PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

MICHEL GUEUGNON

Perturbations singulières et noyaux de Poisson pour les opérateurs frontières homogènes

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1979, tome 16, fascicule 1
, p. 7-20
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1979__16_1_7_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1979.t.16-1

PERTURBATIONS SINGULIERES ET NOYAUX DE POISSON POUR LES OPERATEURS FRONTIERES HOMOGENES

par Michel GUEUGNON

Introduction.-

On reprend les problèmes des chapitres II, III et IV de [1] où les opérateurs frontières sont remplacés par des opérateurs associés à des polynômes homogènes plus généraux. Les notations et hypothèses générales seront conservées. et les références à divers théorèmes ou lemmes s'y rapportant. Dans le cas présent, on rend mieux comment les opérateurs frontières interviennent dans la régularité de la solution et dans la convergence de la solution du problème perturbé.

1.- Les opérateurs frontières.

Considérons les polynômes $B_\ell(\xi,\tau)$ $(\ell = 1,\ldots,m_1)$ homogènes de degré μ_ℓ. On les écrira sous la forme suivante :

$$B_\ell(\xi,\tau) = a_{\lambda_\ell}(\xi)\tau^{\mu_\ell-\lambda_\ell} + a_{\lambda_\ell+1}(\xi)\tau^{\mu_\ell-\lambda_\ell-1} +\ldots+ a_{\mu_\ell}(\xi) \tag{1}$$

où $a_{\lambda_\ell+1}(\xi)$ est homogène de degré $\lambda_\ell + j$.

On pose $\nu_\ell = \mu_\ell - \lambda_\ell$.

On suppose que les polynômes $B_\ell(\xi,\tau)$ sont ordonnés de sorte que

$$\ell > \ell' \text{ donne } \nu_\ell \geqslant \nu_{\ell'} \text{ et} \tag{2}$$

$$\nu_{m_o+1} > \nu_{m_o} . \tag{3}$$

Remarque.- L'hypothèse IV de [1] (p. 28) entraîne que $\nu_{m_1} \geqslant m_1-1$ et $\nu_{m_o} \geqslant m_o-1$. On étudie donc le problème :

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} L(\frac{1}{i} D_x , -D_y) u(x,y) = 0 , & y > 0 , \\ B_j(\frac{1}{i} D_x , -D_y) u(x,0) = \varphi_j(x) . \end{cases}$$

Et l'on prend la solution donnée dans [1] en (3.0.4), où dans la deuxième partie, $\rho^{-(j-1)}$ est remplacée par $\rho^{-\mu_j}$.

2.- Comportement asymptotique des $A_{jk}(\rho\omega)$ au voisinage de $\rho = 0$.

a) La matrice $[A^{k\ell}(\rho\omega,0)]$ au voisinage de $\rho = 0$.

α) $k \leq m_o$.

On a par définition :

$$A^{k\ell}(\rho\omega,y) = \int_C \frac{B_\ell(\rho\omega,-\rho z)\ z^{k-1}\ e^{\rho yz}}{\prod_{i=1}^{m_o} (z + \frac{\eta_i(\rho\omega)}{\rho})}\ dz \quad .$$

Donc

$$A^{k\ell}(\rho\omega,0) = \rho^{\mu_\ell}\int_C \frac{B_\ell(\omega,-z)\ z^{k-1}}{\prod_{i=1}^{m_o} (z + \frac{\eta_i(\rho\omega)}{\rho})}\ dz \quad .$$

D'où l'on peut écrire (cf. [1]).

$$A^{k\ell}(\rho\omega,0) = \rho^{\mu_\ell}(\alpha_{k\ell}(\omega) + O(\rho)) \quad \text{où} \quad \alpha_{k\ell}(\omega) = \int_C \frac{B_\ell(\omega,-z)}{\prod_{i=1}^{m_o} (z + \alpha_i(\omega))}\ dz$$

β) $k > m_o+1$.

$$A^{k\ell}(\rho\omega,y) = \int_{C'} \frac{B_\ell(\rho\omega,-z)\ z^{k-m_o-1}\ e^{yz}}{\prod_{m_o+1}^{m_1} (z + \eta_i(\rho\omega))}\ dz \quad .$$

Donc :

$$A^{k\ell}(\rho\omega,0) = \int_{C'} \frac{B_\ell(\rho\omega,-z)\ z^{k-m_o-1}}{\prod_{m_o+1}^{m_1} (z + \eta_i(\rho\omega))}\ dz \quad .$$

Et, comme précédemment :

$$A^{k\ell}(\rho\omega,0) = \rho^{\lambda_\ell}\ (\alpha_{k\ell}(\omega) + O(\rho)) \ ,$$

où

$$\alpha_{k\ell}(\omega) = \int_{C'} \frac{a_{\lambda_\ell}(\omega)\ (-z)^{\nu_\ell}\ z^{k-m_o-1}}{\prod_{m_o+1}^{m_1} (z+\beta_i)}\, dz \ .$$

b) La matrice $[A_{jk}(\rho\omega)]$ au voisinage de $\rho = 0$.

