PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

A. TILLIER

Les groupes de transvections des espaces symétriques associés à une algèbre de Jordan de forme réelle

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1977, tome 14, fascicule 4
, p. 27-56

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1977__14_4_27_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1977 t.14-4

LES GROUPES DE TRANSVECTIONS DES ESPACES SYMETRIQUES ASSOCIES A UNE ALGEBRE DE JORDAN DE FORME REELLE

par A. TILLIER

INTRODUCTION.

Le but de ce travail est de caractériser algébriquement le groupe des transvections des variétés pseudo-riemanniennes symétriques associées à une algèbre de Jordan de forme réelle simple.

Lorsque l'on a un espace symétrique, il est naturel de chercher les métriques pseudo-riemanniennes compatibles avec la structure d'espace symétrique et, s'il en existe, de les comparer entre elles : c'est une autre forme de la recherche et de la comparaison des métriques associées à une dérivation covariante. Sur l'espace symétrique défini par une algèbre de Jordan semi-simple $\mathcal{U}$, la métrique pseudo-riemannienne habituelle compatible avec les symétries est construite par un certain procédé à partir de la forme bilinéaire "trace" : on établit en (1.7) que ce procédé appliqué à une forme bilinéaire $<\,,\,>$ fournit une métrique pseudo-riemannienne compatible si et seulement si les endomorphismes de $\mathcal{U}$ de la forme $P(x)$ sont auto-adjoints pour $<\,,\,>$, et on en déduit en (1.8) que si $\mathcal{U}$ est simple, alors $<\,,\,>$ est proportionnelle à la trace.

Si $\mathcal{U}$ n'est pas semi-simple, la trace, qui est dégénérée, ne peut fournir de métrique pseudo-riemannienne. En (1.9), on construit une algèbre $\mathcal{U}$ non semi-simple et une forme bilinéaire qui, par un procédé identique à celui du cas semi-simple, donne lieu à une métrique pseudo-riemannienne compatible avec les symétries.

Le paragraphe 2 résume les propriétés essentielles des algèbres de Jordan de forme réelle simples. Après avoir rappelé la nature des composantes connexes notées $\mathrm{Inv}_k(\mathcal{U})$ de l'espace symétrique associé à une telle algèbre (2.4), on établit que l'étude de $\mathrm{Inv}_k(\mathcal{U})$ se réduira à celle de la variété pseudo-riemannienne notée M_k, définie par
$M_k = \{x \in \mathrm{Inv}_k(\mathcal{U}) \mid \det x = (-1)^k\}$ (2.7).

Le § 3 est consacré à la démonstration des deux théorèmes principaux de cet article ((3.7) et (3.8)). Il est immédiat que le groupe des transvections $G(M_k)$ de M_k est engendré par les endomorphismes de $\mathcal{U}$ de la forme $P(x)P(y)$ pour $x \in M_k$ et $y \in M_k$, où P désigne la représentation quadratique. Si on désigne par $P(M_k)$ le groupe engendré par les $P(x)$ pour $x \in M_k$, alors $G(M_k) \subseteq P(M_k)$, mais la non-associativité de $\mathcal{U}$ est un obstacle sérieux pour conclure à l'égalité.

Utilisant de façon exhaustive un cas particulier où la formule $P(x)P(y) = P(xy)$ est vraie, le théorème (3.7) établit que $G(M_k) = P(M_k)$ sauf si le degré de $\mathcal{U}$ est pair et que k est impair. De plus, on montre qu'il y a au plus trois groupes $P(M_k)$ distincts (resp. $G(M_k)$), à savoir $P(M_o)$, $P(M_1)$ et $P(M_2)$ (resp. $G(M_o)$, $G(M_1)$ et $G(M_2)$). Suivant les valeurs de k, on précise auquel de ces trois groupes $P(M_k)$ (resp. $G(M_k)$ est identique. Enfin, on établit des inclusions entre ces divers groupes, lorsque l'on ne peut conclure à leur égalité.

Désignons par I_k l'ensemble des éléments involutifs de degré k de $\mathcal{U}$. On sait que les I_k sont des variétés riemanniennes symétriques. Désignons par $G(I_k)$ le groupe des transvections de I_k et par $P(I_k)$ le groupe engendré par les $P(w)$ pour $w \in I_k$, on obtient, avec les $G(I_k)$ et les $P(I_k)$, les mêmes résultats que ci-dessus, car la démonstration du théorème (3.7) reste valable.

* ☆ *

1. LES ESPACES SYMETRIQUES ASSOCIES A UNE ALGEBRE DE JORDAN.

(1.1) DEFINITION. - *Un espace vectoriel* $\mathcal{U}$ *sur un corps* K, *muni d'une application* K*-bilinéaire de* $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ *dans* $\mathcal{U}$ *notée* $(x,y) \longmapsto xy$ *telle que :*

i) $xy = yx$

ii) $x^2(xy) = x(x^2y)$ *(identité de Jordan)*

est appelée une algèbre de Jordan.

Des exemples d'algèbre de Jordan sont donnés en (2.2) ; ce sont celles qui sont de forme réelle, que nous allons plus particulièrement étudier ici. Pour les cas plus généraux, voir [1].

(1.2) On suppose que $\mathcal{U}$ possède un élément neutre e ($ex=x$, $x \in \mathcal{U}$). n'est pas associative en général, pour $x \in \mathcal{U}$, il peut exister deux éléments distincts x_1 et x_2 de $\mathcal{U}$ tels que $x_1x = x_2x = e$. Toutefois, l'algèbre $K[x ; e]$ engendrée par x et e dans $\mathcal{U}$ est associative ; par définition, on dit que x est *inversible*, s'il est inversible dans $K[x ; e]$. L'unique élément de $K[x ; e]$, noté x^{-1}, vérifiant $xx^{-1}=e$, est appelé *l'inverse* de x ; x^{-1} est aussi inversible, et $(x^{-1})^{-1} = x$.

Dans toute la suite, nous supposerons, outre le fait que $\mathcal{U}$ possède un élément neutre e, que le corps de base est $\mathbb{R}$, et que $\mathcal{U}$ est de dimension finie sur $\mathbb{R}$.

Notons $\mathrm{Inv}(\mathcal{U})$ l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{U}$; c'est un ouvert, non vide car $e \in \mathrm{Inv}(\mathcal{U})$. $\mathrm{Inv}(\mathcal{U})$ n'est pas connexe en général ; toutefois, pour $x \in \mathrm{Inv}(\mathcal{U})$, x et x^{-1} appartiennent à la même composante connexe.

(1.3) Désignons par L(x) l'application linéaire de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{U}$ définie par :

$$(\forall y \in \mathcal{U}) \quad L(x)y = xy.$$

Si $\mathcal{U}$ n'est pas associative, en général $L(xy) \neq L(x)L(y)$. De plus, le fait que x soit inversible n'implique pas que L(x) le soit, et même si c'est le cas, on a en général $L^{-1}(x) \neq L(x^{-1})$: la représentation $x \longmapsto L(x)$ n'a pas de bonnes propriétés.

Mais posons $P(x) = 2L^2(x) - L(x^2)$; P(x) est appelée la *représentation quadratique*.

On a alors :

1) $P(\lambda x) = \lambda^2 P(x)$
2) $P(P(x)y) = P(x)P(y)P(x)$ (formule fondamentale)
3) $P(x^n) = P^n(x)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$
4) $P(x)$ est inversible si et seulement si x est inversible, et $P(x^{-1}) = P^{-1}(x)$; dans ce cas $P(x^n) = P^n(x)$ $(n \in \mathbb{Z})$.
5) $P(x)y$ est inversible si et seulement si x et y le sont ; alors $(P(x)y)^{-1} = P^{-1}(x)y^{-1} = P(x^{-1})y^{-1}$.
6) Soit C une composante connexe de $\mathrm{Inv}(\mathcal{U})$ et $x \in \mathrm{Inv}(\mathcal{U})$ (x n'appartenant pas nécessairement à C). Alors $P(x)C = C$.
7) $P(x+y) = P(x) + P(y) + 2L(x)L(y) + 2L(y)L(x) - 2L(xy)$.
8) Mais, en général, $P(xy) \neq P(x)P(y)$.

(1.4) <u>DEFINITION.</u> - *Soit* M *une variété* C^∞. M *est appelé un* espace symétrique *(ou de réflexions) s'il existe une application* C^∞ *de* $M\times M$ *dans* M, *notée* $(x,y) \mapsto S(x)y$, *vérifiant :*

1) $S(x)x = x$ *et* x *est un point fixe isolé de* $S(x)$.
2) $S(x)S(x) = Id_M$ *(*$S(x)$ *est* involutive*)*
3) $S(S(x)y) = S(x)S(y)S(x)$.

$S(x)$ est appelée la *symétrie* par rapport à x. Pour une étude générale des espaces symétriques, nous renvoyons à [2], dont les résultats seront admis sans démonstration ici.

(1.5) $\mathrm{Inv}(\mathcal{U})$, et chacune de ses composantes connexes, sont munies naturellement d'une structure de variété, puisque ce sont des ouverts de $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$.

<u>THEOREME.</u> - $\mathrm{Inv}(\mathcal{U})$, *et chacune de ses composantes connexes, sont des espaces symétriques pour la loi* $S(x)y = P(x)y^{-1}$.

(Pour la démonstration, voir [2], volume 1, page 68).

(1.6) Soit (M,g) une variété pseudo-riemannienne. On dit que (M,g) est une variété pseudo-riemannienne symétrique, si, pour tout $x \in M$, il existe une isométrie involutive, notée $S(x)$ et appelée symétrie par rapport à x, admettant x comme point fixe isolé.

