

BERNARD BEAUZAMY

Deux espaces de Banach et leurs modèles étalés

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1980, tome 17, fascicule 2
, p. 1-56

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1980__17_2_1_0

© Université de Lyon, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DEUX ESPACES DE BANACH ET LEURS MODELES ÉTALES

par Bernard BEAUZAMY

§1. MODÈLES ÉTALÉS SUR LES ESPACES DE BANACH.

Soient E un espace de Banach et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée dans E . La notion de modèle étalé de E construit sur la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trouve son origine dans la proposition suivante, due à A. Brunel et L. Sucheston :

PROPOSITION 1 (extraction de bonnes sous-suites). - *Il existe une sous-suite $(x'_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout k , pour toute suite a_1, \dots, a_k de scalaires, la limite :*

$$\lim \|a_1 x'_{n_1} + \dots + a_k x'_{n_k}\|$$

existe lorsque $n_1 < \dots < n_k$ tendent vers l'infini.

La démonstration de cette proposition peut être trouvée dans Brunel-Sucheston [5] .

Notant $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la base canonique de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ (ou $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$), on définit une semi-norme sur $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ (ou $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$) en posant

$$|a_1 e_1 + \dots + a_k e_k| = \lim_{\substack{n_1 < \dots < n_k \\ \longrightarrow +\infty}} \|a_1 x'_{n_1} + \dots + a_k x'_{n_k}\|$$

et on peut montrer (voir [5]) que c'est une norme si la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a aucune sous-suite convergente.

La complétion de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ ou $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ pour cette norme s'appelle *modèle étalé* de E construit sur la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Mentionnons rapidement les principales propriétés du modèle étalé, que nous noterons F:

a) La suite (e_n) est écartable dans F, c'est-à-dire

$$\left| \sum_{i=1}^k a_i e_{n_i} \right| = \left| \sum_{i=1}^k a_i e_i \right|, \text{ pour tout } k, \text{ toute suite finie de}$$

scalaires et toute suite finie d'entiers $n_1 < \dots < n_k$. C'est évidemment une conséquence immédiate de la façon dont la norme a été définie.

b) L'espace F est finiment représentable dans E pour tout $\varepsilon > 0$, tout sous-espace de dimension finie F° de F, il existe un sous-espace de dimension finie E° de E et un isomorphisme T de F° sur E° tel que $\|T\| \cdot \|T^{-1}\| < 1 + \varepsilon$. Ceci a été établi par A. Brunel et L. Sucheston [6].

c) La suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (appelée suite fondamentale du modèle étalé) n'est pas une base en général, mais les différences consécutives $e_{2n+1} - e_{2n}$ forment une suite basique inconditionnelle, avec, plus précisément :

$$\left| \sum_{i \in A} a_i (e_{2i+1} - e_{2i}) \right| \leq \left| \sum_{i \in B} a_i (e_{2i+1} - e_{2i}) \right|$$

pour tous les ensembles finis d'entiers A et B avec $A \subset B$ et toute suite finie de scalaires (a_i) .

Dans le cas où la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers 0 dans E, la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base inconditionnelle de F, avec, plus précisément :

$$\left| \sum_{i \in A} a_i e_i \right| < \left| \sum_{i \in B} a_i e_i \right| \quad \text{si } A \subset B.$$

La démonstration de ces deux résultats peut être trouvée par exemple dans B. Beauzamy [3].

L'écartabilité de la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ permet de caractériser simplement, dans F , certaines propriétés de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans E . C'est le cas, par exemple, pour la proposition suivante, due à Brunel-Sucheston :

PROPOSITION 2 (Brunel-Sucheston [5]). - La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède une sous-suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont les sommes de Cesàro $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k$ convergent (dans E) si et seulement si les sommes de Cesàro $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e_k$ convergent (dans F).

Cette proposition est à la base de l'étude de la propriété de Banach-Saks, qui s'énonce ainsi : E a cette propriété si, de toute suite bornée $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on peut extraire une sous-suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont les sommes de Cesàro convergent.

Cette étude a été faite par l'auteur dans [3], où, entre autres, est démontrée la proposition suivante :

PROPOSITION 3 (B. Beauzamy[3]). - E a la propriété de Banach-Saks si et seulement si E est réflexif et aucun modèle étalé de E n'est isomorphe à ℓ^1 .

Le seul fait que E n'ait aucun modèle étalé isomorphe à ℓ^1 (en abrégé : n'ait pas ℓ^1 pour modèle étalé) est caractéristique d'une propriété plus faible que la propriété de Banach-Saks, qu'on appelle Banach-Saks faible (appelée aussi Banach-Saks-Rosenthal dans [3]) : toute suite faiblement convergente vers 0 contient une sous-suite dont les sommes de Cesàro convergent en norme (nécessairement vers 0).

Nous aurons également besoin de la proposition suivante, qui caractérise, par une propriété géométrique de E , le fait d'avoir un modèle isomorphe à ℓ^1 :

PROPOSITION 4 (B. Beauzamy [3]). E a ℓ^1 pour modèle étalé si et seulement si, pour tout $\eta > 0$, on peut trouver une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de norme 1 dans E qui vérifie, pour tout k , tout $n_1 < \dots < n_k$, tous $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k$ égaux à ± 1 :

$$\left\| \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \varepsilon_i x_{n_i} \right\| > 1 - \eta$$

L'objet du présent article est de construire des espaces dont les modèles étalés sont ℓ^1 (pour le second) ou contiennent ℓ^1 (pour le premier), mais possédant néanmoins certaines propriétés.

Par exemple, l'existence d'un espace réflexif ayant ℓ^1 pour modèle étalé (c'est-à-dire n'ayant pas la propriété de Banach-Saks, au vu de la proposition 3) n'est pas une évidence : elle a été établie par A. Baernstein [2] en 1974. Un autre exemple de ce type, obtenu par interpolation, a été donné par l'auteur dans [3].

Dans [4], B. Maurey et l'auteur ont construit un exemple d'espace n'ayant pas ℓ^1 pour modèle étalé, mais dont un modèle étalé contenait ℓ^1 . Cela résolvait par la négative une question de H.P. Rosenthal : un modèle étalé d'un modèle étalé de E peut n'être isomorphe à aucun modèle étalé de E ; la notion n'est pas "transitive".

Mais l'espace construit dans [4] n'est pas réflexif : comme on peut s'en convaincre facilement, il contient c_0 . L'espace que nous allons maintenant construire sera réflexif, n'aura pas ℓ^1 pour modèle étalé, mais l'un de ses modèles contiendra ℓ^1 . Ceci est obtenu en combinant les idées de la construction de A. Baernstein [2] et celles de [4].

Une notion essentielle pour l'étude de ces questions est celle d'ensemble admissible d'entiers (utilisée déjà par J. Schreier [8]).

Un sous-ensemble fini $A = \{n_1 < \dots < n_k\}$ de \mathbb{N} sera dit *admissible* si $k \leq n_1$. On notera \mathcal{A} la collection des sous-ensembles admissibles de \mathbb{N} .

Si B est un sous-ensemble fini quelconque de \mathbb{N} et $x = (x(k))_{k \in \mathbb{N}}$ une suite finie de scalaires, on notera

$$P_B x = (y(k))_{k \in \mathbb{N}} \quad ,$$

avec $y(k) = x(k)$ si $k \in B$,

= 0 sinon.

C'est en quelque sorte la "projection" de x sur B ; mais il faut noter que les coefficients inchangés restent à la place qu'ils occupaient.

Si $x = (x(k))$ est une suite finie de scalaires (nous dirons un "bloc"), nous appellerons *support* de x l'ensemble $\{p \in \mathbb{N}, n_1 \leq p \leq n_2\}$,

où n_1 : indice du premier coefficient non-nul dans x ,

n_2 : indice du dernier coefficient non-nul dans x .

Il faut noter qu'avec cette définition, le support d'un bloc ne contient pas de "trous".

§ II. UN ESPACE RÉFLEXIF N'AYANT PAS ℓ^1 POUR MODÈLE ÉTALÉ, MAIS DONT UN MODÈLE ÉTALÉ CONTIENT ℓ^1 .

Comme dans [4] , soit ϕ la fonction d'Orlicz :

$$\phi(t) = \frac{t}{1 - \text{Log}t} \quad \text{si } 0 < t \leq 1 \quad ,$$

$$= 2t - 1 \quad \text{si } 1 \leq t .$$

Rappelons que la norme de l'espace d'Orlicz ℓ^ϕ est définie par :

$$\|x\|_{\ell^\phi} = \inf \left\{ C \quad , \quad \sum_k \phi\left(\frac{x(k)}{C}\right) \leq 1 \right\} .$$

Avec ce choix de la fonction ϕ , l'espace d'Orlicz ℓ^ϕ a les propriétés suivantes (voir [4]) :

- a) $\ell^1 \subset \ell^\phi \subset \ell^p$, si $p > 1$, les injections étant continues ;
- b) l'espace ℓ^ϕ contient ℓ^1 : on peut trouver une suite de blocs consécutifs sur la base canonique qui est équivalente à la base de ℓ^1 .

c) Il y a un nombre δ_0 , $0 < \delta_0 < 4/5$ tel que si $a = (a(k))_{k \in \mathbb{N}}$ et $b = (b(k))_{k \in \mathbb{N}}$ sont des suites finies à supports disjoints avec $\|a\|_{\ell^\phi} \geq \delta_0$, $\|b\|_{\ell^\phi} \geq \delta_0$, alors $\|a+b\|_{\ell^\phi} > 1$.

Sur $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, considérons la norme définie par :

$$\|x\| = \sup_k \left(\sum |P_k x|^2 \right)^{1/2},$$

le sup étant pris sur toutes les familles $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots$ d'ensembles admissibles consécutifs (c'est-à-dire tels que $\max A_k < \min A_{k+1}, \forall k$) ; on a noté P_k au lieu de P_{A_k} .

L'espace E sera le complété de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ pour la norme ci-dessus.

Il est évident que la base canonique de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ est une base inconditionnelle de E : plus précisément si l'on remplace par 0 l'un des termes d'une suite finie, cela ne peut que diminuer la norme de cette suite. C'est en effet ainsi pour la norme de ℓ^ϕ .

PROPOSITION 1. - *Le modèle étalé construit sur la base canonique est isométrique à ℓ^ϕ .*

DEMONSTRATION. - Soit (a_1, \dots, a_ℓ) une suite de scalaires. Si $n_1 \geq \ell$, l'ensemble $\{n_1, \dots, n_\ell\}$ est admissible, et donc :

$$\|a_1 e_{n_1} + \dots + a_\ell e_{n_\ell}\| \geq \|(a_1, \dots, a_\ell)\|_{\ell^\phi}.$$

Montrons par ailleurs que $\forall x \in \mathbb{R}^{(N)}$, $\|x\| \leq \|x\|_{\ell^\phi}$.

Soient A_1, \dots, A_N des ensembles admissibles consécutifs.

On a :

$$\left(\sum_{k=1}^N \|P_k x\|_{\ell^\phi}^2 \right)^{1/2} \leq \|(\|P_1 x\|_{\ell^\phi}, \dots, \|P_N x\|_{\ell^\phi})\|_{\ell^\phi}$$

et il nous reste à montrer que cette dernière quantité est au plus égale à $\|x\|_{\ell^\phi}$. On peut supposer $\|x\|_{\ell^\phi} = 1$. On a donc

$$\sum_i \phi(|x(i)|) = 1, \text{ et on veut montrer que } \sum_{k=1}^N \phi(\|P_k x\|_{\ell^\phi}) \leq 1.$$

Pour cela, il suffit clairement d'établir que $\forall k = 1 \dots N$,

$$\phi(\|P_k x\|_{\ell^\phi}) \leq \sum_{i \in A_k} \phi(|x(i)|).$$

LEMME 1. - Pour tous a, b , ($0 < a \leq 1$, $0 < b \leq 1$), on a :

$$\phi(a) \cdot \phi(b) \leq \phi(ab)$$

(la fonction ϕ est sur-multiplicative).

La vérification de cette propriété est élémentaire ; elle est laissée au lecteur, s'il s'en trouve .

Revenons à la démonstration de la proposition. Si $\|x\|_{\ell^\phi} = 1$, $\max_i |x(i)| \leq 1$, et, $\forall k=1, \dots, N$, si $\lambda_k = \|P_k x\|_{\ell^\phi}$, on a $\lambda_k \leq 1$.

Par définition de λ_k , on a $\sum_{i \in A_k} \phi\left(\frac{|x(i)|}{\lambda_k}\right) = 1$, et, d'après le lemme,

$$\phi(\lambda_k) = \sum_{i \in A_k} \phi\left(\frac{|x(i)|}{\lambda_k}\right) \phi(\lambda_k) \leq \sum_{i \in A_k} \phi(|x(i)|),$$

ce qui prouve la proposition.

PROPOSITION 2. - L'espace E ne contient pas c_0 .

DEMONSTRATION. - Puisque la base $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est inconditionnelle, il suffit d'après un résultat de R.C. James [7], de montrer que cette base est "boundedly complete", c'est-à-dire que si $x = (x(i))_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite de scalaires telle que

$$\sup_n \left\| \sum_{i=1}^n x(i)e_i \right\| \leq 1, \text{ alors } x \in E.$$

Pour cela, soit $A_1, \dots, A_N \dots$ une famille d'ensembles admissibles consécutifs. On a pour tout N :

$$\left(\sum_{k=1}^N \left\| P_k x \right\|_{\ell^\phi}^2 \right)^{1/2} \leq \left\| P_{A_1 \cup \dots \cup A_N} x \right\| \leq 1$$

et donc $\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left\| P_k x \right\|_{\ell^\phi}^2 \right)^{1/2} \leq 1$; il en résulte que $x \in E$.

PROPOSITION 3. - L'espace E n'a pas ℓ^1 pour modèle étalé.

C'est évidemment le point le plus difficile à montrer. Mentionnons auparavant que, de ce fait, l'espace E ne contiendra pas ℓ^1 et, puisqu'il est à base inconditionnelle, sera réflexif, d'après un résultat de R.C. James [7].