L'inversion de la matrice $A^{k\ell}(\rho\omega,0)$ entraîne le théorème suivant en tenant compte du a).

Théorème 1.- Au voisinage de $\rho = 0$, on a les propriétés asymptotiques suivantes :

$$A_{jk}(\rho\omega) = 0\ (\rho^{-\nu_j - \lambda_j}) = 0(\rho^{-\mu_j}), \qquad j,k \leqslant m_o ;$$

$$A_{jk}(\rho\omega) = 0\ (\rho^{\nu_{m_o+1} - \nu_j - \lambda_j}) = 0(\rho^{\nu_{m_o+1} - \mu_j}), \qquad j \leqslant m_o \quad \text{et} \quad k \geqslant m_o+1 ;$$

$$A_{jk}(\rho\omega) = 0\ (\rho^{-\nu_{m_o} - \lambda_j}), \qquad j \geqslant m_o+1 \quad k \leqslant m_o ;$$

$$A_{jk}(\rho\omega) = 0\ (\rho^{-\lambda_j}), \qquad j,k \geqslant m_o+1 \ .$$

Preuve : elle est analogue à celle du théorème (2.3.1) en tenant compte que $\nu_{m_o+1} > \nu_{m_o}$ par hypothèse.

3.- Propriétés de régularité de la solution du problème (I)

Rappelons que la solution que l'on étudie peut s'écrire sous la forme suivante sous certaines hypothèses de régularité à l'origine des $\widehat{\varphi}_j$,

$$u(x,y) = \sum_{j=1}^{m_1} u_j(x,y) \ , \text{ où}$$

$$(4) \qquad u_j(x,y) = \sum_{k=1}^{m_1} \overline{\mathcal{F}}_\xi \left[\chi(\tfrac{\rho}{a})\ A_{jk}(\rho\omega)\ G_k(\rho,\omega,y)\ \widehat{\varphi}_j(\xi)\right](x) + \overline{\mathcal{F}}_\xi \left[(1-\chi(\tfrac{\rho}{a})) \int_{C_a} \frac{\rho^{-\mu_j} N_j(\rho,\omega,\zeta)\ e^{\rho\zeta y}}{\prod_{i=1}^{m_1} (\zeta + \frac{\eta_i(\rho\omega)}{\rho})}\, d\zeta\ \ \widehat{\varphi}_j(\xi)\right](x) \ .$$

Théorème 2.- Soient $\varphi_j(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$, $j = 1,\ldots,m_1$; pour tout $y \geqslant 0$ on a :

$B_j(\frac{1}{i} D_x , -D_y)\, u_j(x,y) \in H^r(\mathbb{R}^{n-1})$ comme fonction de x et

$$\|B_j(\tfrac{1}{i} D_x , -D_y)\, u_j(x,y)\|_{H^r(\mathbb{R}^{n-1})} \leqslant C \ \|\varphi_j\|_{H^r(\mathbb{R}^{n-1})} \quad \forall\, r \in \mathbb{N} .$$

Remarque 2.- B_j peut être remplacé par D^{μ_j} et on aura des résultats, analogues au théorème 3.4, pour $p = 2$, d'Agmon-Douglis-Niremberg.

Preuve : Lorsque $y = 0$, le théorème est immédiat car, $B_j\, u_j(x,0) = \varphi_j(x)$. Supposons alors $y > 0$, il suffira de montrer successivement que $B_j\, u^1_{jk}(x,y)$ et $B_j\, u^2_j(x,y)$ sont dans $H^r(\mathbb{R}^{n-1})$ $(j,k \leqslant m_1)$ c'est-à-dire, si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1})$, que

$$D^\alpha_x\, B_j\, u^1_{jk} \quad \text{et} \quad D^\alpha_x\, B^\alpha_j\, u^2_j \quad \text{sont dans } \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^{n-1}) \text{ pour tout } |\alpha| \leqslant r$$

α) u^1_{jk} avec $j,k \leqslant m_o$.

