

PAUL NOUYRIGAT

**Sur les points extrémaux de la boule unité de l'espace des coefficients
d'une représentation unitaire et sur l'égalité $A_\pi(G) = B_\pi(G)$**

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1979, tome 16, fascicule 1
, p. 27-36

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1979__16_1_27_0

© Université de Lyon, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES POINTS EXTREMAUX DE LA BOULE UNITE
DE L'ESPACE DES COEFFICIENTS D'UNE REPRESENTATION UNITAIRE
ET SUR L'EGALITE $A_{\pi}(G) = B_{\pi}(G)$

par Paul NOUYRIGAT

Soit π une représentation unitaire d'un groupe localement compact G . Eymard [3] puis Arzac [1] ont défini et étudié les espaces $B_{\pi}(G)$ et $A_{\pi}(G)$. L'espace $B_{\pi}(G)$ est l'ensemble des coefficients des représentations unitaires continues de G qui sont faiblement contenues dans π . L'espace $A_{\pi}(G)$ est le sous-espace de Banach de $B(G)$ engendré par les coefficients de π . Nous montrons que les points extrémaux de la boule unité de $A_{\pi}(G)$ sont liés aux sous-représentations irréductibles de π , puis que l'égalité $A_{\pi}(G) = B_{\pi}(G)$ entraîne que π est somme de multiples de représentations irréductibles.

Nous adopterons les notations de [1].

Soit G un groupe localement compact et soit dx une mesure de Haar à gauche sur G , choisie une fois pour toutes. Soit π une représentation unitaire continue de G dans un espace Hilbertien \mathcal{H} . Pour ξ et $\eta \in \mathcal{H}$, on désigne par $\xi * \eta$ la fonction sur G définie par $\xi * \eta(s) = (\pi(s)\xi | \eta)$. On désigne par VN_{π} l'algèbre de Von Neumann engendrée dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ par $\pi(G)$. On sait que $A_{\pi}(G)$ s'identifie au préduel de VN_{π} , la formule de dualité étant :

$$\langle T, \xi * \eta \rangle = (T\xi | \eta) \quad , \quad \text{pour } T \in VN_{\pi} \quad , \quad \xi \in \mathcal{H} \quad \eta \in \mathcal{H}$$

On écrira désormais A_{π} et B_{π} au lieu de $A_{\pi}(G)$ et $B_{\pi}(G)$.

1. - Soit π une représentation unitaire de G .

On montre que, si u est extrémal dans la boule unité de A_{π} , il existe σ sous-représentation irréductible de π telle que u soit extrémal dans la boule unité de A_{σ} . On désigne par \mathcal{B} la boule unité de A_{π} .

(1.1.) PROPOSITION. - Soient u et v dans A_{π} . On suppose qu'il existe un opérateur partiellement isométrique $T \in VN_{\pi}$ tel que

$$u = Tv \quad ; \quad v = T^* u \quad , \quad ||u|| = ||v||.$$

Alors pour que u soit extrémal dans \mathcal{B} , il faut et il suffit que v le soit.

Soit $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}$ tel que $T^* T$ soit le projecteur sur \mathcal{H}_1 . Alors T (resp. T^*) est nul sur \mathcal{H}_1^{\perp} (resp. $[\overline{T(\mathcal{H}_1)}]^{\perp}$) et est une isométrie sur \mathcal{H}_1 (resp. $T(\mathcal{H}_1)$).

Supposons u extrémal dans \mathcal{B} et soit $v = 1/2(v_1 + v_2)$ où $v_1 \in \mathcal{B}$, $v_2 \in \mathcal{B}$. On a donc

$$u = Tv = 1/2 [Tv_1 + Tv_2] \quad , \quad \text{avec } Tv_1 \in \mathcal{B} \quad \text{et} \quad Tv_2 \in \mathcal{B}.$$

d'où $u = Tv_1 = Tv_2$. On peut écrire $v_1 = \sum (\xi_i + \xi'_i) * \eta_i$ avec $\xi_i \in \mathcal{H}_1$; $\xi'_i \in \mathcal{H}_1^{\perp}$; $||v_1|| = \sum ||\xi_i + \xi'_i|| ||\eta_i||$. Ce qui donne

$$Tv_1 = \sum_i T\xi_i * \eta_i \quad \text{puis}$$

$$1 = ||u|| = ||Tv_1|| \leq \sum_i ||T\xi_i|| ||\eta_i|| = \sum_i ||\xi_i|| ||\eta_i|| \leq \sum_i ||\xi_i + \xi'_i|| ||\eta_i|| \leq 1$$

On en déduit que pour tout i on a $||\xi_i|| = ||\xi_i + \xi'_i||$ et, les éléments ξ_i et ξ'_i étant orthogonaux, $\xi'_i = 0$ puis $v_1 = \sum_i \xi_i * \eta_i$.

