$.

On vérifie aisément que :

$$1^\circ) \quad \forall (m,n) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } m \leq n, \quad \text{Dif}^m(A) \subseteq \text{Dif}^n(A).$$

$$2^\circ) \quad \forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \quad \forall D \in \text{Dif}^m(A), \quad \forall \Delta \in \text{Dif}^n(A), \quad D \circ \Delta \in \text{Dif}^{m+n}(A).$$

où \circ est la composition des applications.

On en déduit alors que $\text{Dif}(A)$ est A-bimodule filtré par $(\text{Dif}^n(A))_{n \in \mathbb{N}}$.

La structure de A-module que nous considérons désormais sur $\text{Dif}^n(A)$ et par conséquent sur $\text{Dif}(A)$ est celle définie par $(a, \phi) \rightarrow a\phi$ (structure de A-module à gauche).

DEFINITION. - On appelle algèbre des symboles de A et on note $\text{Symb}(A)$, l'algèbre graduée $\text{gr}(\text{Dif}(A))$ associée à $\text{Dif}(A)$.

On peut munir $\text{Symb}(A)$ d'une structure d'algèbre de Poisson ; nous nous proposons d'étudier les dérivations et les automorphismes de $\text{Symb}(A)$ munie de sa structure d'algèbre de Poisson.

1.2.1. - OPERATEURS DIFFERENTIELS D'ORDRE ≤ 0 .

Dire que $D \in \text{Dif}^0(A)$, c'est dire que, pour tout $x \in A$, on a $(a * D - aD) = 0$, soit

$D(ax) = aD(x)$; d'où $D(a) = aD(1)$, pour tout $a \in A$; on en déduit alors que D est entièrement déterminé par $D(1)$ et par conséquent l'application $D \mapsto D(1)$ de $\text{Dif}^0(A)$ dans A est un isomorphisme de A-modules au moyen duquel on identifie $\text{Dif}^0(A)$ à A.

1.2.2. - OPERATEURS DIFFERENTIELS D'ORDRE ≤ 1 .

Dire que $D \in \text{Dif}^1(A)$, c'est dire que $D \in \text{End}_K(A)$ et que, quel que soit $(a_0, a_1) \in A^2$, on a

$$D(a_0 a_1) = a_0 D(a_1) + a_1 D(a_0) - a_0 a_1 D(1),$$

on en déduit alors que $D \in \text{Der}(A)$ ssi $D(1) = 0$.

Par récurrence, on établit la

PROPOSITION 1. - $\forall n \in \mathbb{N}$, $D \in \text{Dif}^n(A)$ ssi $\forall (a_0, \dots, a_n) \in A^{n+1}$

$$D(a_0 a_1 \dots a_n) = \sum_{\substack{H \subset I \\ H \neq \emptyset}} (-1)^{\text{Card}(H)-1} a_H D(a_{I-H}) \quad \text{où}$$

$$I = \{0, 1, \dots, n\}, \quad a_H = \prod_{h \in H} a_h, \quad D(a_\emptyset) = D(1).$$

COROLLAIRE. - Si A est une K-algèbre libre de base $(e_i)_{i \in I}$ et $D \in \text{Dif}^n(A)$, alors D est entièrement déterminée par

$$\{D(e_i), D(e_i e_j), D(e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_n})\}_{i, j, i_1, \dots, i_n \in I}$$

DEFINITION. - $\forall D \in \text{Dif}(A) = \bigcup_{n \geq 0} \text{Dif}^n(A)$, $D(1)$ est appelé le terme constant de D et noté $\text{tc}(D)$.
Soit tc_n la restriction de tc à $\text{Dif}^n(A)$ on a la

PROPOSITION 2. -

- a) L'application tc est une forme linéaire sur le A -module $\text{Dif}(A)$.
- b) tc_0 est un isomorphisme de $\text{Dif}^0(A)$ sur A .
- c) tc_1 est un projecteur et on a
 $\text{Dif}^1(A) = A \oplus \text{Der}(A)$.

2. L'ALGÈBRE DES SYMBOLES D'UNE ALGÈBRE DE POLYNÔMES.

Dans toute la suite $A = K[X_1, X_2, \dots, X_n]$

2.1. - $\text{DIF}(A)$.

Soit $D \in \text{Dif}^n(A)$, d'après le corollaire de la proposition 1, D est entièrement déterminé par

$\{D(1), D(X_i), D(X_i X_j), \dots, D(X_{i_1} X_{i_2} \dots X_{i_n})\}_{i, j, i_1, \dots, i_n \in I}$, où

$I = \{1, \dots, n\}$; posons $D(1) = a_0(X_1, \dots, X_n)$, $D(X_i) = a_i(X_1, \dots, X_n)$