Le théorème de Plancherel entraîne qu'il suffit de montrer :

$$\chi(\tfrac{\rho}{a})\ A_{jk}(\rho\omega)\ B_j(\rho\omega, -D_y)\ G_k(\rho,\omega,y)\ \widehat{D^\alpha\varphi_j}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^{n-1}) \quad .$$

Or $\chi(\frac{\rho}{a})\ A_{jk}(\rho\omega)\ B_j(\rho\omega, -D_y)\ G_k(\rho,\omega,y)$ est continue à support compact. La continuité en $\rho = 0$ suit du fait que

$$B_j(\rho\omega, -D_y)\ G_k = \rho^{\mu_j} \int_C \frac{B_j(\omega, -z)\ z^{k-1}\ e^{\rho yz}}{\prod_{i=1}^{m_o} (z + \frac{\eta_i(\rho\omega)}{\rho})}\, dz$$

et alors $|\rho^{\mu_j}\, A_{jk}(\rho\omega)|$ est borné au voisinage de $\rho = 0$, d'après le théorè[me] D'où

$$\|B_j\ u^1_{jk}\|_{H^r(\mathbb{R}^{n-1})} = \sum_{|\alpha|\leqslant r} \|D^\alpha_x\, B_j\ u^1_{jk}(x,y)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \leqslant C\ \|\varphi_j\|^2_{H^r(\mathbb{R}^{n-1})}$$

β) u^1_{jk} avec $j \leq m_o$ et $k \geq m_o+1$.

Dans ce cas :

$$B_j(\rho\omega, -D_y)\ G_k = \int \frac{B_j(\rho\omega,-z)\ z^{k-m_o-1}\ e^{yz}}{\prod_{m_o+1}^{m_o} (z + \eta_i(\rho\omega))}\, dz = O(\rho^{\lambda_j})$$

et, comme alors $A_{jk}(\rho\omega) = O\ (\rho^{\nu_{m_o+1} - \nu_j - \lambda_j})$, on aura :

$A_{jk}(\rho\omega)\ B_j(\rho\omega, -D_y)\ G_k(\rho,\omega,y) = O(\rho^{\nu_{m_o+1} - \nu_j})$, et $j \leq m_o$ entraîne que $\nu_{m_o+1} > \nu_j$, c'est-à-dire que l'on a encore continuité à l'origine et comme précédemment, on a la même inégalité.

γ) u^1_{jk} avec $j \geq m_o+1$ et $k \leq m_o$.

Dans ce cas :

$A_{jk}(\rho\omega)\ B_j(\rho\omega, -D_y)\ G_k(\rho,\omega,y) = O(\rho^{\nu_j - \nu_{m_o}})$ et $\nu_j \geq \nu_{m_o}$ $(j > m_o)$

et, comme précédemment, on a la même inégalité.

δ) u^1_{jk} avec $j,k \geq m_o+1$.

Dans ce cas

$$A_{jk}(\rho\omega)\ B_j(\rho\omega, -D_y)\ G_k(\rho,\omega,y) = O(1)\ .$$

Donc le résultat est vérifié pour $B_j\ u^1_j(x,y)$, et, pour $B_j\ u^2_j(x,y)$, il suffit de voir la démonstration du théorème 3.1.1.

<u>Théorème 3</u>.- Soit $\varphi_j \in L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ telle que $|\varphi_j|^*_{1/2,H^r(\mathbb{R}^{n-1})} < \infty$ alors

$|B_j(\frac{1}{i}\ D_x\ ,\ -D_y)\ u_j(x,y)|_{1,H^r}$ est fini pour tout $j = 1,\ldots,m_1$ et on a

$$|B_j(\tfrac{1}{i}\ D_x\ ,\ -D_y)\ u_j(x,y)|_{1,H^r} \leq C\ \ |\varphi_j|^*_{1/2,\ H^r(\mathbb{R}^{n-1})}\ .$$

Preuve : C'est le théorème 3.1.2, en tirant du lemme 2.5.2 les inégalités :

Si $k \leqslant m_o$,

$$|B_j(\rho\omega, -D_y)\ G_k(\rho,\omega,y)| \leqslant C\ \rho^{\mu_j}\ e^{-\alpha\rho y}\quad, \text{pour } \rho \leqslant a\ .$$

Si $k \leqslant m_o+1$,

$$|B_j(\rho\omega, -D_y)\ G_k(\rho,\omega,y)| \leqslant C\ \rho^{\lambda_j}\ e^{-(\beta y+\alpha\rho y)}\quad, \text{pour } \rho \leqslant a\ .$$

Théorème 4.- Supposons que :

$$|\varphi_j|^*_{-\mu_j-\frac{1}{2},\, H^{\nu_{m_1}+r+1}(\mathbb{R}^{n-1})} < \infty \quad, j = 1,\ldots, m_o\ ,$$
$$|\varphi_j|^*_{-\nu_{m_o}-\lambda_j-\frac{1}{2},\, H^{\nu_{m_1}+r-\nu_j+\nu_{m_o}+1}} < \infty\ , j \geqslant m_o+1\ .$$

$u(x,y)$ donnée par (4) est bien définie et est une solution du problème (I) qui appartient à $T^{\nu_{m_1}+1,r}(\mathbb{R}^n_+)$.

