Alain Bouvier

Le groupe des classes de l’algèbre affine d’une forme quadratique

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1978, tome 15, fascicule 3
« Séminaire de géométrie », , p. 53-62
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1978__15_3_53_0>

[Publ]ications du
[Dé]partement de
[Ma]thématiques
[LY]ON 1978 t. 15-3

LE GROUPE DES CLASSES DE L'ALGEBRE AFFINE D'UNE FORME QUADRATIQUE

par

Alain BOUVIER

Partant du résultat bien connu : l'anneau $\mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]/(\sum_{i=1}^{n} X_i^2)$ est factoriel pour $n \geq 5$, NAGATA (en 1957) a montré (cf. [13]) qu'étant donné un corps k de caractéristique $\neq 2$ et une forme quadratique non dégénérée $F \in k[X_1,\dots,X_n]$, pour $n \geq 5$, l'anneau $A_F = k[X_1,\dots,X_n]/(F)$ est factoriel. Pour $n=3$ ou 4, l'anneau A_F est un anneau de Krull non nécessairement factoriel ; deux problèmes se posent donc :

1) <u>le calcul explicite du groupe des classes de A_F</u> ;
2) <u>la recherche de conditions nécessaires et suffisantes de factorialité de l'algèbre</u> A_F.

SAMUEL en 1964 a donné (cf. [17])une condition nécessaire et suffisante de factorialité pour l'algèbre A_F dans le cas $n=3$; le cas $n=4$ a été résolu plus récemment (cf. [14] et [12]) par OGOMA en 1974 et MICALI-REVOY en 1977. C'est la solution d'OGOMA que nous présentons ici, solution qui complète les résultats connus dans certains cas particuliers (corps algébriquement clos ou corps réels formels par exemple) présentés dans [8] ; on en déduit le groupe des classes de l'algèbre affine de la sphère S_k^n de $\mathbb{A}_k^{n+1}$ où k est un corps de caractéristique $p\neq 2$.

1. Rappels des résultats classiques

(1.1) Groupe des classes d'un anneau de Krull.

(1.1.1) Soit A un anneau (commutatif unitaire) et $A = A-\{0\}$. On note A^* le groupe de ses unités, Spec (A) son spectre premier, Max(A) son spectre maximal $X^{(1)}(A)$ l'ensemble de ses idéaux premier de hauteur 1 et, si A est intègre, Fra(A) son corps des fractions.

Etant donné un anneau de Krull A, on note Div(A) le groupe de ses diviseurs, Prin(A) le groupe des ses diviseurs principaux, Cl(A) son groupe des classes, div($\mathfrak{a}$) - resp cl($\mathfrak{a}$) - l'image canonique d'un idéal $\mathfrak{a}$ dans Div(A) - resp. dans Cl(A) -. Un anneau de Krull A est factoriel si et seulement si Cl(A) = 0.

(1.1.2) Etant donnés deux anneaux de Krull A et B tels que $A \subset B$, on dit que $A \to B$ vérifie la condition [P.D.E.] si les conditions équivalentes suivantes

[8, P. 30-31] sont satisfaites :

i) $\mathfrak{p} \in X^{(1)}(B)$ entraine $ht(\mathfrak{p} \cap A) \leq 1$;

ii) $cl(\mathfrak{a}) \mapsto cl(\mathfrak{a}B)$ est un homomorphisme de $Cl(A)$ dans $Cl(B)$.

Pour que $A \to B$ vérifie la condition [P.D.E] il suffit par exemple [8, p. 31] que B soit un A-module plat.

(1.1.3) Soient A un anneau de Krull et $X = X^{(1)}(A)$. Pour toute partie $Y \subset X$ on pose $A_Y = \bigcap_{\mathfrak{p}\in Y} A_{\mathfrak{p}}$. Soit $\bar{Y}$ le complémentaire de Y dans X et $G_p(\bar{Y})$ le groupe engendré par l'image de $\bar{Y}$ dans $Cl(A)$. On a la suite exacte de groupes (cf. [8] mise en évidence par CLABORN (cf. [4]) :

$$[\text{CLAB}] : 0 \to G_p(\bar{Y}) \to Cl(A) \to Cl(A_Y) \to 0 .$$

D'autre part, pour toute partie multiplicative S, l'homomorphisme de groupes $Cl(A) \to Cl(S^{-1}A)$ est surjectif ; si uA est un idéal premier de A, alors

$$[\text{NAG}]: \quad Cl\ (A[u^{-1}]) = Cl(A).$$

(1.2) Le cas $n \geq 5$.