Lorsque M est connexe, les $S(x)$ sont uniquement déterminés par g, et M

est un espace symétrique pour la loi $(x,y) \longmapsto S(x)y$.

Mais si M est un espace symétrique connexe, de symétries $S(x)$, il n'est pas évident que l'on puisse l'obtenir comme ci-dessus : le problème est de trouver une métrique pseudo-riemannienne g sur M pour laquelle les $S(x)$ soient des isométries. On dit alors que g est compatible avec les symétries de M, ou avec la structure d'espace symétrique, et alors (M,g) est une variété pseudo-riemannienne symétrique.

En fait, il existe des espaces symétriques pour lesquels il n'y a aucune métrique compatible avec les symétries, d'autres pour lesquels il en existe une seule à une constante multiplicative près, d'autres enfin pour lesquels il en existe plusieurs non proportionnelles.

(1.7) Si l'espace symétrique M est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, identifions T_yM, l'espace tangent à M en y, avec $\mathbb{R}^n$, et notons $D_yS(x)$ la différentielle de $S(x)$ en y.

Une métrique pseudo-riemmannienne g sur M est compatible avec les symétries si et seulement si :

$$\forall \xi \in T_yM \quad \forall \eta \in T_yM \qquad g_y(\xi,\eta) = g_{S(x)y}(D_yS(x)\xi,\ D_yS(x)\eta)$$

pour tout x et y appartenant à M, par définition d'une isométrie.

<u>LEMME.</u> - *Soit* $<,>$ *une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur* $\mathcal{U}$, *et* C *une composante connexe de* $\mathrm{Inv}(\mathcal{U})$. *Les quatres propositions suivantes sont équivalentes :*

1) $L(x)$ *est auto-adjoint pour* $<,>$, $(\forall x \in \mathcal{U})$

2) $L(x)$ *est auto-adjoint pour* $<,>$, $(\forall x \in C)$

3) $P(x)$ *est auto-adjoint pour* $<,>$, $(\forall x \in \mathcal{U})$

4) $P(x)$ *est auto-adjoint pour* $<,>$, $(\forall x \in C)$.

Démonstration. - 1) $\Longrightarrow$2) et 3) $\Longrightarrow$4) de façon évidente.

C, ouvert de $\mathcal{U}$, contient une base de $\mathcal{U}$, et $x \longmapsto L(x)$ est linéaire : $(\forall x \in \mathcal{U})\ L(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, L(x_i)$ avec $x_i \in C$, et donc $L(x)$ est auto-adjoint comme les $L(x_i)$: 2) $\Longrightarrow$1).

On suppose 4) satisfait. Soit $x \in C$. Puisque C est ouvert, il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tel que $x+\varepsilon e \in C$, donc $P(x+\varepsilon e)$ est auto-adjoint. Or

$$2\varepsilon L(x) = P(x+e) - P(x) - \varepsilon^2 \mathrm{Id}_{\mathcal{U}} \text{(d'après 1.3)}$$

ce qui prouve que $L(x)$ est auto-adjoint pour tout $x \in C$, et donc pour tout $x \in \mathcal{U}$ d'après ci-dessus : donc 4) $\Longrightarrow$ 1).

Mais $P(x) = 2L^2(x) - L(x^2)$ par définition. Si $L(x)$ et $L(x^2)$ sont auto-adjoints, $P(x)$ l'est aussi : 1) $\Longrightarrow$3), ce qui achève la démonstration.

Q.E.D.

THEOREME. - *Soit* $<\,,\,>$ *une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur* $\mathcal{U}$ *et* C *une composante connexe de* $\mathrm{Inv}(\mathcal{U})$. *Pour que*

$$g_y(\xi,\eta) = < P(y^{-1})\xi,\eta >$$

($\forall \xi \in T_y C, \forall \eta \in T_y C, \forall y \in C$*) fournisse une métrique pseudo-riemannienne* g *sur* C*, il faut et il suffit que les* $P(x)$ *(*$\forall x \in \mathcal{U}$*) soient auto-adjoints pour* $<\,,\,>$. *Dans ce cas, cette métrique est compatible avec les symétries de* C.

La métrique pseudo-riemannienne sur $\mathrm{Inv}(\mathcal{U})$ *induite par ces métriques est compatible avec les symétries de* $\mathrm{Inv}(\mathcal{U})$.

Démonstration. - $P(y^{-1})$ étant inversible pour $y \in \mathrm{Inv}(\mathcal{U})$, g_y est non dégénérée, et l'application $y \longmapsto g_y$ est C^∞, car l'application $y \longmapsto P(y^{-1})$ l'est.

Si les $P(x)$ ($\forall x \in \mathcal{U}$) sont auto-adjoints pour $<\,,\,>$, il vient :

$$< P(y^{-1})\xi,\eta > = <\xi, P(y^{-1})\eta > = < P(y^{-1})\eta,\xi >$$

donc $g_y(\xi,\eta) = g_y(\eta,\xi)$, et g étant symétrique est bien une métrique pseudo-riemannienne sur $\mathrm{Inv}(\mathcal{U})$ et par restriction sur C.

Réciproquement, si g est une métrique pseudo-riemannienne sur C, g est en particulier symétrique, et donc :

$$g_y(\xi,\eta) = g_y(\eta,\xi)$$

ce qui donne $< P(y^{-1})\xi,\eta > = < P(y^{-1})\eta,\xi > = < \xi, P(y^{-1})\eta >$ et $P(y^{-1})$, donc $P(y)$ est auto-adjoint pour $<\,,\,>$ lorsque $y \in C$. D'après le lemme, $P(x)$ est auto-adjoint pour $<\,,\,>$, et ceci quel que soit $x \in \mathcal{U}$.

De plus, si l'on prolonge g par la même construction à $\mathrm{Inv}(\mathcal{U})$ tout entier, g sera pseudo-riemannienne d'après ci-dessus car les $P(x)$ ($\forall x \in \mathcal{U}$) sont auto-adjoints pour $<\,,\,>$.

Soient x et y appartenant à Inv($\mathcal{U}$).

Posons $f(x) = x^{-1}$. Nous admettrons que $D_y f = -P(y^{-1})$. (voir [2], volume 1, page 69).

Aussi :

$$D_y S(x) = D_y(P(x)y^{-1}) = - P(x)\ P(y^{-1}).$$

En tenant compte du fait que les P(x) sont auto-adjoints pour $< , >$ et des formules (1.3) il vient :

$$g_{S(x)y}(D_y S(x)\xi,\ D_y S(x)\eta) = g_{S(x)y}(P(x)P(y^{-1})\xi,\ P(x)P(y^{-1})\eta) =$$

$$< P([P(x)y^{-1}]^{-1})P(x)P(y^{-1})\xi,\ P(x)P(y^{-1})\eta > =$$

$$< P(P(x^{-1})y)P(x)P(y^{-1})\xi,\ P(x)P(y^{-1})\eta > =$$

$$< P(x^{-1})P(y)P(x^{-1})P(x)P(y^{-1})\xi,\ P(x)P(y^{-1})\eta > =$$

$$< P^{-1}(x)\xi,\ P(x)P(y^{-1})\eta > =$$

$$< P(y^{-1})\xi, \eta > = g_y(\xi,\eta)$$

ce qui assure que les symétries sont des isométries de g, pour $x \in$ Inv($\mathcal{U}$) aussi bien que pour $x \in C$.

Q.E.D.

(1.8) Désignons par TrL(x) la trace habituelle de l'endomorphisme L(x) de $\mathcal{U}$; $<x,y>$ défini par $<x,y> = TrL(xy)$ est une forme bilinéaire symétrique pour laquelles les endomorphismes de la forme L(z) sont auto-adjoints : on a $<zx,y> = <x,zy>$ ou encore, en tenant compte de la commutativité $Tr\ L((xz)y) = Tr\ L(x(zy))$; on dit que la forme $x \longmapsto Tr\ L(x)$ est *associative* ([1], page 28).

Pour une algèbre de Jordan $\mathcal{U}$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

a) Rad($\mathcal{U}$) = {0} (Rad($\mathcal{U}$), appelé radical de $\mathcal{U}$, est un idéal un peu particulier : voir [1], page 35).

b) la forme bilinéaire $<x,y> = Tr\ L(xy)$ est non dégénérée.

Si $\mathcal{U}$ vérifie a) ou b) on dit que $\mathcal{U}$ est *semi-simple* : $\mathcal{U}$ s'écrit alors d'une façon unique à l'ordre près sous la forme

$\mathcal{U} = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{U}_i$, où les $\mathcal{U}_i$ sont des algèbres de Jordan simples (c'est-à-dire qu'elles ne possèdent aucun idéal propre) vérifiant $\mathcal{U}_i \mathcal{U}_j = 0$ pour $i \neq j$.

THEOREME. - *Soit $\mathcal{U}$ une algèbre de Jordan simple, $<\,,\,>$ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur $\mathcal{U}$ et C une composante connexe de* $\mathrm{Inv}(\mathcal{U})$.

Pour que $$g_y(\xi,\eta) = < P(y^{-1})\xi,\eta >$$
$$(\forall \xi \in T_yC, \ \forall \eta \in T_yC, \ \forall y \in C)$$
fournisse une métrique pseudo-riemannienne g *sur* C, *il faut et il suffit que* $< \xi,\eta > = k\mathrm{Tr}\ L(\xi\eta)$, *avec* $k \in \mathbb{R}^*$, *pour tout* ξ *et* η *de* $\mathcal{U}$. *Dans ce cas, cette métrique est compatible avec les symétries de* C.

La métrique pseudo-riemannienne sur $\mathrm{Inv}(\mathcal{U})$ *induite par ces métriques est compatible avec les symétries de* $\mathrm{Inv}(\mathcal{U})$.