Preuve : La marche à suivre est la même que pour le théorème 3.1.3 en remarquant que le théorème (1) permet d'écrire :

pour $j,k \leqslant m_o$,

$$\sum_{k=1}^{m_1} \chi(\tfrac{\rho}{a})\ \left[\rho^{\mu_j}\ A_{jk}(\xi)\right] G_k(\rho,\omega,y)\ \rho^{1/2}\ \rho^{-\mu_j-\frac{1}{2}}\ \hat{\varphi}_j(\xi)\ ,$$

$\chi(\frac{\rho}{a})\ \rho^{1/2}$ pouvant être majoré par $a^{1/2}$,

$\rho^{\mu_j}\ A_{jk}(\xi)$ est borné au voisinage de $\rho = 0$;

pour $j \leqslant m_o$ $k \geqslant m_o+1$,

$$\sum_{k=1}^{m_1} \chi(\tfrac{\rho}{a})\ \rho^{\mu_j-\nu_{m_o+1}}\ A_{jk}(\xi)\ G_k(\rho,\omega,y)\ \rho^{\nu_{m_o+1}+\frac{1}{2}}\ \rho^{-\mu_j-\frac{1}{2}}\ \hat{\varphi}_j(\xi)$$

$\chi(\frac{\rho}{a})\ \rho^{\nu_{m_o+1}+\frac{1}{2}}$ peut être majoré par $a^{\nu_{m_o+1}+\frac{1}{2}}$,

$\rho^{\mu_j - \nu_{m_o+1}} A_{jk}(\xi)$ est borné au voisinage de $\rho = 0$.

pour $j \geqslant m_o+1$, $k \leqslant m_o$,

$$\sum_{k=1}^{m_1} \chi(\frac{\rho}{a}) \rho^{\nu_{m_o} + \lambda_j} A_{jk}(\xi) G_k(\rho,\omega,y) \rho^{1/2} \rho^{-\nu_{m_o} - \lambda_j - 1/2} \hat{\varphi}_j(\xi) ,$$

$\chi(\frac{\rho}{a}) \rho^{1/2}$ est majoré par $a^{1/2}$,

$\rho^{\nu_{m_o} + \lambda_j} A_{jk}(\xi)$ est borné au voisinage de $\rho = 0$.

pour $j,k \geqslant m_o+1$,

$$\sum_{k=1}^{m_1} \chi(\frac{\rho}{a}) \rho^{\lambda_j} A_{jk}(\xi) G_k(\rho,\omega,y) \rho^{\nu_{m_o} + 1/2} \rho^{-\nu_{m_o} - \lambda_j - 1/2} \hat{\varphi}_j(\xi) ,$$

$\chi(\frac{\rho}{a}) \rho^{\nu_{m_o} + 1/2}$ est majoré par $a^{\nu_{m_o} + 1/2}$,

$\rho^{\lambda_j} A_{jk}(\xi)$ est borné au voisinage de $\rho = 0$.

Corollaire.- Si sous les hypothèses du théorème précédent on suppose en plus que

$$\varphi_j \in H^{\nu_{m_1}+r+k}(\mathbb{R}^{n-1}) \quad , \quad \forall\, j = 1 ,\dots, m_1 \; ,$$

alors $\quad u(x,y) \in T^{\nu_{m_1}+k,r}(\mathbb{R}^n_+)$.

4.- Le problème limite

On considère le problème :

$$(II) \qquad \begin{cases} L_o(\frac{1}{i} D_x , -D_y) u(x,y) = 0 , \\ B_j(\frac{1}{i} D_x , -D_y) u(x,0) = \varphi_j(x) , \qquad j \leqslant m_o . \end{cases}$$

On a successivement :

$$A^{k\ell}(\rho\omega,y) = B_\ell(\rho\omega,\ -D_y)\ G'_k(\rho,\omega,y)$$

$$= \int_C \frac{B_\ell(\rho\omega,\ -\rho z)\ z^{k-1}\ e^{\rho yz}}{\prod_{i=1}^{m_o} (z + \alpha_i(\omega))}\, dz$$

$$= \rho^{\mu_\ell} \int_C \frac{B_\ell(\omega,\ -z)\ z^{k-1}\ e^{\rho yz}}{\prod_{i=1}^{m_o} (z + \alpha_i(\omega))}\, dz \quad ;$$

$$A^{k\ell}(\rho\omega,0) = \rho^{\mu_\ell}\ \alpha_{k\ell}(\omega) \quad \text{et donc}$$

$$[A_{jk}(\rho\omega)] = [\rho^{-\mu_j}\ \beta_{jk}(\omega)] \quad .$$

Théorème 5.- Supposons que :

$$|\varphi_j|^*_{-\mu_j - 1/2,\ \overset{\vee}{H}{}^{m_o+r+1}(\mathbb{R}^{n-1})} < \infty$$