Soient k un corps de caractéristique différente de 2 et $F \in k[X_1,\ldots,X_n]$ une forme quadratique non dégénérée. On peut supposer que F s'écrit $F = X_1^2+\lambda_2X_2^2 +\ldots+ \lambda_nX_n^2$ et qu'aucun des λ_i n'est nul.

<u>Théorème</u> (KLEIN-NAGATA)

Soient k un corps, $p\neq 2$ sa caractéristique, $n \geq 5$ un entier et $F \in k[X_1,\ldots,X_n]$ une forme quadratique non dégénérée. L'algèbre affine $A_F = k[X_1,\ldots,X_n]/(F)$ est un anneau factoriel.

<u>Démonstration</u>. Nous la faisons en dégageant quatre lemmes utiles pour la suite. Pour une démonstration ne faisant pas appel aux groupes de classes, voir [13] ou [16]. Ecrivons $F = X_1^2+\lambda_2X_2^2 +\ldots+ \lambda_nX_n^2$. Soient t une racine carrée de $-\lambda_2$ et $k' = k(t)$. Un changement linéaire d'indéterminées donne $F = UV+G(X_3,\ldots,X_n) \in k'[U,V,X_3,\ldots,X_n]$. Par (1.2.1), G est irréductible ; soit $B_F=k'[U,V,X_3,\ldots,X_n]/(F)$. Par (1.2.2), A_F et B_F sont des anneaux de Krull. Comme $Cl(A_F) \to Cl(B_F)$ est injectif (1.2.3) il suffit de prouver que $Cl(B_F) = 0$ ce qui n'est autre que (1.2.4). Etablissons maintenant ces quatre lemmes pour achever la démonstration.

(1.2.1) <u>Lemme</u> Soient k' une extension d'un corps k de caractéristique $p \neq 2$ et $F = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i X_i^2 \in k[X_1,\ldots,X_n]$. Si l'une des deux conditions suivantes est réalisé, alors F est irréductible dans $k'[X_1,\ldots,X_n]$

a) $r=2$ et F ne représente pas zéro dans k ;

b) $r \geq 3$.

Démonstration. (a) est clair. (b) Si $F = (\sum_i \beta_i X_i)(\sum_i \gamma_i X_i)$, de $\beta_i\gamma_j+\beta_j\gamma_i = 0$ pour $i \neq j$, on tire d'une part $\beta_2^2\alpha_1 = -\beta_1^2\alpha_2$ et $\beta_3^2\alpha_1 = -\beta_1^2\alpha_3$ et d'autre part $\beta_3^2\alpha_2 = -\beta_2^2\alpha_3$ d'où $\frac{\beta_3^2}{\beta_1^2} = -\frac{\beta_3^2}{\beta_2^2}$ ce qui est absurde puisque $p \neq 2$.

(1.2.2) Lemme | Soient k un corps de caractéristique $p \neq 2$ et $F \in k[X_1,\dots,X_n]$ une forme quadratique non dégénérée. Pour $n \geq 3$, l'anneau $A_F = k[X_1,\dots,X_n]_{(F)}$ est un anneau de Krull.

Démonstration. L'anneau A_F étant noethérien intègre, il suffit de prouver qu'il est normal. Remarquons que $F = X_1^2 - F_1(X_2,\dots,X_n)$, que F_1 est sans facteur carré dans $B = k[X_2,\dots,X_n]$ et que $A_F = B[X_1]/(X_1^2-F_1) = B[x_1]$; soient K le corps des fractions de B et $\xi \in \mathrm{Frac}(A_F) = K(x_1)$ un élément entier sur A_F ; il peut s'écrire $\xi = r+x_1 s$ avec $r,s \in K$ et l'on suppose $s \neq 0$ de sorte que $P(T) = \mathrm{Irr}(T,\xi,K)$ est de degré 2. Comme ξ est racine de $T^2-2rT + (r^2-bs^2)\in K[T]$ où $b = x_1^2 \in B$, on a $P(T) = T^2 - 2rT + (r^2-bs^2)$. Puisque B est normal, on a $2r \in B$ et $r^2 - bs^2 \in B$ donc $r \in B$ et il suffit de vérifier que $s \in B$. Ecrivons $s = \frac{s_1}{s_2}$ où s_1 et s_2 sont deux éléments étrangers de l'anneau factoriel B. Comme $bs^2 \in B$ et comme $s_2^2(bs^2) = bs_1^2$, puisque $b = x_1^2 = F_1(x_2,\dots,x_n)$ est sans facteur carré dans B, on a $s_2 \in B^*$ et $s \in B$.