Démonstration. - Si $< \xi,\eta > = k\ \mathrm{Tr}\ L(\xi\eta)$, les $L(x)$ sont auto-adjoints pour $<\,,\,>$ car $\mathrm{Tr}\ L(\xi\eta)$ est associative : le résultat découle du lemme et du théorème précédents.

Réciproquement, si la forme g ainsi construite est pseudo-riemannienne, les $P(x)$ $(\forall x \in \mathcal{U})$ sont auto-adjoints, donc les $L(x)$ $(\forall x \in \mathcal{U})$ sont auto-adjoints pour $<\,,\,>$ d'après 1.7. La forme $<,>$ est donc associative : d'après [1], page 42, on a alors $< \xi,\eta > = k\ \mathrm{Tr}\ L(\xi\eta)$.

Q.E.D.

COROLLAIRE. - *Soit $\mathcal{U}$ une algèbre de Jordan semi-simple.*

La métrique définie par $g_y(\xi,\eta) = \mathrm{Tr}\ L[(P(y^{-1})\xi)\eta]$ *est pseudo-riemannienne sur* $\mathrm{Inv}(\mathcal{U})$ *et compatible avec les symétries.*

Démonstration. - En fait, dans la démonstration ci-dessus, la simplicité de $\mathcal{U}$ n'intervient que pour établir l'unicité, à une constante multiplicative près, de la forme $<,>$.

Si $\mathcal{U} = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{U}_i$, où les $\mathcal{U}_i$ sont simples et $\mathcal{U}_i\ \mathcal{U}_j = 0$ pour $i \neq j$, $\mathrm{Inv}(\mathcal{U})$ est isomorphe au produit des variétés pseudo-riemanniennes symétriques $\mathrm{Inv}(\mathcal{U}_i)$.

Q.E.D.

(1.9) Lorsque $\mathcal{U}$ n'est pas semi-simple, le corollaire (1.8) ne permet plus d'obtenir une métrique, puisque la trace est alors dégénérée. Nous allons construire un exemple d'algèbre de Jordan non semi-simple telle que l'espace symétrique Inv($\mathcal{U}$) admette cependant une métrique pseudo-riemannienne comme en (1.7).

Pour cela sur l'ensemble $A=\mathbb{R}^2$ considérons la loi :

$$(\lambda,\mu)(\lambda',\mu') = (\lambda\lambda',\lambda\mu' + \lambda'\mu)$$

Cette loi fait de A une algèbre associative et commutative : en réalité A est l'algèbre obtenue par l'adjonction de l'élément neutre (1,0) à l'algèbre associative et commutative triviale dont le produit est $(0,\mu)(0,\mu') = (0,0)$.

Par ailleurs $(0,\mu)(\lambda',\mu') = (0,\lambda'\mu)$ et $L(0,\lambda'\mu)$ a pour matrice, dans la base canonique, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda'\mu & 0 \end{pmatrix}$: donc $\mathrm{Tr}\, L((0,\mu)(\lambda',\mu')) = 0$ $(\forall (\lambda',\mu'))$ et donc A n'est pas semi-simple en tant qu'algèbre de Jordan.

Posons $e = (1,0)$ et $a = (0,1)$.

Soit $\langle , \rangle$ la forme bilinéaire symétrique non dégénérée définie par :

$$\langle e+a, e+a \rangle = -1$$
$$\langle e,e \rangle = 1$$
$$\langle e+a, e \rangle = 0$$

On déduit que : $\langle a,e \rangle = -1$ et $\langle a,a \rangle = 0$.

Soit $x_i = \lambda_i e + \mu_i a$.

Alors :

$$\langle x_1 x_2, x_3 \rangle = \langle \lambda_1\lambda_2 e + (\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1)a,\ \lambda_3 e + \mu_3 a \rangle =$$

$$\langle \lambda_1\lambda_2 e, \lambda_3 e \rangle + \langle \lambda_1\lambda_2 e, \mu_3 a \rangle + \langle (\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1)a, \lambda_3 e \rangle$$

$$+ \langle (\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1)a, \mu_3 a \rangle = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 - \lambda_1\lambda_2\mu_3 - \lambda_1\mu_2\lambda_3 - \mu_1\lambda_2\lambda_3.$$

Or cette expression est invariante par permutation des indices 2 et 3 ; donc $\langle x_1x_2, x_3 \rangle = \langle x_1x_3, x_2 \rangle = \langle x_2, x_1x_3 \rangle$. Par conséquent, $L(x)$ est auto-adjoint pour $\langle , \rangle$, $(\forall x \in A)$ et donc $P(x)$ est aussi auto-adjoint pour $<,>$ d'après le lemme (1.7). Aussi le théorème (1.7) est applicable, et $g_y(\xi,\eta) = < P(y^{-1})\xi,\eta >$ fournit une métrique pseudo-riemannienne au-dessus de Inv(A) compatible avec les symétries.

En fait, Inv(A) contient deux composantes connexes : l'une, notée $\mathrm{Inv}_e(A)$, est constituée par les couples (λ,μ) avec $\lambda > 0$ $(\forall \mu)$ et l'autre par les couples (λ,μ) avec $\lambda < 0$ $(\forall \mu)$. L'application $x \mapsto -x$ est un isomorphisme de variété pseudo-riemannienne symétrique entre ces deux composantes connexes.

Soit $\mathbb{R}^2$ rapporté à une base $\{e_1,e_2\}$, muni de sa structure d'espace symétrique habituelle $(S(x)y = 2x-y)$. Alors l'application de $\mathrm{Inv}_e(A)$ sur $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(\lambda,\mu) = (\mathrm{Log}\ \lambda)e_1 + \frac{\mu}{\lambda} e_2$$

est un isomorphisme d'espace symétrique.

Toutes les métriques pseudo-riemanniennes compatibes avec la structure d'espace symétrique de $\mathbb{R}^2$ sont de la forme

$$< X,Y > = (x_1 \quad x_2) \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

avec $\alpha\gamma - \beta^2 \neq 0$, si $X = x_1e_1 + x_2e_2$ et $Y = y_1e_1 + y_2e_2$.

Par ailleurs la matrice M de D_xf, exprimée dans la base canonique de A d'une part, et la base $\{e_1,e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ d'autre part, est :

$$M = \begin{pmatrix} 1/\lambda & 0 \\ -\frac{\mu}{\lambda^2} & 1/\lambda \end{pmatrix} \quad \text{pour } x = (\lambda,\mu)$$

Utilisant le fait que toute métrique pseudo-riemannienne g compatible sur $\mathrm{Inv}_e(A)$ donne lieu à une métrique compatible h sur $\mathbb{R}^2$ par la formule

$$h_{f(x)}(D_xf(\xi),\ D_xf(\eta)) = g_x(\xi,\eta)$$

il s'ensuit que toutes les métriques g_x compatibles sur $\mathrm{Inv}_e(A)$ sont définies, dans la base canonique de A, par une matrice de la forme :

$$^tM \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\lambda^2} - \frac{2\mu\beta}{\lambda^3} + \frac{\gamma\mu^2}{\lambda^4} & \frac{\beta}{\lambda^2} - \frac{\mu\gamma}{\lambda^3} \\ \frac{\beta}{\lambda^2} - \frac{\mu\gamma}{\lambda^3} & \frac{\gamma}{\lambda^2} \end{pmatrix}$$

avec $x = (\lambda,\mu)$ et $\alpha\gamma - \beta^2 \neq 0$.

La métrique $g_x < \xi,\eta > = < P(x^{-1})\xi,\eta >$ construite plus haut a pour matrice

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\lambda^2} + \dfrac{\mu}{\lambda^3} & -\dfrac{\lambda^2}{2} \\ -\dfrac{\lambda^2}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Elle induit donc sur $\mathbb{R}^2$ la métrique de matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$, et toute métrique g' obtenue par le procédé $g'_x(\xi,\eta) = < P(x^{-1})\xi, \eta >$ est proportionnelle à g.

2. LE CAS DES ALGEBRES DE JORDAN DE FORME REELLE.

(2.1) DEFINITION. - *Une algèbre de Jordan est dite de* **forme réelle** ***si elle vérifie l'une des deux conditions équivalentes suivantes :***

a) $x^2 + y^2 = 0$ *implique* $x = y = 0$.

b) la forme bilinéaire $< x,y > = \mathrm{Tr}\, L(xy)$ *est définie positive.*

Une algèbre de Jordan de forme réelle possède un élément neutre ([1], page 320) et est semi-simple ([1], page 319), mais pour $y \in \mathrm{Inv}(\mathcal{U})$, g_y définie en (1.8) n'est pas nécessairement définie positive, en raison des valeurs propres négatives possibles pour $P(y^{-1})$: $\mathrm{Inv}(\mathcal{U})$ n'est pas riemannien symétrique, mais pseudo-riemannien symétrique.

(2.2) Classification. - On peut établir ([1], page 331) que toute algèbre de Jordan simple de forme réelle est isomorphe à l'une de celles énumérées ci-dessous, où deux distinctes d'entre elles ne sont pas isomorphes :

a) Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ muni d'une forme bilinéaire symétrique définie positive notée $\{,\}$. L'ensemble $\mathcal{U} = \mathbb{R}\times E$ avec la loi de composition $(\lambda,x)(\mu,y) = (\lambda\mu + \{x,y\}, \lambda y + \mu x)$ est une algèbre de Jordan de forme réelle. Deux algèbres construites par ce procédé sont distinctes si leurs dimensions diffèrent.

b) L'ensemble $\mathcal{H}_r(K)$ des matrices (r,r) avec $r \geqslant 3$ et $K=\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$, hermitiennes pour l'involution du corps considéré, muni du produit $AB = \frac{1}{2}(A{\circ}B + B{\circ}A)$ où $\circ$ désigne le produit habituel des matrices, est une algèbre de Jordan de forme réelle.

c) $\mathcal{H}_3(\mathbb{O})$ est une algèbre de Jordan de forme réelle avec les mêmes conditions qu'en b).