On peut alors définir $u(x,y) = \sum_{j=1}^{m_o} u_j(x,y)$ où

$$u_j(x,y) = \sum_{k=1}^{m_o} \overline{\mathcal{F}}_\xi \left[\rho^{-\mu_j}\ \beta_{jk}(\omega)\ G'_k(\rho,\omega,y)\ \hat{\varphi}_j(\xi)\right](x)\ ;$$

$u(x,y)$ ainsi définie est une solution du problème (II) qui appartient à $\overset{\vee}{T}{}^{m_o+1,r}(\mathbb{R}^n_+)$.

5.- Le problème perturbé

Si $\varepsilon > 0$ on considère le problème :

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} L(\frac{\varepsilon}{i}\, D_{\overline{x}})\ u_\varepsilon(x,y) = 0\ , & y > 0\ ; \\ \mathbb{B}_j(\frac{\varepsilon}{i}\, D_{\overline{x}})\ u_\varepsilon(x,0) = \varphi_j(x)\ , & j = 1\ ,\ldots,\ m_1\ . \end{cases}$$

On note $\quad f^\beta_{jk}(\xi,y) = \chi(\frac{\rho}{a})\ A_{jk}(\rho\omega)\ D^\beta_y\ G_k(\rho,\omega,y)\ ,$

$$f_j^\beta(\xi,y) = \sum_{k=1}^{m_1} f_{jk}^\beta(\xi,y) \quad ,$$

$$g_j^\beta(\xi,y) = (1-\chi(\frac{\rho}{a}))\frac{\rho^{-\mu_j} N_j(\rho,\omega,\zeta)\ (\rho\zeta)^\beta e^{\rho\zeta}}{\prod_{i=1}^{m_1}\left[\zeta + (\frac{\eta_i(\rho\omega)}{\rho}\right]} d\zeta \quad .$$

Théorème 6.- Supposons que

$$|\varphi_j|^*_{-\mu_j-\frac{1}{2},\ H^{\nu_{m_1}+r+1}(\mathbb{R}^{n-1})} < \infty \qquad (j \leqslant m_o)$$

et

$$|\varphi_j|^*_{-\nu_{m_o}-\lambda_j-\frac{1}{2},\ H^{\nu_{m_1}+r+\nu_{m_o}-\nu_j+1}(\mathbb{R}^{n-1})} < \infty \quad , \ j \geqslant m_o+1 \quad .$$

On peut alors définir la fonction $u_\varepsilon(x,y) = \sum_{j=1}^{m_1} u_{j\varepsilon}(x,y)$, où

$$u_{j\varepsilon}(x,y) = \varepsilon^{\mu_j}\left[\overline{\mathcal{F}}_\xi\,[f_j^\circ(\varepsilon\xi,\frac{y}{\varepsilon})\ \widehat{\varphi}_j(\xi)](x) + \overline{\mathcal{F}}_\xi\ [g_j^\circ(\varepsilon\xi,\frac{y}{\varepsilon})\ \widehat{\varphi}_j(\xi)](x)\right]$$

et $u_\varepsilon(x,y) \in T^{\nu_{m_1}+1,r}(\mathbb{R}^n_+)$ est solution du problème perturbé (III) et converge dans $T^{\nu_{m_o}+1,r}(\mathbb{R}^n_+)$ vers $u(x,y)$.

Preuve : Le début du théorème est analogue à la démonstration du théorème (4.2.1 . Montrons la convergence dans $T^{\nu_{m_o}+1,r}(\mathbb{R}^n_+)$.

Lemme.- $u^2_{j\varepsilon}$ converge vers zéro dans $T^{\nu_{m_o}+1,r}(\mathbb{R}^n_+)$ lorsque $\varepsilon \to 0$ et on a les inégalités :

$$\|u^2_{j\varepsilon}(x,y)\|^2_{T^{\nu_{m_o}+1,r}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C'\varepsilon \quad , \qquad j = 1,\dots,m_1 \quad ,$$

et

$$\|u^2_{j\varepsilon}(x,y)\|^2_{T^{\nu_{m_1}+1,r}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C \quad .$$