(1.2.3) Lemme | Soient k' une extension d'un corps k de caractéristique $p \neq 2$ et $F \in k[X_1,\dots,X_n]$ une forme quadratique non dégénérée. On pose $A_F = k[X_1,\dots,X_n]/(F)$ et $B_F = A_F \otimes_k k'$. Alors l'homomorphisme canonique $\mathrm{Cl}(A_F) \to \mathrm{Cl}(B_F)$ est injectif.

Démonstration. Puisque B_F est une A_F-algèbre (fidèlement) plate, par (1.1.2) $\mathrm{Cl}(A_F) \to \mathrm{Cl}(B_F)$ est bien défini. Les anneaux de Krull A_F et B_F étant gradués, on peut se limiter à la considération d'idéaux divisoriels gradués [8, 10.2]. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal divisoriel gradué de A_F tel que $\mathrm{cl}(\mathfrak{a}) \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Cl}(A_F) \to \mathrm{Cl}(B_F))$; l'idéal $\mathfrak{a}B_F$ est principal et donc, par fidèle platitude, $\mathfrak{a}$ est un A_F-module gradué projectif de type fini [1 ; I-§3 - n° 6], donc un A_F-module libre (voir par exemple [3]) et donc $\mathrm{cl}(\mathfrak{a}) = 0$.

(1.2.4) Lemme | Soient k un corps et $F \in k[X_1,\dots,X_n]$ une forme quadratique non dégénérée. Si $F = X_1X_2 + G(X_3,\dots,X_n)$ où G irréductible et $n \geq 3$ alors $A_F = k[X_1,\dots,X_n]/(F)$ est factoriel.

Démonstration. Puisque $A_F/x_1A_F = k[X_2,X_3,\dots,X_n]/(G)$ est intègre, on a $x_1A_F \in \mathrm{Spec}(A_F)$ et par [NAG], $\mathrm{Cl}(A_F[x_1^{-1}]) = \mathrm{Cl}(A_F)$: comme $x_2 = -x_1^{-1}G(x_3,\dots,x_n)$, l'anneau $A_F[x_1^{-1}] = k[x_1,x_2,\ldots,x_n][x_1^{-1}] = k[x_1,x_3,\ldots,x_n][x_1^{-1}]$ est factoriel et $Cl(A_F) = 0$.

(1.3) Remarques

(1.3.1) D'après (1.2.1), pour tout corps k de caractéristique $p \neq 2$ et tout entier $n \geq 1$, l'anneau $k[X_o,\ldots,X_n]/(X_o^2 +\ldots+ X_n^2 - T^2)$ est normal. D'après (1.2), il est factoriel pour $n \geq 3$.

(1.3.2) On retrouve, en particulier, que pour tout corps k de caractéristique $p \neq 2$, l'anneau $k[X_1,\ldots,X_n]/(\sum_{i=1}^{n} X_i^2)$ est, pour $n \geq 5$, un anneau facroriel.

(1.3.3) Plus généralement, on sait (conséquence du théorème de RAMANUHAN-SAMUEL [9]; 21-14) que pour $n \geq 5$, l'algèbre affine de toute hypersurface de $\mathbb{A}_k^n$ n'ayant qu'un seul point singulier est factorielle.

(1.3.4) Soit $F = X_1^2 + aX_2^2 \in k[X_1,X_2]$; deux cas sont possibles :

a) F est réductible (i.e. $-a$ est un carré dans k) ; alors par un changement linéaire d'indéterminée $A_F = k[U,V]/(UV)$.

b) F est irréductible ; soit $A_F = k[x_1,x_2]$ où x_i est l'image de X_i dans A_F ; alors x_1 est transcendant sur $k(\frac{x_1}{x_2})$ et la cloture intégrale de A_F est l'anneau principal $k(\frac{x_1}{x_2})\ [x_1]$.

(1.4) Le cas $n = 3$

Dans le cas $n = 3$, après avoir rappelé sans démonstration (1.4.1) le résultat de SAMUEL, [17] qui repose sur le théorème de RIEMANN-ROCH, nous démontrons une proposition de nature plus algébrique (1.4.2) qui explicite le groupe des classes de A_F dans plusieurs cas.

(1.4.1) Théorème (SAMUEL)

Soient k un corps de caractéristique $p \neq 2$ et $F \in k[X_1,X_2,X_3]$ une forme quadratique non dégénérée. L'algèbre affine $A_F = k[X_1,X_2,X_3]/(F)$ est factorielle si et seulement si F ne représente pas zéro dans k. Si F représente zéro dans k alors $Cl(A_F) = \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$.