DEMONSTRATION. - Supposons au contraire que E ait ℓ^1 pour modèle étalé. Soit $\eta < \frac{1-\delta_Q}{18}$. D'après la proposition 1.4, on pourrait

trouver une suite de points $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans E , de norme 1, avec :

$$(1) \quad \left\| \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_{n_i} \right\| \geq 1 - \eta/2, \quad \forall k, \quad \forall n_1 < \dots < n_k, \quad \forall \varepsilon_1 \dots \varepsilon_k = \pm 1.$$

On peut supposer que chaque x_n est une suite finie de scalaires, et que (quitte à passer à une sous-suite), la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n(i)$ existe pour tout $i \in \mathbb{N}$. En considérant les demi-différences consécutives, et utilisant le fait que les formes linéaires coordonnées sont continues, on en déduit qu'il existe une suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de blocs consécutifs sur la base canonique vérifiant :

$$(2) \quad \left\| \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k z_{n_i} \right\| \geq 1-\eta \text{ pour tous } k, \quad n_1 < \dots < n_k, \text{ et } \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k = \frac{1}{k}.$$

Nous allons montrer que, dans l'estimation de $\left\| \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k z_{n_i} \right\|$, un seul ensemble admissible est utilisé :

LEMME 2. - Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant (2). On a, pour tout $k > \frac{11}{\eta}$,
pour tous $n_1 < \dots < n_k$,

$$\sup_{A \in \mathcal{A}^k} \left\| P_A \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k z_{n_i} \right) \right\|_{\ell^\phi} \geq 1 - 5\eta.$$

DEMONSTRATION DU LEMME 2. - Soient $k > \frac{11}{\eta}$, $n_1 < \dots < n_k$. Soient $A_1 \dots A_N$ des ensembles admissibles consécutifs avec :

$$(3) \quad \left(\sum_{j=1}^N \left\| P_j \frac{z_{n_1} + \dots + z_{n_k}}{k} \right\|_{\ell^\phi}^2 \right)^{1/2} \geq 1-\eta.$$

Soit \mathcal{J}_1 l'ensemble des indices $j \in \{1, \dots, N\}$ tels que A_j rencontre au plus un bloc z_{n_i} (c'est-à-dire tels que $P_j z_{n_i}$ est non nul pour au plus un indice i). Parmi eux, soit \mathcal{J}_1^i ($1 \leq i \leq k$) l'ensemble des indices j tels que A_j rencontre z_{n_i} seul. On a, pour $i=1, \dots, k$

$$\left(\sum_{j \in \mathcal{J}_1^i} \left\| P_j \frac{z_{n_1} + \dots + z_{n_k}}{k} \right\|_{\ell^\phi}^2 \right)^{1/2} = \frac{1}{k} \left(\sum_{j \in \mathcal{J}_1^i} \left\| P_j z_{n_i} \right\|_{\ell^\phi}^2 \right)^{1/2}$$

$\leq 1/k$, et donc

$$\sum_{j \in \mathcal{J}_1} \left\| P_j \frac{z_{n_1} + \dots + z_{n_k}}{k} \right\|_{\ell^\phi}^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j \in \mathcal{J}_1^i} \left\| P_j \frac{z_{n_1} + \dots + z_{n_k}}{k} \right\|_{\ell^\phi}^2$$

$$\leq \frac{1}{k}.$$

et donc,

$$(4) \quad \left(\sum_{j \in \mathcal{J}_1} \left\| P_j \frac{z_{n_1} + \dots + z_{n_k}}{k} \right\|_{\ell^\phi}^2 \right)^{1/2} \leq 1/\sqrt{k} .$$

Soit \mathcal{J}_2 l'ensemble des indices j tels que A_j rencontre exactement deux blocs z_{n_i} . On a $|\mathcal{J}_2| \leq k+1$. Pour chaque $j \in \mathcal{J}_2$, on a :

$$\left\| P_j \frac{z_{n_1} + \dots + z_{n_k}}{k} \right\|_{\ell^\phi} \leq 2/k$$

et donc

$$(5) \quad \left(\sum_{j \in \mathcal{J}_2} \left\| P_j \frac{z_{n_1} + \dots + z_{n_k}}{k} \right\|_{\ell^\phi}^2 \right)^{1/2} \leq \frac{2\sqrt{k+1}}{k} .$$

Soit \mathcal{J}_3 l'ensemble des indices j qui restent : les ensembles A_j correspondants rencontrent au moins trois blocs z_{n_i} , et donc

$|\mathcal{J}_3| \leq k/2$. Pour $j \in \mathcal{J}_3$, soit B_j les ensembles obtenus en retirant éventuellement des points à chaque A_j , au début et à la fin, de manière à ne plus recouvrir qu'un nombre entier de z_{n_i} . On a

$$\left\| P_j \frac{z_{n_1} + \dots + z_{n_k}}{k} \right\|_{\ell^\phi}^2 \leq \frac{1}{k^2} \left[4 + \left\| P_{B_j} (z_{n_1} + \dots + z_{n_k}) \right\|_{\ell^\phi}^2 \right]$$

et donc

$$\sum_{j \in \mathcal{J}_3} \left\| P_j \frac{z_{n_1} + \dots + z_{n_k}}{k} \right\|_{\ell^\phi}^2 \leq \frac{4k}{2k^2} + \sum_{j \in \mathcal{J}_3} \left\| P_{B_j} \frac{z_{n_1} + \dots + z_{n_k}}{k} \right\|_{\ell^\phi}^2 ,$$

et puisque les B_j sont des sous-ensembles des A_j , ils sont encore admissibles.

On obtient finalement :

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathcal{J}_3} \left\| P_{B_j} \frac{z_{n_1} + \dots + z_{n_k}}{k} \right\|_{\ell^\phi}^2 &\geq (1-n)^2 - \frac{1}{k} - \frac{4(k+1)}{k^2} - 2k \\ &\geq (1-n)^2 - \frac{11}{k} , \end{aligned}$$

et donc, si $k \geq \frac{11}{\eta}$, puisque $\eta < 1/3$,

$$(6) \quad \left(\sum_{j \in \mathcal{J}_3} \left\| \left| P_{B_j} \frac{z_{n_1} + \dots + z_{n_k}}{k} \right\|_{\ell^\phi}^2 \right)^{1/2} \geq 1 - 2\eta.$$

Pour simplifier les notations, posons $z'_i = z_{n_i}$ pour les i tels que

z_{n_i} soit contenu dans l'un des B_j (on élimine les autres) et soient $a_1 \dots a_M$ les entiers tels que, si l'on pose $b_1 = a_1$, $b_2 = a_1 + a_2, \dots$,

$$b_M = a_1 + \dots + a_M.$$

$$B_1 \text{ recouvre } z'_1 \dots z'_{b_1},$$

$$B_2 \text{ recouvre } z'_{b_1+1} \dots z'_{b_2},$$

$$B_j \text{ recouvre } z'_{b_{j-1}+1} \dots z'_{b_j},$$

$$\text{et } B_M \text{ recouvre } z'_{b_{M-1}+1} \dots z'_{b_M}.$$

$$\text{On a } a_1 + \dots + a_M \leq k.$$

La formule (6) s'écrit

$$\left(\sum_{j=1}^M \left\| \left| P_{B_j} \frac{z'_{b_{j-1}+1} + \dots + z'_{b_j}}{k} \right\|_{\ell^\phi}^2 \right)^{1/2} \geq 1 - 2\eta, \text{ et donc :}$$

$$\left(\sum_{j=1}^M \left(\frac{a_j}{k} \right)^2 \left\| \left| P_{B_j} \frac{z'_{b_{j-1}+1} + \dots + z'_{b_j}}{a_j} \right\|_{\ell^\phi}^2 \right)^{1/2} \geq 1 - 2\eta.$$

Mais pour chaque j , on a

$$\left\| \left| P_{B_j} \frac{z'_{b_{j-1}+1} + \dots + z'_{b_j}}{a_j} \right\|_{\ell^\phi} \leq 1$$

et donc

$$\left(\sum_{j=1}^M \left(\frac{a_j}{k} \right)^2 \right)^{1/2} \geq 1-2n .$$

Il en résulte que

$$\frac{\left(\sum_{j=1}^M a_j^2 \right)^{1/2}}{\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M a_j} \geq \frac{\left(\sum_{j=1}^M a_j^2 \right)^{1/2}}{k} \geq 1-2n .$$

Soit j_0 un indice tel que $a_{j_0} = \max a_j$. Posant $a'_j = a_j/a_{j_0}$, on obtient

$$\frac{\left(1 + \sum_{j \neq j_0} a_j'^2 \right)^{1/2}}{1 + \sum_{j \neq j_0} a'_j} \geq 1-2n .$$

et donc

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{j \neq j_0} a_j'^2 &\geq (1-2n)^2 \left(1 + \sum_{j \neq j_0} a'_j \right)^2 \\ &\geq (1-4n) \left(1 + 2 \sum_{j \neq j_0} a'_j + \left(\sum_{j \neq j_0} a'_j \right)^2 \right) \\ &\geq (1-4n) \left(1 + 2 \sum_{j \neq j_0} a'_j + \sum_{j \neq j_0} a_j'^2 \right) \\ &\geq 1 + 2 \sum_{j \neq j_0} a'_j + \sum_{j \neq j_0} a_j'^2 - 4n \left(1 + 2 \sum_{j \neq j_0} a'_j + \sum_{j \neq j_0} a_j'^2 \right) ; \end{aligned}$$

d'où

$$2 \sum_{j \neq j_0} a'_j \leq 4n \left(1 + 2 \sum_{j \neq j_0} a'_j + \sum_{j \neq j_0} a_j'^2 \right) ,$$

$$\sum_{j \neq j_0} a'_j \leq \frac{2n}{1-4n} \left(1 + \sum_{j \neq j_0} a_j'^2 \right) .$$

c'est-à-dire :

$$(7) \quad \sum_{j \neq j_0} a_j \leq \frac{2\eta}{(1-4\eta)a_{j_0}} \left(\sum_j a_j^2 \right).$$

Or, $\forall j = 1, \dots, M$

$$\left\| P_{B_j} \frac{z_{b_{j-1}+1} + \dots + z_{b_j}}{k} \right\|_{\ell^\phi} \leq \frac{a_j}{k} ;$$

donc

$$\begin{aligned} \sum_{j \neq j_0} \left\| P_j \frac{z_{b_{j-1}+1} + \dots + z_{b_j}}{k} \right\|_{\ell^\phi}^2 &\leq \frac{1}{k^2} \sum_{j \neq j_0} a_j^2 \\ &\leq \frac{\max a_j}{k^2} \sum_{j \neq j_0} a_j = \frac{a_{j_0}}{k^2} \sum_{j \neq j_0} a_j \end{aligned}$$

et d'après (7) ,

$$\leq \frac{2\eta}{(1-4\eta)k^2} \sum_{j \neq j_0} a_j^2 \leq \frac{2\eta}{1-4\eta} ,$$

$$\text{car } k^2 \geq (\sum a_j)^2 \geq \sum a_j^2 .$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} \left\| P_{B_{j_0}} \frac{z_{n_1} + \dots + z_{n_k}}{k} \right\|_{\ell^\phi} &\geq \left(\sum_j \left\| P_{B_j} \frac{z_{n_1} + \dots + z_{n_k}}{k} \right\|_{\ell^\phi}^2 \right)^{1/2} \\ &\quad - \left(\sum_{j \neq j_0} \left\| P_{B_j} \frac{z_{n_1} + \dots + z_{n_k}}{k} \right\|_{\ell^\phi}^2 \right)^{1/2} \\ &\geq 1-2\eta - \frac{2\eta}{1-4\eta} \geq 1-5\eta , \text{ puisque } \eta \leq 1/12. \end{aligned}$$

Et ceci achève la démonstration du lemme 2.

Ce lemme n'est valable que si $k \geq k_0$, $k_0 = \left[\frac{11}{\eta} \right] + 1$.

Pour le rendre utilisable pour tout k , posons :

$$u_n = \frac{1}{k_0} \sum_{i=0}^{nk_0} z_i .$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie encore (2), avec $\|u_n\| \leq 1 \quad \forall n$,
et on a cette fois $\forall k \geq 1, \forall n_1 < \dots < n_k$,

$$(8) \quad \sup_{A \in \mathcal{A}^0} \left\| P_A \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k u_{n_i} \right\|_{\ell^\phi} \geq 1 - 5\eta .$$

De ce fait, on est ramené exactement à la situation étudiée par B. Maurey et l'auteur dans [3], et il suffit de recopier le reste de la démonstration. On établit ainsi successivement :

LEMME 3. - Pour $n > 1$, on a :

$$\frac{1}{2} \|u_1 + u_n\| = \sup \{ \|P_A(u_1 + u_n)\|_{\ell^\phi}, A \in \mathcal{A}, |A| \leq \ell \}$$

où ℓ désigne l'indice du dernier terme non nul de u_1 .

LEMME 4. - Pour tout $i \geq 2$, chaque bloc u_i contient un sous-bloc u_i' , avec les propriétés suivantes :

- i) $u_i'(k) \neq 0$ pour au plus ℓ entiers k ,
- ii) $\|u_i'\|_{\ell^\phi} \geq 1 - \frac{25\eta}{2}$.

LEMME 5. - Lorsque $k \rightarrow +\infty$, $\sup \left\{ \frac{1}{k} \left\| \sum_{i=1}^k u'_{n_i} \right\| ; n_1 < \dots < n_k \right\} \rightarrow 0$.

Soit k_0 tel que $\frac{1}{k} \left\| \sum_{i=1}^k u'_{n_i} \right\| \leq \eta, \forall k \geq k_0, \forall n_1 < \dots < n_k$.

Posons $u''_{n_i} = u_{n_i} - u'_{n_i}$. On a :

$$\sup_{A \in \mathcal{A}^0} \left\| P_A \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k u''_{n_i} \right\|_{\ell^\phi} \geq 1 - 6\eta .$$

LEMME 6. - Il existe un i_0 tel que pour tout $i > i_0$, tout sous-bloc u_i'' contient un sous-sous-bloc u_i''' avec :

i) $u_i'''(k) \neq 0$ pour au plus l' entiers k ,

$$ii) \left\| u_i''' \right\|_{\ell^\phi} \geq 1 - \frac{35\eta}{2}$$

où l' est l'indice du dernier terme non nul dans u_{k_0}'' .

Par conséquent, pour i assez grand, u_i contient deux sous-blocs u_i' et u_i''' , disjoints, et de norme ℓ^ϕ au moins égale à $1 - \frac{35\eta}{2}$

Mais ils sont de longueur bornée (l pour u_i' , l' pour u_i'''), et donc, pour i assez grand, ils peuvent être recouverts par un même ensemble admissible A . Pour un tel i , on a :

$$\left\| u_i' + u_i''' \right\| = \left\| u_i' + u_i''' \right\|_{\ell^\phi}.$$

En effet :

LEMME 7. - Si x est à support dans un ensemble admissible,

$$\left\| x \right\| = \left\| x \right\|_{\ell^\phi}.$$

DEMONSTRATION. - Au cours de la démonstration de la proposition 1, nous avons vu que l'on avait toujours $\left\| x \right\| \leq \left\| x \right\|_{\ell^\phi}$. L'inégalité inverse s'obtient en prenant dans la définition de la norme un seul ensemble, constitué du support de x . Ceci prouve le lemme.