$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ et $\mathbb{O}$ désignent respectivement le corps des réels, le corps des complexes, le corps des quaternions et l'algèbre des octonions.

(2.3) Si $\mathcal{U}$ est une algèbre de Jordan, un élément non nul c de $\mathcal{U}$ est appelé un *idempotent* si $c^2 = c$, et un idempotent c est dit *primitif* si $c \neq c_1+c_2$, quels que soient les idempotents c_1 et c_2.

Un *système total orthogonal d'idempotents primitifs* (en abrégé *s.t.o.i.p.*) est la donnée de r idempotents primitifs c_i vérifiant $c_ic_j = 0$

pour $i \neq j$ et $\sum_{i=1}^{r} c_i = e$.

On suppose que $\mathcal{U}$ est de forme réelle.

Alors r est un invariant de $\mathcal{U}$ appelé le *degré* de $\mathcal{U}$, noté $\deg(\mathcal{U})$ et nous avons : dans le cas (2.2) a), $\deg(\mathcal{U}) = 2$ pour $E \neq \{0\}$ (sinon $\mathcal{U} = \mathbb{R}$ et $\deg \mathcal{U} = 1$) ; dans le cas (2.2) b), $\deg(\mathcal{U}) = r$; dans le cas (2.2) c), $\deg(\mathcal{U}) = 3$.

Pour tout x de $\mathcal{U}$, il existe au moins un s.t.o.i.p. $(c_i)_{1 \leq i \leq r}$ tel que $x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i$. En dépit de la non-unicité éventuelle de ce s.t.o.i.p., on a les propriétés suivantes ([3]) :

a) x est inversible si et seulement si $\lambda_i \neq 0$ ($\forall_i$), et $x^{-1} = \sum_{i=1}^{r} {}^{1}/_{\lambda_i}\, c_i$.

b) le nombre $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i$ ne dépend pas du s.t.o.i.p. choisi ; on le désigne par $\mathrm{Tr}(x)$ et on l'appelle la trace de x ; dans les cas (2.2) b) et c), c'est la trace habituelle des matrices considérées. On peut alors établir directement que la forme bilinéaire symétrique $\langle x,y \rangle = \mathrm{Tr}(xy)$ est définie positive et que la forme linéaire $x \longmapsto \mathrm{Tr}(x)$ est associative, ce qui découle aussi du fait que $\mathrm{Tr}(x) = a\, \mathrm{Tr}\, L(x)$, où a est un nombre réel positif ne dépendant que de $\mathcal{U}$.

c) Le nombre $\prod_{i=1}^{r} \lambda_i$ ne dépend pas du s.t.o.i.p. choisi ; on le désigne par $\det(x)$ et on l'appelle le déterminant de x ; dans le cas (2.2) b) c'est le déterminant habituel des matrices considérées. det est une application C^∞ de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}$. C'est le déterminant de l'endomorphisme $P(x)$ élevé à une puissance ne dépendant que de $\mathcal{U}$.

Dans toute la suite, $\mathcal{U}$ désignera une algèbre de Jordan de forme réelle, et la métrique pseudo-riemannienne g considérée sur $\mathrm{Inv}(\mathcal{U})$ sera celle définie par $g_y(\xi,\eta) = \mathrm{Tr}(P(y^{-1})\xi)\eta$. Cette métrique est compatible avec les symétries car $x \longmapsto \mathrm{Tr}(x)$ est associative ; on a de plus $g_x(\xi,\eta) = D_x^2(-\mathrm{Log}|\det(x)|)$ (D_x^2 désignant la différentielle seconde en x).

(2.4) Soit $x \in \mathrm{Inv}(\mathcal{U})$, $x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i$. Les nombres λ_i sont non nuls : supposons que k d'entre eux soient strictement négatifs, les (r-k) autres étant strictement positifs. On peut établir que k ne dépend que de x, et pas du s.t.o.i.p. choisi ; aussi l'ensemble $\mathrm{Inv}_k(\mathcal{U})$ des x de $\mathrm{Inv}(\mathcal{U})$ qui s'écrivent sous la forme $x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i$ avec k des λ_i strictement négatifs et (r-k) des λ_i strictement positifs est bien défini.

THEOREME. - *Les* $\mathrm{Inv}_k(\mathcal{U})$ *sont explictement les composantes connexes de* $\mathrm{Inv}(\mathcal{U})$ *, et* $x \longmapsto -x$ *est un isomorphisme de variété pseudo-riemannienne symétrique de* $\mathrm{Inv}_k(\mathcal{U})$ *sur* $\mathrm{Inv}_{(r-k)}(\mathcal{U})$.

La démonstration de ce résultat se trouve en [3] page 54.

(2.5) Soit M un espace symétrique, et N une sous-variété de M. Si pour tout x de N, $S(x)N \subset N$, N est un espace symétrique pour la loi $(x,y) \longmapsto S(x)y$ de $N \times N$ dans N : on dit que N est un *sous-espace symétrique* de M.

On a le résultat suivant, analogue à un théorème bien connu sur les groupes de Lie :

THEOREME. - *Soit* M *un espace symétrique, et* N *un sous-ensemble fermé de* M *tel que* $S(x)N \subset N$ *pour* $x \in N$. *Alors* N *est un sous-espace symétrique de* M.

(Voir [2], volume 1, page 125, théorème (1.7)).

Supposons que M admette une métrique pseudo-riemannienne g compatible avec les symétries. Si la restriction g_x/N de g_x à T_xN, pour $x \in N$, est non dégénérée, ceci reste vrai pour tout point de N, et g/N fournit une métrique pseudo-riemannienne sur N compatible avec les symétries : on dit que (N,g/N) est une *sous-variété pseudo-riemannienne symétrique de* (M,g).

Remarquons que tout sous-espace symétrique de (M,g) n'est pas nécessairement une sous-variété pseudo-riemannienne symétrique : la condition de non dégénérescence n'est automatiquement remplie que si (M,g) est une variété riemannienne.

(2.6) THEOREME. - *Posons* $M_k = \{x \in \mathrm{Inv}_k(\mathcal{U}) \mid \det(x) = (-1)^k\}$.
M_k *est une sous-variété pseudo-riemannienne symétrique connexe de* $\mathrm{Inv}_k(\mathcal{U})$.

Démonstration. - M_k est l'image réciproque de $(-1)^k$ par le déterminant qui est C^∞ : donc M_k est fermé dans $Inv_k(\mathcal{U})$.

Pour $x,y \in Inv_k(\mathcal{U})$, $P(x)y^{-1} \in Inv_k(\mathcal{U})$. Mais comme $\det(P(x)y^{-1}) = \det(x^2)\det(y^{-1})$ ([3] page 66, corollaire 2), si x et y appartiennent à M_k, il vient $\det(x^2) = 1$ et $\det(y^{-1}) = \frac{1}{\det y} = (-1)^k$, donc $\det(P(x)y^{-1}) = (-1)^k$ et $P(x)y^{-1}$ appartient à M_k ; M_k est un sous-espace symétrique de $Inv_k(\mathcal{U})$ d'après (2.5).

$Inv_k(\mathcal{U})$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$: pour x et y dans M_k, il existe une courbe continue $x(t)$ joignant x à y dans $Inv_k(\mathcal{U})$. Alors $x'(t) = \dfrac{x(t)}{(|\det(x(t)|)^{1/r}}$ est une courbe continue joignant x à y dans M_k : M_k est donc connexe.

Soit $x \in M_k$, $x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i$, on a $T_x M_k = \{\xi \in \mathcal{U} \mid D_x \det(\xi) = 0\}$.

Considérons la décomposition de Braun-Koecher ([3], page 49) par rapport au s.t.o.i.p. $(c_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ où c_{ij} désignera une base des $\mathcal{U}_{ij} = \mathcal{U}_{1/2}(c_i) \cap \mathcal{U}_{1/2}(c_j)$ pour $i < j$.

Il vient :

$$\frac{\partial_x \det}{\partial c_j} = \lim_{h \mapsto 0} \frac{(\prod_{i \neq j} \lambda_i)(\lambda_j + h) - \prod_{i=1}^{r} \lambda_i}{h} = \prod_{i \neq j} \lambda_i .$$

Par ailleurs, on sait ([3], page 59) que

$$\det(x + h\, c_{ij}) = \left(1 - \frac{h^2}{2}\, \frac{\operatorname{Tr} c_{ij}^2}{\lambda_i \lambda_j}\right) \det x.$$

Aussi :

$$\frac{\partial_x \det}{\partial\, c_{ij}} = \lim_{h \mapsto 0} \frac{\left(1 - \frac{h^2}{2}\, \frac{\operatorname{Tr} c_{ij}^2}{\lambda_i\, \lambda_j}\right)\det x - \det x}{h} = 0$$

Soit maintenant $w = \sum_{i=1}^{k} - c_i + \sum_{i=k+1}^{r} c_i$. Par construction, w appartient à M_k et $w^2 = e$.

Il vient alors $\dfrac{\partial_w \det}{\partial c_i} = \varepsilon$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$ et $\dfrac{\partial_w \det}{\partial c_i} = -\varepsilon$ pour

$k+1 \leqslant i \leqslant r$, avec $\varepsilon = +1$ si k est impair et $\varepsilon = -1$ si k est pair : dans tous les cas, $\xi \in T_w M_k$ si et seulement si $\xi = \sum_{i=1}^{r} \mu_i c_i + \sum_{i<j} \mu_{ij} c_{ij}$ avec $\sum_{i=1}^{k} \mu_i = \sum_{j=k+1}^{r} \mu_j$, les coefficients μ_{ij} n'intervenant pas.