Or $\xi_i = T^*T\xi_i$ d'où $v_1 = \sum T^*T\xi_i * \eta_i = T^*Tv_1 = T^*u = v$.

Par suite $v_2 = v$ et v est extrémal dans \mathcal{B} .

Pour la réciproque on permute u et v puis T et T^* .

(1.2) COROLLAIRE. - Pour que $u \in A_\pi$ soit extrémal dans \mathcal{B} , il faut et il suffit que sa valeur absolue $|u|$ le soit.

On utilise la décomposition polaire $u = T|u|$ de u et on applique le résultat précédent.

(1.3) REMARQUE. - Soit $u \in \mathcal{B}$. Si u est positif (i.e. u est une forme linéaire positive sur VN_π), si $u = 1/2(u_1+u_2)$ et $||u|| = 1$ avec $u_1 \in \mathcal{B}$ et $u_2 \in \mathcal{B}$ alors u_1 et u_2 sont positifs.

En effet on a $1 = ||u|| = u(e) = 1/2(u_1(e)+u_2(e)) \leq 1/2(||u_1||+||u_2||) \leq 1$ d'où $||u_1|| = u_1(e)$ et $||u_2|| = u_2(e)$. Alors d'après [2] prop. 2.19 on a le résultat.

Ceci montre que pour que u , positif, soit extrémal dans \mathcal{B} il suffit qu'il le soit dans la partie positive de \mathcal{B} .

(1.4) PROPOSITION. - Soit $u \in \mathcal{B}$. Alors si u est extrémal dans \mathcal{B} , u peut s'écrire $u = \xi * \eta$, avec $\xi \in \mathcal{H}$, $\eta \in \mathcal{H}$ et $||u|| = ||\xi|| = ||\eta|| = 1$.

En effet, on peut écrire $u = \sum_i \xi_i * \eta_i$, avec $||u|| = \sum ||\xi_i|| ||\eta_i|| = 1$ ($\xi_i \in \mathcal{H}; \eta_i \in \mathcal{H}$). Si la somme comporte plus d'un terme, on a $u = u_1+u_2$ avec $1 = ||u|| = ||u_1||+||u_2||$ d'où $u = ||u_1|| \frac{u_1}{||u_1||} + ||u_2|| \frac{u_2}{||u_2||}$.

D'où, u étant extrémal, tous les termes de la somme sont proportionnels.

Il résulte alors que $u = \xi * \eta$ avec $\|u\| = \|\xi\| = \|\eta\| = 1$.

(1.5) PROPOSITION. - On suppose la représentation π irréductible.

Alors les points extrémaux de \mathcal{B} sont les $u \in A_\pi$ qui s'écrivent

$u = \xi * \eta$, avec $\|u\| = \|\xi\| = \|\eta\| = 1$.

D'après (1.4) il suffit de montrer que les $\xi * \eta$ avec $\xi \in \mathcal{H}$, $\eta \in \mathcal{H}$, $\|\xi * \eta\| = \|\xi\| = \|\eta\| = 1$, sont extrémaux dans \mathcal{B} . Soit donc un tel $\xi * \eta$. Puisque π est irréductible, on a $VN_\pi = \mathcal{L}(\mathcal{H})$ d'où $A_\pi(G)$ s'identifie à l'espace des opérateurs à trace sur \mathcal{H} , cet espace s'identifie à $\mathcal{H} \hat{\otimes} \overline{\mathcal{H}}$ et $\xi * \eta$ s'identifie à $\xi \otimes \eta$

Or $\xi \otimes \eta$ est un opérateur de Hilbert Schmidt et sa norme d'opérateur de Hilbert-Schmidt est 1. Donc $\xi \otimes \eta$ est extrémal dans la boule unité des opérateurs de Hilbert-Schmidt et, par suite, dans la boule unité des opérateurs à trace qui est plus petite.

Pour toute sous-représentation irréductible, α de π , il existe un seul projecteur central $P_\alpha \in VN_\alpha$ tel que $P_\alpha A_\pi = A_\pi P_\alpha = A_\alpha \subset A_\pi$ ([1] Prop (3.16) p. 50). Si α et β sont des sous-représentations irréductibles de π disjointes on a ([1] (3.12)) $A_\alpha \cap A_\beta = \{0\}$ d'où on déduit $P_\alpha P_\beta = 0$. Les sous-espaces $P_\alpha(\mathcal{H}) = \mathcal{H}_\alpha$ et $P_\beta(\mathcal{H}) = \mathcal{H}_\beta$ sont donc orthogonaux.