$D(X_{i_1} \dots X_{i_k}) = a_{i_1 \dots i_k}(X_1, \dots, X_n)$ on a

$$D(X_i) = a_i(X_1, \dots, X_n) \frac{\partial}{\partial X_i} (X_i) .$$

$$D(X_i X_j) = \begin{cases} a_{ij}(X_1, \dots, X_n) \frac{\partial^2 (X_i X_j)}{\partial X_i \partial X_j} , & \text{si } i \neq j , \\ \frac{1}{2} a_{ij}(X_1, \dots, X_n) \frac{\partial^2 (X_i^2)}{\partial X_i^2} & \text{si } i = j \end{cases}$$

et, de manière plus générale,

$$D(X_{i_1}^{k_1} \dots X_{i_p}^{k_p}) = \frac{a_{i_1 \dots i_p}(X_1, \dots, X_n)}{k_1! \dots k_p!} \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_p} (X_{i_1}^{k_1} \dots X_{i_p}^{k_p})}{\partial X_{i_1}^{k_1} \dots \partial X_{i_p}^{k_p}} ;$$

on en déduit alors que D est de la forme

$$D = \sum_{k_1 + \dots + k_n = 0}^n a_{k_1, \dots, k_n}(X_1, \dots, X_n) \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n}}{\partial X_1^{k_1} \dots \partial X_n^{k_n}}, \text{ ou } (a_{k_1, \dots, k_n}(X_1, \dots, X_n))$$

est une famille d'éléments de A à support fini ; d'où la

PROPOSITION 3. - Pour $n \in \mathbb{N}$, $\text{Dif}^n(A) = \bigoplus_{k_1 + \dots + k_n = 0}^n A \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n}}{\partial X_1^{k_1} \dots \partial X_n^{k_n}}$.

COROLLAIRE 1. - $\text{Dif}(A)$ est un A-module libre de base

$$\left\{ \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n}}{\partial X_1^{k_1} \dots \partial X_n^{k_n}}, 0 < \sum_{i=1}^n k_i \leq m, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

COROLLAIRE 2. - Muni de la composition des applications $\text{Dif}(A)$ est une A-algèbre libre, associative unifère non commutative de base

$$\left\{ \text{id}_A, \frac{\partial^{k_i}}{\partial X_i^{k_i}}, 1 \leq i \leq n ; n, k_i \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Il en résulte alors que :

PROPOSITION 4. - $\text{Dif}(A) = K\{X_1, \dots, X_n, \frac{\partial}{\partial X_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial X_n}\}$, algèbre associative unifère non commutative de polynômes à 2n indéterminées.

2.2. - Symb(A) ET SA STRUCTURE D'ALGÈBRE DE POISSON.

Posons $S_0 = A$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $S_n = \text{Dif}^n(A)/\text{Dif}^{n-1}(A)$;
 on a alors $\text{Symb}(A) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} S_n$; soit gr_n , l'épimorphisme canonique
 $\text{Dif}^n(A) \rightarrow \text{Dif}^n(A)/\text{Dif}^{n-1}(A)$ posons $\text{gr}_0 = \text{id}_A$.

2.2.1. - L'ALGÈBRE ASSOCIATIVE Symb(A).

Le produit de deux éléments Δ_1 et Δ_2 de Symb(A) est défini de la manière suivante :

$$\Delta_1 = \text{gr}_n(D_1), \Delta_2 = \text{gr}_m(D_2) \text{ où } D_1 \in \text{Dif}^n(A) \text{ et } D_2 \in \text{Dif}^m(A)$$

$\Delta_1 \Delta_2 = \text{gr}_n(D_1) \text{ gr}_m(D_2) = \text{gr}_{m+n}(D_1 \circ D_2)$; comme $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m+n \geq 1$ et $\forall (D_1, D_2) \in \text{Dif}^n(A) \times \text{Dif}^m(A)$, $D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1 \in \text{Dif}^{m+n-1}(A)$,
 on en déduit que symb(A) est commutative et par conséquent Dif(A) est une algèbre Hamiltonienne [12] où [5].

Soient $D_1, D_2 \in \text{Dif}^n(A)$ et $\Delta_1 = \text{gr}_n(D_1)$, $\Delta_2 = \text{gr}_n(D_2)$, si $n \geq 1$,
 on a d'après la proposition 3

$$\Delta_1 = \text{Dif}^{n-1}(A) + \sum_{k_1 + \dots + k_n = n} a_{k_1 \dots k_n} (X_1, \dots, X_n) \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n}}{\partial X_1^{k_1} \dots \partial X_n^{k_n}}$$

$$\Delta_2 = \text{Dif}^{n-1}(A) + \sum_{h_1 + \dots + h_n = n} b_{h_1 \dots h_n} (X_1, \dots, X_n) \frac{\partial^{h_1 + \dots + h_n}}{\partial X_1^{h_1} \dots \partial X_n^{h_n}}$$

On voit donc que $\Delta_1 = \Delta_2$ ssi $\forall i, i \in \{1, \dots, n\}$, $h_i = k_i$,

$b_{k_1 \dots k_n} (X_1, \dots, X_n) = a_{k_1 \dots k_n} (X_1, \dots, X_n)$. On peut alors identifier
 $\text{gr}_n(D_1)$ à

$$\sum_{k_1+\dots+k_n=n} a_{k_1\dots k_n}(X_1,\dots,X_n) \frac{\partial^{k_1+\dots+k_n}}{\partial X_1^{k_1}\dots\partial X_n^{k_n}} ; \text{ soit}$$

$$\text{gr}_m(D_2) = \sum_{h_1+\dots+h_n=m} b_{h_1\dots h_n}(X_1,\dots,X_n) \frac{\partial^{h_1+\dots+h_n}}{\partial X_1^{h_1}\dots\partial X_n^{h_n}} \in \text{Symb}(A).$$

Le produit $\text{gr}_n(D_1) \text{gr}_m(D_2)$ est alors identifié à

$$\sum_{t_1+\dots+t_n=m+n} c_{t_1\dots t_n}(X_1,\dots,X_n) \frac{\partial^{t_1+\dots+t_n}}{\partial X_1^{t_1}\dots\partial X_n^{t_n}} \quad \text{où } t_i = k_i + h_i ,$$

$$\sum_{i=1}^n k_i = n , \quad \sum_{i=1}^n h_i = m, \text{ d'où :}$$

PROPOSITION 5. - $\text{Symb}(A) = A \left[\frac{\partial}{\partial X_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial X_n} \right]$.