Autrement dit, soit $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1(c) \oplus \mathcal{U}_{1/2}(c) \oplus \mathcal{U}_0(c)$ la décomposition de Peirce ([1], page 49, ou [3], page 8) de $\mathcal{U}$ par rapport à l'idempotent $c = \frac{e-w}{2}$ associé à l'involutif w. Tout élément ξ de $\mathcal{U}$ s'écrit alors $\xi = \xi_1 + \xi_{1/2} + \xi_0$ avec $\xi_1 \in \mathcal{U}_1$, $\xi_{1/2} \in \mathcal{U}_{1/2}$ et $\xi_0 \in \mathcal{U}_0$: pour que ξ appartienne à $T_w M_k$, il faut et il suffit que $\mathrm{Tr}(\xi_1) = \mathrm{Tr}(\xi_0)$.

On suppose que ξ appartient à $T_w M_k$. Nous voulons trouver $\eta \in T_w M_k$ tel que $\mathrm{Tr}(P(w^{-1})\xi)\eta \neq 0$, afin d'établir que g_w/M_k est non dégénérée.

On a $P(w^{-1})\xi = P(w)\xi = \xi_1 - \xi_{1/2} + \xi_0$.

Si $\xi_{1/2} \neq 0$, $\mathrm{Tr}((\xi_1 - \xi_{1/2} + \xi_0)\xi_{1/2}) = \mathrm{Tr}(\xi_1\, \xi_{1/2}) + \mathrm{Tr}(\xi_0\, \xi_{1/2}) - \mathrm{Tr}(\xi_{1/2}^2)$. On sait que $\mathrm{Tr}(\xi_1\, \xi_{1/2}) = \mathrm{Tr}(\xi_0\, \xi_{1/2}) = 0$, car $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_{1/2}$ et $\mathcal{U}_0$ sont orthogonales deux à deux pour $\mathrm{Tr}(\xi\eta)$. Donc $\mathrm{Tr}(P(w^{-1})\xi)\eta = -\mathrm{Tr}(\xi_{1/2}^2) \neq 0$ car Tr est définie positive : comme $\xi_{1/2} \in T_w M_k$, nous pouvons dans ce cas choisir $\eta = \xi_{1/2}$.

Si $\xi_{1/2} = 0$, on a $\mathrm{Tr}(P(w^{-1})\xi)\xi = \mathrm{Tr}(\xi^2)$. Comme Tr est définie positive, si $\xi \neq 0$ on peut choisir $\eta = \xi$, et donc g_w/M_k est non dégénérée.

Par conséquent, M_k est une sous-variété pseudo-riemannienne symétrique de $\mathrm{Inv}_k(\mathcal{U})$.

Q.E.D.

(2.7) Si M_1 et M_2 sont deux espaces symétriques (resp. deux variétés pseudo-riemanniennes symétriques), la variété produit $M_1 \times M_2$ se trouve munie naturellement d'une structure d'espace symétrique (resp. de variété pseudo-riemannienne symétrique). En fait, l'étude de M se réduit à celle de M_1 et M_2, et le problème est plutôt, lorsque l'on a M, de trouver M_1 et M_2 tels que $M = M_1 \times M_2$.

Soit M l'espace symétrique produit des deux espaces symétriques M_1 et M_2, et soit g une métrique pseudo-riemannienne sur M compatible avec les symétries de M. (M,g) est alors une variété pseudo-riemannienne symétrique, mais peut-on l'obtenir comme le produit de deux variétés pseudo-riemanniennes symétriques M'_1 et M'_2 ?

Il est naturel de regarder si M_1 et M_2 conviennent.

Soit $e = (e_1, e_2)$ ($e \in M$, $e_1 \in M_1$, $e_2 \in M_2$). Les espaces symétriques M_1 et M_2 peuvent être identifiés aux sous-espaces symétriques $M_1 \times e_2$ et $e_1 \times M_2$ de M ; si par cette identification, M_1 et M_2 deviennent deux sous-variétés pseudo-riemanniennes symétriques de M, et si de plus $T_{e_1}M_1$ est orthogonal à $T_{e_2}M_2$ pour g_e, alors (M,g) est le produit des deux variétés pseudo-riemanniennes symétriques M_1 et M_2.

Toutefois, si M est simplement connexe, le fait que g_e ne soit pas dégénérée sur l'un seulement des deux espaces tangents permet de conclure que M est le produit de deux variétés pseudo-riemanniennes symétriques, mais ce n'est pas celui que nous avions au départ si les autres conditions ne sont pas remplies.

Par exemple, dans l'espace symétrique usuel $\mathbb{R}^2$ ($S(x)y = 2x-y$), toute droite est un sous-espace symétrique et $\mathbb{R}^2$ est le produit de deux droites non parallèles.

Toute forme bilinéaire symétrique non dégénérée g sur $\mathbb{R}^2$ fournit une métrique pseudo-riemannienne compatible avec les symétries : une droite est une sous-variété pseudo-riemannienne symétrique de $\mathbb{R}^2$ si g n'est pas dégénérée sur cette droite, et $(\mathbb{R}^2, g)$ est le produit de deux telles droites orthogonales. En effet, si g est de signature (1,1), l'espace symétrique $\mathbb{R}^2$ peut s'obtenir comme le produit d'une droite d'isotropie et d'une autre droite non parallèle à celle-ci.

<u>THEOREME.</u> - *Soit $\mathbb{R}$ muni de sa structure de variété pseudo-riemannienne habituelle. La variété pseudo-riemannienne symétrique $\mathrm{Inv}_k\,\mathcal{U}$ est le produit des deux variétés pseudo-riemanniennes $\mathbb{R}$ et M_k.*

Démonstration. - Soit $w = \sum_{i=1}^{k} (-c_i) + \sum_{i=k+1}^{r} c_i$, où $(c_i)_{1 \leq i \leq r}$ est un s.t.o.i.p. w appartient à $\mathrm{Inv}_k\,\mathcal{U}$ par construction, et l'ensemble $E = \{\lambda w \mid \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda > 0\}$ est inclus dans $\mathrm{Inv}_k\,\mathcal{U}$ par connexité.

E est fermé dans $\mathrm{Inv}_k\,\mathcal{U}$, et comme $P(\lambda w)(\mu w)^{-1} = \lambda^2 P(w)\frac{w}{\mu} = \frac{\lambda^2}{\mu} w$, E est un sous-espace symétrique de $\mathrm{Inv}_k\,\mathcal{U}$ d'après (2.5).

On a $T_wE = \mathbb{R}_w$ et $Tr(P(w^{-1})(\lambda w))\mu w) = Tr(\lambda\mu(w^2)) = Tr(\lambda\mu)e = r\lambda\mu$ et donc E est une sous-variété pseudo-riemannienne symétrique de $Inv_k\mathcal{U}$, car g_w/E est non dégénérée.

w appartient aussi à M_k par construction : soit $\xi \in T_wM_k$, $\xi = \xi_1 + \xi_{1/2} + \xi_o$ comme dans la démonstration de (2.6). Il vient $Tr([P(w)(\lambda w)]\xi) = \lambda\ Tr(w\xi) = \lambda Tr(\xi_1-\xi_o) = \lambda Tr(\xi_1) - \lambda\ Tr(\xi_o) = 0$, car $Tr(\xi_1) = Tr(\xi_o)$ par définition de T_wM_k et $w\xi = \xi_1-\xi_o$ d'après les règles de multiplication dans la décomposition de Peirce.

T_wE et T_wM_k sont donc orthogonaux pour g_w : par conséquent $Inv_k\mathcal{U}$ est le produit de E et de M_k.

Soit i l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par $i(\lambda w) = Log\ \lambda$. Alors i est trivialement différentiable et bijectif, et de $i(P(\lambda w)(\mu w)^{-1}) = i(\frac{\lambda^2}{\mu}w) = 2\ Log\ \lambda - Log\ \mu$, il s'ensuit que i est un isomorphisme d'espace symétrique.

On a :
$$\begin{aligned} g_{\lambda w}(\lambda_1 w, \lambda_2 w) &= Tr[P(\lambda w)^{-1}(\lambda_1 w)](\lambda_2 w) \\ &= Tr\ [P(\tfrac{w}{\lambda})(\lambda_1 w)](\lambda_2 w) \\ &= Tr(\frac{\lambda_1}{\lambda^2} w)(\lambda_2 w) = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda^2} Tr(e) = \frac{r\lambda_1\lambda_2}{\lambda^2} \end{aligned}$$

Par ailleurs $D_{\lambda w}\ i(\lambda_1 w) = \frac{\lambda_1}{\lambda}$. Donc i est un isomorphisme de variété pseudo-riemannienne symétrique en choisissant sur $\mathbb{R}$ la métrique $(\lambda_1,\lambda_2) \mapsto r\lambda_1\lambda_2$.

Q.E.D.

(2.8) <u>REMARQUE.</u> - De façon plus générale, soit $\mathcal{U}$ une algèbre de Jordan de dimension finie sur $\mathbb{R}$ avec un élément neutre, et C une composante connexe de $Inv(\mathcal{U})$. Alors $M = \{x \in C \mid |det\ P(x)| = 1\}$ est un sous-espace symétrique connexe fermé de $Inv(\mathcal{U})$. Si $\mathcal{U}$ est semi-simple, C est une sous-variété pseudo-riemannienne symétrique connexe fermée de $Inv(\mathcal{U})$ muni de la métrique (1.8).