(1.4.2) Proposition

Soient k un corps de caractéristique $p \neq 2$ et $F = X_1^2 + aX_2^2 + bX_3^2 \in k[X_1,X_2,X_3]$ une forme quadratique non dégénérée; soit A_F l'algèbre affine $k[X_1,X_2,X_3]/(F) = k[x_1,x_2,x_3]$. Alors, $Cl(A_F)$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. De plus

a) Si $-a$ ou $-b$ ou $-ab$ est un carré dans k, alors $Cl(A_F) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$;

b) Si $-a = t^2$ avec $t \in \bar{k}$ et si $Cl(A_F)$ n'est pas nul, il est engendré par $cl(x_1 - tx_2,\ x_3)$.

<u>Démonstration</u>. Soit $t \in \bar{k}$ une racine carrée de $-a$ et soit $k' = k(t)$. On pose $B_F = A_F \otimes_k k'$ et par (1.2.3), $Cl(A_F)$ est un sous-groupe de $Cl(B_F)$. Posant $U = X_1+tX_2$ et $V = X_1-tX_2$ on a $B_F = k[u,v,x_3]$ avec $uv + bx_3^2 = 0$ et $B_F[v^{-1}] = k[v,x_3][v^{-1}]$ est factoriel. Par [CLAB] : $Cl(B_F) = Ker(Cl(B_F) \to Cl(B_F[v^{-1}]))$ est engendré par les classes des idéaux premiers de hauteur 1 qui contiennent v. Comme $B_F/vB_F = k[U,X_3]/(bX_3^2)$, il n'existe qu'un seul tel idéal $\mathfrak{p} = (v,x_3)$. De $\mathfrak{p}^2 = (v^2,vx_3,x_3^2) = (v)(v,x_3,u)$ on tire $2 \operatorname{div} \mathfrak{p} = \operatorname{div} v \in Prin(B_F)$ et $2\, cl(\mathfrak{p}) = 0$. L'idéal $\mathfrak{p}$ n'est pas principal, sinon $\mathfrak{p} = (f)$ entraine $v = rf$ et $x_3 = sf$ avec $r,s \in k$ et $u \in (x_3)$, donc $(x_3) = \mathfrak{p} \in Spec(B_F)$ ce qui est absurde. Conclusion : $cl(\mathfrak{p})$, générateur de $Cl(B_F)$ est d'ordre 2 et $Cl(B_F)=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. La proposition est alors une conséquence immédiate de ce qui prècède.

En particulier, si k est algébriquement clos, $Cl(A_F) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

<u>Remarque</u> : $F = X_1^2 + X_2^2 - 2X_3^2 \in \mathbb{Q}[X_1,X_2,X_3]$ possède un point rationnel ; on a donc (1.4.1) $Cl(A_F) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ bien que la condition (a) de (1.4.2) ne soit pas vérifiée, ce qui conduit à poser le :

<u>Problème 1</u> : Soit k un corps de caractéristique $p \neq 2$ et $F = x_1^2+aX_2^2+bX_3^2 \in k[X_1,X_2,X_3]$ une forme quadratique non dégénérée telle que $-a$, $-b$ et $-ab$ ne sont pas des carrés dans k. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $A_F = k[X_1,X_2,X_3]/(F)$ soit factoriel.

2. <u>Le cas $n = 4$</u>

(2.1) On peut vérifier (cela sera une conséquence du théorème d'OGOMA) que $\mathbb{Q}[X_1,X_2,X_3,X_4]/(X_1^2 + X_2^2 + X_2^2 + 2X_4^2)$ est factoriel et que $\mathbb{Q}[X_1,X_2,X_3,X_4]/(X_1^2 + X_2^2+ 2X_3^2 + 2X_4^2)$ ne l'est pas (son groupe des classes est monogène infini engendré par la classe de $(x_1^2+x_2^2,\ x_3^2+x_4^2,\ x_1x_3 + x_2x_4,\ x_2x_3 - x_1x_4)$) bien que ni $X_1^2+X_2^2+X_3^2+X_4^2$ ni $X_1^2+X_2^2+2X_3^2+2X_4^2$ ne représente 0 dans $\mathbb{Q}$. En d'autres termes, le théorème de SAMUEL (1.4.1) ne se généralise pas tel que au cas $n = 4$; cette observation a amené R. FOSSUM (cf. [8], p 53) à poser le problème de la recherche d'une <u>condition nécessaire et suffisante pour que l'algèbre affine $k[X_1,X_2,X_3,X_4]/(F)$ d'une forme quadratique F non dégénérée soit un anneau factoriel</u>. Nous donnons ici la solution de T. OGOMA (1974), qui fournit une condition nécessaire et suffisante de factorialité de l'algèbre affine A_F en fonction de propriétés algébriques de ses coefficients.