On obtient donc :

$$\left\| u_i' + u_i''' \right\|_{\ell^\phi} = \left\| u_i' + u_i''' \right\| \leq \left\| u_i' \right\| \leq 1.$$

Tandis que :

$$\left\| u_i' \right\|_{\ell^\phi} \geq 1 - \frac{35\eta}{2} \quad \text{et}$$

$$\left\| u_i''' \right\|_{\ell^\phi} \geq 1 - \frac{35\eta}{2},$$

et ceci contredit la propriété c) de l'espace ℓ^ϕ , et achève la démonstration de la proposition 3.

L'espace E ainsi construit possède donc la propriété de Banach-Saks, mais l'un de ses modèles étalés contient ℓ^1 .

Nous allons maintenant chercher quels sont les modèles étalés de E. Comme l'espace est réflexif il suffit de s'intéresser aux modèles étalés sur des suites convergeant faiblement vers 0, c'est-à-dire, en fait, aux modèles étalés sur des suites de blocs normalisés sur la base canonique.

PROPOSITION 4. - Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une bonne suite de blocs finis, consécutifs normalisés. Posons $\lambda_n = \max_k |z_n(k)|$.

1) Si $\lambda_n \rightarrow 0$, le modèle étalé construit sur la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est isométrique à ℓ^2 .

2) Si $\lambda_n \not\rightarrow 0$, le modèle étalé construit sur la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est isomorphe à un espace ℓ^ψ , ψ étant la fonction

d'Orlicz $\psi(t) = \sum_i \phi(u(i)t)$, où $u = (u(i))_{i \in \mathbb{N}} \in \ell^\phi$

cette fonction domine la fonction ϕ , mais ne lui est pas équivalente en général (elle l'est si u est un bloc fini).

DEMONSTRATION. - Nous nous plaçons d'abord dans le premier cas. Nous dirons qu'une famille d'ensembles consécutifs (A_j) est subordonnée à la famille de blocs (z_i) si, pour tout j, $P_j z_i$ ne peut être non-nul pour deux valeurs distinctes de i : chaque ensemble rencontre au plus un bloc.

Nous allons montrer que, pour $n_1 < \dots < n_k$ assez grands, la quantité $\| \sum_i a_i z_{n_i} \| = \sup_j (\sum_j \| P_j \sum_i a_i z_{n_i} \|^2)^{1/2}$ est obtenue en utilisant des familles d'ensembles admissibles subordonnés aux blocs z_i .

Posons $\ell = \left| \sum_1^k a_i e_i \right| = \lim_{\substack{n_1 < \dots < n_k \\ \rightarrow \infty}} \left\| a_{n_1} z_{n_1} + \dots + a_{n_k} z_{n_k} \right\|$, et, pour

$j = 1 \dots k$,

$$\ell_j = \left| \sum_{i \neq j} a_i e_i \right|.$$

Si les coefficients $(a_i)_{i=1 \dots k}$ sont tous non nuls, du fait de l'inconditionnalité de la norme ℓ^ϕ , on a $\ell > \ell_j$, $\forall j = 1 \dots k$.

Soit $\varepsilon > 0$ avec $\varepsilon < \frac{1}{4}(\ell - \max_{1 \leq j \leq k} \ell_j)$.

Soit ν tel que si $\nu \leq n_1 < \dots < n_k$ on ait, pour toute suite $1 \leq m_1 < \dots < m_j < k$,

$$(9) \quad (1-\varepsilon) \left| \sum_{i=1}^j a_{m_i} e_i \right| \leq \left\| \sum_{i=1}^j a_{m_i} z_{n_{m_i}} \right\| \leq (1+\varepsilon) \left| \sum_{i=1}^j a_{m_i} e_i \right|$$

$$\text{Soit } \varepsilon' < \frac{\varepsilon}{\max_{1 \leq j \leq k} |a_j|}.$$

Soit $\varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \dots > \varepsilon_k$, avec $\varepsilon_2 < \varepsilon'$.

Si n_1 est choisi $\geq \nu$, on peut choisir n_2 assez grand pour que tout ensemble admissible qui "touche" z_{n_1} (c'est-à-dire tel que $P_A z_{n_1} \neq 0$) vérifie

$$\left\| P_A (a_2 z_{n_2} + \dots + a_k z_{n_k}) \right\| < \varepsilon_2,$$

puisque un tel ensemble a un cardinal dépendant de n_1 , et que λ_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

On continue ainsi, et l'on choisit n_k assez grand pour que

$$\left\| P_A (a_k z_{n_k}) \right\| < \varepsilon_k \text{ si } A \text{ touche } z_{n_{k-1}} \text{ et est admissible.}$$

Soient (A_j) des ensembles admissibles consécutifs servant à estimer $\|\sum_{i=1}^k a_i z_{n_i}\|$ dans (9). Nous allons voir qu'un même ensemble A_j touche au plus deux blocs. En effet, supposons par exemple que A_1 touche $z_{n_1}, z_{n_2}, z_{n_3}$.

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^k a_i z_{n_i} \right\| &= \left(\sum_j \left\| P_j \left(\sum_{i=1}^k a_i z_{n_i} \right) \right\|_{\ell^\phi}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_j \left\| P_j \left(\sum_{i \neq 2} a_i z_{n_i} \right) \right\|_{\ell^\phi}^2 \right)^{1/2} + \left\| P_1 a_2 z_{n_2} \right\|_{\ell^\phi} \\ &\leq \left\| \sum_{i \neq 2} a_i z_{n_i} \right\| + \varepsilon' |a_2| \end{aligned}$$

et ceci contredit le choix de $\nu, \varepsilon, \varepsilon'$.

Notons $A_1 \dots A_{p_1}$ les ensembles qui touchent z_{n_1} ,

$A_{p_1} \dots A_{p_1+p_2}$ les ensembles qui touchent z_{n_2}

$A_{p_1+\dots+p_{k-1}} \dots A_{p_1+\dots+p_k}$ les ensembles qui touchent

z_{n_k} . Posons $q_i = p_1 + \dots + p_i$, $i \leq k$. On a

$$\begin{aligned} \left(\sum_j \left\| P_j \left(\sum_{i=1}^k a_i z_{n_i} \right) \right\|_{\ell^\phi}^2 \right)^{1/2} &\leq \left[a_1^2 \left(\left\| P_1 z_{n_1} \right\|_{\ell^\phi}^2 + \dots + \left\| P_{p_1} z_{n_1} \right\|_{\ell^\phi}^2 \right) + \dots + a_k^2 \left(\left\| P_{q_{k-1}} z_{n_k} \right\|_{\ell^\phi}^2 \right. \right. \\ &\left. \left. + \dots + \left\| P_{q_k} z_{n_k} \right\|_{\ell^\phi}^2 \right) \right]^{1/2} + \left(a_2^2 \left\| P_{p_1} z_{n_2} \right\|_{\ell^\phi}^2 + \dots + a_k^2 \left\| P_{q_{k-1}} z_{n_k} \right\|_{\ell^\phi}^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Or les ensembles : $A_1, \dots, A_{p_1-1}, A_{p_1}$ restreint à z_{n_1} , $A_{p_1+1}, \dots, A_{p_2}$ restreint à z_{n_2} etc.. forment une famille subordonnée à la famille (z_{n_i}) .

On en déduit :

$$\left\| \sum a_i z_{n_i} \right\| \leq \sup \left\{ \left(\sum_{j=1}^k \left\| P_j \left(\sum_{i=1}^k a_i z_{n_i} \right) \right\|_{\ell^{\phi}}^2 \right)^{1/2} ; \right. \\ \left. A_j^! \text{ famille subordonnée aux } (z_{n_i}) \right\} + (a_2^2 \varepsilon_2^2 + \dots + a_k^2 \varepsilon_k^2)^{1/2} .$$

Supposons $\varepsilon_2 \dots \varepsilon_k$ choisis pour que $(a_2^2 \varepsilon_2^2 + \dots + a_k^2 \varepsilon_k^2)^{1/2} < \varepsilon \ell$,

on obtient puisque

$$\left\| \sum a_i z_{n_i} \right\| \geq \sup \left\{ \left(\sum_{j=1}^k \left\| P_j \left(\sum_{i=1}^k a_i z_{n_i} \right) \right\|_{\ell^{\phi}}^2 \right)^{1/2} ; A_j^! \text{ subordonnée aux } (z_{n_i}) \right\} , \\ \left| \ell - \sup_{(A_j^!)} \left\{ \left(\sum_{j=1}^k \left\| P_j \left(\sum_{i=1}^k a_i z_{n_i} \right) \right\|_{\ell^{\phi}}^2 \right)^{1/2} \right\} \right| < 2\varepsilon \ell$$

Mais pour chaque $n_1 < \dots < n_k$:

$$\sup \left\{ \left(\sum_{j=1}^k \left\| P_j \left(\sum_{i=1}^k a_i z_{n_i} \right) \right\|_{\ell^{\phi}}^2 \right)^{1/2} ; (A_j^!) \text{ admissibles, subordonnés aux } (z_i) \right\} \\ = \left(\sum |a_i|^2 \left\| z_{n_i} \right\|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum |a_i|^2 \right)^{1/2} ,$$

$$\text{et donc } \left| \ell - \left(\sum |a_i|^2 \right)^{1/2} \right| < 2\varepsilon \ell ;$$

et, comme ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient la proposition dans le premier cas.

Nous allons maintenant nous intéresser au second cas, c'est-à-dire supposer que $\lambda_n = \max_k |z_n(k)| \not\rightarrow 0$.

Nous allons d'abord démontrer un lemme de décomposition de la suite z_i . Comme les blocs sont consécutifs, on peut, puisque la base est inconditionnelle, supposer tous les coefficients positifs.

LEMME 7. - Soit z_i une suite de blocs consécutifs normalisés.

Il existe une sous-suite, encore notée z_i , pour laquelle on peut écrire :

$$z_i = z_i' + z_i'', \text{ où :}$$

a) Pour $N \geq 1, j \geq 0$ si pour un i_0 , z_{i_0}' a N coordonnées qui vérifient $\frac{1}{2^{j+1}} < z_{i_0}'(j) \leq \frac{1}{2^j}$, il en est de même de tous

les z_i' , $i > i_0$.

b) $\sup_i \|z_i' |_{\delta}\| \rightarrow 0$ si l'on note $z |_{\delta}$ le bloc défini par $\delta \rightarrow 0$

$$(z |_{\delta})(k) = z(k) \text{ si } z(k) \leq \delta, \\ = 0 \text{ sinon}$$

c) $\max_k \|z_i''(k)\| \rightarrow 0$ si $i \rightarrow +\infty$.

DEMONSTRATION. - Observons d'abord que, puisque les blocs sont normalisés, on a $z_i(k) \leq 1 \forall i, \forall k$.

Dans chaque z_i , on regarde s'il y a une coordonnée $> \frac{1}{2}$.

Si c'est le cas pour une infinité de z_i , on extrait la sous-suite correspondante $z_i^{(1)}$. Pour chaque z de cette sous-suite on met dans z' la coordonnée $> 1/2$, ou l'une d'elles s'il y en a plusieurs. On note $u_i^{(1)}$ le bloc obtenu à partir de $z_i^{(1)}$ en remplaçant par 0 la coordonnée mise dans z' .

On regarde à nouveau dans chaque $u_i^{(1)}$ s'il y a une coordonnée $> \frac{1}{2}$. Si c'est le cas pour une infinité de $u_i^{(1)}$, on extrait la sous-suite $z_i^{(2)}$ correspondante, on met dans z' la coordonnée $> \frac{1}{2}$ et on appelle $u_i^{(2)}$ le bloc obtenu en remplaçant par 0 les deux coordonnées $> 1/2$. Comme $\|z_i\| = 1$, compte tenu des propriétés de la fonction d'Orlicz, il ne peut y avoir plus de deux coordonnées $> 1/2$ dans une infinité de blocs z_i .

On refait la même opération avec les coordonnées $> 1/4$: sur z_i s'il n'y avait qu'un nombre fini de coordonnées $> 1/2$, sur $u_i^{(1)}$ ou $u_i^{(2)}$ si l'on avait déjà extrait des sous-suites. On répète l'opération pour $1/4$ un certain nombre de fois si nécessaire, on passe à $1/2^3$, et ainsi de suite.

On considère la suite diagonale $z_n^{(n)}$. Pour chaque élément de cette sous-suite, z' a un sens et est constitué de ce qu'on y a mis à chaque étape.

On appelle z'' ce qui reste. Pour chaque $\alpha > 0$, on a $\max_k z_i''(k) \geq \alpha$ seulement pour un nombre fini de i , et donc

$$\max_k z_i''(k) \rightarrow 0 \quad \text{si } i \rightarrow +\infty.$$

Pour chaque i_0 , si une coordonnée se trouve dans z_{i_0}' avec $\frac{1}{2^{j+1}} \leq z_{i_0}'(k) \leq \frac{1}{2} j$ on retrouve dans z_i' , $i > i_0$, une coordonnée vérifiant la même estimation. Le nombre de ces coordonnées est le même dans z_{i_0}' et z_i' , $i > i_0$.

Il nous reste à montrer que $\sup_i ||(z_i' | \delta) || \rightarrow 0$ si $\delta \rightarrow 0$.

Sinon, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que, $\forall \delta > 0$, on puisse trouver un i avec $|| (z_i' | \delta) || \geq \varepsilon$.

Soit $\delta_1 = 1/2$ et soit z_{i_1}' le bloc vérifiant $|| (z_{i_1}' | \delta_1) || \geq \varepsilon$. C'est un bloc fini, et donc pour δ_2 assez petit, $|| (z_{i_1}' | \delta_2) || = 0$.

Soit z_{i_2}' tel que $|| (z_{i_2}' | \delta_2) || \geq \varepsilon$, et ainsi de suite ; on construit une suite $\delta_n \rightarrow 0$ et une suite z_{i_n}' associée.

Mais, par construction, les coordonnées de chaque z_i' se retrouvent dans tous les autres, avec le même ordre de grandeur. Pour chaque $n \geq 1$ on peut donc trouver un $z_{i(n)}'$ qui "contient" $z_{i_1}'|_{\delta_1}, \dots, z_{i_n}'|_{\delta_n}$, et on peut le prendre assez loin pour que $z_{i(n)}' - (z_{i(n)}'|_{\frac{1}{2}\delta_n})$ soit recouvert par un ensemble admissible (c'est le morceau qui "reproduit" $z_{i_1}'|_{\delta_1}, \dots, z_{i_n}'|_{\delta_n}$). D'après les propriétés de la fonction d'Orlicz, $\|z_{i(n)}'\|_{\ell^\phi} \rightarrow \infty$, ce qui contredit $\|z_i'\| \leq 1 \quad \forall i$. Ceci achève la démonstration du lemme.

Soit $u \in \ell^\phi$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\tau_n u$ l'élément u décalé de n rangs vers la droite, c'est-à-dire $\tau_n u = \sum_i a_i e_{i+n}$, si $u = \sum_i a_i e_i$.