Prenons dans chaque classe de sous représentations irréductibles de π une représentation π_i . Soit n_i l'ordre de multiplicité de π_i dans π . On pose alors

$$\tau = \bigoplus_i n_i \pi_i ; \quad \mathcal{H}_\tau = \bigoplus_i \mathcal{H}_i ; \quad P = \bigoplus_i P_i ; \quad \text{avec}$$

$$\mathcal{H}_i = P_{\pi_i}(\mathcal{H}) \quad \text{et} \quad P_i = P_{\pi_i} .$$

D'après [1] on peut écrire

$$A_\pi = A_\sigma \oplus A_\tau, \text{ avec } u = u_\sigma + u_\tau \text{ et } \|u\| = \|u_\sigma\| + \|u_\tau\|.$$

De plus $A_\tau = P A_\pi$ et $A_\sigma = (I-P)A_\pi$; en effet $A_\tau = \bigoplus_i A_{\pi_i} = \bigoplus_i (P_i A_\pi) = (\bigoplus_i P_i) A_\pi$ car les P_i sont orthogonaux deux à deux.

(1.6) REMARQUES. - (i) Si \mathcal{X}_i désigne l'espace de la représentation π_i et si P_i' est le projecteur sur \mathcal{X}_i , alors P_i' est dans le commutant de VN_π et P_i est le support central de P_i' .

(ii) Il se peut qu'il n'y ait aucune sous-représentation irréductible de π , auquel cas $A_\sigma = \{0\}$.

(1.7) THEOREME. - On conserve les notations ci-dessus. Les points extrémaux de \mathcal{B} sont les points extrémaux des boules unités des A_{π_i} , c'est-à-dire les $\xi_i * \eta_i$, où

$$\xi_i \in \mathcal{X}_i \quad \eta_i \in \mathcal{X}_i \quad \|\xi_i * \eta_i\| = 1 = \|\xi_i\| = \|\eta_i\|.$$

On a d'abord le lemme suivant :

(1.8) LEMME . - Soit E un espace de Banach. Soient E_1 et E_2 deux-sous-espaces fermés de E . On suppose $E = E_1 \oplus E_2$ et que, dans l'écriture d'un x de E sous la forme $x = x_1 + x_2$ ($x_1 \in E_1; x_2 \in E_2$) on a, $\|x\| = \|x_1\| + \|x_2\|$. Alors, si $u \in E_1$ est extrémal dans la boule unité de E_1 , il est extrémal dans la boule unité de E .

La vérification est immédiate.

Si u est extrémal dans la boule unité de A_{π_i} alors u est extrémal dans la boule unité de A_π : on applique le lemme à la décomposition de A_π sous la forme $A_\pi = A_{\pi_i} \oplus A_\pi'$, ([1] th. (3.18) p. 53).

Réciproquement, soit u extrémal dans \mathcal{B} ; alors, d'après (1.5), u est de la forme $u = \xi * \eta$ avec $\|u\| = \|\xi\| = \|\eta\| = 1$.

Supposons d'abord $\xi = \eta$.

Soit $H \subset \mathcal{H}$ le sous-espace fermé engendré par les $\pi(s)\xi$ pour $s \in G$. Alors H est stable par la représentation π et $\pi|_H$ est la représentation associée à la fonction continue de type positif u sur G .

D'après [2] p. 261, 13.6.2. pour montrer que $\pi|_H$ est irréductible, il suffit de montrer que dans toute décomposition $u = u_1 + u_2$ en somme de deux fonctions continues de type positif, u_1 et u_2 sont proportionnelles à u . Soit donc $u = u_1 + u_2$ une telle décomposition avec $u_1 \in B(G)$, $u_2 \in B(G)$, $u_1 \neq 0$, $u_2 \neq 0$. On a $\|u_1\| = u_1(e)$ et $\|u_2\| = u_2(e)$, d'où $1 = \|u\| = u(e) = u_1(e) + u_2(e)$.

On en déduit $\|u_1\| + \|u_2\| = 1$. D'autre part on peut écrire $B(G) = A_{\pi_i} \oplus A_{\pi_r}$ ([1] th. (3.18), p.53). Appliquant le lemme (1.8) on voit que u est extrémal dans la boule unité de $B(G)$.