Preuve : D'après le lemme (3.1.1), on a :

$$\| D^q (D_x^p \, u_{j\varepsilon}^2(x,y)) \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} | g_{j\varepsilon}^{\beta_o}(\xi,y) \, \widehat{D^{\alpha+\beta} \varphi_j}(\xi)|^2 \, d\xi dy$$

$$\leqslant C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 - \chi(\tfrac{\varepsilon\rho}{a}))^2 \, \rho^{-2\mu_j+2\beta_o-1} \, |\widehat{D^{\alpha+\beta} \varphi_j}(\xi)|^2 \, d\xi$$

$$\leqslant C\varepsilon \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 - \chi(\tfrac{\varepsilon\rho}{a}))^2 \, (\varepsilon\rho)^{-1} \, \rho^{-2\mu_j+2\beta_o} \, |\xi_1|^{2(\alpha_1+\beta_1)} \ldots |\xi_{n-1}|^{2(\alpha_{n-1}+\beta_{n-1})} \, |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 \, d\xi$$

$$\leqslant C\varepsilon \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (\tfrac{a}{2})^{-1} \, \rho^{-2\mu_j+2|q|+2|p|} \, |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 \, d\xi$$

$$\leqslant C\varepsilon \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \rho^{-2\mu_j-1} \, \frac{\rho^{2|q|+2|p|+1}}{(1+\rho^2)^{\nu_{m_1}+r+1}} (1+|\xi|^2)^{\nu_{m_1}+r+1} \, |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2 \, d\xi \quad .$$

Ceci pour $j \leqslant m_o$ et alors, comme $|q| \leqslant \nu_{m_o}+1$ et $|p| \leqslant r$ et $\nu_{m_o}+1 \leqslant \nu_{m_1}$, on a

$$\frac{\rho^{2|q|+2|p|+1}}{(1+\rho^2)^{\nu_{m_1}+r+1}} \leqslant C \quad \text{pour} \quad \rho \in \mathbb{R}^+ \, ;$$

d'où le résultat pour $j \leqslant m_o$ en sommant pour $|q| \leqslant \nu_{m_o}+1$ et $|p| \leqslant r$.

Si $j \geqslant m_o+1$, on majore alors comme suit :

$$\leqslant C\varepsilon \times \varepsilon^{2\nu_j-2\nu_{m_o}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 - \chi(\tfrac{\varepsilon\rho}{a}))^2 \, (\varepsilon\rho)^{2\nu_{m_o}-\nu_j-1} \, \rho^{-2\nu_{m_o}-2\lambda_j+2|q|+2|p|} \, |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2$$

Or si $j \geqslant m_o+1$ $\nu_j > \nu_{m_o}$ et donc $\varepsilon^{2\nu_j-2\nu_{m_o}} \leqslant 1$ et

$$(1 - \chi(\tfrac{\varepsilon\rho}{a}))^2 \, (\varepsilon\rho)^{2\nu_{m_o}-\nu_j-1} \leqslant (\tfrac{a}{2})^{2\nu_{m_o}-\nu_j-1} \quad .$$

D'où

$$\leqslant C\varepsilon \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \rho^{-2\nu_{m_o}-2\lambda_j-1} \, \frac{\rho^{2|q|+2|p|+1}}{(1+\rho^2)^{\nu_{m_1}+\nu_{m_o}-\nu_j+1}} (1+\rho^2)^{\nu_{m_1}+r+\nu_{m_o}-\nu_j+1} \, |\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2$$

et le résultat lorsque $j \geqslant m_o+1$, en sommant pour $|q| \leqslant \nu_{m_o}+1$ et $|p| \leqslant r$.

La deuxième inégalité s'obtient en laissant $(\varepsilon\rho)^{-1}$ et en sommant sur $|q| \leqslant \nu_{m_1}+1$.

<u>Lemme 2</u>.- Lorsque $j \leqslant m_o$ et $k \geqslant m_o+1$ $u^1_{jk\varepsilon}(x,y)$ converge vers zéro dans $T^{\nu_{m_o}+1,r}(\mathbb{R}^n_+)$ et on a l'inégalité :

$$\|u^1_{jk\varepsilon}(x,y)\|^2_{T^{\nu_{m_o}+1,r}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C'\varepsilon \quad .$$

<u>Preuve</u> : $\|D^q(D^p u^1_{jk\varepsilon}(x,y)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} = \varepsilon^{2\mu_j}\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f^\beta_{jk}(\varepsilon\xi, \frac{y}{\varepsilon})|^2 \, |\widehat{D\varphi}_j(\xi)|^2 \, d\xi dy$.