3. LES GROUPES DE TRANSVECTIONS.

(3.1) DEFINITION. - *On désigne par* $P(M_k)$ *le groupe d'automorphismes de l'espace vectoriel* $\mathcal{U}$ *engendré par les* $P(x)$ *pour* $x \in M_k$.

En raison de l'égalité $P(M_k) = P(M_{r-k})$ provenant de l'isomorphisme $x \longmapsto -x$ de M_k sur M_{r-k} (pour $0 \leqslant k \leqslant r$), nous limiterons notre étude aux valeurs entières de k comprises entre 0 et $\frac{r}{2}$.

(3.2) $P(xy)$ n'est pas toujours égal à $P(x)P(y)$, car $\mathcal{U}$ n'est pas associative. Toutefois, si x, y et xy commutent deux à deux, alors $P(xy) = P(x)P(y)$ ([1], page 148, Satz 1.7).

Rappelons que par définition on dit que x et y commutent si $L(x)L(y) = L(y)L(x)$.

LEMME. - *Soit* $x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i$ *et* $y = \sum_{i=1}^{r} \mu_i c_i$ *(x et y peuvent s'écrire grâce au même s.t.o.i.p.). Alors* $P(xy) = P(x)P(y)$.

Démonstration.- $xy = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mu_i c_i$. Donc x, y et xy peuvent s'écrire grâce au même s.t.o.i.p. : il nous suffit d'établir que x et y commutent pour pouvoir appliquer la proposition rappelée.

Dans une base de Braun-Koecher ([3], page 49) par rapport au s.t.o.i.p. $(c_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ où c_{ij} désignera une base des $\mathcal{U}_{ij} = \mathcal{U}_{1/2}(c_i) \cap \mathcal{U}_{1/2}(c_j)$ pour $i < j$, soit $z = \sum_{i=1}^{r} \nu_i c_i + \sum_{i<j} \nu_{ij} c_i$.

Il vient :

$$xz = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \nu_i c_i + \sum_{i<j} \frac{(\lambda_i+\lambda_j)}{2} \nu_{ij} c_{ij}$$

et

$$y(xz) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i \lambda_i \nu_i c_i + \sum_{i<j} \frac{(\mu_i+\mu_j)}{2} \frac{(\lambda_i+\lambda_j)}{2} \nu_{ij} c_{ij}$$

Donc :

$$y(xz) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mu_i \nu_i c_i + \sum_{i<j} \frac{(\lambda_i+\lambda_j)}{2} \frac{(\mu_i+\mu_j)}{2} \nu_{ij} c_{ij}$$

$$= x(yz)$$

et $L(y)L(x) = L(x)L(y)$.

Q.E.D.

(3.3) LEMME. - *On a les inclusions suivantes :*

$P(M_\circ) \subseteq P(M_2) \subseteq P(M_k) \subseteq P(M_1)$ *pour* $1 \leq k \leq \frac{r}{2}$.

Démonstration :

a) Soit $x \in M_\circ$, $x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i$. Par définition de $M_\circ$, tous les λ_i sont strictement positifs, et $x' = -\lambda_1 c_1 - \lambda_2 c_2 + \sum_{i=3}^{r} \lambda_i c_i$ appartient à M_2 par construction, de même que

$$w = -c_1 - c_2 + \sum_{i=3}^{r} c_i,$$

et $wx' = x$. Appliquons le lemme (3.2), il vient $P(w)P(x') = P(x)$, ce qui prouve que $P(M_\circ) \subseteq P(M_2)$.

b) Soit $x \in M_2$: on peut supposer que $x = -\lambda_1 c_1 - \lambda_2 c_2 + \sum_{i=3}^{r} \lambda_i c_i$ avec des λ_i $(1 \leq i \leq r)$ strictement positifs.

Soit $x' = -\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 - \sum_{i=3}^{k+1} \lambda_i c_i + \sum_{i=k+2}^{r} \lambda_i c_i$ et

$w = c_1 - c_2 - \sum_{i=3}^{k+1} c_i + \sum_{i=k+2}^{r} c_i$. x' et w appartiennent à M_k, et $x'w = x$. Appliquons le lemme (3.2), il vient $P(x')P(w) = P(x)$, ce qui prouve que $P(M_2) \subseteq P(M_k)$.

c) Soit $x \in M_k$, $x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i$. Compte tenu de la définition de M_k, on peut supposer que $\lambda_i < 0$ pour $1 \leq i \leq k$ et $\lambda_i > 0$ pour $(k+1) \leq i \leq r$.

Posons $w_p = \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i c_i$ où $\varepsilon_p = -1$ et $\varepsilon_i = +1$ pour $i \neq p$).

Les w_p appartiennent à M_1 par construction. Soit

$x' = \lambda_1 c_1 + \sum_{i=2}^{r} |\lambda_i| c_i$: x' appartient à M_1, et $\left(\prod_{p=2}^{k} w_p\right) x' = x$. En appliquant plusieurs fois le lemme (3.2), il vient $\left(\prod_{p=2}^{k} P(w_p)\right) \circ P(x') = P(x)$ ce qui prouve que $P(M_k) \subseteq P(M_1)$.

Q.E.D.

(3.4) LEMME. - *Si* r *est impair, il y a au plus deux groupes distincts* $P(M_k)$, *à savoir* $P(M_\circ)$ *et* $P(M_1)$. *On a :*

$P(M_k) = P(M_1)$ $(1 \leq k \leq \frac{r}{2})$ et $P(M_\circ) \subseteq P(M_1)$.

Démonstration. - Soit $r = 2p+1$. Pour $x \in M_1$, on suppose que $x = \sum_{i=1}^{2p} \lambda_i c_i - \lambda_r c_r$ où λ_i $(1 \leq i \leq r)$ est strictement positif. Posons $w_q = \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i c_i$, avec $\varepsilon_{2q} = \varepsilon_{2q-1} = -1$ et $\varepsilon_i = +1$ dans les autres cas.

Par construction, les w_q appartiennent à M_2. Soit $x' = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i$: x' appartient à M_o, et $(\prod_{q=1}^{p} w_q)x' = x$. Appliquant le lemme (3.2), il vient $(\prod_{q=1}^{p} P(w_q))\, P(x') = P(-x)$. Or $P(-x) = P(x)$ et puisque $P(x') \in P(M_o) \subseteq P(M_2)$ d'après le lemme (3.3) il s'ensuit que $P(M_1) \subseteq P(M_2)$, et on a alors :

$$P(M_1) = P(M_2) = P(M_k) \quad \text{pour} \quad (1 \leq k \leq \tfrac{r}{2}).$$

Q.E.D.

(3.5) LEMME. - *Si* r *est pair, il y a au plus trois groupes distincts* $P(M_k)$, *à savoir* $P(M_o)$, $P(M_1)$ *et* $P(M_2)$.

Pour k *impair compris entre* 1 *et* $r/2$, *on a :*

$$P(M_k) = P(M_1)$$

Pour k *pair compris entre* 1 *et* $r/2$, *on a :*

$$P(M_k) = P(M_2).$$

Par ailleurs :

$$P(M_o) \subseteq P(M_2) \subseteq P(M_1).$$

Démonstration. - Pour k impair, on suppose que $k = 2p+1$. Soit $x \in M_1$, $x = -\lambda_k c_k + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{r} \lambda_i c_i$ avec des λ_i strictement positifs $(1 \leq i \leq r))$.

Alors $x' = -(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i c_i) + (\sum_{i=k+1}^{r} \lambda_i c_i)$ appartient à M_k. Considérons les w_q introduits dans la démonstration du lemme (3.4) : w_q appartient à M_2, donc $P(w_q) \in P(M_2) \subseteq P(M_k)$ d'après (3.3) et comme $(\prod_{q=1}^{p} w_q)x' = x$, en appliquant le lemme (3.2), il vient $(\prod_{q=1}^{p} P(w_q))P(x') = P(x)$, ce qui prouve que $P(M_1) \subseteq P(M_k)$. De (3.3) on déduit que $P(M_k) = P(M_1)$.

Pour k pair, on suppose que k=2p. Soit $x \in M_k$,

$$x = -\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i c_i\right) + \left(\sum_{i=k+1}^{r} \lambda_i c_i\right) \text{ avec } \lambda_i > 0 \quad (\forall i).$$

Posons $x' = -\lambda_1 c_1 - \lambda_2 c_2 + \sum_{i=3p}^{r} \lambda_i c_i$: $x' \in M_2$, et utilisant les w_q de (3.4), on a $x'(\prod_{q=2}^{p} w_q) = x$. Donc d'après (3.2),

$P(x')\left(\prod_{q=2}^{p} P(w_q)\right) = P(x)$ et $P(M_k) \subseteq P(M_2)$; de (3.3) on déduit alors que $P(M_k) = P(M_2)$.

Q.E.D.

(3.6) Soit G un groupe de Lie connexe avec un automorphisme involutif σ ; soit G^σ l'ensemble des points de G fixes par σ. On désigne par $(G^\sigma)_o$ la composante de G^σ contenant l'élément neutre de G, et soit H un sous-groupe de G tel que $(G^\sigma)_o \subset H \subset G^\sigma$; alors H est fermé dans G, et pour deux éléments xH et yH appartenant à la variété $M = G/H$, on pose $S(xH)yH = x\sigma(x)^{-1}\sigma(y)H$. M devient ainsi un espace symétrique connexe.

Réciproquement, soit M un espace symétrique connexe. On appelle *groupe des transvections* et on note G(M) le groupe engendré par les automorphismes de M de la forme $S(x)S(y)$. G(M) a une unique structure de groupe de transformation de Lie de M, pour laquelle G est connexe.