LEMME 8. - Soit z_i' une bonne suite de blocs normalisés consécutifs. Le modèle étalé construit sur la suite z_i' (définie au lemme 7) est isométrique au modèle étalé construit dans ℓ^ϕ sur une suite $\tau_{n_k} u$, pour un $u \in \ell^\phi$ et une suite $n_k \nearrow +\infty$.

DEMONSTRATION. - Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que, pour chaque $k \geq 0$, les coordonnées de z_n' comprises entre $\frac{1}{2^{k+1}}$ et $\frac{1}{2^k}$ admettent une limite. Notons $1 \geq \ell_1 \geq \ell_2 > \dots$ les limites ainsi obtenues (on peut ainsi avoir $1 \geq \ell_1 \geq \ell_2 \geq \frac{1}{2} \geq \ell_3 \geq \ell_4 \geq \ell_5 \geq \frac{1}{8}$) et définissons u par $u(i) = \ell_i$.

Nous allons voir tout d'abord que $u \in \ell^\phi$. On sait que pour chaque i , $\|z_i'\| \leq 1$, donc a fortiori, pour chaque $k \geq 0$, $\|z_i' - (z_i'|_{1/2^{k+1}})\| \leq 1$. Mais d'après la propriété précédente,

le "morceau" $z_i^! - (z_i^! |_{1/2^{k+1}})$ se retrouve dans tous les $z_j^!$, $j > i$.

Or ce morceau contient un nombre borné de termes (dépendant seulement de k), et donc, pour j assez grand, il peut être recouvert par un ensemble admissible. Ceci donne

$$2 \geq \|z_j^! - (z_j^! |_{1/2^{k+1}})\|_{\ell^\phi} = \|z_j^! - (z_j^! |_{1/2^{k+1}})\|_{\ell^\phi}$$

et donc $\|(\ell_i)\|_{\ell^\phi} \leq 2$, considérant seulement les termes $\ell_i \geq 1/2^{k+1}$

Mais ceci est vrai pour tout k , et donc $\|u\|_{\ell^\phi} \leq 2$.

Déterminons maintenant le modèle étalé construit sur la suite $z_i^!$.

Soient a_1, \dots, a_k des scalaires. Soit $\varepsilon > 0$, et soit $\delta > 0$ tel que $\sup_i \|z_i^! |_{\delta}\| \leq \varepsilon / \sum |a_i|$.

Posons $v_i = z_i^! - z_i^! |_{\delta}$. Le nombre de termes non nuls de v_i est borné par un nombre qui ne dépend que de δ . Il en résulte que pour n_1 assez grand :

$$\left\| \sum_1^k a_i v_{n_i} \right\|_{\ell^\phi} = \left\| \sum_1^k a_i v_{n_i} \right\|_{\ell^\phi}.$$

La norme ℓ^ϕ est évidemment invariante par permutation des coordonnées. On peut ranger chaque v_i par ordre décroissant des coordonnées, admettant les limites $\ell_1 \geq \ell_2 \geq \dots$. Si l'on note m_i

l'indice du premier terme non nul de v_{n_i} , on a donc :

$$\left\| \sum_1^k a_i v_{n_i} \right\|_{\ell^\phi} - \left\| \sum_1^k a_i \tau_{m_i} u \right\|_{\ell^\phi} \xrightarrow{n_1 \rightarrow +\infty} 0$$

Finalement on obtient :

$$\left| \lim_{\substack{n_1 < \dots < n_k \\ \rightarrow +\infty}} \left\| \sum_{i=1}^k a_i z_i^! \right\| - \text{Lim}_{\substack{n_1 < \dots < n_k \\ \rightarrow +\infty}} \left\| \sum_{i=1}^k a_i \tau_{m_i} u \right\|_{\ell^\phi} \right|$$

$$\leq \overline{\lim}_{\substack{n_1 < \dots < n_k \\ \rightarrow +\infty}} \left\| \sum_{i=1}^k a_i (z_i^! |_\delta) \right\| < \varepsilon$$

et comme ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, le lemme en résulte.

LEMME 9. -- *Le modèle étalé construit dans ℓ^ϕ sur la suite $\tau_n u$ ($u \in \ell^\phi$), est isométrique à l'espace ℓ^ψ , où ψ est la fonction d'Orlicz :*

$$\psi(t) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \phi(u(i)t).$$

DEMONSTRATION. -- Déterminons $\left\| \sum_{i=1}^k a_i \tau_{n_i} u \right\|_{\ell^\phi}$. Posons

$\psi(t) = \phi(u(1)t) + \dots + \phi(u(k)t) + \dots$. On a, pour tout C ,

$$\sum_j \phi\left(\frac{\sum_{i=1}^k a_i \tau_{n_i} u(j)}{C}\right) - \sum_j \psi\left(\frac{a_j}{C}\right) \rightarrow 0$$

$n_k \rightarrow +\infty$
 $n_2 \rightarrow +\infty$

puisque la différence est majorée par les termes :

$$\phi\left(\frac{a_1 u(n_2 - n_1 + 1)}{C}\right) + \phi\left(\frac{a_1 u(n_2 - n_1 + 2)}{C}\right) + \dots + \phi\left(\frac{a_2 u(n_3 - n_2 + 1)}{C}\right) + \phi\left(\frac{a_2 u(n_3 - n_2 + 2)}{C}\right) + \dots$$

Si l'on a extrait une bonne sous-suite de la suite des $\tau_n u$, il en résulte que :

$$\text{Lim}_{\substack{n_1 < \dots < n_k \\ \rightarrow +\infty}} \left\| \sum_{i=1}^k a_i \tau_{n_i} u \right\|_{\ell^\phi} = \left\| (a_i) \right\|_{\ell^\psi}, \quad \text{ce qui achève la}$$

démonstration du lemme.

Si l'on est dans le second cas de la proposition,

$\max_k |z_i(k)| \neq 0$; on peut donc supposer que, pour un certain $\delta > 0$,

z_i a une coordonnée $\geq \delta$. Il en résulte que $\|u\|_{\ell^{\phi}} \geq \delta$, et donc

$\sum_i \phi\left(\frac{u(i)}{\delta}\right) \geq 1$. D'où :

$$\phi(t) \leq \sum_i \phi\left(\frac{u(i)}{\delta}\right) \phi(t) \leq \sum_i \phi\left(\frac{u(i)t}{\delta}\right) = \psi\left(\frac{t}{\delta}\right) \text{ et la fonction}$$

$\psi\left(\frac{t}{\delta}\right)$ est équivalente à la fonction ψ .

Achevons maintenant la démonstration de la proposition.

On a :

$$\left\| \sum_1^k a_i z'_{n_i} \right\| \leq \left\| \sum_1^k a_i z_{n_i} \right\|$$

et donc :

$$\lim_{\substack{n_1 < \dots < n_k \\ \rightarrow +\infty}} \left\| \sum a_i z_{n_i} \right\| \geq \delta \left\| (a_i) \right\|_{\ell^{\psi}},$$

si $\left\| z'_{n_i} \right\|_{\ell^{\phi}} \geq \delta$.

Par ailleurs :

$$\left\| \sum a_i z_{n_i} \right\| \leq \left\| \sum a_i z'_{n_i} \right\| + \left\| \sum a_i z''_{n_i} \right\|$$

et donc

$$\lim_{\substack{n_1 < \dots < n_k \\ \rightarrow +\infty}} \left\| \sum_1^k a_i z_{n_i} \right\| \leq \left\| (a_i) \right\|_{\ell^{\psi}} + \left(\sum_1^k |a_i|^2 \right)^{1/2}$$

d'après ce qui précède et la première partie de la proposition.

Il nous reste à montrer que $(\sum |a_i|^2)^{1/2} \leq \left\| (a_i) \right\|_{\ell^{\psi}}$.

Or il existe $G \geq 0$ tel que $\|\cdot\|_{\ell^\phi} \geq G \|\cdot\|_{\ell^2}$. Donc

$$\|\sum a_i \tau_{n_i} u\|_{\ell^\phi} \geq G \|\sum a_i \tau_{n_i} u\|_{\ell^2} .$$

D'où l'on déduit $\|(a_i)\|_{\ell^\psi} \geq G(\sum |a_i|^2)^{1/2}$, ce qui prouve la proposition. Il est évident, à l'inverse, que l'on peut obtenir n'importe lequel des modèles étalés annoncés par la proposition.

REMARQUES. - 1) Il est clair, au vu de la discussion précédente qu'un espace ne peut jamais avoir ℓ^ϕ pour seul modèle étalé : si une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de l'espace donne ℓ^ϕ comme modèle étalé, si on pose $y = \sum \alpha_i x_i$, et $y_k = \sum \alpha_i x_{i+k}$, la suite des y_k engendra un modèle qui peut être un ℓ^ψ , si les α_i sont convenablement choisis.

2) La remarque faite par B. Maurey et l'auteur à la fin de [4] est erronée : outre c_0 et ℓ^ϕ , l'espace construit dans [4] a pour modèles étalés des espaces ℓ^ψ , comme expliqué ci-dessus.

§ III. UN ESPACE DU TYPE JAMES-TZIRELSON.

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons aux espaces n'ayant que ℓ^1 pour modèle étalé. Un exemple de tel espace est évidemment ℓ^1 lui-même, mais il y en a un autre, qui est l'espace de Tzirelson, dont nous allons maintenant rappeler la construction, car nous aurons besoin de démontrer sur cet espace un certain nombre de résultats.

1. L'ESPACE DE TZIRELSON.

Soit A_1, \dots, A_k une famille finie de sous-ensembles finis consécutifs de \mathbb{N}^* . On dit que cette famille est admissible si k est au plus égal au premier élément de A_1 . Il faut bien noter que ceci n'implique aucune restriction sur chaque A_i individuellement : ils peuvent être, si l'on veut, très longs ou très lacunaires.

Si $x = (x(k))_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite finie de réels, on pose :

$$\|x\|_0 = \|x\|_{c_0},$$

$$\|x\|_1 = \max\{ \|x\|_0, \max_{\textcircled{A}} \frac{1}{2} \sum_j \|P_j x\|_0 \},$$

où $\max_{\textcircled{A}}$ désigne le maximum pris sur toutes les familles admissibles d'ensembles, P_j étant la projection sur A_j .

Si $\|x\|_{n-1}$ est définie, on pose :

$$\|x\|_n = \max\{ \|x\|_{n-1}, \max_{\textcircled{A}} \frac{1}{2} \sum_j \|P_j x\|_{n-1} \}.$$

On obtient ainsi une suite croissante de nombres, tous majorés par $\|x\|_{\ell^1}$. On note $\|x\|_T = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x\|_n$, et l'espace de Tzirelson sera la complétion de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ pour la norme $\|\cdot\|_T$.

La norme obtenue possède la propriété suivante :

$$(1) \quad \|x\|_T = \max\{ \|x\|_{c_0}, \frac{1}{2} \sup_{\textcircled{A}} \sum_j \|P_j x\|_T \}, \quad \forall x \in T;$$

elle s'obtient aisément au vu de la définition de $\|\cdot\|_T$.

La base canonique de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ est une base inconditionnelle de T . Par ailleurs, si $v_1 \dots v_{2n}$ est une suite de $2n$ blocs consécutifs sur la base canonique, normalisés dans T et si l'on note B_j le support de v_j , la famille $B_{n+1} \dots B_{2n}$ est admissible et on obtient d'après (1) :

$$\left\| \sum_{n+1}^{2n} a_i v_i \right\|_T \geq \frac{1}{2} \sum_j \left\| P_{B_j} \sum_{n+1}^{2n} a_i v_i \right\|_T = \frac{1}{2} \sum_{n+1}^{2n} |a_i|$$

et les blocs v_{n+1}, \dots, v_{2n} engendrent donc $\ell^1_{(n)}$.

Cette propriété implique que T ne peut contenir ni c_0 , ni aucun ℓ^p , $p > 1$. La proposition qui suit montre que T ne contient pas ℓ^1 . Sous une forme un peu différente, elle est donnée dans Lindenstrauss-Tzafriri [8], tome I.

PROPOSITION 1. - Soit r un entier, $r \geq 2$. Soient v_0, v_1, \dots, v_r des blocs consécutifs normalisés dans T . Si v_0 finit avant $r/2$, on a :

$$\left\| v_0 + \frac{v_1 + \dots + v_r}{r} \right\|_T \leq \frac{7}{4}.$$

DEMONSTRATION. - On a $\left\| v_0 + \frac{v_1 + \dots + v_r}{r} \right\|_0 \leq 1$. Soit maintenant $(A_j)_{j=1 \dots k}$ une famille admissible d'ensembles.

Si A_1 commence après le support de v_0 , on a :

$$\frac{1}{2} \sum_j \left\| P_j \left(v_0 + \frac{v_1 + \dots + v_r}{r} \right) \right\|_T = \frac{1}{2} \sum_j \left\| \frac{v_1 + \dots + v_r}{r} \right\|_T \leq 1.$$

Si A_1 commence avant le dernier élément de v_0 , la famille a au plus $r/2$ éléments. Notons :

$$\delta = \{i \geq 1, \|P_j v_i\|_T \neq 0 \text{ pour au moins deux valeurs de } j\},$$

$$\sigma = \{i \geq 1, \|P_j v_i\|_T \neq 0 \text{ pour au plus une valeur de } j\}.$$

Alors $|\delta| \leq \frac{r}{2} - 1$. Par ailleurs, on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_j \left\| P_j \left(v_0 + \frac{v_1 + \dots + v_r}{r} \right) \right\|_T &\leq \frac{1}{2} \sum_j \|P_j v_0\|_T \\ &\quad + \frac{1}{2r} \sum_{i \in \delta} \sum_j \|P_j v_i\|_T + \frac{1}{2r} \sum_{i \in \sigma} \sum_j \|P_j v_i\|_T \\ &\leq 1 + \frac{1}{r} |\delta| + \frac{1}{2r} |\sigma| = 1 + \frac{|\delta|}{r} + \frac{r-|\delta|}{2r} = \frac{3}{2} + \frac{|\delta|}{2r} \leq \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

et donc finalement, d'après (1),

$$\left\| v_0 + \frac{v_1 + \dots + v_r}{r} \right\|_T \leq 7/4 .$$

Il est aisé d'en déduire que E ne contient pas ℓ^1 : s'il le contenait, on pourrait, d'après un résultat de R.C. James, trouver une suite de blocs consécutifs normalisés v_i vérifiant $\left\| \sum \alpha_i u_i \right\| \geq \frac{9}{10} \sum |\alpha_i|$, pour toute suite finie de scalaires. Mais si n_0 est l'indice du dernier coefficient non nul de v_0 , on aura, si $r = 2n_0$,

$$\left\| v_0 + \frac{v_1 + \dots + v_r}{r} \right\| \geq \frac{18}{10} , \text{ ce qui contredit la proposition 1.}$$

Puisque cet espace est à base inconditionnelle et ne contient ni ℓ^1 ni c_0 , il est réflexif. Il est clair qu'il n'a que ℓ^1 pour modèle étalé : pour le montrer, il suffit de considérer les suites faiblement convergentes vers 0, c'est-à-dire les suites de blocs consécutifs. Alors, dès que $n_1 \geq k$, z_{n_1}, \dots, z_{n_k} donnent $\ell^1_{(k)}$.