(2.2) <u>Théorème</u> (OGOMA)

Soient k un corps, $p \neq 2$ sa caractéristique, $F = X_1^2+aX_2^2+ bX_3^2+cX_4^2 \in k[X_1,X_2,X_3,X_4]$ une forme quadratique non dégénérée et $A_F = k[X_1,X_2,X_3,X_4]/(F)$.

a) Si $-a$ est un carré dans k, l'anneau A_F est factoriel si et **seulement si** $-bc$ n'est pas un carré dans k ;

b) Si $-a$, $-b$, $-c$, $-ab$, $-ac$, $-bc$ ne sont pas des carrés dans k, l'anneau A_F est factoriel si et seulement si abc n'est pas un carré dans k ;

c) Si A_F n'est pas factoriel, alors $Cl(A_F) \simeq \mathbb{Z}$.

Démonstration. Il n'y a pas d'autres cas que ceux considérés dans l'énoncé : si par exemple $-a$, $-b$ et $-c$ ne sont pas des carrés dans k, si $-ab = \beta^2$ avec $\beta \in k$ alors $aF = aX_1^2 + a^2X_2^2 - \beta^2X_3^2 + acX_4^2$ et on est dans le cas (a).

a) Si $-a^2 = t$ avec $t \in k$, en posant $U = X_1+tX_2$ et $U = X_1-tX_2$ on obtient $F = UV + bX_3^2+cX_4^2$. Si $bX_3^2+cX_4^2$ est réductible (i.e. si $-bc$ est un carré dans k), par un nouveau changement linéaire d'indéterminés, F s'écrit $UV - Y_3Y_4$ et on conclut en appliquant le lemme de STORCH (2.3). Si $bX_3^2+cX_4^2$ est irréductible, A_F est factoriel par (2.3.4).

b) On suppose que $-a$, $-b$, $-c$, $-ab$, $-bc$ et $-ac$ ne sont pas des carrés dans k.

* Supposons que abc ne soit pas un carré dans k. Soient $t \in \bar{k}$ tel que $t^2 = -a$ et $B_F = k(t)[U,V,X_3,X_4]/(F)$ avec $F = UV + G(X_3,X_4)$, $U = X_1+tX_2$ et $V = X_1 - tX_2$. Compte tenu de (1.2.3) et (1.2.4), il suffit de prouver que G est irréductible ce qui est clair : $-bc$ n'est pas un carré dans $k(t)$.

* Supposons que $abc = \alpha^2$ avec $\alpha \in k$. Puisque $cX_4^2 = ab(\frac{\alpha}{ab} X_4)^2$, on peut supposer que $F = X_1^2 + aX_2^2 + bX_3^2 + dX_4^2$. Soit $t \in \bar{k}$ tel que $t^2 = -a$ et soit $B_F = k(t)[X,Y,U,V]/(F)$ avec $F = XV-YU$ en faisant le changement linéaire d'indéterminées : $X = X_1+tX_2$; $V = X_1 - tX_2$; $Y = X_3+tX_4$; $U = b(X_1-tX_4)$. D'après le lemme de STORCH, $Cl(B_F) = \mathbb{Z}$ est engendré par $\mathfrak{p} = (x_1-tx_2, x_3-tx_4)$ et compte tenu de (1.2.3), il suffit de prouver que $Cl(A_F) \to Cl(B_F)$ n'est pas nulle ce que nous faisons en utilisant une idée de L. ROBERTS [8]. On pose $\mathfrak{q} = (x_1-tx_2, x_3-tx_4)$ et $\mathfrak{q}' = (x_1-tx_2, x_3+tx_4)$. Ce sont des idéaux premiers de hauteur 1 de B_F tels que $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{q}' = (x_1-tx_2)$ et $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}' = (x_3+tx_4)$, de sorte que

$$\operatorname{div} \mathfrak{q} + \operatorname{div} \mathfrak{q}' - \operatorname{div} (\mathfrak{q} \cap \mathfrak{q}') = \operatorname{div} (\mathfrak{q}+\mathfrak{q}') = 0,$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{p} + \operatorname{div} \mathfrak{q}' - \operatorname{div} (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}') = \operatorname{div} (\mathfrak{p}+\mathfrak{q}') = 0,$$

et donc $\operatorname{div} \mathfrak{q} - \operatorname{div} \mathfrak{p} = \operatorname{div} (\mathfrak{q} \cap \mathfrak{q}') - \operatorname{div} (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}') \in \operatorname{Prin}(A)$, soit