COROLLAIRE. - $\text{Symb}(A) = K[X_1, \dots, X_n, \frac{\partial}{\partial X_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial X_n}]$.

2.2.2. - L'ALGÈBRE DE POISSON $\text{Symb}(A)$.

Soit ∂ l'application de $\text{Symb}(A)$ dans l'algèbre des endomorphismes du K -module $\text{Symb}(A)$ définie par

$$\partial(\text{gr}_n(D_1))(\text{gr}_m(D_2)) = \text{gr}_{m+n-1}(D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1) \text{ si } m+n \geq 1 \text{ (=0 si } m=n=0).$$

∂ est K -linéaire et pour tout $\text{gr}_n(D_1)$ de $\text{Symb}(A)$, $\partial(\text{gr}_n(D_1))(\text{gr}_n(D_1)) = 0$

et $\partial(\text{gr}_n(D_1))$ est une dérivation de $\text{Symb}(A)$; on définit alors le crochet de Poisson dans $\text{Symb}(A)$ en posant :

$$[\text{gr}_n(D_1), \text{gr}_m(D_2)] = \partial(\text{gr}_n(D_1))(\text{gr}_m(D_2)) = \text{gr}_{m+n-1}([D_1, D_2]), \text{ où } [D_1, D_2]$$

est le crochet de Lie usuel dans $\text{End}_K(A)$.

Notons $\frac{\partial}{\partial X_i} = Y_i$, $1 \leq i \leq n$, et $S = \text{Symb}(A)$ il vient

$S = K[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n]$; le crochet de Poisson ci-dessus est alors le crochet de Poisson défini par

$$[f, g] = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial Y_i} \frac{\partial g}{\partial X_i} - \frac{\partial f}{\partial X_i} \frac{\partial g}{\partial Y_i}, \quad f, g \in S \text{ c'est donc au signe}$$

près le crochet de Poisson usuel et c'est ce dernier que nous utiliseront dans toute la suite.

2.2.3. DERIVATIONS DE S.

Notons (S, ∂) l'algèbre S munie de sa structure d'algèbre de Poisson et $\mathcal{D}er(S)$ l'ensemble des dérivations (de Poisson) de (S, ∂) ; $\chi \in \mathcal{D}er(S)$ ssi

- i) χ est K -linéaire
- ii) $\forall f, g \in S, \chi([f, g]) = [\chi(f), g] + [f, \chi(g)]$.

$\mathcal{D}er(S)$ est un K -module qui muni du crochet de Lie $[X_1, X_2] = X_1 \circ X_2 - X_2 \circ X_1$ est une K -algèbre de Lie.

Puisque le crochet de Poisson vérifie l'identité de Jacobi, on en déduit alors de ce qui précède que :

- a) $\forall s \in S, \partial(s) \in \mathcal{D}er(S)$;
- b) ∂ est un morphisme de Poisson i.e : $\forall s_1, s_2 \in S,$
 $\partial([s_1, s_2]) = [\partial(s_1), \partial(s_2)].$

DEFINITION. - On appelle dérivations canoniques de S , les éléments de $\text{Der}(S) \cap \mathcal{D}er(S)$.

On note $\text{Can}(S) = \text{Der}(S) \cap \mathcal{D}er(S)$.

$\text{Can}(S)$ est alors une K -algèbre.

On sait (voir par exemple Bourbaki [4]) que $\text{Der}(S)$ est un S -module libre de base

$$\left\{ \text{id}_S, \frac{\partial}{\partial X_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial X_n}, \frac{\partial}{\partial Y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial Y_n} \right\};$$

tout élément de $\text{Der}(S)$ est alors de la forme

$$\chi = \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial}{\partial X_i} + v_i \frac{\partial}{\partial Y_i}, \quad u_i, v_i \in S..$$

On établit sans peine la

PROPOSITION 6. - Soit $\chi = \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial}{\partial X_i} + v_i \frac{\partial}{\partial Y_i} \in \text{Der}(S)$, χ est un élément de $\text{Can}(S)$ ssi les relations suivantes sont satisfaites.

$$a) \frac{\partial u_i}{\partial X_j} = - \frac{\partial v_j}{\partial Y_i}$$

$$b) \frac{\partial u_i}{\partial Y_j} = \frac{\partial u_j}{\partial Y_i}$$

$$c) \frac{\partial v_i}{\partial X_j} = \frac{\partial v_j}{\partial X_i}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