Si on décale un élément $x \in T$ vers la droite, c'est-à-dire si on fait agir le shift S sur x , il est clair que la norme de x ne peut qu'augmenter : on a $\|Sx\|_T \geq \|x\|_T$, puisqu'on peut utiliser plus d'ensembles pour estimer Sx que pour estimer x ; il est immédiat de constater sur des exemples que l'inégalité peut être stricte. Le fait de supprimer un ou plusieurs zéros au début d'un bloc fini affecte donc sensiblement sa norme. Néanmoins, nous allons démontrer la proposition ci-dessous, qui sera un ingrédient essentiel pour notre construction. La démonstration que nous en donnons est due à B. Maurey ; elle remplace notre argument d'origine qui était notablement plus compliqué.

PROPOSITION 2. - Si x est un bloc fini qui commence au-delà de l'entier n , on a $\|S^{-1}x\|_T \geq (1 - \frac{3}{n})\|x\|_T$.

DEMONSTRATION. - On peut évidemment supposer $\|x\|_T = 1$.

Dans la suite de cette démonstration, nous dirons qu'une famille de blocs est admissible si la famille de leurs supports l'est.

Si $\|x\| = \|x\|_O$, alors $\|S^{-1}x\| \geq \|S^{-1}x\|_O = \|x\|_O$,

et la proposition est démontrée dans ce cas.

Sinon, d'après (1) il existe une décomposition admissible

$$x = \sum_{i=1}^{\ell} x_i, \text{ avec } 1 = \|x\| = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\ell} \|x_i\|_T.$$

Deux cas sont possibles :

- ou bien la famille $(S^{-1}x_i)_{i=1, \dots, \ell}$ est admissible. On ne modifie alors pas la famille $(x_i)_{i=1, \dots, \ell}$ à cette étape.

- ou bien la famille $(S^{-1}x_i)_{i=1, \dots, \ell}$ ne l'est pas : cela n'est possible que parce qu'elle a un ensemble de trop. Il faut aussi que $\ell > n$, puisque x commence après n . On supprime alors le plus petit des $\|S^{-1}x_i\|_T$, soit $\|S^{-1}x_{i_0}\|_T$. On a

$$\|S^{-1}x_{i_0}\|_T \leq \|x_{i_0}\|_T, \text{ et l'un des } \|x_i\|_T \text{ est } \leq \frac{2}{\ell} \leq 2/n.$$

$$\text{On a donc } \|S^{-1}x_{i_0}\|_T \leq 2/n, \text{ ou } \frac{1}{2}\|S^{-1}x_{i_0}\|_T \leq 1/n.$$

Soit I_1 l'ensemble des indices restants. Si $i \in I_1$ et si $\|x_i\|_T > \|x_i\|_O$, on écrit pour chaque i une décomposition admissible $\|x_i\|_T = \frac{1}{2} \sum_j \|x_{i,j}\|_T$. Soit n_i le début de x_i .

Si la famille $(S^{-1}x_{i,j})_n$ n'est pas admissible, la longueur de x_i est $\geq n_i$.

Soient i_1, i_2, \dots, i_p les indices tels que $(S^{-1}x_{i_k, j})_j$ ne soit pas admissible. On a : $n \leq n_{i_1}$; puisque la longueur de x_{i_1} est $\geq n_{i_1}$, On a $n_{i_2} \geq 2n_{i_1}$, $n_{i_3} \geq 2n_{i_2} \geq 2^2 n$, et $n_{i_k} \geq 2^{k-1} n$.

Pour chacun des indices i_1, \dots, i_p , on supprime l'un des ensembles $(S^{-1}x_{i_k, j})_j$, et, pour celui qu'on supprime, on peut supposer $\frac{1}{2} \|S^{-1}x_{i_k, j_k}\|_T \leq \frac{1}{2} \|x_{i_k, j_k}\|_T \leq \frac{1}{n_{i_k}} \leq \frac{1}{2^{k-1} n}$.

La somme des contributions à $\|x\|_T$ ainsi perdues est, pour ce niveau, au plus

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^p \left(\frac{1}{2} \|x_{i_k, j_k}\|_T \right) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \dots \right) = \frac{1}{n}.$$

Au niveau suivant, I_2 sera l'ensemble des couples (i, j) , avec $i \in I_1$ et j non supprimé au niveau 1. Si $\|x_{i, j}\|_T \geq \|x_{i, j}\|_0$, on écrit $\|x_{i, j}\|_T = \frac{1}{2} \sum_k \|x_{i, j, k}\|_T$.

On range les $(x_{i, j})$ tels que $(S^{-1}x_{i, j, k})_k$ ne soit pas admissible en une suite, notée $z_1 \dots z_p$. Soit n_ℓ le début de z_ℓ . Comme précédemment, $n_{\ell+1} \geq 2n_\ell \geq 2^\ell n$.

Si $z_\ell = x_{i, j}$, on supprime l'un des $x_{i, j, k}$, soit z_{ℓ, k_ℓ} ; ceci peut se faire avec $\frac{1}{2} \|x_{i, j, k}\|_T \leq \frac{1}{n_\ell} \leq \frac{1}{2^{\ell-1} n}$.

La perte enregistrée à ce niveau dans la norme totale est au plus

$$\frac{1}{4} \sum_{\ell} \|z_{\ell, k_\ell}\|_T \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \dots \right) = \frac{1}{2n}.$$

On continue ainsi. Les pertes aux niveaux suivants sont au plus $\frac{1}{4n}$, $\frac{1}{8n}$, \dots . Comme x est un bloc fini, le processus doit s'arrêter au bout d'un nombre fini d'étapes (i.e. on finira par tomber sur des normes $\|\cdot\|_0$).

La perte totale sur $\|x\|_T$ enregistrée au cours de toutes les étapes est au plus

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n} + \dots \leq \frac{3}{n}.$$

Une fois éliminés tous les ensembles en trop, on obtient une décomposition admissible pour $S^{-1}x$ en décalant vers la gauche tous les ensembles ayant servi pour x ; elle donne alors $\|S^{-1}x\|_T \geq 1 - 3/n$. Ceci prouve la proposition.

2. L'ESPACE DE JAMES.

Sur $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, on considère la norme :

$$\|x\|_J = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left\| (x(p_1) - x(p_2), \dots, x(p_{2k-1}) - x(p_{2k})) \right\|_{\ell^2};$$

$$k \in \mathbb{N}, p_1 < p_2 < \dots < p_{2k} \}.$$

L'espace J est la complétion de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ pour cette norme.

Il possède les propriétés suivantes (voir R.C. James [7]) :

- J n'est pas réflexif, mais est de codimension 1 dans son bidual et est isomorphe à celui-ci.
- J est séparable ainsi que ses duaux successifs.
- J contient ℓ^2 .

Les modèles étalés de J dont la suite fondamentale est basique ont été déterminés par A. Andrew [1] : ils ne peuvent être que ℓ^2 ou J .

3. UN ESPACE DU TYPE JAMES-TZIRELSON.

Soit à nouveau T l'espace de Tzirelson du § 1. Sur $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, notant $x = (x(k))_{k \in \mathbb{N}^*}$, on considère la norme :

$$\|x\|_E = \sup\{\|(x(p_1) - x(p_2), \dots, x(p_{2k-1}) - x(p_{2k}))\|_T ;$$

$$k \in \mathbb{N}^*, p_1 < p_2 < \dots < p_{2k}\}.$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier qu'il s'agit bien d'une norme sur $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$. On note E la complétion de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N}^*)}$ pour cette norme.

Les différentes propriétés de E vont provenir soit de celles de J , soit de celles de T . De ce fait, les propositions qui viennent suivront le même esprit que les propositions correspondantes pour J ou T , avec, évidemment, quelques difficultés techniques supplémentaires.

PROPOSITION 1. - La base canonique de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N}^*)}$ est une base de E .

DEMONSTRATION. - Soit $x = \sum_1^m \alpha_i e_i$, soit $p \leq m$, et $y = \sum_1^p \alpha_i e_i$.

Posons $\alpha'_i = \alpha_i$ si $i \leq p$, $\alpha'_i = 0$ si $i > p$. Pour une certaine suite

$p_1 < p_2 < \dots < p_{2k}$, on a :

$$\|y\|_E = \|(\alpha'_{p_1} - \alpha'_{p_2}, \dots, \alpha'_{p_{2k-1}} - \alpha'_{p_{2k}})\|_T$$

et on peut supposer que dans le dernier terme $\alpha'_{p_{2k-1}}$ et $\alpha'_{p_{2k}}$ ne

sont pas nuls tous les deux (sinon, ce n'est pas la peine de l'écrire).

De ce fait, $p_{2k-1} \leq p$, mais, bien sûr, on peut avoir $p_{2k} \geq p$.

Considérons maintenant $p'_1 < \dots < p'_{2k}$, définis par :

$$p'_i = p_i \quad \text{pour } i \leq 2k-1,$$

$$\text{et } p'_{2k} = \begin{cases} p_{2k} & \text{si } p_{2k} \leq p, \\ m+1 & \text{si } p_{2k} > p. \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \|x\|_E &\geq \|(\alpha_{p'_1} - \alpha_{p'_2}, \dots, \alpha_{p'_{2k-1}} - \alpha_{p'_{2k}})\|_T \\ &\geq \|(\alpha'_{p_1} - \alpha'_{p_2}, \dots, \alpha'_{p_{2k-1}} - \alpha'_{p_{2k}})\|_T \\ &\geq \|y\|_E, \end{aligned}$$

ce qui prouve que $(e_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une base monotone de E .

PROPOSITION 2. - E n'est pas réflexif.

DEMONSTRATION. - Observons d'abord que pour tout x de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N}^*)}$,

$$\|x\|_{C_0} \leq \|x\|_E. \text{ En effet, pour tout } k \geq 1, \text{ choisissons } p_1 = k$$

et p_2 assez grand. On obtient :

$$|x(k)| = |x(p_1) - x(p_2)| = \| (x(p_1) - x(p_2), 0, \dots) \|_T \leq \|x\|_E.$$

Donc E est contenu dans C_0 , avec injection continue.

Pour $n \geq 1$, considérons $y_n = \sum_1^n e_i$. Dans E , on a $\|y_n\| = 1$:

si l'on choisit $p_1 = n$, $p_2 = n+1$, on trouve $\|y_n(p_1) - y_n(p_2)\|_T = 1$,

et aucun choix de $p_1 < \dots < p_{2k}$ ne donne mieux.

Puisque $(e_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une base, les formes linéaires coordonnées sont continues, et une sous-suite faiblement convergente de la suite $(y_n)_{n \geq 1}$ ne peut converger que vers la suite constante $(1, 1, \dots)$, mais celle-ci n'est pas dans c_0 . La suite $(y_n)_{n > 1}$ n'admet donc aucune sous-suite faiblement convergente, et E n'est pas réflexif.

PROPOSITION 3. - E ne contient pas ℓ^1

DEMONSTRATION. - Supposons le contraire : il existerait des blocs normalisés z_n , équivalents à la base canonique de ℓ^1 . Quitte à passer à une sous-suite, on peut supposer que $\forall k$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n(k)$ existe. En posant $z'_n = z_{2n+1} - z_{2n}$, qui est encore équivalent à la base de ℓ^1 , on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} z'_n(k) = 0 \quad \forall k$; la suite (z'_n) peut être remplacée par une suite de blocs consécutifs normalisés (z''_n) . Par un procédé dû à R.C. James, on peut améliorer les estimations données par (z''_n) et obtenir :

Si E contient ℓ^1 , il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de blocs consécutifs normalisés vérifiant, pour toute suite finie de scalaires (α_i) :

$$(2) \quad \left\| \sum_i \alpha_i u_i \right\| \geq \frac{9}{10} \sum_i |\alpha_i| .$$

Puisque $\|\cdot\|_{c_0} \leq \|\cdot\|_E$, on a $\|u_n\|_{c_0} \leq 1, \quad \forall n \geq 0$.

Posons $y_0 = \frac{u_0 + \dots + u_{15}}{16}$, $y_1 = \frac{u_{16} + \dots + u_{31}}{16}$, etc ..., si bien

que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie encore (2), mais de plus $\|y_n\|_{c_0} \leq 1/16 \quad \forall n \geq 0$.

Quitte à extraire une sous-suite et renuméroter, on peut également supposer qu'il y a au moins deux entiers entre le support de chaque y_n et le support du suivant.

Soit n_0 l'indice du dernier terme non nul dans y_0 , et, pour $r \geq 1$, soit $U_r = y_0 + \frac{y_1 + \dots + y_r}{r}$. D'après (2), on a $\|U_r\| \geq 18/10$.

Soit $p_1 < \dots < p_{2k}$ une suite strictement croissante d'entiers. La suite $S = (U_r(p_1) - U_r(p_2), \dots, U_r(p_{2k-1}) - U_r(p_{2k}))$ s'écrit :

$$S = (y_0(p_1^0) - y_0(p_2^0), \dots, y_0(p_{2k_0-1}^0) - y_0(p_{2k_0}^0), \overbrace{y_0(p_{2k_0+1}^0) - \frac{1}{r} y_1(p_1^1)}, \\ \frac{1}{2} y_1(p_1^1) - \frac{1}{r} y_1(p_2^1), \dots, \frac{1}{r} y_1(p_{2k_1-1}^1) - \frac{1}{r} y_1(p_{2k_1}^1), \overbrace{\frac{1}{r} y_1(p_{2k_1+1}^1) - \frac{1}{r} y_2(p_2^2)}, \\ \frac{1}{r} y_2(p_1^2) - \frac{1}{r} y_2(p_2^2) \dots),$$

où les termes surmontés de \wedge peuvent ne pas exister.

Respectant dans la suite ci-dessus l'ordre et l'emplacement des termes nous posons $v_0 = (y_0(p_1^0) - y_0(p_2^0), \dots, y_0(p_{2k_0-1}^0) - y_0(p_{2k_0}^0), \overbrace{y_0(p_{2k_0+1}^0)})$,
 $v_1 = (0, \dots, 0, y_1(p_1^1) - y_1(p_2^1), \dots, y_1(p_{2k_1+1}^1) - y_1(p_{2k_1}^1), \overbrace{y_1(p_{2k_1+1}^1)})$,
 $v_r = (0, \dots, 0, y_r(p_1^r) - y_r(p_2^r), \dots, y_r(p_{2k_r-1}^r) - y_r(p_{2k_r}^r), \overbrace{y_r(p_{2k_r+1}^r)})$.