$$cl_{B_F}(\mathfrak{q}) = cl_{B_F}(\mathfrak{p}) \quad .$$

L'idéal $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ de B_F contient $\mathfrak{p}\mathfrak{q} = (x_1^2+ax_2^2, x_3^2+ax_4^2, x_1x_3+ax_2x_4, x_1x_2 - x_1x_4)$; soit $\mathfrak{p}_1$ sa trace sur A_F ; c'est un idéal premier divisoriel de A_F : un calcul standard (détaillée dans [2]) permet de voir que $(X_1^2+aX_2^2, X_3^2+aX_4^2, X_1X_2+aX_2X_4, X_1X_4 - X_1X_4)$ est un idéal premier de hauteur 2 de $k[X_1,X_2,X_3,X_4]$ contenant (F). Comme $\mathfrak{p}_1B_F = \mathfrak{p}\mathfrak{q}$, on a $\operatorname{div} \mathfrak{p}_1B_F = \operatorname{div} \mathfrak{p} + \operatorname{div} \mathfrak{q}$, donc $cl(\mathfrak{q}_1B_F) = 2\, cl(\mathfrak{p}) \neq 0$.

Il reste donc a établir le :

(2.3) Lemme (STORCH)

> Soient k un corps, $p \neq 2$ sa caractéristique et A l'anneau de Krull $A = k[X,Y,U,V]/(XV-YU)$. Alors $Cl(A) = \mathbb{Z}$.

Démonstration. D'après [8]. Posons $A = k[x,y,u,v]$ et $B = k[x,y,\frac{u}{x}]$.

* $(x,y) \in \operatorname{Spec}(A)$ et $A_{(x,y)}$ est de valuation discrète : en effet

$$A_{(x,y)} = k[X,Y,U,V]_{(X,Y)}/(XV-YU)\ k[X,Y,U,V]_{(X,Y)}, \quad \text{donc}$$
$$A_{(x,y)} = k(U,V)[X,Y]_{(X,Y)}/(\tfrac{X}{U} - \tfrac{Y}{V})\ k(U,V)[X,Y]_{(X,Y)}.$$

Comme $k(U,V)[X,Y]_{(X,Y)}$ est local régulier de dimension 2, d'idéal maximal $\mathfrak{m} = (X,Y)$ comme $\frac{X}{U} - \frac{Y}{V} \in \mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2$, l'anneau local noethérien $A_{(x,y)}$ et régulier de dimension 1 [9 ; 17-1-8].

* Il est clair que $A \subset B \cap A_{(x,y)}$; prouvons qu'en fait il y a égalité. Puisque $\deg \operatorname{tr}_k k(x,y,u,v) = 3$ et que $k(x,y,\frac{u}{x}) = k(x,y,u,v)$, on voit que x,y et $\frac{u}{x}$ forment une base de transcendance pure de $k(x,y,\frac{u}{x})$ [1 ; ch V- §5 - n°3] et B est un anneau factoriel. Un élément $f \in B \cap A_{(x,y)}$ peut s'écrire $f = \frac{b}{s}$ avec $b,s \in A$ et $s \notin (x,y)$; il peut encore s'écrire $f = c_o + \dots + c_n(\frac{u}{x})^n$ avec $c_i \in k[x,y]$. Montrons, par récurrence sur $n \geq 0$ que $f \in A$. Le résultat est trivial pour $n=0$. De $c^n b = sc_n u^n + \dots + sc_o x^n$, on déduit $sc_n u^n \in (x,y)$ et $c_n \in (x,y)$. Ecrivant $c_n = x\alpha + y\beta$ avec $x,y \in A$, il vient $c_n u^n = (x\alpha + y\beta)u^n = (x\alpha u + xv\beta)u^{n-1}$ et $f = c_o + c_1 \frac{u}{x} + \dots + (c_{n-1} + \alpha u + \beta v)(\frac{u}{x})^{n-1}$. On peut conclure en appliquant l'hypothèse de récurrence.

