

SIMON AGOU

Polynômes irréductibles primitifs à coefficients dans un corps fini

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1977, tome 14, fascicule 4
, p. 17-20

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1977__14_4_17_0

© Université de Lyon, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

POLYNOMES IRREDUCTIBLES PRIMITIFS A
 COEFFICIENTS DANS UN CORPS FINI
 par Simon AGOU

I. INTRODUCTION.

Soit $f \in \mathbb{F}_q[X]$ (où \mathbb{F}_q est le corps fini ayant q éléments) un polynôme irréductible tel que $f(0) \neq 0$; on appelle exposant de f l'ordre $e(f)$ d'une racine de f dans \mathbb{F}_q $\deg(f)$ (cf. [1]). On va donner une caractérisation des polynômes irréductibles de $\mathbb{F}_q[X]$ d'exposant donné. Pour cela, pour m et k entiers tels que $1 \leq k \leq m$, désignons par $r_{m,k}(X)$ le polynôme

$$\frac{(X^m) \dots (X^m - X^k)}{(X-1) \dots (X^k-1)}$$
 de $\mathbb{F}_q[X]$. Enfin on notera que la caractérisation que nous obtenons ci-dessous fait abstraction de la connaissance des diviseurs premiers de l'exposant.

PROPOSITION. - Soient e un entier ≥ 1 , premier à q et v le plus petit entier tel que $q^v - 1 \in \mathbb{Z} e$. Soit $f \in \mathbb{F}_q[X]$ un polynôme monique non réduit à X .

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) f est irréductible dans $\mathbb{F}_q[X]$, $e(f) = e$ et $v = \deg(f)$;
- ii) f divise les polynômes $(-1)^e r_{e+1,e} + 1$ et $r_{e+1,k}$ pour $1 \leq k \leq e-1$ dans $\mathbb{F}_q[X]$.

Tout d'abord, pour tout entier $m \geq 2$, on a, dans $\mathbb{F}_q[X, Y]$.

$$(1) \quad \prod_{t=1}^{m-1} (Y - X^t) = Y^{m-1} + \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k r_{m,k}(X) Y^{m-1-k},$$

identité que l'on établit aisément par récurrence sur m .

Cela étant, montrons que (i) entraîne ii). Soit θ une racine de f dans \mathbb{F}_q^x . D'après (1), on a

$$\prod_{t=1}^e (Y - \theta^t) = Y^e + \sum_{k=1}^{e-1} (-1)^k r_{e+1,k}(\theta) Y^{e-k} + (-1)^e \theta^{e(e+1)/2} = Y^e - 1, \text{ puisque } \theta^e = 1.$$

(Si $e = 1$, on a $Y - \theta = Y-1$ et $f = X-1$; i) et ii) sont alors trivialement équivalentes).

Comme f est irréductible, on a

$$(-1)^e X^{e(e+1)/2} + 1 = (-1)^e r_{e+1,e}(X) + 1 \equiv 0 \pmod{f(X)}$$

et $r_{e+1,k}(X) \equiv 0 \pmod{f(X)}$ pour $1 \leq k \leq e-1$.

Inversement, ii) entraîne i). Soit $\theta \in \bar{\mathbb{F}}_q$ une racine de $f(X)$. Comme $f(X) \mid X^{e-1} - 1$, on a $\theta \neq 0$. A fortiori, on a $f(X) \mid X^{q^v-1} - 1$. La formule (1) montre alors que $\prod_{t=1}^e (Y - \theta^t) = Y^e - 1$.

Mais $Y^e - 1$ a ses racines dans $\mathbb{F}_{q^v}^*$ et ces racines sont simples; par suite, e est l'ordre de θ dans $\mathbb{F}_{q^v}^*$. Si $v > 1$, les éléments $\theta, \theta^q, \dots, \theta^{q^{v-1}}$ de $\mathbb{F}_{q^v}^*$ sont des racines deux à deux distinctes de $f(X)$, car l'égalité $\theta^{q^j-1} = 1$ ($1 \leq j \leq v-1$) conduit à une contradiction; elle implique en effet que $q^j - 1 \equiv 0 \pmod{e}$, donc que $j \equiv 0 \pmod{v}$.

Par suite, f vérifie la propriété (i).