On a $\|v_i\|_T \leq 1 \quad \forall i = 0 \dots r$; v_0 comporte au plus $\frac{n_0}{2}$ termes non nuls. Donc, si $r \geq n_0$, d'après la proposition 1-1,

$$\|v_0 + \frac{v_1 + \dots + v_r}{r}\|_T \leq 7/4. \text{ Mais on a}$$

$$\|u_r\|_E \leq \|u_0 + \frac{v_1 + \dots + v_r}{r}\|_T + \frac{1}{r} \widehat{|y_1(p_0^1)|} + \frac{1}{r} \widehat{|y_2(p_0^2)|} + \dots +$$

$$\frac{1}{r} \widehat{|y_r(p_0^r)|} \leq \frac{7}{4} + \frac{1}{16} = \frac{29}{16},$$
 ce qui contredit (2), et achève la démonstration.

PROPOSITION 4. - *Tous les modèles étalés de E faits sur des suites de blocs normalisés consécutifs sont isomorphes à ℓ^1*

DEMONSTRATION. - Soit $(z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une bonne suite de blocs normalisés consécutifs.

Soit $N \geq 1$ et soient $\alpha_1 \dots \alpha_N$ des scalaires. On a :

$$(3) \left\| \sum_{i=1}^N \alpha_i z_{n_i} \right\| \geq \left\| (0, \dots, 0, \alpha_1 (z_{n_1}(p_1^1) - z_{n_1}(p_2^1)), \dots, \alpha_1 (z_{n_1}(p_{2k_1-1}^1) - z_{n_1}(p_{2k_1}^1)), 0, \dots, 0, \alpha_2 (z_{n_2}(p_1^2) - z_{n_2}(p_2^2)), \dots, \alpha_2 (z_{n_2}(p_{2k_2-1}^2) - z_{n_2}(p_{2k_2}^2)), 0, \dots) \right\|_T$$

pour toute distribution d'entiers $p_1^1 < p_2^1 < \dots < p_{2k_1}^1 < p_1^2 < \dots < p_{2k_2}^2 < \dots$

le nombre des zéros avant la première différence est la moitié du nombre de zéros avant le support de z_{n_1} , le nombre de zéros du second groupe est la moitié du nombre de zéros entre z_{n_1} et z_{n_2} , etc. Respectant l'ordre des termes et le nombre des zéros,

nous posons :

$$v_{n_1} = (0, \dots, 0, z_{n_1}(p_1^1) - z_{n_1}(p_2^1), \dots, z_{n_1}(p_{2k_1-1}^1) - z_{n_1}(p_{2k_1}^1)),$$

$$v_{n_2} = (0, \dots, 0, z_{n_2}(p_1^2) - z_{n_2}(p_2^2), \dots, z_{n_2}(p_{2k_2-1}^2) - z_{n_2}(p_{2k_2}^2)),$$

etc. si bien que le terme de droite dans (3) vaut

$$\left\| \sum_{i=1}^N \alpha_i v_{n_i} \right\|_T.$$

Si $n_1 \geq 2N$, le nombre des premiers zéros est au moins N , et donc la famille v_{n_1}, \dots, v_{n_N} est admissible ; il en résulte que :

$$\left\| \sum_{i=1}^N \alpha_i z_{n_i} \right\| \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N |\alpha_i| \|v_{n_i}\|_T.$$

En choisissant convenablement les $p_1^1 \dots p_{2k_1}^1$, on peut réaliser $\|v_{n_1}\|_T = \|z_{n_1}\|_E$. Pour les suivants, ce n'est pas si clair, car les p_i^1 étant choisis, le nombre de zéros avant la première différence $z_{n_2}(p_1^2) - z_{n_2}(p_2^2)$ peut être insuffisant pour que l'on puisse obtenir $\|z_{n_2}\|_E$ par un choix convenable des p_i^2 . Il serait suffisant si les p_i^1 étaient consécutifs, mais ceci n'est pas assuré. Mais le nombre de zéros qui manquent est au plus égal à la moitié de la longueur du bloc z_{n_1} , que nous notons $L(n_1)$. On peut donc trouver des p_i^2 tels que :

$$\left\| S^{\frac{1}{2} L(n_1)} v_{n_2} \right\|_T = \|z_{n_2}\|_E.$$

Mais d'après la proposition 1.2, $\|v_{n_2}\|_T \geq (1 - \frac{3}{n_2})^{\frac{1}{2} L(n_1)} \left\| S^{\frac{1}{2} L(n_1)} v_{n_2} \right\|_T$

et, pour n_1 fixé, on peut donc obtenir $\|v_{n_2}\|_T \geq \frac{1}{2} \|z_{n_2}\|_E$, en choisissant n_2 assez grand. Puis n_2 étant ainsi fixé, on choisit n_3 , puis les p_i^3 , pour que :

$$\begin{aligned} \|u_{n_3}\|_T &\geq (1 - \frac{3}{n_3})^{\frac{1}{2}(L(n_1) + L(n_2))} \left\| S^{\frac{1}{2} L(n_1) + \frac{1}{2} L(n_2)} v_{n_3} \right\|_T \\ &\geq \frac{1}{2} \left\| S^{\frac{1}{2} L(n_1) + \frac{1}{2} L(n_2)} u_{n_3} \right\|_T \geq \frac{1}{2} \|z_{n_3}\|_E, \text{ et ainsi de suite.} \end{aligned}$$

On aura finalement :

$$\left\| \sum_1^N \alpha_i z_{n_i} \right\|_E \geq \frac{1}{2} \sum_1^N |\alpha_i| \left\| u_{n_i} \right\|_T \geq \frac{1}{4} \sum_1^N |\alpha_i| ,$$

ce qui prouve la proposition.

Par la suite, nous montrerons le même résultat pour des suites de blocs normalisés quelconques (non nécessairement consécutifs). Cela se déduira très simplement des informations que nous allons maintenant obtenir concernant le dual E' et le bidual E'' .

PROPOSITION 5. - Les formes linéaires coordonnées $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ forment une base du dual E' !

DEMONSTRATION. - D'après un résultat de R.C.James [7], il suffit de montrer que la base $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est contractante, c'est-à-dire que $\forall f \in E', \sup_{i \geq n} \{ |f(\sum_1^i \alpha_i e_i)| ; \left\| \sum_1^i \alpha_i e_i \right\| = 1 \} \rightarrow 0$.
 $n \rightarrow +\infty$

Supposons que ce ne soit pas le cas. On pourrait alors trouver une forme linéaire continue f , un $\delta > 0$, et une suite $(z_n)_{n \geq 1}$ de blocs consécutifs normalisés avec $f(z_n) \geq \delta, \forall n \geq 1$. Soit m_n l'indice du dernier coefficient non nul de z_n . Puisque E ne contient pas ℓ^1 , $E \times E$ ne le contient pas non plus, et on peut trouver une suite de scalaires $(\gamma_i)_{i \geq 1}$ telle que $\sum_n \gamma_n z_n$ converge dans E , $\sum_n \gamma_n e_{m_n}$ converge dans E , mais $\sum_n |\gamma_n| = +\infty$.

Nous allons montrer que $\sum_n |\gamma_n| z_n$ converge dans E : on aura

ainsi une contradiction, car si $\sum_{n \leq q} |\gamma_n| z_n \rightarrow z$, on aura

$$f(z) = \lim_{q \rightarrow +\infty} \sum_{n \leq q} |\gamma_n| f(z_n) \geq \delta \lim_{q \rightarrow +\infty} \sum_{n \leq q} |\gamma_n| = +\infty$$

Soit $q \geq 1$ et soient $p_1^1 < \dots < p_{2k_1}^1 < \widehat{p_{2k_1+1}^1} < p_o^2 < p_1^2 < \dots$

des entiers. Considérons

$$A = \left\| \left(|\gamma_{q+1}| (z_{q+1}(p_1^1) - z_{q+1}(p_2^1)), \dots, |\gamma_{q+1}| (z_{q+1}(p_{2k_1-1}^1) - z_{q+1}(p_{2k_1}^1)), \right. \right. \\ \left. \left. |\gamma_{q+1}| \widehat{z_{q+1}(p_{2k_1+1}^1)} - |\gamma_{q+2}| \widehat{z_{q+2}(p_o^2)}, |\gamma_{q+2}| (z_{q+2}(p_1^2) - z_{q+2}(p_2^2)), \dots \right) \right\|_T$$

En posant $v_{q+1} = (z_{q+1}(p_1^1) - z_{q+1}(p_2^1), \dots, z_{q+1}(p_{2k_1-1}^1) - z_{q+1}(p_{2k_1}^1),$
 $\widehat{z_{q+1}(p_{2k_1+1}^1)}),$

$v_{q+2} = (0, \dots, 0, z_{q+2}(p_1^2) - z_{q+2}(p_2^2), \dots, z_{q+2}(p_{2k_2-1}^2) - z_{q+2}(p_{2k_2}^2),$
 $\widehat{z_{q+2}(p_{2k_2+1}^2)}),$ etc, on obtient :

$$A \leq \left\| \sum_{i \geq q+1} |\gamma_i| v_i \right\|_T + \left\| (0, \dots, 0, |\gamma_{q+2}| \widehat{z_{q+2}(p_o^2)}, \right. \\ \left. 0, \dots, 0, (\gamma_{q+3}) \widehat{z_{q+3}(p_o^3)}, 0, \dots) \right\|_T.$$

Mais la base canonique de T est inconditionnelle, et d'autre part $|z_{q+2}(p_o^2)| \leq 1$, et ce coefficient est précédé d'au plus $\frac{1}{2} m_{q+2}$ zéros.

De même, $z_{q+3}(p_o^3)$ apparaît à un rang au plus égal à $\frac{1}{2} m_{q+3}$. En

décalant éventuellement vers la droite, et supprimant les valeurs absolues, on obtient donc :

$$A \leq \left\| \sum_{i \geq q+1} \gamma_i v_i \right\|_T + \left\| \sum_{i \geq q+1} \gamma_i e_{\frac{1}{2}m_i} \right\|_T.$$

Mais $\left\| \sum_{i \geq q+1} \gamma_i v_i \right\|_T \leq \left\| \sum_{i \geq q+1} \gamma_i z_i \right\|_E$, et

$$\left\| \sum_{i \geq q+1} \gamma_i e_{\frac{1}{2}m_i} \right\|_T \leq \left\| \sum_{i \geq q+1} \gamma_i e_{m_i} \right\|_E ; \text{ ceci prouve la proposition.}$$

Il résulte de cette proposition que E' est séparable, et donc que la boule de E'' est métrisable pour $\sigma(E'', E')$. Tout élément de E'' est donc limite d'une suite d'éléments de E , pour $\sigma(E'', E')$. Ce dernier fait est également la conséquence directe du fait que E ne contient pas ℓ^1 , d'après Odell-Rosenthal [9].

PROPOSITION 6. - E est de codimension 1 dans E''

LEMME 1. - Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de blocs de norme 1 dans E , telle que $\forall k, \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n(k)$ existe (on la note $z(k)$).

Alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} z(k)$ existe.

DEMONSTRATION DU LEMME 1. - Supposons au contraire que cette dernière limite n'existe pas. Alors $\limsup_{k \rightarrow +\infty} z(k) \neq \liminf_{k \rightarrow +\infty} z(k)$.

On peut alors trouver $\ell \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ tels que, pour une infinité de k , $z(k) \geq \ell + \varepsilon$ et, pour une infinité, $z(k) \leq \ell - \varepsilon$. Extrayant une sous-suite, on peut donc trouver une suite croissante d'entiers k_j tels que, $\forall j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} z(k_{2j}) \leq \ell - \varepsilon \\ z(k_{2j+1}) \geq \ell + \varepsilon. \end{cases}$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On peut trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{i \leq 2N} |z_n(k_i) - z(k_i)| < \varepsilon. \text{ On aura alors :}$$

$$\begin{aligned} \|z_n\|_E &\geq \| (z_n(k_1) - z_n(k_2), \dots, z_n(k_{2N-1}) - z_n(k_{2N})) \|_T \\ &\geq \| (z(k_1) - z(k_2), \dots, z(k_{2N-1}) - z(k_{2N})) \|_T - \varepsilon. \end{aligned}$$

Les N différences écrites sont toutes au moins égales à 2ε .

Il en résulte que :

$$\|z_n\|_E \geq 2 \|(\varepsilon, \dots, \varepsilon)\|_T - \varepsilon \geq \frac{N}{2} \cdot 2\varepsilon - \varepsilon = (N-1)\varepsilon,$$

et, si N est assez grand, ceci contredit le fait que $\|z_n\|_E \leq 1$;
et achève la démonstration du lemme 1.

DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION. - Soit $\xi \in E''$, $\notin E$, avec

$\|\xi\|_{E''} = 1$. Soit (z_n) une suite d'éléments de E , avec $\|z_n\|_E \leq 1$
convergeant vers ξ pour $\sigma(E'', E')$. On peut supposer que $\forall k$,

$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n(k) = z(k)$ existe ; on peut aussi supposer que les z_n sont

des blocs finis.

$$\text{Pour tout } k \geq 1, z_n(k) = f_k(z_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \xi(f_k)$$

et donc $\forall k, \xi(f_k) = z(k)$. Puisque les $(f_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ forment une base
de E' , ξ est donc donné par la suite $Z = (z(1), z(2), \dots)$.

Soit $\ell = \lim_{k \rightarrow +\infty} z(k)$, donné par le lemme 1. Notons

$\mathbb{1} = (1, 1, \dots)$: c'est un élément de E'' , car si $y_n = \sum_1^n e_i$, on a,

pour tout n :

$$\left\| \sum \alpha_j f_j \right\|_{E'} \geq \left| \sum \alpha_j f_j(y_n) \right| = \left| \sum_1^n \alpha_j \right|.$$

Nous allons montrer que $\ell - Z \in E$. Pour cela, il suffit de
montrer que la suite :

$$W_n = \sum_{k=0}^n (\ell - z(k)) e_k$$

est de Cauchy dans E .

Soient donc, $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m < n$. On a :

$$W_n - W_m = (0, \dots, 0, \ell - z(m+1), \dots, \ell - z(n), 0, \dots).$$

La norme $\|W_m - W_n\|_E$ peut être estimée par :

$$A = \left\| \left(0, \dots, 0, \widehat{\ell - z(p_0)}, z(p_1) - z(p_2), \dots, z(p_{2k-1}) - z(p_{2k}), \widehat{\ell - z(p_{2k+1})}, 0, \dots \right) \right\|_T,$$

où le nombre des premiers zéros est $\geq \left\lceil \frac{mn}{2} \right\rceil$, $p_0 < \dots < p_{2k+1}$ sont des entiers entre $m+1$ et n ; les termes surmontés de $\widehat{}$ peuvent ne pas exister.