Soit $o \in M$ et $H = \{g \in G(M) \mid g(o) = o\}$. H est le *groupe d'isotropie du point de base* o.

Alors $g \longmapsto \sigma(g) = S(o)gS(o)$ est un automorphisme involutif de G(M) tel que $(G(M)^\sigma)_o \subset H \subset G(M)^\sigma$, et M est isomorphe à $G(M)/_H$ doté de la structure d'espace symétrique définie ci-dessus.

<u>LEMME.</u> - *On désigne par* $G(M_k)$ *le groupe des transvections de* M_k..

Alors $G(M_k)$ *est le groupe engendré par les* $P(x)\ P(y)$ *pour* x *et* y *appartenant à* M_k. *On a* $G(M_k) \subseteq P(M_k)$.

Démonstration. - $S(x)S(y)z = P(x)[P(y)z^{-1}]^{-1} = P(x)P(y^{-1})z$ d'après (1.3) 5. L'inclusion $G(M_k) \subseteq P(M_k)$ est évidente.

Q.E.D.

(3.7) <u>THEOREME.</u> - *Si* r *est impair ou si* r *et* k *sont pairs,* $G(M_k) = P(M_k)$.
Si r *est pair et* k *impair,* $G(M_k) = G(M_1)$ *et*
$P(M_2) \subseteq G(M_1) \subseteq P(M_1)$.

Compte tenu des lemmes précédents, on a :

a) *si* r *est impair :*

$$G(M_o) = P(M_o)$$

$$G(M_k) = P(M_k) = G(M_1) = P(M_1) \qquad (1 \leqslant k \leqslant \tfrac{r}{2})$$

$$G(M_o) \subseteq G(M_1).$$

b) *si* r *est pair :*

$$G(M_o) = P(M_o)$$

Pour k *pair compris entre* 1 *et* r/2 *:*

$$G(M_k) = P(M_k) = G(M_2) = P(M_2).$$

Pour k *impair compris entre* 1 *et* r/2 *:*

$$P(M_k) = P(M_1)$$
$$G(M_k) = G(M_1)$$

Par ailleurs, on a :

$$P(M_o) \subseteq P(M_2) \subseteq G(M_1) \subseteq P(M_1).$$

Démonstration. - Puisque $e \in M_o$ et $P(e) = \mathrm{Id}_{\mathcal{U}}$, il s'ensuit que $P(x)P(e) = P(x)$ et donc $G(M_o) = P(M_o)$.

Dans la démonstration du lemme (3.3. b)), nous avons établi que pour $x \in M_2$, $P(x) = P(x')P(w)$ avec x' et w de M_k ; nous pouvons en conclure que $P(M_2) \subseteq G(M_k)$.

Si r est impair, on a $P(M_k) = P(M_1)$ $(1 \leqslant k \leqslant \frac{r}{2})$ (lemme (3.4.)) et de $G(M_k) \subseteq P(M_k)$ il s'ensuit que $G(M_k) = P(M_1)$ et la partie a) du théorème est ainsi démontrée.

Si r est pair ainsi que k, de $P(M_k) = P(M_2)$ (lemme (3.5)), on déduit l'égalité

$$G(M_k) = P(M_k) = G(M_2) = P(M_2).$$

Les inclusions $P(M_2) \subseteq G(M_1) \subseteq P(M_1)$ étant évidentes ; il reste à établir que si k est impair, (r étant pair) $G(M_k) = G(M_1)$.

Soit $k = 2p+1$. Pour x et y de M, $x = -\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i c_i\right) + \left(\sum_{i=k+1}^{r} \lambda_i c_i\right)$ et $y = -\left(\sum_{i=1}^{k} \mu_i d_i\right) + \left(\sum_{i=k+1}^{r} \mu_i d_i\right)$ avec λ_i et μ_i strictement positifs, et où $(d_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ désigne un autre s.t.o.i.p., considérons $x' = -\lambda_1 c_1 + \sum_{i=2}^{r} \lambda_i c_i$, $y' = -\mu_1 d_1 + \sum_{i=2}^{r} \mu_i d_i$, $w_1 = c_1 - \left(\sum_{i=2}^{2p+1} c_i\right) + \left(\sum_{i=2p+1}^{r} c_i\right)$ et $w_2 = d_1 - \left(\sum_{i=2}^{2p+1} d_i\right) + \left(\sum_{i=2p+1}^{r} d_i\right)$.

$x' \in M_1$, $y' \in M_1$, w_1 et w_2 appartiennent à M_{2p}.

En appliquant le lemme (3.2) on obtient

$$P(w_1)P(x')P(y')P(w_2) = P(x)P(y).$$

Or $P(w_1)$ et $P(w_2)$ appartiennent à $P(M_{2p}) = P(M_2) \subseteq G(M_1)$, $P(x')P(y')$ appartient à $G(M_1)$: ceci prouve que $G(M_k) \subseteq G(M_1)$.

De la même façon, on a

$$P(x')P(y') = P(w_1)P(x)P(y)P(w_2).$$

Or $P(w_1)$ et $P(w_2)$ appartiennent à $P(M_{2p}) = P(M_2) \subseteq G(M_k)$, $P(x)P(y)$ appartient à $G(M_k)$: ceci prouve que $G(M_1) \subseteq G(M_k)$.

Donc $G(M_1) = G(M_k)$ pour $1 \leqslant k \leqslant \frac{r}{2}$ et k impair, ce qui achève la démonstration de b).

Q.E.D.

(3.8) Désignons par I l'ensemble des involutifs de $\mathcal{U}$ (i.e. $w \in I \Longleftrightarrow w^2 = e$).
On suppose que $w = \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i c_i$, où $(c_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ est un s.t.o.i.p. et les ε_i des nombres réels : de $w^2 = \sum_{i=1}^{r} (\varepsilon_i)^2 c_i = e = \sum_{i=1}^{r} c_i$, on déduit que $\varepsilon_i = \pm 1$.

Le nombre k des ε_i qui sont égaux à -1 ne dépend que de w ; on l'appelle le *degré* de w.

Soit c un idempotent ; alors c s'écrit au moins d'une façon

$c = \sum_{i=1}^{k} c_i$, où les c_i sont des idempotents primitifs orthogonaux deux à deux vérifiant $cc_i = c_i$. Le nombre k ne dépend que de c ; on l'appelle le *degré* de c. L'application $w \longmapsto \frac{e-w}{e}$ est une bijection de l'ensemble des involutifs sur l'ensemble des idempotents qui conserve le degré.

I est un sous-espace symétrique fermé de $\mathrm{Inv}(\mathcal{U})$, dont les composantes connexes sont les ensembles I_k, composés des involutifs de degré k.

I_k est une sous-variété pseudo-riemannienne symétrique compacte de M_k, au-dessus de laquelle la métrique est définie négative ([3], page 66).

Désignons par $P(I_k)$ le groupe engendré par les $P(w)$ pour $w \in I_k$, et par $G(I_k)$ le groupe des transvections de I_k.

Les démonstrations conduisant au théorème (3.7) portent uniquement sur le signe des λ_i pour $x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i$, et non sur leurs valeurs absolues : elles restent valables pour $|\lambda_i| = 1$, ce qui établit le résultat suivant :

THEOREME. - *Si* r *est impair, on a :*

$$G(I_0) = P(I_0)$$

$$G(I_k) = P(I_k) = G(I_1) = P(I_1) \qquad (1 \leq k \leq \tfrac{r}{2})$$

$$G(I_0) \subseteq G(I_1)$$

Si r *est pair, on a :*

$$G(I_0) = P(I_0)$$

Pour k *pair compris entre* 1 *et* r/2 :

$$G(I_k) = P(I_k) = G(I_2) = P(I_2)$$

Pour k *impair compris entre* 1 *et* r/2 :

$$P(I_k) = P(I_1)$$

$$G(I_k) = G(I_1)$$

Par ailleurs, on a :

$$P(I_0) \subseteq P(I_2) \subseteq G(I_1) \subseteq P(I_1).$$

LES MUTATIONS D'UNE ALGEBRE DE JORDAN DE FORME REELLE

★ ☆ ★

(PROJET D'ARTICLE)

PLAN :

RESUME ET ENONCE DES PRINCIPAUX THEOREMES :

& 1. Les mutations d'une algèbre de Jordan :

Soit $\mathcal{U}$ une algèbre de Jordan. Pour $f \in \mathcal{U}$, posons

$$x \perp_f y = x(yf) + y(xf) - (xy)f$$

Alors $\mathcal{U}$ est une algèbre de Jordan pour le produit $x \perp_f y$, appelée la mutation de $\mathcal{U}$ par rapport à f et notée $\mathcal{U}_f$.

On rappellera ici les propriétés connues des mutations pour établir le résultat nouveau suivant :

PROPOSITION 1. - *Si $\mathcal{U}$ est de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et dotée d'un élément neutre* e, *et si* x *et* y *appartiennent à la même composante connexe de* Inv($\mathcal{U}$), *alors $\mathcal{U}_x$ et $\mathcal{U}_y$ sont isomorphes.*

Soit $\mathcal{U}_{\mathbb{C}} = \mathcal{U} \oplus i\mathcal{U}$ la complexifiée de $\mathcal{U}$ et c un idempotent de $\mathcal{U}$.

Le sous-espace vectoriel $\mathcal{U}_1(c) \oplus i\mathcal{U}_{1/2}(c) \oplus \mathcal{U}_0(c)$ de $\mathcal{U}_{\mathbb{C}}$ est une sous-algèbre de Jordan réelle de $\mathcal{U}_{\mathbb{C}}$ ($\mathcal{U}_1(c)$, $\mathcal{U}_{1/2}(c)$ et $\mathcal{U}_0(c)$ désignent la décomposition de Peirce de $\mathcal{U}$ par rapport à l'idempotent c).