PROPOSITION 7. - Si la caractéristique de K est nulle

$$\text{Can}(S) = \partial(S).$$

PREUVE. - D'après ce qui précède, on a $\partial(S) \subset \text{Can}(S)$; réciproquement soit :

$$D = \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial}{\partial X_i} + v_i \frac{\partial}{\partial Y_i},$$

un élément de $\text{Can}(S)$ alors u_i et v_i , $1 \leq i \leq n$, vérifient les relations de la proposition 6 ; D étant entièrement déterminé par DX_i et DY_i , $1 \leq i \leq n$, on en déduit que $D \in \partial(S)$ ssi $\exists s \in S$ tel que

$$\frac{\partial s}{\partial X_i} = v_i$$

$$\frac{\partial s}{\partial Y_i} = u_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Comme les u_i et v_i sont connus et que K est de caractéristique σ , on en déduit que le système ci-dessus possède au moins une solution dans S , donc $D = \partial(S)$ d'où $\text{Can}(S) \subset \partial(S)$ et par conséquent $\text{Can}(S) = \partial(S)$.

Nous supposons désormais que la caractéristique de K est nulle.

PROPOSITION 8. - (L.S. Wollenberg [13]).

$\chi \in \text{Der}(S)$ est une dérivation intérieure ssi $\chi(1) = 0$.

PREUVE. - Soit $\chi \in \text{Der}(S)$ alors $\chi(1) \in K$ et si $\chi = \partial(s)$, $\chi(1) = 0$; réciproquement si $\chi(1) = 0$, on a

$$\frac{\partial \chi(X_k)}{\partial Y_i} = \frac{\partial \chi(X_i)}{\partial Y_k}$$

(1)

$$\frac{\partial \chi(X_k)}{\partial X_i} = -\frac{\partial \chi(Y_i)}{\partial Y_k}, \quad 1 \leq i, k \leq n$$

pour montrer que χ est une dérivation intérieure, il suffit alors de prouver que $\chi \in \text{Can}(S)$; on commence donc par établir que :

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\} \quad \forall p, q \in \mathbb{N}^*, \quad \chi(X_i^p Y_j^q) = p X_i^{p-1} Y_j^q \chi(X_i) + q X_i^p Y_j^{q-1} \chi(Y_j).$$

Pour le démontrer, on calcule $\chi([X_i Y_j, X_k])$, $1 \leq k \leq n$; compte tenu des relations (1) on a

$$\frac{\partial \chi(X_i Y_j)}{\partial Y_k} = X_i \frac{\partial \chi(Y_j)}{\partial Y_k} + Y_j \frac{\partial \chi(X_i)}{\partial Y_k} + \delta_{jk} \chi(X_i)$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker ; on en déduit alors que

$$\chi(X_i Y_j) = X_i \chi(Y_j) + Y_j \chi(X_i) + \phi(X_1, \dots, X_n).$$

On calcule ensuite $\chi([X_i Y_j, Y_k])$ et on voit comme ci-dessus que le polynôme ϕ ne dépend pas des X_i ; c'est donc le terme constant du polynôme $\chi(X_i Y_j)$ donc $\phi \equiv 0$, d'où

$$\chi(X_i Y_j) = X_i \chi(Y_j) + Y_j \chi(X_i), \quad 1 \leq i, j \leq n$$

on prouve alors par récurrence que $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \forall p, -q \in \mathbb{N}^*$

$$\chi(X_i^p Y_j^q) = p X_i^{p-1} Y_j^q \chi(X_i) + q X_i^p Y_j^{q-1} \chi(Y_j).$$

On suppose ensuite que la relation est vraie pour t indéterminées $2 < t < 2n$ donc $\forall p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $p < n$ et $q < n$, et $h_i, k_i \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq i \leq n$, on a

$$\begin{aligned} \chi(X_{i_1}^{k_1} \dots X_{i_p}^{k_p} Y_{j_1}^{h_1} \dots Y_{j_q}^{h_q}) &= \sum_{r=1}^n k_r X_{i_1}^{k_1} \dots X_{i_{r-1}}^{k_{r-1}} X_{i_r}^{k_r-1} X_{i_{r+1}}^{k_{r+1}} \dots X_{i_p}^{k_p} Y_{j_1}^{h_1} \dots Y_{j_q}^{h_q} \chi(X_{i_r}) + \\ &+ \sum_{s=1}^q h_s X_{i_1}^{k_1} \dots X_{i_p}^{k_p} Y_{j_1}^{h_1} \dots Y_{j_{s-1}}^{h_{s-1}} Y_{j_s}^{h_s-1} Y_{j_{s+1}}^{h_{s+1}} \dots Y_{j_q}^{h_q} \chi(Y_{j_s}). \end{aligned}$$