Or $u = \|u_1\| \frac{u_1}{\|u_1\|} + \|u_2\| \frac{u_2}{\|u_2\|}$, d'où $u = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{u_2}{\|u_2\|}$.

Par suite $\pi|_H$ est irréductible, donc équivalent à l'un des π_i et $u \in A_{\pi|_H} = A_{\pi_i}$. En outre, u est extrémal dans la boule unité de A_{π_i} donc est de la forme $u = \xi_i * \eta_i$; $\xi_i \in \mathcal{K}_i$; $\eta_i \in \mathcal{K}_i$

$$\|u\| = \|\xi_i\| = \|\eta_i\| = 1.$$

On ne suppose plus $\xi = \eta$.

Soit $u = T\zeta * \zeta$ la décomposition polaire de u . D'après (1.2), $\zeta * \zeta$ est extrémal dans \mathcal{B} . D'après ce qui précède, $\zeta * \zeta$ est de la forme $\alpha_i * \beta_i$, avec $\alpha_i \in \mathcal{K}_i$; $\beta_i \in \mathcal{K}_i$ $\|\alpha_i\| = \|\beta_i\| = 1$, pour un certain i . De plus, $T \in VN_{\pi}$; donc $T\mathcal{K}_i \subset \mathcal{K}_i$.

On a alors $u = T(\zeta * \zeta) = T(\alpha_i * \beta_i) = T\alpha_i * \beta_i$
 et $\|u\| \leq \|T\alpha_i\| \|\beta_i\| \leq \|\alpha_i\| \|\beta_i\| = 1 = \|u\|$;

d'où $\|T\alpha_i\| = 1$, ce qui achève la démonstration.

(1.9) REMARQUE. - Le théorème a d'abord été démontré dans le cas où G est unimodulaire et π la représentation régulière de G par G . Mauceri ([3]).

2. - On conserve les notations du § 1) et on suppose en plus que $A_\pi = B_\pi$. On va montrer que π est somme de multiples de représentations irréductibles.

L'espace de Banach A_π est alors l'espace de Banach dual de C_π^* , la fonction $u \in A_\pi$ étant identifiée à la forme linéaire $\pi(f) \mapsto \int_G f(x) u(x) dx$ pour $f \in L^1(G)$.

(2.1) PROPOSITION. - L'espace A_τ est $\sigma(A_\pi, C_\pi^*)$ dense dans A_π .

En effet, pour la topologie de dualité $\sigma(A_\pi, C_\pi^*)$, la boule unité \mathcal{B} de A_π est compacte. Elle est donc l'enveloppe convexe $\sigma(A_\pi, C_\pi^*)$ -fermée de ses points extrémaux. Or les points extrémaux de \mathcal{B} sont dans A_τ d'après (1,8). On a alors le résultat.

(2.2) COROLLAIRE. - Soit $T \in C_\pi^*$. Alors

$$\|T\| = \text{Sup}\{|\langle T, u \rangle|, u \in A_\tau, \|u\| \leq 1\}.$$

En effet T est une forme linéaire $\sigma(A_\pi, C_\pi^*)$ continue sur A_π et sur \mathcal{B} elle atteint son maximum en un point extrémal qui est donc dans A_τ .

On va maintenant construire une \star isométrie entre les algèbres C_π^\star et C_τ^\star . On a pour $f \in L^1(G)$,

$$\begin{aligned} \|\pi(f)\| &= \text{Sup}\{|\langle \pi(f), u \rangle|, u \in A_\tau, \|u\| \leq 1\} \\ &= \text{Sup}\left\{ \left| \int_G f(x)u(x)dx \right|, u \in A_\tau, \|u\| \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

D'autre part $\tau(f) \in \text{VN}_\tau$, d'où

$$\begin{aligned} \|\tau(f)\| &= \text{Sup}\{|\langle \tau(f), u \rangle|, u \in A_\tau, \|u\| \leq 1\} \\ &= \text{Sup}\left\{ \left| \int_G f(x)u(x)dx \right|, u \in A_\tau, \|u\| \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Et, par suite, $\|\pi(f)\| = \|\tau(f)\|$ pour tout $f \in L^1(G)$.