On a :

$$A \leq \left\| \left(0, \dots, 0, z(p_1) - z(p_2), \dots, z(p_{2k-1}) - z(p_{2k}) \right) \right\|_T + |\ell - z(p_0)| + |\ell - z(p_{2k+1})|$$

Soit $\varepsilon > 0$. Si m est assez grand, on aura $|\ell - z(p_0)| < \varepsilon/6$. et $|\ell - z(p_{2k+1})| < \varepsilon/6$. Par ailleurs, pour tout i :

$$A \leq \left\| \left(0, \dots, 0, z_i(p_1) - z_i(p_2), \dots, z_i(p_{2k-1}) - z_i(p_{2k}) \right) \right\|_T + \sum_{j=1}^k |z_i(p_{2j}) - z(p_{2j})| + \sum_{j=0}^{k-1} |z_i(p_{2j+1}) - z(p_{2j+1})| + \varepsilon/6.$$

$$\text{Mais } \sum_{j=1}^k |z_i(p_{2j}) - z(p_{2j})| + \sum_{j=0}^{k-1} |z_i(p_{2j+1}) - z(p_{2j+1})| \leq \sum_{\ell=m}^n |z_i(\ell) - z(\ell)|$$

et, pour chaque m et n , ceci peut être rendu inférieur à $\varepsilon/6$ en prenant i assez grand.

On obtient, donc, pour $m \geq m_0$, pour $i \geq i_0$,

$$A \leq \sup_{m \leq p_1 < \dots < p_{2k} \leq n} \left\| \left(0, \dots, 0, z_i(p_1) - z_i(p_2), \dots, z_i(p_{2k-1}) - z_i(p_{2k}) \right) \right\|_T + \varepsilon/3.$$

Pour achever la démonstration de la proposition, il nous reste donc à montrer :

LEMME 2. - Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de blocs comme ci-dessus. Pour $i, m, n \in \mathbb{N}$, posons :

$$a_{m,n}^i = \sup_{m \leq p_1 < \dots < p_{2k} \leq n} \left\| (0, \dots, 0, z_i(p_1) - z_i(p_2), \dots, z_i(p_{2k-1}) - z_i(p_{2k})) \right\|_T$$

où le nombre des zéros est au moins $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$.

Posons $a_{m,n} = \lim_{i \rightarrow +\infty} a_{m,n}^i$. Alors $a_{m,n} \rightarrow 0$ $_{m,n \rightarrow +\infty}$.

DEMONSTRATION. - Notons d'abord que la limite $\lim_{i \rightarrow +\infty} a_{m,n}^i$ existe car $a_{m,n}^i$ s'interprête comme :

$$a_{m,n}^i = \left\| P_{m+1, n-1} z_i \right\|_E$$

en notant $P_{m+1, n-1}$ la projection sur $\{m+1, m+2, \dots, n-1\}$.

Supposons la conclusion fausse : on pourrait trouver deux suites m_ℓ et n_ℓ , avec $m_\ell < n_\ell < m_{\ell+1}$, et $\varepsilon > 0$, tels que $a_{m_\ell n_\ell} > \varepsilon \forall \ell$.

On pourrait alors trouver $i_0(\ell)$ tel que $\forall \ell, \forall i \geq i_0(\ell)$, $a_{m_\ell n_\ell}^i > \varepsilon$. Il existe donc des entiers $p_1^\ell < \dots < p_{2k}^\ell$ avec $m_\ell \leq p_1^\ell \leq p_{2k}^\ell \leq n_\ell$, avec, si $i \geq i_0(\ell)$:

$$\left\| (0, \dots, 0, z_i(p_1^\ell) - z_i(p_2^\ell), \dots, z_i(p_{2k}^\ell - 1) - z_i(p_{2k}^\ell)) \right\|_T \geq \varepsilon.$$

Mais alors, pour i assez grand, la quantité :

$$\left\| (0, \dots, 0, z_i(p_1^{\ell_1}) - z_i(p_2^{\ell_1}), \dots, z_i(p_{2k}^{\ell_1} - 1) - z_i(p_{2k}^{\ell_1}), 0, \dots, 0, z_i(p_1^{\ell_2}) - z_i(p_2^{\ell_2}), \dots, z_i(p_{2k}^{\ell_2} - 1) - z_i(p_{2k}^{\ell_2} - 1), \dots) \right\|_T$$

ne peut être

≤ 1 . Ceci prouve le lemme.

PROPOSITION 7. - Si $F = (F_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est un élément de E'' , on a :

$$\|F\|_{E''} = \sup_n \|P_n F\|_E ,$$

en notant $P_n = P_{\{0,1,\dots,n\}}$.

Cette proposition se démontre exactement comme l'énoncé correspondant pour l'espace \mathfrak{J} ; voir [7].

On obtient une base pour E'' en ajoutant à $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ l'élément $e_0 = \mathbb{1}$; un élément $F \in E''$ s'écrit donc $F = \sum_{i \in \mathbb{N}} F'_i e_i$, avec

$$F'_0 = \lambda = \lim_{k \rightarrow +\infty} F'_k ,$$

$$F'_i = F_i \cdot \lambda^{-1} \quad i \geq 1 .$$

PROPOSITION 8. - La norme $\|F\| = \sup\{\|(F'_{p_1} - F'_{p_2}, \dots, F'_{p_{2k-1}} - F'_{p_{2k}})\|_T ; k \geq 1, 0 \leq p_1 < \dots < p_{2k}\}$ est équivalente à la norme de E'' .

Avec cette norme, E'' est isométrique à E .

DEMONSTRATION. - Soit $\varepsilon > 0$. On peut trouver n et $p_1 < \dots < p_{2k}$ tels que $\|F\|_{E''} \leq \|P_n F\|_{E''} + \varepsilon \leq \|(F'_{p_1} - F'_{p_2}, \dots, F'_{p_{2k-1}} - F'_{p_{2k}})\|_T + \varepsilon$, et le terme $\widehat{F'_{p_{2k}}}$ vaut $F'_{p_{2k}}$ si $p_{2k} \leq n$, et 0 sinon.

Considérons d'abord le cas où $p_{2k} \leq n$. Alors :

$$\begin{aligned} \|F\|_{E''} - \varepsilon &\leq \|(F'_{p_1} - \lambda) - (F'_{p_2} - \lambda), \dots, (F'_{p_{2k-1}} - \lambda) - (F'_{p_{2k}} - \lambda)\|_T \\ &\leq \|(F'_{p_1} - F'_{p_2}, \dots, F'_{p_{2k-1}} - F'_{p_{2k}})\|_T \leq \|F\|_{E''} . \end{aligned}$$

Dans le cas où $p_{2k} > n$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 |||F|||_{E''} - \varepsilon &\leq |||(F'_{p_1} - F'_{p_2}, \dots, F'_{p_{2k-1}} + \lambda)|||_T \\
 &\leq |||(F'_{p_1} - F'_{p_2}, \dots, F'_{p_{2k-3}} - F'_{p_{2k-2}})|||_T + |F'_{p_{2k-1}} + \lambda| \\
 &\leq |F'_0 + F'_{p_{2k-1}}| + |||F||| \\
 &\leq |F'_0 - F'_{p_1}| + |F'_{p_1} - F'_{p_{2k-1}}| + |||F||| \\
 &\leq 3|||F|||.
 \end{aligned}$$

A l'inverse, choisissons $p_1 < p_2 < \dots < p_{2k}$, avec :

$$|||F|||_{E''} \leq |||(F'_{p_1} - F'_{p_2}, \dots, F'_{p_{2k-1}} - F'_{p_{2k}})|||_T + \varepsilon.$$

Si $p_1 \geq 1$, on a $F'_{p_{2i-1}} - F'_{p_{2i}} = F_{p_{2i-1}} - F_{p_{2i}}$, $i=1, \dots, k$,

et donc

$$|||F||| \leq |||F|||_{E''} + \varepsilon$$

Si $p_1 = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 |||F||| - \varepsilon &\leq |||(2\lambda - F_{p_2}, F_{p_3} - F_{p_4}, \dots, F_{p_{2k-1}} - F_{p_{2k}})|||_T \\
 &\leq |2\lambda - F_{p_2}| + 3 \max_i |F_{p_{2i-1}} - F_{p_{2i}}| + |||(0, 0, 0, 0, F_{p_9} - F_{p_{10}}, \dots, \\
 &\quad \dots, F_{p_{2k-1}} - F_{p_{2k}})|||_T.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Mais } |||(0, 0, 0, F_{p_9} - F_{p_{10}}, \dots, F_{p_{2k-1}} - F_{p_{2k}})|||_T &\geq (1 - \frac{3}{4}) |||(0, 0, 0, 0, F_{p_9} - F_{p_{10}}, \dots, \\
 &\quad \dots, F_{p_{2k-1}} - F_{p_{2k}})|||_T.
 \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 |||F||| - \varepsilon &\leq |2\lambda - F_{P_2}| + 3||F||_{E''} + 4|(0, 0, 0, F_{P_9} - F_{P_{10}}, \dots, F_{P_{2k-1}} - F_{P_{2k}})|_T \\
 &\leq |2\lambda - F_{P_2}| + 3||F||_{E''} + 4|(F_{P_2} - F_{P_3}, F_{P_4} - F_{P_5}, F_{P_6} - F_{P_7}, F_{P_9} - F_{P_{10}}, \dots \\
 &\dots, F_{P_{2k-1}} - F_{P_{2k}})|_T + 4|(F_{P_2} - F_{P_3}, F_{P_4} - F_{P_5}, F_{P_6} - F_{P_7})|_T \\
 &\leq 11||F||_{E''} + |2\lambda - F_{P_2}|.
 \end{aligned}$$

Mais $F_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \lambda$. On obtient donc, pour n assez grand :

$$\leq 11||F||_{E''} + |F_{P_1} - F_{P_2}| + |F_n| + \varepsilon \leq 13||F||_{E''} + \varepsilon,$$

ce qui achève la démonstration de la proposition.

PROPOSITION 9. - E n'a que ℓ^1 pour modèle étalé.

DEMONSTRATION. - Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une bonne suite de blocs normalisés. Il existe une sous-suite, encore notée $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge dans E'' , pour $\sigma(E'', E')$, vers un $\xi \in E''$. Puisque E est de codimension 1 dans E'' , on peut écrire :

$$\xi = \lambda \cdot \mathbb{1} + x, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad x \in E,$$

et $\lambda \neq 0$, sinon la suite (z_n) convergerait dans E .

Notons k_n l'indice du dernier terme non nul de z_n .

Si $y_j = \sum_0^j e_j$, on sait que $y_j \rightarrow \mathbb{1}$ pour $\sigma(E'', E')$.

Donc $z_n - \lambda y_{k_n} \rightarrow x$ pour $\sigma(E'', E')$.

Notons x_j l'élément de E défini par $x_j(k) = x(k)$, $k \leq j$, = 0 sinon.

Alors $x_j \rightarrow x$ dans E , et donc $z_n - \lambda y_{k_n} - x_{k_n} \rightarrow 0$ pour $\sigma(E'', E')$.

Soit $u_n = z_n - \lambda y_{k_n} - x_{k_n}$. Alors $u_n \in E$, donc $u_n \rightarrow 0$ pour $\sigma(E, E')$.

On peut donc en extraire une suite à support presque disjoints, encore notée (u_n) : on peut trouver une suite (v_n) à supports disjoints, avec $u_n - v_n \rightarrow 0$ dans E ; or (u_n) et (v_n) ont le même

modèle étalé ; on écrira donc :

$$z_n = \lambda y_{k_n} + x_{k_n} + u_n ,$$

avec : $y_{k_n} = \sum_{i=0}^{k_n} e_i$; x_{k_n} sont les tronqués de $x \in E$, et v_n des

blocs consécutifs à supports disjoints.

Pour chaque n , le support de v_n s'arrête au plus à k_n ; quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer qu'il commence après $k_{n-1}+2$.

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ des scalaires. Soit $\varepsilon > 0$, et soit \mathcal{O}_0 tel que : si $\mathcal{O}_0 \leq n_1 < \dots < n_N$,

$$\left| \left\| \sum_1^N \alpha_i z_{n_i} \right\|_E - \left\| \sum_1^N \alpha_i e_i \right\| \right| \leq \varepsilon \left\| \sum_1^N \alpha_i e_i \right\|$$

et soit \mathcal{O}_1 tel que si $n \geq \mathcal{O}_1$, $\|x - x_n\|_E < \frac{\varepsilon \left\| \sum_1^N \alpha_i e_i \right\|}{\sum_1^N |\alpha_i|}$

Soit $\mathcal{O} = \max(\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_1+1)$. Soit $\mathcal{O}+N+1 \leq n_1 < \dots < n_N$.

Prenons : $p_1 = k_{\mathcal{O}+2}$, $p_2 = k_{\mathcal{O}+1}+1$, $p_3 = k_{\mathcal{O}+1}+2, \dots$,

$$p_{2j-1} = k_{\mathcal{O}+j-1}+2, \quad p_{2j} = k_{\mathcal{O}+j}+1, \quad \text{pour } j \leq N,$$

$$\text{puis } p_{2N+1} = k_{\mathcal{O}+N}+2, \quad p_{2N+2} = k_{\mathcal{O}_1}+1, \dots$$

$$p_{2N+2j-1} = k_{\mathcal{O}_j-1}+2, \quad p_{2N+2j} = k_{\mathcal{O}_j}+1, \quad , j \leq N.$$

En se servant de ces $4N$ entiers p_i , nous allons estimer

$\| \alpha_1 z_{n_1} + \dots + \alpha_N z_{n_N} \|_E$. Dans les différences

$$(\alpha_1 z_{n_1} + \dots + \alpha_N z_{n_N})(p_{2i-1}) - (\alpha_1 z_{n_1} + \dots + \alpha_N z_{n_N})(p_{2i})$$

apparaissent trois sortes de termes : provenant des y_i , des x_i , des v_i .

- la contribution des v_i est nulle, car tous les p_j se trouvent à l'extérieur de leurs supports.

- la contribution des x_i vaut :

$$\begin{aligned} & \| |\alpha_1 + \dots + \alpha_N| \| (x(p_1) - x(p_2), \dots, x(p_{2i-1}) - x(p_{2i}), \dots) \|_T \\ & \leq (|\alpha_1| + \dots + |\alpha_N|) \| x - x_j \|_T \leq \varepsilon \sum_1^N \alpha_i e_i. \end{aligned}$$

- reste la contribution des y_{k_i} . Elle vaut :

$$\begin{aligned} & \| (0, \dots, 0, 0, (\alpha_1 + \dots + \alpha_N) - (\alpha_2 + \dots + \alpha_N), (\alpha_2 + \dots + \alpha_N) - (\alpha_3 + \dots + \alpha_N), \dots, \\ & \alpha_{N-1} + \alpha_N - \alpha_N, \alpha_N) \|_T = \| 0, \dots, 0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N \|_T. \end{aligned}$$

Comme le nombre de zéros est N , ceci est minoré par $\frac{1}{2} \sum_1^N |\alpha_i|$.