Montrons que la formule reste vraie pour $t+1$ indéterminées ; calculons par exemple

$$\chi(X_{i_1}^{k_1} \dots X_{i_p}^{k_p} X_{i_{p+1}}^{k_{p+1}} Y_{j_1}^{h_1} \dots Y_{j_q}^{h_q}) ; \text{ on a}$$

$$\chi([X_{i_1}^{k_1} \dots X_{i_p}^{k_p} Y_{j_1}^{h_1} \dots Y_{j_q}^{h_q}, Y_{i_p} X_{i_{p+1}}^{k_{p+1}}]) = [\chi(E), Y_{i_p} X_{i_{p+1}}^{k_{p+1}}] + [E, \chi(Y_{i_p} X_{i_{p+1}}^{k_{p+1}})],$$

où $E = X_{i_1}^{k_1} \dots X_{i_p}^{k_p} Y_{j_1}^{h_1} \dots Y_{j_q}^{h_q}$; on peut supposer $q \leq p$ (sinon on

calcule par exemple,

$$\chi([X_{i_1}^{k_1} \dots X_{i_p}^{k_p} X_{i_q}^{k+1} Y_{j_1}^{h_1} \dots Y_{j_{p+1}}^{h_{p+1}} \dots Y_{j_q}^h, Y_{i_q}]) \quad \text{on a donc}$$

$$(k_p+1)\chi(X_{i_1}^{k_1} \dots X_{i_p}^{k_p} X_{i_{p+1}}^{k_{p+1}} Y_{j_1}^{h_1} \dots Y_{j_q}^{h_q}) = X_{i_{p+1}}^{k_{p+1}} \frac{\partial \chi(E)}{\partial X_{i_p}} - k_{p+1} Y_{i_p} X_{i_{p+1}}^{k_{p+1}} \frac{\partial \chi(E)}{\partial Y_{i_{p+1}}} +$$

$$+ \sum_{s=1}^n \frac{\partial E}{\partial X_s} \frac{\partial \chi(Y_{i_p} X_{i_{p+1}}^{k_{p+1}})}{\partial Y_s} - \sum_{s=1}^n \frac{\partial E}{\partial Y_s} \frac{\partial \chi(Y_{i_p} X_{i_{p+1}}^{k_{p+1}})}{\partial \partial X_s}.$$

On applique alors l'hypothèse de récurrence au 2-ème membre et on obtient la relation désirée.

On pourra trouver une autre démonstration de cette proposition dans [13].

THEOREME 1. - *Le sous-module $\partial(S)$ de $\mathcal{D}er(S)$ est de codimension 1.*

PREUVE. - Notons encore tc la forme linéaire sur $\mathcal{D}er(S)$ définie par $tc(\chi) = \chi(1) \forall \chi \in \mathcal{D}er(S)$; l'inclusion $\partial(S) \subset \ker(tc)$ découle de la proposition ci-dessus ; montrons que $\ker(tc) = \partial(S)$; il suffit de prouver que tc n'est pas la forme linéaire nulle ce qui revient à prouver que l'ensemble des dérivations de Poisson extérieures est non vide.

Soit D un opérateur différentiel de S d'ordre ≤ 1 de la forme

$$D = \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial}{\partial X_i} + v_i \frac{\partial}{\partial Y_i} + id_S, \quad u_i, v_i \in S$$

déterminons des conditions suffisantes sur u_i et v_i pour que $D \in \mathcal{D}er(S)$; si on fixe $v_i = 0, 1 \leq i \leq n$, il suffit de prendre $u_i = -X_i$;

$D_0 = \text{id}_S - \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial X_i} \in \mathcal{D}er(S)$ et $D_0(1) \neq 0 \Leftrightarrow D_0 \notin \ker(tc)$ donc

$\ker(tc) \neq \mathcal{D}er(S)$ d'où $\ker(tc) = \mathfrak{a}(S)$.

On en déduit alors que $\mathfrak{a}(S)$ est de codimension 1. c.q.f.d.

REMARQUE. - Ce résultat a d'abord été établi par L.S. Wollenberg [13] pour une algèbre de polynômes à $2n$ indéterminées à coefficients réels ou complexes ; on voit donc qu'il s'étend à des anneaux K plus généraux.

COROLLAIRE. - Si K est un corps $\mathcal{D}er(S) = \mathfrak{a}(S) \oplus K D_0$.

autrement dit $\chi \in \mathcal{D}er(S)$ ssi :

$$\exists s \in S, \exists \lambda \in K \text{ tels que } \chi = \mathfrak{a}(s) + \lambda - \sum_{i=1}^n \lambda X_i \frac{\partial}{\partial X_i},$$

c'est l'analogie de la formule (15-1) de [10] qui détermine la forme des dérivations (de Poisson) de l'algèbre de Poisson associée à une variété de Poisson ; dans le même ordre d'idée, on trouve dans [11] des formules explicites des dérivations des algèbres de Poisson et des algèbres de Vey.

3. AUTOMORPHISMES DE POISSON DE $\text{Symb}(A)$.

Nous supposons dans toute la suite que K est un corps algébriquement clos de caractéristique 0.

Soit $\text{Aut}(S)$ le groupe des automorphismes de l'algèbre associative unifère $\text{Symb}(A)$; tout élément de $\text{Aut}(S)$ laisse donc invariant l'élément unité de S .

Un automorphisme de Poisson de $\text{Symb}(A)$ est un élément ϕ de $\text{Aut}(S)$ qui est un endomorphisme de l'algèbre de Poisson (S, \mathfrak{a}) ie :

$$\phi([s_1, s_2]) = [\phi(s_1), \phi(s_2)], \quad \forall s_1, s_2 \in S.$$

3.1. DERIVATIONS LOCALEMENT NILPOTENTES DE S .

Soient E un K -espace vectoriel et $u \in \text{End}_K(E)$.

DEFINITION. - On dit que l'endomorphisme u est localement fini si les conditions suivantes sont vérifiées.