Or pour $\varepsilon\rho \leqslant a$ le théorème 1 donne pour $j \leqslant m_o$ et $k \geqslant m_o+1$

$$|A_{jk}(\varepsilon\rho\omega)| \leqslant C\,(\varepsilon\rho)^{\nu_{m_o}+1-\mu_j}$$

et le lemme (2.5.2) donne après introduction de ε

$$\left|\frac{\partial^{\beta_o}}{\partial y^{\beta_o}} G_k(\varepsilon\rho,\omega,\frac{y}{\varepsilon})\right|^2 \leqslant \frac{C}{\varepsilon^{2\beta_o}} e^{-2(\beta+\alpha\varepsilon\rho)\frac{y}{\varepsilon}} \quad \text{pour} \quad \varepsilon\rho \leqslant a \quad \text{et} \quad k \geqslant m_o+1 \quad .$$

Donc :

$$\|D^q(D^p u^1_{jk\varepsilon}(x,y)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C\,\varepsilon^{2\mu_j-2\beta_o}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2(\frac{\varepsilon\rho}{a})\,(\varepsilon\rho)^{2\nu_{m_o+1}-2\mu_j} \int_0^\infty e^{-2(\beta+\alpha\varepsilon\rho)\frac{y}{\varepsilon}}\,dy\;|\widehat{D^{\alpha+\beta}\varphi_j}(\xi)|^2\,d\xi$$

$$\leqslant C\;\varepsilon^{2\nu_{m_o+1}-2\beta_o+1}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2(\frac{\varepsilon\rho}{a})\,\rho^{2\nu_{m_o+1}-2\mu_j}\,\xi_1^{2(\alpha_1+\beta_1)}\cdots\xi_{n-1}^{2(\alpha_{n-1}+\beta_{n-1})}\,|\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2\,d\xi$$

$$\leqslant C\,\varepsilon\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2(\frac{\varepsilon\rho}{a})\,(\varepsilon\rho)^{2\nu_{m_o+1}-2\beta_o}\,\rho^{2|p|+2|q|-2\mu_j}\,|\widehat{\varphi}_j(\xi)|^2\,d\xi$$

et, comme $\beta_o \leqslant \nu_{m_o}+1 \leqslant \nu_{m_o+1}$, on peut majorer $(\varepsilon\rho)^{2\nu_{m_o+1}-2\beta_o}$ par $a^{2\nu_{m_o+1}-2\beta_o}$

et, comme précédemment, on peut conclure que :

$$\| u^1_{jk\varepsilon}(x,y) \|^2_{T^{\nu_{m_o}+1,r}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C'\,\varepsilon \quad .$$

<u>Lemme 3</u>.- Lorsque $j \geq m_o+1$ et $k \geq m_o+1$, $u^1_{jk\varepsilon}(x,y)$ converge vers zéro dans $T^{\nu_{m_o}+1,r}(\mathbb{R}^n_+)$ et on a l'inégalité :

$$\| u^1_{jk\varepsilon}(x,y) \|^2_{T^{\nu_{m_o}+1,r}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C'\,\varepsilon \quad .$$

<u>Preuve</u> : On a encore (4.2.15) (4.2.17) mais le théorème (1) donne :

$$A_{jk}(\varepsilon\rho\omega) \leq C\,(\varepsilon\rho)^{-\lambda_j} \quad \text{pour} \quad \varepsilon\rho \leq a \quad \text{et donc :}$$

$$\| D^q(D^p_x\, u^1_{jk\varepsilon}(x,y)) \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leq C\,\varepsilon \times \varepsilon^{2\mu_j-2\beta_o-\lambda_j} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2\!\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) \rho^{-\lambda_j} \xi_1^{2(\alpha_1+\beta_1)} \dots \xi_{n-1}^{2(\alpha_{n-1}+\beta_{n-1})} |\hat{\varphi}_j(\xi)|^2\, d\xi$$

$$\leq C\,\varepsilon \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2\!\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) (\varepsilon\rho)^{2\nu_j-2\beta_o} \rho^{-2\mu_j+2|p|+2|q|} |\hat{\varphi}_j(\xi)|^2\, d\xi$$

et l'on décompose en introduisant $1 = \chi(\frac{\rho}{a}) + (1-\chi(\frac{\rho}{a}))$

le premier terme est $$C\,\varepsilon \times \varepsilon^{2\nu_j-2\beta_o} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2\!\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) \chi\!\left(\frac{\rho}{a}\right) \rho^{2\nu_{m_o}+2-2\beta_o} \rho^{-2\nu_{m_o}-2-2\lambda_i^{-1}} \rho^{2|p|+2|q|+1} |\hat{\varphi}_j|^2\, d\xi$$

et $2\nu_j - 2\beta_o \geq 0$ entraîne $\varepsilon^{2\nu_j-2\beta_o} \leq 1$,

$2\nu_{m_o}+2-2\beta_o \geq 0$ entraîne $\chi^2(\frac{\varepsilon\rho}{a})\, \chi(\frac{\rho}{a})\, \rho^{2\nu_{m_o}+2+2|p|+2|q|-2\beta_o} \leq a^{2\nu_{m_o}+2|p|+2|q|-1}$

d'où le premier terme est majoré par $C\,\varepsilon$.