* Soient $(V_i)_{i \in I}$ les anneaux de valuations essentielles de B. On a $A = (\bigcap_{i \in I} V_i) \cap A_{(x,y)}$ et dans cette intersection, aucun terme n'est superflu donc les anneaux qui y figurent sont les anneaux de valuations essentielles de A. Pour le voir, il suffit de prouver que pour tout anneau de cette famille, il existe un élément α n'appartenant pas à cet anneau, mais appartenant à tous les autres. D'une part $\frac{u}{x} \notin A_{(x,y)}$ alors que $\frac{u}{x} \in \bigcap_i V_i$. D'autre part, si $V_i = B_{(x)}$ alors $\alpha = \frac{y}{x} \notin B_{(x)}$ tandis que $\alpha \in (\bigcap_{j \neq i} V_j) \cap A_{(x,y)}$. Enfin pour $V_i \neq B_{(x)}$, d'après le théorème d'approximation, il existe $\beta \in k(x,y,u,v)$ tel que $v_i(\beta) = -1$, et $v_j(\beta) \geq 0$ pour $j \neq 1$ où v_j est la valuation de l'anneau V_j. Soit $r \in \mathbb{N}$ tel que $v_{(x,y)}(x^r\beta) \geq 0$; posons $\alpha = x^r\beta$; on a $v_i(\alpha) = -1$ alors que $\alpha \in (\bigcap_{j \neq i} V_i) \cap A_{(x,y)}$.

* Puisque $Cl(B) = 0$, par [CLAB] nous voyons que $Cl(A)$ est monogène engendré par $cl(\mathfrak{p})$ ou $\mathfrak{p} = (x,y)$. Il suffit de prouver que $cl(\mathfrak{p})$ est d'ordre infini. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n\, cl(\mathfrak{p}) = 0$; il existe $f \in A$ tel que $n \operatorname{div}_A \mathfrak{p} = \operatorname{div}_A fA$. Comme dans B l'idéal $\mathfrak{p}B$ est premier de hauteur 2, on a $\operatorname{div}_B fB = n \operatorname{div}_B \mathfrak{p}B = 0$ donc $fB = B$, soit $f \in B^* = k^* \subset A^*$ et donc $n \operatorname{div}_A \mathfrak{p} = \operatorname{div}_A fA = 0$ ce qui implique dans le groupe libre $Div(A)$ de base $\{\operatorname{div} q\}_{q \in X^{(1)}(A)}$, que $n = 0$.

(2.4) Remarques et applications

(2.4.1) L'algèbre $A = k[X,Y,U,V]/(XV-YU)$ est l'algèbre affine de la quadrique définie par le plongement de SEGRE $\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k \to \mathbb{P}^3_k$. Comme A est un anneau de Krull gradué, si $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal à l'origine, on a [8 ; 10-3], $Cl(A_{\mathfrak{m}}) = Cl(A) = \mathbb{Z}$.

(2.4.2) Soient k un corps algébriquement clos, $p \neq 2$ sa caractéristique, $F \in k[X_1,X_2,X_3]$ - resp. $F \in k[X_1,X_2,X_3,X_4]$ - une forme quadratique non dégénérée et A_F son algèbre affine ; alors $Cl(A_F) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ - resp. $Cl(A_F) = \mathbb{Z}$.

(2.4.3) Soient k un corps réel formel, $F \in k[X_1,X_2,X_3,X_4]$ une forme quadratique non dégénérée, A_F son algèbre affine et S_F sa signature ; alors :

- Si $S_F = 4$ ou si $S_F = 0$, on a $Cl(A_F) = \mathbb{Z}$;
- Si $S_F = 2$, on a $Cl(A_F) = 0$.

(2.4.4) Soit S^n_k la sphère unité de $\mathbb{A}^{n+1}_k$ c'est à dire l'ensemble des zéro du polynôme $X_0^2+\ldots+X_n^2 - 1$ et soit $k[S^n_k]$ son algèbre affine. Le résultat suivant, pour $k = \mathbb{R}$ ou $k = \mathbb{C}$, a été démontré par SWAN [19].

Proposition. Soit k un corps de caractéristique $p \neq 2$.

a) S^1_k est factorielle si et seulement si -1 est un carré dans k. Si S^1_k n'est pas factorielle alors $Cl(k[S^1_k]) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$;

b) S^2_k est factorielle si et seulement si -1 n'est pas un carré dans k. Si S^2_k n'est pas factorielle alors $Cl(k[S^2_k]) = \mathbb{Z}$;

c) S^n_k est factorielle pour tout $n \geq 3$.

Démonstration. On onsidère des intéterminées $Y_0,\ldots,Y_n$, T telles que $Y_i = X_iT$ pour $0 \leq i \leq n$ de sorte que si $A = k[X_0,\ldots,X_n]/(X_0^2+\ldots+X_n^2-1)$, on ait $TA[T] \in \operatorname{Spec}(A[T])$, d'où par [NAG] : $Cl(A) = Cl(A[T^{-},T^{1}])$, avec $A[T,T^{-1}] = k[Y_0,\ldots,Y_n,T,T^{-1}]/(Y_0^2+\ldots+Y_n^2 - T^2)$. Cet anneau est factoriel pour $n \geq 3$ d'après (1.1).