Ceci prouve la proposition.

REMARQUE. - Soit E un espace de Banach et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée dans E . Les conditions :

$$(a) \quad \left\| \frac{1}{k} \sum_1^k \varepsilon_i x_{n_i} \right\| \geq \delta \quad \forall k, \forall n_1 < \dots < n_k, \forall \varepsilon_1 \dots \varepsilon_k = \pm 1,$$

et

$$(b) \quad \left\| \sum \alpha_i x_i \right\| \geq \delta \sum \alpha_i \quad \forall (\alpha_i) \geq 0.$$

n'impliquent pas, même satisfaites simultanément, que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ait une sous-suite équivalente à la base canonique de ℓ^1 .

En effet, l'espace E que nous venons de construire n'est pas réflexif, et d'après un résultat de R.C. James, il existe dans E une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de norme 1 vérifiant $\forall k \in \mathbb{N}$:
 $\text{dist}(\text{conv}(x_0, \dots, x_k), \text{span}(x_{k+1}, \dots)) \geq \delta$, et donc a fortiori b).
 Le modèle étalé construit sur cette suite est ℓ^1 ; elle possède donc une sous-suite vérifiant a), donc a) et b). Mais l'espace E ne contient pas ℓ^1 .

Nous allons maintenant nous intéresser aux modèles étalés du dual E' .

PROPOSITION 10. - *Le dual E' n'a que c_0 pour modèle étalé.*

DEMONSTRATION. - Considérons d'abord le cas d'une suite convergente vers 0 pour $\sigma(E', E)$: on peut la remplacer par une suite de blocs consécutifs ayant le même modèle étalé.

Soit donc $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de blocs normalisés consécutifs sur la base canonique de E' .

Soient (u_n) des blocs normalisés dans E , u_n ayant même support que w_n , avec $w_n(u_n) \geq \frac{1}{2} \forall n$. Alors pour toute suite de scalaires $\alpha_1 \dots \alpha_N$:

$$\|\alpha_1 w_{n_1} + \dots + \alpha_N w_{n_N}\|_{E'} \geq |(\alpha_1 w_{n_1} + \dots + \alpha_N w_{n_N})(u_k)| \geq \frac{1}{2} \max_i |\alpha_i|,$$

en choisissant k convenablement.

Par ailleurs, $\|\alpha_1 w_{n_1} + \dots + \alpha_N w_{n_N}\|_{E'} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} |\alpha_1 w_{n_1}(x) + \dots + \alpha_N w_{n_N}(x)|$.

Soit $x \in E$ avec $\|x\|_E = 1$, réalisant le sup dans la ligne précédente.

Pour une certaine suite $p_1 < \dots < p_{2k}$, on a :

$$\|x\|_E = \|(x(p_1) - x(p_2), \dots, x(p_{2k-1}) - x(p_{2k}))\|_T.$$

Ces p_i se répartissent comme suit : un certain nombre, $p_1^0, \dots, p_{2k_0}^0$ avant le support de w_{n_1} , puis $p_{2k_0+1}^0$ avant ce support et p_0^1 sur ce support, puis $p_1^1 \dots p_{2k_1}^1$ sur le support de w_{n_1} , etc... Considérons x' défini par : $x'(k) = x(k)$ si k est dans le support de l'un des w_{n_i} , ou si

$$k = p_{2k_0+1}^0, p_0^1, p_{2k_1+1}^1, \text{ etc... },$$

et si $x'(k) = 0$ sinon.

On a $\alpha_1 w_{n_1}(x') + \dots + \alpha_N w_N(x') = \alpha_n w_{n_1}(x) + \dots + \alpha_N w_N(x)$ et $\|x'\| \leq 1$:

cela revient à dire que l'on peut décomposer $x = \sum_{i=1}^N x_{n_i}$, où x_{n_i} a même support que w_{n_i} , débordant éventuellement d'un entier à gauche et à droite de celui de w_{n_i} (remarquons que cette notation est légèrement abusive, en ce sens que, par exemple, x_{n_1} dépend de $w_{n_1}, w_{n_2}, \dots, w_{n_N}$).

Nous allons maintenant considérer séparément deux cas :

a) $\max_k w_n(k) \rightarrow 0$ $n \rightarrow +\infty$.

Puisque $\|x\|_E \leq 1$, on a $\forall i \|x_{n_i}\|_E \leq 2$.

La norme de $x = \sum_{i=1}^N x_{n_i}$ servant à calculer $\|\sum_{i=1}^N \alpha_i w_{n_i}\|_E$, estimée par des $p_1 < \dots < p_{2k}$. Si $n_1 \geq 2N+1$, il est clair que $\|x\|_E$ sera estimé en prenant $p_i = i$, $i \leq 2N$, si bien que $x(p_1) - x(p_2), \dots, x(p_{2k-1}) - x(p_{2k})$ commence par au moins N zéros.

Par ailleurs, dans les différences $x(p_{2j-1}) - x(p_{2j})$, certaines peuvent être du type $x_{n_i}(p_{2j-1}) - x_{n_{i+1}}(p_{2j})$.

Mais ces différences sont au plus au nombre de $N-1$, sont majorées par 4 en module, et donc, pour chacune :

$$\left| \left(\sum_1^N \alpha_i w_{n_i} \right) (x_{n_i}^{(p_{2j-1})} - x_{n_i+1}^{(p_{2j})}) \right| \leq 4 \max_i |\alpha_i| \cdot \max_{n \geq n_1} \|w_n\|_{\ell^\infty}$$

et la somme de ces $N-1$ termes peut donc être rendue arbitrairement petite en prenant n_1 assez grand.

En résumé, on peut supposer que $\|x\| = \left\| \sum_1^N x_{n_i} \right\|$ s'écrit sous la forme :

$$\|x\| = \left\| (0, \dots, 0, x_{n_1}^{(p_1^1)} - x_{n_1}^{(p_2^1)}, \dots, x_{n_1}^{(p_{2k_1-1}^1)} - x_{n_1}^{(p_{2k_1}^1)}, 0, \dots, 0, \dots, 0, x_{n_N}^{(p_1^N)} - x_{n_N}^{(p_2^N)}, \dots) \right\|_T.$$

On a donc :

$$\left\| \sum_1^N \alpha_i w_{n_i} \right\|_E \leq \sup \left\{ \left| \sum_1^N \alpha_i w_{n_i} (x_{n_i}) \right| ; \left\| \sum_1^N z_{n_i} \right\|_T \leq 1 \right\}$$

en notant z_{n_i} les différences faites à partir de x_{n_i} et si $n_1 \geq 2N$,

$$\leq \sup \left\{ \left| \sum_1^N \alpha_i w_{n_i} (x_{n_i}) \right| ; \frac{1}{2} \sum_1^N \|z_{n_i}\|_T \leq 1 \right\}.$$

Pour n_1 fixé, on choisit les p_i^1 pour que $\|z_{n_1}\|_T = \|x_{n_1}\|_E$,

puis, par un raisonnement déjà fait à la proposition 4, n_2 assez grand pour que, par un choix convenable des p_i^2 , on ait

$$\|z_{n_2}\|_T \geq \frac{1}{2} \|x_{n_2}\|_E \text{ et ainsi de suite. On obtient, } n_1, n_2, \dots$$

étant ainsi choisis :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_1^N \alpha_i w_{n_i} \right\|_E &\leq \sup \left\{ \left| \sum_1^N \alpha_i w_{n_i} (x_{n_i}) \right| ; \sum_1^N \|x_{n_i}\|_E \leq 4 \right\} \\ &\leq 4 \sup_{\sum \|x_{n_i}\|_E \leq 1} \sum_1^N |\alpha_i| \|w_{n_i}\| \cdot \|x_{n_i}\| \\ &\leq 4 \max_i |\alpha_i|. \end{aligned}$$

b) Dans le cas général, on décompose $w_n = w'_n + w''_n$, comme on l'a fait au lemme II.7; Pour les termes w''_n , on a, d'après ce qui précède, $\|\sum \alpha_i w''_{n_i}\|_E \leq 4 \max_k |\alpha_k|$. Les termes w'_n représentent

à des permutations près des translatés d'un même élément $w \in E'$. Avec une certaine approximation (meilleure, par exemple que $\max_k |\alpha_k|$), on peut le remplacer par un bloc fini, c'est-à-dire une somme finie de formes linéaires coordonnées. Or, pour celles-ci, on a :

$$\|\sum \alpha_k f_{n_i}\|_{E'} = \sup \left\{ \left| \sum_1^N \alpha_i \beta_{n_i} \right| ; \|\sum \beta_i e_i\|_E < 1 \right\}$$

Cherchons de quelle forme peut être un vecteur $x = \sum \beta_i e_i$, avec

$\|x\|_E = 1$, réalisant $\sup \left\{ \left| \sum_1^N \alpha_i \beta_{n_i} \right| \right\}$. Si $\|x\|_E$ est estimé

par $\|(\beta_{p_1} - \beta_{p_2}, \dots, \beta_{p_{2k-1}} - \beta_{p_{2k}})\|_T$, il est clair qu'on peut

sans modifier $\sum \alpha_i \beta_{n_i}$, remplacer par 0 tous les β_j apparaissant

dans les différences qui ne contiennent aucun des β_{n_i} . Ceci

revient à dire que x est de la forme :

$$x = (0, \dots, 0, \beta_{n_1}, \beta_{n_1+1}, 0, \dots, 0, \beta_{n_2}, \beta_{n_2+1}, 0, \dots)$$

et que sa norme est donnée par :

$$1 = \|x\|_E = \|(0, \dots, 0, \beta_{n_1} - \beta_{n_1+1}, 0, \dots, 0, \beta_{n_2} - \beta_{n_2+1}, 0, \dots)\|_T$$

De ce fait, on a

$$\|(0, \dots, 0, \beta_{n_1+1}, 0, \dots, 0, \beta_{n_2+1}, 0, \dots)\|_T \leq 1$$

puisque c'est une autre estimation possible de $\|x\|$.

Si n_1 est assez grand ($n_1 \geq 2N$), on obtient :

$$\frac{1}{2} \sum_1^N |\beta_{n_i} - \beta_{n_i+1}| \leq 1$$

et $\frac{1}{2} \sum_1^N |\beta_{n_i+1}| \leq 1$

d'où $\frac{1}{2} \sum_1^N |\beta_{n_i}| \leq 2$, ou $\sum_1^N |\beta_{n_i}| \leq 4$

On a donc :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_1^N \alpha_i f_{n_i} \right\|_{E'} &\leq \sup \left\{ \left\| \sum_1^N \alpha_i \beta_{n_i} \right\|, \sum_1^N |\beta_{n_i}| \leq 4 \right\} \\ &\leq 4 \max_{1 \leq i \leq N} |\alpha_i|. \end{aligned}$$

Considérons maintenant le cas d'une suite normalisée quelconque $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans E' . Une sous-suite, encore notée $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$, converge dans E' pour $\sigma(E', E)$, vers une limite notée w . On peut donc écrire $w_n = v_n + w$, où $v_n \rightarrow 0$ pour $\sigma(E', E)$, et peut donc être remplacée par une suite à supports disjoints ayant même modèle étalé. On supposera donc les v_n à supports disjoints, et $\inf_n \|v_n\| = \eta > 0$, puisque w_n ne converge pas dans E' .

Dans E' , w n'est pas un bloc fini, mais $\sum_0^\infty w(k) f_k$ converge et donc $\sum_n^\infty w(k) f_k \rightarrow 0$ pour $n \rightarrow +\infty$. Pour n assez grand, w et v_n sont donc

pratiquement disjoints, et, si $\delta = \|w\|_E$, on peut donc écrire :

$$\left\| \sum_1^N \alpha_i w_{n_i} \right\|_{E'} = \left\| (\sum_1^N \alpha_i) w + \sum_1^N \alpha_i v_{n_i} \right\|_{E'} \geq \frac{\delta}{4} \left| \sum_1^N \alpha_i \right| + \frac{1}{4} \max |\alpha_i|,$$

en choisissant un élément x de E , de norme 1, tel que $w(x) \geq \delta/2$

et $v_{n_i}(x) \geq 1/4$ pour un i convenable.

Par ailleurs

$$\|(\Sigma \alpha_i)w + \Sigma \alpha_i v_{n_i}\|_{E'} \leq \delta \|\Sigma \alpha_i\| + \|\Sigma \alpha_i v_{n_i}\|_{E'}$$

et la norme du modèle étalé construit sur la suite w_n est donc équivalente à la norme $\|\Sigma \alpha_i\| + \max_i |\alpha_i|$; la complétion de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$

pour cette norme est isomorphe à c_0 .

REMARQUE. - Si T' est le dual de l'espace de Tzirelson, on peut également considérer l'espace de Banach F construit à partir de la norme

$$\|x\| = \sup\{\|(x(p_1) - x(p_2), \dots, x(p_{2k-1}) - x(p_{2k}))\|_{T'}; p_1 < \dots < p_{2k}\}$$

Cet espace aura des propriétés analogues à celles de l'espace E que nous avons étudié dans ce paragraphe, mais, à moins d'un miracle, n'aura que c_0 pour modèle étalé.

BIBLIOGRAPHIE. -

- [1] A. ANDREW, *Spreading Basic Sequences and subspaces of James' Quasi-reflexive space*. A paraître à Math. Scand.
- [2] A. BAERNSTEIN, *On reflexivity and summability*. Studia Math. 42 (1972) - 91-94.
- [3] B. BEAUZAMY, *Banach-Saks properties and Spreading Models*, Math. Scandinavica, 44 (1979) p. 357-384.
- [4] B. BEAUZAMY et B. MAUREY, *Iteration of Spreading Models* Arkiv für Math. vol. 17 (1979) n° 2. p. 193-198.
- [5] A. BRUNEL et L. SUCHESTON, *On B. Convex Banach Spaces*, Math. System Theory 7 (1974). p. 294-299.

- [6] A. BRUNEL et L. SUCHESTON, *On J -convexity and ergodic super-properties of Banach spaces*, Trans. American Math. Soc., 204 (1975). p. 79-90.
- [7] R.C. JAMES, *Bases and Reflexivity of Banach Spaces*, Ann. of Math. 52 (1950), p. 518-527.
- [8] J. LINDENSTRAUSS. L. TZAFRIRI, *Classical Banach Spaces*. (T. 1 : Sequences spaces). Springer Verlag.
- [9] E. ODELL. H.P. ROSENTHAL, *A double dual characterization of separable Banach spaces containing ℓ_1* . Israël J. of Math. 20 (1975). p. 375-384.
- [10] J. SCHREIER, *Ein gegenbispiel Zur Theorie der schwachen Konvergenz*, Studia Math. 2 (1930). p. 58-62.

B. BEAUZAMY
DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD
43, bd du 11 novembre 1918
69622 VILLEURBANNE CEDEX