Soit w = 2c-e l'involutif associé à c.

On a alors le résultat fondamental suivant :

THEOREME 2. - *Soit* $x \in \mathcal{U}$, $x = x_1 + x_{1/2} + x_0$ *dans la décomposition de Peirce par rapport à* c. *L'application* h *définie par*

$$h(x) = x_1 + ix_{1/2} - x_0$$

est un isomorphisme de $\mathcal{U}_w$ *sur* $\mathcal{U}_1(c) \oplus i\mathcal{U}_{1/2}(c) + \mathcal{U}_0(c)$ *(*h *est une application de* $\mathcal{U}_w$ *dans* $\mathcal{U}_1(c) \oplus i\mathcal{U}_{1/2}(c) \oplus \mathcal{U}_0(c)$ *car* $\mathcal{U}$ *et* $\mathcal{U}_w$ *coïncident en tant qu'ensembles). Toute mutation* $\mathcal{U}_x$ *de* $\mathcal{U}$*, pour* $x \in \mathrm{Inv}(\mathcal{U})$*, est isomorphe à une algèbre de la forme* $\mathcal{U}_1(c) \oplus i\mathcal{U}_{1/2}(c) \oplus \mathcal{U}_0(c)$.

Pour la démonstration, on vérifie à la main que h est un isomorphisme en s'appuyant sur les règles de multiplication de la décomposition de Peirce. D'après Braun-Koecher, toute composante connexe de $\mathrm{Inv}(\mathcal{U})$ contient un involutif : compte tenu de la proposition 1, il s'ensuit que toute mutation $\mathcal{U}_x$ pour $x \in \mathrm{Inv}(\mathcal{U})$ est isomorphe à une algèbre de la forme $\mathcal{U}_1(c) \oplus i\mathcal{U}_{1/2}(c) \oplus \mathcal{U}_0(c)$.

Seules les mutations de la forme $\mathcal{U}_x$ avec $x \in \mathrm{Inv}(\mathcal{U})$ sont intéressantes, car ce sont celles qui possèdent un élément neutre, à savoir x^{-1}. Compte tenu du théorème 2, nous étudierons exclusivement les algèbres $\mathcal{U}_w$ avec w involutif : w est alors l'élément neutre de $\mathcal{U}_w$.

& 2. Le cas des algèbres de Jordan de forme réelle :

Ce paragraphe sera dévolu essentiellement à la démonstration du théorème de classification suivant :

THEOREME 3. - *Toute mutation d'une algèbre de Jordan de forme réelle simple est isomorphe à l'une des algèbres de Jordan de la liste suivante, où deux distinctes d'entre elles ne sont pas isomorphes :*

a) $\mathbb{R}$

$\mathcal{U} = \mathbb{R}c_1 \oplus \mathbb{R}c_2 \oplus E$, *où* E *est un espace vectoriel de dimension* $p > 0$ *sur* $\mathbb{R}$ *admettant une base* $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ *avec les règles de* *multiplication suivantes :* c_1 *et* c_2 *sont deux idempotents orthogonaux,* $c_i e_j = \frac{1}{2} e_j$ $(\forall i,j)$, $e_i^2 = c_1 + c_2$, $e_i e_j = 0$ *pour* $i \neq j$.

$\mathcal{U} = \mathbb{R}c_1 \oplus \mathbb{R}c_2 \oplus iE$, *avec des règles de multiplication déduites de ci-dessus.*

b) Soient A, B, C *des matrices à coefficients sur un même corps* K, *qui peut être le corps des réels, des complexes, ou des quaternions.* A *et* B *sont des matrices carrées hermitiennes pour l'involution du corps considéré, respectivement de type* (p,p) *et de type* (q,q) *avec* $p \leq q$. *On suppose que* C *est une matrice à* q *lignes et* p *colonnes, et si* $C = (c_{ij})$, *on pose* $C^* = (c^*_{ji})$ *où* c^*_{ji} *désigne le conjugué de* c_{ji} *pour l'involution de* K.

Alors l'ensemble $\mathcal{U}$ *des matrices de la forme* $X = \begin{pmatrix} A & iC^* \\ iC & B \end{pmatrix}$ *est une algèbre de Jordan pour le produit* $XY = \frac{1}{2}(X \circ Y + Y \circ X)$, *où* $\circ$ *désigne le produit habituel des matrices.*

c) On fait la même construction qu'en b) avec des matrices à coefficients dans l'algèbre des octonions, dans les deux cas suivants seulement : $p=0$ *et* $q=3$, $p=1$ *et* $q=2$.

Pour la démonstration, on part de la classification existante des algèbres de Jordan de forme réelle. Compte tenu du théorème 2, on considère les mutations $\mathcal{U}_{w_q}$ où $w_q = \sum_{i=1}^{q} c_i - \sum_{j=q+1}^{r}$ où $(c_i)_{1 \leq i \leq r}$ est un s.t.o.i.p. Compte tenu de l'identification des composantes connexes faite dans ma thèse, il s'ensuit que toute mutation est isomorphe à une $\mathcal{U}_{w_q}$. La restriction $q \leq \frac{r}{2}$ se justifie par l'isomorphisme entre $\mathrm{Inv}_k(\mathcal{U})$ et $\mathrm{Inv}_{r-k}(\mathcal{U})$.

& 3. Applications géométriques :

L'intérêt des mutations pour l'étude des espaces symétriques provient de ce que si $P_f(x)$ désigne la représentation quadratique et $(y^{-1})_f$ l'inverse de x dans $\mathcal{U}_f$, alors $P(x)y^{-1} = P_f(x)(y^{-1})_f$.

Aussi, pour étudier une composante connexe de $\mathrm{Inv}(\mathcal{U})$, on dispose de deux techniques : soit une étude directe dans $\mathcal{U}$, soit l'étude dans une mutation $\mathcal{U}_w$, où w est un involutif appartenant à la composante connexe.

Désignons par $Tr(x)$ la trace de x, $x \in \mathcal{U}$ ($\mathcal{U}$ est de forme réelle).

Il est immédiat que $x+iy \longmapsto Tr(x) + iTr(y)$ est une forme linéaire associative de $\mathcal{U}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathbb{C}$. Sa restriction à $\mathcal{U}_1(c) + i\mathcal{U}_{1/2}(c) + \mathcal{U}_0(c)$ est réelle, car $\mathcal{U}_{1/2}(c) \subseteq \mathrm{Ker}\, Tr$. Comme cette forme est associative, on peut montrer comme dans l'Annexe 1 qu'elle fournit au-dessus de $\mathrm{Inv}(\mathcal{U}_w)$ une métrique pseudo-riemannienne compatible avec les symétries : *cette métrique est la même que celle induite par* $\mathcal{U}$.

On sait, (Braun-Koecher), que si $g : \mathcal{U} \longmapsto \mathbb{R}$ est une forme linéaire associative, alors h_w définie par $g_w(x) = g(wx)$ est une forme linéaire associative de $\mathcal{U}_w$ dans $\mathbb{R}$. On peut montrer que la trace de $\mathcal{U}_1 \oplus i\,\mathcal{U}_{1/2} \oplus \mathcal{U}_0$ est en fait obtenue par ce procédé modulo l'isomorphisme h du théorème 2.

Si $w \in M_k$, nous avons vu dans l'annexe 1 que $T_w(M_k) = \{\xi \in \mathcal{U} \mid \xi = \xi_1 + \xi_{1/2} + \xi_0 \text{ avec } Tr(\xi_1) = Tr(\xi_0)\}$. Si l'on considère M_k comme partie de l'algèbre $\mathcal{U}_1 + i\,\mathcal{U}_{1/2} + \mathcal{U}_0$, en désignant par $T'r$ la forme induite par Tr sur cette algèbre, il vient :

$$T_w(M_k) = \{\xi \in \mathcal{U}_w \mid T'r(\xi) = 0\}$$

(compte tenu du fait que l'isomorphisme est donné par $x_1 + x_{1/2} + x_0 \longmapsto x_1 + ix_{1/2} - x_0$).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BRAUN H. und KOECHER M., *Jordan-Algebren*, Springer-Verlag (1966).

[2] LOOS O., *Symmetric Spaces I : General Theory, II : Compact Spaces and Classification*, Benjamin (1969).

[3] TILLIER A., *Quelques applications géométriques des algèbres de Jordan*, Publications du Département de Mathématiques de LYON, tome 14, fasc. 3 (1977).

On pourra de plus consulter :

BOOTHBY W.M., *Symmetric Spaces*, Marcel Dekker, Inc. (1972).

HELGASON S., *Differential geometry and symmetric spaces*, Academic Press (1962).

HELWIG K.H., *Jordan-Algebren und kompakte symmetrische Raüme I*, Math. Z., 115, p. 315-349 (1970).

HIRZEBRUCH U., *Über Jordan-Algebren und kompakte symmetrische Raüme vom Rang 1*, Math. Z, 90, p. 339-354 (1965).

KOECHER M., *Jordan algebras and their applications*, Lectures Notes, U. of Minnesota, Minneapolis (1962).

KOECHER M., *Jordan algebras and differential geometry*, Actes, Congrès intern. Math., 1970, Tome 1, p. 279-283.

MAC GRIMMON K., *Quadratics methods in Non associative algebras*, Proc. Int. Congress of Math., 1974, Tome 1, p. 325-330.

TILLIER A., *Sur les idempotents primitifs d'une algèbre de Jordan formelle-réelle*, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 280, p. A767 -A769 (1975).

* ☆ *

A. TILLIER
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
43, bd du 11 novembre 1918
69521 VILLEURBANNE