Il existe une filtration croissante $(E_i)_{i \in I}$ de E telle que :

- a) $\forall i \in I, E_i$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie ;
- b) E est engendré par la famille $(E_i)_{i \in I}$;
- c) $\forall i \in I, E_i$ est u -stable ($u(E_i) \subset E_i$).

DEFINITION. - On dit que u est localement nilpotent (resp. unipotent, resp. semi-simple) si

- 1°) u est localement fini (relativement à $(E_i)_{i \in I}$) ;
- 2°) $\forall i \in I$, la restriction de u à E_i est nilpotente (resp. unipotente, resp. semi-simple).

DEFINITION. - Une dérivation χ de $\text{Symb}(A)$ est localement nilpotente si l'endomorphisme χ l'est.

3.2. ENDOMORPHISMES LOCALEMENT NILPOTENTS DE $\text{Symb}(A)$.

Pour tout $f \in \text{Symb}(A)$ de degré total m , notons $d^{\circ}t(f) = m$ et $E_n = \{f \in S / d^{\circ}t(f) = n, \text{ et } f \text{ homogène}\}$.

$S_n = \{f \in S / d^{\circ}t(f) \leq n\}$, on a les égalités suivantes :

$$S_n = \bigoplus_{k=0}^n E_k \quad ; \quad S = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} E_k \quad ;$$

de plus $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, est une filtration croissante de $\text{Symb}(A)$ et $\dim(S_n)$ est fini.

PROPOSITION 9. - Toute dérivation nilpotente de (S, ∂) est intérieure.

PREUVE. - Soit $\chi \in \mathcal{D}er(S)$, il existe $s \in S$ et $\lambda \in K$ tels que

$$\chi = \partial(s) + \lambda \left(\text{id}_S - \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial X_i} \right) ; \text{ supposons } \chi \text{ nilpotente et } \lambda \neq 0, \text{ alors}$$

$$\lambda^{-1} \chi = \partial(\lambda^{-1} s) + \text{id}_S - \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial X_i}, \text{ est une dérivation nilpotente de}$$

$$(S, \partial), \text{ donc } \text{id}_S - \lambda^{-1} \chi = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial X_i} - \partial(\lambda^{-1} s), \text{ est un automorphisme}$$

du K -espace vectoriel $\text{Symb}(A)$, ce qui n'est pas donc $\lambda = 0$, d'où $\chi = \partial(s)$.

PROPOSITION 10. - $\chi \in \mathcal{D}er(S)$ est localement nilpotente (relativement

$$\text{à } (S_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{) ssi}$$

$$\chi = \partial(s), \quad s \in S_1.$$

PREUVE. - Soient $s \in S_1$ et $\chi = \partial(s)$; s est de la forme

$$s = \sum_{i=1}^n a_i X_i + b_i Y_i + c, \quad a_i, b_i, c \in K, \quad \forall h \in \{1, \dots, n\}, \text{ on a}$$

$$\chi^2(X_h) = \chi^2(Y_h) = 0. \text{ On montre alors que } \forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\},$$

$$\chi^{p+1}(X_i^p) = \chi^{p+1}(Y_i^p) = 0 \text{ et que } \chi^{p+q+1}(X^p Y^q) = 0, \quad \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2,$$

$\forall i, j, \quad 1 \leq i, j \leq n$. On a alors par récurrence

$$\chi^{k_1 + \dots + k_p + h_1 + \dots + h_q + 1} (X_{i_1}^{k_1} \dots X_{i_p}^{k_p} Y_{j_1}^{h_1} \dots Y_{j_q}^{h_q}) = 0$$

$$\forall k_i, \quad h_i \in \mathbb{N}, \quad \forall i_t, \quad j_s \in \{1, \dots, n\}.$$

Comme $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \partial(s)(S_n) \subset S_n$, on en déduit que χ est localement nilpotente relativement à $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$; réciproquement si χ est localement nilpotente relativement à $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la restriction de χ à S_1 est nilpotente ; on a alors d'après la proposition 9, $\chi = \partial(s)$, $s \in S$;

et, $\forall h \in \{1, \dots, n\}$; $d^{\circ}t(\chi(X_h)) \leq 1$, $d^{\circ}t(\chi(Y_h)) \leq 1$; or

$$s = \sum_{i_r; j_s} a_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q} X_{i_1}^{k_1} \dots X_{i_p}^{k_p} Y_{j_1}^{h_1} \dots Y_{j_q}^{h_q},$$

$1 \leq r$, $s \leq n$, $(a_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q})_{i_r, j_s}$ famille à support fini d'éléments

de K ; d'où

$$\chi(Y_t) = \sum_{i_r, j_s} k_t a_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q} X_{i_1}^{k_1} \dots X_{i_p}^{k_p} X_t^{k_t-1} \dots X_t^{k_t-1} Y_{j_1}^{h_1} \dots Y_{j_q}^{h_q}$$

donc $k_1 + \dots + k_p + h_1 + \dots + h_q \leq 2$, donc $s \in S_2$; soit

$$s = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} X_i X_j + b_{ij} X_i Y_j + c_{ij} Y_i Y_j + a_i X_i + b_i Y_i + c$$

comme la dimension de S_1 est $2n+1$, on en déduit que

$$\chi^{2n+1}(X_i) = \chi^{2n+1}(Y_i) = 0, \quad 1 \leq i \leq n \text{ ceci implique que le discriminant}$$

de la partie homogène de s de degré total 2 est nul ; il en résulte alors que $a_{ij} = b_{ij} = c_{ij} = 0$, $1 \leq i, j \leq n$ d'où $s \in S_1$.