Pour $n = 2$, on applique (2.2) à $Y_0^2+aY_1^2+bY_2^2+cT^2$ avec $a=b=1$ et $c=-1$. Si -1 est un carré dans k alors $-ab = -1$ est un carré, donc $k[S^2_k]$ n'est pas factorielle et à $\mathbb{Z}$ pour groupe des classes. Si -1 n'est pas un carré dans k, alors $-c$ en est un tandis que $-ab = 1$ n'en est pas un ; donc $k[S^2_k]$ est factorielle.

Pour $n = 1$, si -1 n'est pas un carré dans k, on a $t\,A[t]$ premier dans $A[t]$, donc par [NAG] ; $Cl\,(k[y_0,y_1,t,t^{-1}]) = Cl(k[y_0,y_1,t])$ avec $k[y_0,y_1,t] = k[Y_0,Y_1,T]/(Y_0^2+Y_1^2-T^2)$. D'après (1.4.2), cette algèbre a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour groupe des classes. Si -1 est un carré dans k, si $\alpha^2 = -1$, on pose $u = x_0+\alpha x_1$, $v = x_0-\alpha x_1$ de sorte que $k[x_0,x_1] = k[u,v] = k[u,u^{-1}]$ puisque $uv = 1$. Donc l'algèbre considérée est factorielle.

(2.4.5) Etant donné un anneau de Krull A, dans [5] est défini une suite $Cl_i(A)$ de groupes de telle sorte que $Cl_1(A) = Cl(A)$. On trouve dans [6] le calcul explicite des $Cl_i(\mathbb{R}[S_{\mathbb{R}}^n])$ et des $Cl_i(\mathbb{C}[S_{\mathbb{C}}^n])$.

(2.4.6) Dans [12], MICALI et REVOY montrent que A_F est factoriel si $n \geq 5$ ou si $n = 4$ et le descriminant de F est non trivial, <u>sans hypothèse sur la caractéristique de k</u>.

<u>Problème 2</u> : Etude de la factorialité de l'algèbre $A[X_1,\dots,X_n]/(F)$ où F est une forme quadratique et F un anneau de valuation discrète [resp. local régulier, factoriel ...].

<u>BIBLIOGRAPHIE</u>

[1] BOURBAKI N., Algèbre Commutative. Chap. 1 à 7. Hermann. Paris.

[2] BOUVIER A., Quatre exposés sur les anneaux de Krull. Pub. du C.N.R.ROME 1977

[3] CAVALIERE M.P., Sui moduli liberi a projettivi graduatti. Ball. U.M.I. 5 14 A (1977) 82-91.

[4] CLABORN L., Dedekind domains : overring and semi-prime dement. Pac. J. Math. 15 (1965) 799-804.

[5] CLABORN L. and FOSSUM R., Higher rank class group. Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967) 233-237.

[6] CLABORN L. and FOSSUM R., Generalizations of the notion of class-group. Illinois J. Math 12 (1968) 228-253.

[7] DIEUDONNE J. , Sur les groupes classiques. Hermann (1973).

[8] FOSSUM R., The divisor class group of a Krull domain. Springer Verlag Band 74 (1973).

[9] GROTHENDIECK A., Eléments de géométrie algébrique IV n° 20 et 32 IHES 1967 PUF

[10] LAFON J.P., Les formalismes fondamentaux de l'algèbre commutative.Hermann 1974

[11] LAFON J.P., Algèbre commutative. Langages géométrique et algébrique. Hermann (1977).

[12] MICALI A. et REVOY PH., Modules quadratiques.Cahiers Mathématiques Montpellier 10. (1977).

[13] NAGATA M., A remark on the unique factorization theorem. J. Math. Soc. Japon 9. (1957) 143-145.

[14] OGOMA T., On a problem of Fossum. Proc. Japan. Acad. 50 (1974) 266-267.

[15] SAMUEL P., Sur les anneaux factoriels. Bull. Soc. Math. France 89 (1961) 155-173.

[16] SAMUEL P., Anneaux factoriels. Soc. Math. de Saô Paulo. 1963.

[17] SAMUEL P., Lectures on the unique factorization domains. Tata institute Bombay 1964.

[18] STORCH V., Über die Divisarklassengruppen normaler komplexonalytischer Algebren Math. Ann 183 (1969) 93-104.

[19] SWAN R., Vector bundles and projective modules. Topology Nov. (1962) 264-277.

Alain BOUVIER

Département de Mathématiques
Université Claude Bernard - Lyon 1
43, Bd du 11 Novembre 1918

69100 VILLEURBANNE