D'autre part, puisque $\tau(x)$ est la restriction de $\pi(x)$ à \mathcal{H}_τ pour $x \in G$, on a

$$\pi(f)|_{\mathcal{H}_\tau} = \tau(f) = P \circ \pi(f) \text{ pour } f \in L^1(G)$$

P étant le projecteur sur \mathcal{H}_τ . La dernière égalité suppose, ce que nous ferons toujours, que l'on identifie un opérateur T sur \mathcal{H}_τ à l'opérateur sur \mathcal{H} qui est nul sur \mathcal{H}_τ^\perp et qui coïncide avec T sur \mathcal{H}_τ . Cette identification est une \star isométrie de $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\tau)$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

(2.3) PROPOSITION. - L'application $\pi(f) \mapsto \tau(f)$ se prolonge en une \star -isométrie φ de C_π^\star sur C_τ^\star . Pour $T \in C_\pi^\star$, on a $\varphi(T) = P.T$.

Il suffit de remarquer que les $\pi(f)$, pour $f \in L^1(G)$, sont denses dans C_π^\star et que les $\tau(f)$ le sont dans C_τ^\star , pour obtenir que φ est une isométrie. Que φ soit un \star -homomorphisme résulte de l'égalité $\tau(f) = P.\pi(f)$ et du fait que P est un projecteur central de VN_π .

(2.4) PROPOSITION. - Les espaces de Banach de fonctions sur G , B_τ et A_π sont égaux.

On va voir que l'application $\theta : B_\tau \rightarrow A_\pi$, obtenue en transposant φ est l'identité.

Soit $\bar{u} \in B_\tau = (C_\tau^*)'$. Alors \bar{u} est identifié à la seule fonction continue u sur G , vérifiant

$$\langle \bar{u}, \tau(f) \rangle = \int_G f(x)u(x)dx \text{ pour tout } f \in L^1(G).$$

D'autre part, $\theta(\bar{u}) \in (C_\pi^*)'$ est identifié à la seule fonction continue v sur G vérifiant

$$\langle \theta(\bar{u}), \pi(f) \rangle = \int_G f(x) v(x)dx \text{ pour tout } f \in L^1(G).$$

D'après la définition de θ on a, pour $f \in L^1(G)$:

$$\langle \theta(\bar{u}), \pi(f) \rangle = \langle \bar{u}, \varphi(\pi(f)) \rangle = \langle \bar{u}, \tau(f) \rangle \text{ c'est-à-dire}$$

$$\int_G f(x)u(x)dx = \int_G f(x) v(x)dx \text{ pour tout } f \in L^1(G).$$

Par suite $u = v$; θ est l'identité et $B_\tau = A_\pi$.

(2.5) PROPOSITION. - Les espaces de Banach A_τ et B_τ sont égaux.

Soit $u \in B_\tau (=A_\pi)$. Pour que u soit dans A_τ il faut et il suffit que l'application $\tau(f) \mapsto \langle \tau(f), u \rangle$ soit ultrafaiblement continue sur C_τ^* . Or $u \in A_\pi$; donc la forme linéaire $T \mapsto \langle T, u \rangle$ sur VN_π est ultrafaiblement continue. De plus la topologie ultrafaible de VN_τ est induite par celle de VN_π . Donc la restriction de u à $C_\tau^* \subset VN_\tau$ est ultrafaiblement continue et $u \in A_\tau$.

(2.6) THEOREME. - Sous l'hypothèse $A_\pi = B_\pi$ on peut écrire

$$\pi = \bigoplus_i n_i \pi_i, \text{ où les } \pi_i \text{ sont des représentations irréductibles de multiplicité } n_i.$$

La proposition (2.5) montre que $A_\tau = A_\pi$, donc $A_\sigma = \{0\}$
d'où $\sigma = 0$; or $\pi = \sigma \oplus \tau$, donc $\pi = \tau$ et le résultat.

BIBLIOGRAPHIE. -

- [1] G. ARSAC, *Sur l'espace de Banach engendré par les coefficients d'une représentation unitaire*. Publ. Dép. Math. Lyon, Tome 13 fasc. 2, p. 1-101.
- [2] J. DIXMIER, *Les C*-algèbres et leurs représentations*. Paris, Gauthier-Villars, 1964.
- [3] P. EYMARD, *L'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact*. Bull. Soc. Math. France, t. 92 (1964), p. 181-236.
- [4] G. MAUCERI, *Square integrals representations and the Fourier Algebra of a unimodular group*. Pacific J. Math. 73, (1977) p. 143-147.
- [5] P. NOUYRIGAT, *Sur le prédual de l'algèbre de Von Neumann associée à une représentation unitaire d'un groupe localement compact*. Publ. Dép. Math. Lyon (1972), tome 9 fasc; 2, p. 31-59.

P. NOUYRIGAT
Département de Mathématiques
Université Claude Bernard
43, bd du 11 novembre 1918
69622 VILLEURBANNE cedex