3.3. AUTOMORPHISMES LOCALEMENT UNIPOTENTS DE (S, ∂) .

Dans toute la suite, l'expression localement fini (resp. nilpotent, resp. unipotent, resp. semi-simple) pour un endomorphisme ϕ de $\text{Symb}(A)$ est relative à la filtration $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Soient $\mathcal{A}ut(S)$ (resp. $\mathcal{A}ut(S)_u$, resp. $\mathcal{A}ut(S)_s$) le groupe (resp. l'ensemble) des automorphismes localement finis (resp. localement unipotents, resp. localement semi-simples) de S , et \mathcal{N} le sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}er(S)$ engendré par les dérivations localement nilpotentes de S . Puisque S est commutative, on en déduit que $\partial(S)$ est une algèbre commutative et que \mathcal{N} est une sous-algèbre de $\partial(S)$; ($\mathcal{N} = \partial(S_1)$) d'après ce qui précède).

$\forall \chi \in \mathcal{N}^0, t \in K, \forall u \in \text{Aut}(S)_u$, les séries $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \chi^k$, et $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} (u-I)^{k+1}$, où $I = \text{id}_S$, sont convergentes ; en effet, $\forall s \in S, \exists n \in \mathbb{N}$ tel que $s \in S_n$, χ et $u-I$ étant localement nilpotents, les sommes $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \chi^k(s)$ et $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-u)^k}{k+1} (u-I)^{k+1}(s)$, n'ont qu'un nombre fini de termes ; posons

$$\exp(t\chi) = e^{t\chi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \chi^k, \forall \chi \in \mathcal{N}^0, \forall t \in K$$

$$\log u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} (u-I)^{k+1}, \forall u \in \mathcal{A}\text{ut}(S)_u$$

THEOREME 2. - $\forall \chi \in \mathcal{N}^0, \forall t \in K, \forall u \in \mathcal{A}\text{ut}(S)_u$

1°) $e^{t\chi} \in \mathcal{A}\text{ut}(S)_u$ et $\log u \in \mathcal{N}^0$

2°) Les applications $\chi \rightarrow e^\chi$ et $u \rightarrow \log u$ sont bijectives.

PREUVE. - $\forall \chi \in \mathcal{N}^0, \forall t \in K, t\chi \in \mathcal{N}^0$, il suffit alors de prouver que $\forall \chi \in \mathcal{N}^0, e^\chi \in \mathcal{A}\text{ut}(S)_u$. Pour montrer que $\forall s_1, s_2 \in S, e^\chi(s_1 s_2) = e^\chi(s_1) e^\chi(s_2)$, on utilise le fait que χ est localement nilpotent la démonstration est alors la même que dans le cas où χ est nilpotent (voir par exemple N. Bourbaki [3], ou N. Jacobson [8]). $\forall n \in \mathbb{N}$, la restriction de e^χ à S_n est de la forme $I + \theta_n$, où θ_n est un endomorphisme nilpotent, $I + \theta_n$ est donc unipotent ; comme e^χ est entièrement déterminé par $e^\chi(X_i), e^\chi(Y_i), 1 \leq i \leq n$, on en déduit que $e^\chi \in \mathcal{A}\text{ut}(S)_u$ et on établit aisément que $e^\chi([s_1, s_2]) = [e^\chi(s_1), e^\chi(s_2)]$, $\forall s_1, s_2 \in S$ (les dérivations dans le crochet au 2-ème membre étant effectuées par rapport aux variables $e^\chi(X_i), e^\chi(Y_i), 1 \leq i \leq n$) donc $e^\chi \in \mathcal{A}\text{ut}(S)_u$.

$\forall u \in \mathcal{A}ut(S)_u$, $u-I$ est un endomorphisme localement nilpotent de (S, ∂) il est alors bien connu que si $u-I$ est nilpotent $\log u$ est une dérivation de (S, ∂) (voir N. Jacobson [9]) ; l'argumentation est la même à cause de la nilpotence locale de $u-I$. Par conséquent $\forall u \in \mathcal{A}ut(S)_u$, $\log u \in \mathcal{N}$. La restriction de e^X (resp. $\log u$) à S_1 étant unipotente (resp. nilpotente) on obtient les relations

$$a) e^{\log u} = u, \quad \forall u \in \mathcal{A}ut(S)_u ;$$

$$b) \log e^X = X, \quad \forall X \in \mathcal{N} ;$$

$$c) e^{X_1 + X_2} = e^{X_1} e^{X_2}, \quad \forall X_1, X_2 \in \mathcal{N} ;$$

$$d) \log(u_1 u_2) = \log u_1 + \log u_2, \quad \forall u_1, u_2 \in \mathcal{A}ut(S)_u.$$

On en déduit alors que

$$\exp \circ \log = \text{id}_{\mathcal{A}ut(S)_u} \quad \text{et} \quad \log \circ \exp = \text{id}_{\mathcal{N}}$$

par conséquent, \exp et \log sont section et rétraction l'une de l'autre donc bijectives.