le deuxième terme s'écrit

$$C\,\varepsilon \int (1-\chi(\tfrac{\rho}{a}))\, \chi^2\!\left(\frac{\varepsilon\rho}{a}\right) (\varepsilon\rho)^{2\nu_j-2\beta_o} \frac{\rho^{2|p|+2|q|-2\mu_j}}{(1+\rho^2)^{\nu_{m_1}+r-\mu_j+1/2}} (1+\rho^2)^{\nu_{m_1}+r-\mu_j+1/2} |\hat{\varphi}_j(\xi)|^2\, d\xi \quad .$$

Comme $2\nu_j - 2\beta_o > 0$ et $\chi^2(\frac{\varepsilon\rho}{a}) = 0$ si $\varepsilon\rho \geqslant a$ on a :

$$\chi^2(\frac{\varepsilon\rho}{a})\ (\varepsilon\rho)^{2\nu_j-2\beta_o} \leqslant a^{2\nu_j-2\beta_o}$$

et comme $1-\chi(\frac{\rho}{a}) = 0$ si $\rho \leqslant \frac{a}{2}$ $\quad \dfrac{\rho^{2|p|+2|q|-2\mu_j}}{(1+\rho^2)^{\nu_{m_1}+r-\mu_j+1/2}} < C$ pour

$|q| \leqslant \nu_{m_o}+1$ et $|p| \leqslant r$.

D'où le résultat.

<u>Lemme 4</u>.- Lorsque $j \geqslant m_o+1$ et $k \leqslant m_o$ $u^1_{jk\varepsilon}(x,y)$ converge vers zéro dans $T^{\nu_{m_o}+1,r}(\mathbb{R}^n_+)$ et on a l'inégalité

$$\| u^1_{jk\varepsilon}(x,y) \|^2_{T^{\nu_{m_o}+1,r}(\mathbb{R}^n_+)} < C'\,\varepsilon \quad .$$

<u>Preuve</u> : Dans ce cas

$$|A_{jk}(\varepsilon\rho\omega)| \leqslant C(\varepsilon\rho)^{-\nu_{m_o}-\lambda_j} \quad \text{pour} \quad \varepsilon\rho \leqslant a$$

et le lemme (2.5.2) donne :

$$\left| \frac{\partial^{\beta_o}}{\partial y^{\beta_o}} G_k(\varepsilon\rho,\omega,\frac{y}{\varepsilon}) \right|^2 \leqslant C\ \rho^{2\beta_o}\ e^{-2\alpha\rho y} \quad \text{pour} \quad \varepsilon\rho \leqslant a \quad .$$

Donc :

$$\| D^q(D^p_x\ u^1_{jk\varepsilon}(x,y)) \|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C\ \varepsilon^{\mu_j} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2(\frac{\varepsilon\rho}{a})(\varepsilon\rho)^{-2\nu_{m_o}-2\lambda_j}\ \rho^{2\beta_o-1}$$

$$\xi_1^{2(\alpha_1+\beta_1)} \ldots \xi_{n-1}^{2(\alpha_{n-1}+\beta_{n-1})}\ |\hat{\varphi}_j(\xi)|^2\ d\xi$$

$$\leqslant C\ \varepsilon \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi^2(\frac{\varepsilon\rho}{a})\ (\varepsilon\rho)^{-2\nu_{m_o}+2\nu_j-1}\ \rho^{-\mu_j+2|\alpha|+2|\beta|}\ |\hat{\varphi}_j(\xi)|^2\ d\xi$$

et après décomposition comme dans le lemme précédent on obtient le même résultat car ici $-2\nu_{m_o}+2\nu_j-1 \geqslant 0$.

Lemme 5.- Lorsque $j \leqslant m_o$ et $k \leqslant m_o$, $u^1_{jk\varepsilon}(x,y)$ converge vers $u_{jk}(x,y)$ (donnée par le théorème 5) dans $T^{\nu_{m_o}+1,r}(\mathbb{R}^n_+)$ et on a l'inégalité :

$$\| u^1_{jk\varepsilon}(x,y) - u_{jk}(x,y) \|^2_{T^{\nu_{m_o}+1,r}(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C\,\varepsilon \quad .$$

Preuve : C'est l'analogue du lemme (4.2.5) où $j-1$ est remplacé par μ_j et m_o par $\nu_{m_o}+1$.

Bibliographie. -

[1] M. GUEUGNON, *Perturbations singulières et noyaux de Poisson*, Publ. Dep. Math. Lyon, 15-2 (1978) p. 1-112.

Dans [1] , on trouvera une bibliographie détaillée.