THEOREME 3. - 1°) $\mathcal{A}ut(S)_u$ et $\mathcal{A}ut(S)_s$ sont des sous-groupes de $\mathcal{A}ut(S)$;

2°) $\mathcal{A}ut(S) = \mathcal{A}ut(S)_u \rtimes_{\theta} \mathcal{A}ut(S)_s$ Produit semi-direct, où θ définit l'action de $\mathcal{A}ut(S)_s$ sur $\mathcal{A}ut(S)_u$.

PREUVE. - Les relations c) et d) ci-dessus et le fait que \mathcal{N} est un groupe additif prouvent que \log et \exp sont des isomorphismes de groupes donc $\mathcal{A}ut(S)_u$ est un sous-groupe de $\mathcal{A}ut(S)$.

Soit $GL(S)$ le groupe linéaire général de S ; on a les inclusions $\mathcal{A}ut(S) \subset Aut(S) \subset GL(S)$; on sait (voir A. Borel [2]) que $\forall g \in Aut(S)$, g possède une unique décomposition de Jordan $g = g_u g_s$, où $g_u \in \mathcal{A}ut(S)_u$,

$g_s \in \mathcal{A}ut(S)_s$ et $g_u g_s = g_s g_u$; donc $\mathcal{A}ut(S) = \mathcal{A}ut(S)_u \times \mathcal{A}ut(S)_s$.

$$\forall \chi \in \mathcal{A}, \forall \psi \in \mathcal{A}ut(S), \psi \chi \psi^{-1} \in \mathcal{A} \text{ donc : } \psi e^{\chi} \psi^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\psi \chi \psi^{-1})^k}{k!} = e^{\psi \chi \psi^{-1}}$$

il en résulte alors que $\mathcal{A}ut(S)_u$ est un sous-groupe normal de $\mathcal{A}ut(S)$ et par conséquent $\mathcal{A}ut(S)_s$ est un sous-groupe de $\mathcal{A}ut(S)$.

La loi de groupe de $\mathcal{A}ut(S)$ est définie par :

$$(e^{\chi_1}, \psi_1)(e^{\chi_2}, \psi_2) = e^{\chi_1} \psi_1 e^{\chi_2} \psi_2 = e^{\chi_1 + \psi_1 \chi_2 \psi_1^{-1}} \psi_1 \psi_2, \text{ d'où}$$

$$(e^{\chi_1}, \psi_1)(e^{\chi_2}, \psi_2) = (e^{\chi_1 + \psi_1 \chi_2 \psi_1^{-1}}, \psi_1 \psi_2).$$

Cette relation prouve que $\mathcal{A}ut(S)$ est le produit semi-direct de $\mathcal{A}ut(S)_u$ par $\mathcal{A}ut(S)_s$ et que $\mathcal{A}ut(S)_s$ opère par conjugaison sur $\mathcal{A}ut(S)_u$.

BIBLIOGRAPHIE. -

- [1] A. AVEZ et A. LICHNEROWICZ, *Dérivations et premier groupe de cohomologie des algèbres de Lie attachées à une variété symplectique* C.R.A.S. Paris, série A. 275 (1972) 113-118;
- [2] A. BOREL, *Linear algebraic groups*, Benjamin, N.Y. (1969).
- [3] N. BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie*, Chap. I, Hermann, Paris (1971).
- [4] N. BOURBAKI, *Algèbre*, Chap. 4, Hermann, Paris (1959).
- [5] J. BRACONNIER, C.R.A.S., Paris, série A, 284 (1977), 1345-1348.
- [6] M. FLATO, A. LICHNEROWICZ, D. STERNHEIMER, *Déformations 1-différentiables d'algèbres de Lie attachées à une variété symplectique ou de contact*, C.R.A.S. Paris, série A. 279 (1974), 877-881.

- [7] M. FLATO, A. LICHNEROWICZ, D. STERNHEIMER, *Algèbres de Lie attachées à une variété canonique*, J. Math. Pures et Appl. 54, (1975) 445-480.
- [8] N. JACOBSON, *Lie Algebras*, Inter-Science Publishers, J. Wiley and Sons N.Y. (1962).
- [9] N. JACOBSON, *A note on automorphisms of Lie algebras*, Pacific, J. MATH. 12 (1962), 303-315.
- [10] A. LICHNEROWICZ, *Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées*, J. Diff. Geom. 12 (1977) 253-300.
- [11] A. LICHNEROWICZ, M. FLATO, D. STERNHEIMER, F. BAYEN, C. FRONSDAL. *Deformation theory and quantization, I deformations of symplectic structures*, U.C.L.A. 77/T.E.P./7, February 1977.
- [12] A.M. VINOGRADOV, and I.S. KRASIL'SHCHIK, *What is the hamiltonian formalism*, Russian Math. surveys, 30-1 (1975) 177-202.
- [13] L.S. WOLLENBERG, *Derivations of the Lie algebra of polynomials under Poisson bracket*, Proc. Ame. Math. Soc. 20 (1969) 315-320.
- [14] L.S. WOLLENBERG, *Automorphisms of the Lie algebra of polynomials under Poisson bracket*, J. Math. Phys. Vol. 17, n° 11 (1976) 2074-2081.

S.D. EKONG
DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD
43, bd du 11 novembre 1918
69622 VILLEURBANNE CEDEX