N.B. On notera que l'on a fait abstraction de la connaissance des diviseurs de l'entier e .

REMARQUE. - Il résulte de la formule (1) que la condition ii) est équivalente à la suivante :

$$iii) Y^e - 1 - \prod_{t=1}^e (Y - X^t) \in (f \mathbb{F}_q[X]) [Y].$$

On a, d'autre part, le corollaire suivant :

COROLLAIRE. - Le pgcd des coefficients dans $\mathbb{F}_q[X]$ du polynôme $Y^e - 1 - \prod_{t=1}^e (Y - X^t)$ de $\mathbb{F}_q[X, Y]$ est le polynôme cyclotomique $\phi_e(X)$.

2. EXEMPLE. (cf. [1], § 52).

Déterminons les polynômes irréductibles primitifs de degré 2 de $\mathbb{F}_3[X]$; on a ici $e = 3^2 - 1 = 8$. En posant $f = X^2 + aX + b$, on doit avoir $Y^8 - 1 - \prod_{t=1}^8 (Y - X^t) \in (f \mathbb{F}_3[X]) [Y]$.

Si f vérifie cette condition, f est irréductible dans $\mathbb{F}_3[X]$ et on a donc $(Y-X^3)(Y-X)-f(Y) \in (f \mathbb{F}_3[X])[Y]$. On a donc, mod. $(f \mathbb{F}_3[X])[Y]$ les congruences :

$$\prod_{t=1}^8 (Y-X^t) \equiv (Y-X^3)(Y-X)(Y-X^7)(Y-X^5)(Y-1)(Y-X^4)(Y-X^2)(Y-X^6),$$

soit

$$\prod_{t=1}^8 (Y-X^t) \equiv (Y^2+aY+b)(Y^2+abY+b)(Y-1)(Y-b)(Y^2-(b+1)X^2Y+b^2)$$

et, finalement

$$Y^8-1 \equiv (Y^2+aY+b)(Y^2+abY+b)(Y-1)(Y-b)(Y^2-(b+1)X^2Y+b^2).$$

En substituant 0 à Y , on en tire $b = 2$.

Ainsi $Y^8-1 = (Y^2+aY+2)(Y^2+2aY+2)(Y-1)(Y+1)(Y^2+1)$; on en déduit que

$Y^4+1 = \phi_8(Y) = (Y^2+aY+2)(Y^2+2aY+2)$, soit $a^2 = 1$. Les polynômes cherchés sont donc les polynômes X^2+X+2 et X^2-X+2 .

3. PROPOSITION , - Soit $f \in \mathbb{F}_q[X]$ un polynôme monique, irréductible de degré n et tel que $f(0) \neq 0$. Soient d un diviseur de n ,

$$m = \frac{q^n-1}{q^d-1} \text{ et } \theta \text{ une racine de } f. \text{ Les propriétés suivantes sont}$$

équivalentes :

i) θ^{q^d-1} est d'ordre m dans $\mathbb{F}_{q^n}^\times$;

ii) $Y^{q^n-1} - 1 = \prod_{t=1}^m (Y^{q^d-1} - X^{t(q^d-1)}) \in (f \mathbb{F}_q[X])[Y]$.

Montrons que i) entraîne ii). Il est clair que $\{\theta^t \mid \alpha \in \mathbb{F}_q^d, 1 \leq t \leq m\}$

est \mathbb{F}_q^\times . On a donc $\prod_{t=1}^m \prod_{\alpha \in \mathbb{F}_q^d} (Y - \theta^t \alpha) = \prod_{t=1}^m (Y^{q^d-1} - \theta^{t(q^d-1)}) = Y^{q^n-1} - 1$.

Comme, par hypothèse, f est irréductible, on a ii). Inversement, soit δ un entier divisant m et tel que $\theta^{\delta(q^d-1)} = 1$. On a

$$\begin{aligned} \prod_{t=1}^m (Y^{q^d-1} - \theta^{t(q^d-1)}) &= Y^{q^n-1} - 1 \\ &= \prod_{t=1}^{\delta} (Y^{q^d-1} - \theta^{t(q^d-1)})^{\frac{m}{\delta}} \end{aligned}$$

Comme $Y^{q^n-1} - 1$ n'a que des racines simples, on a $\delta = m$.

BIBLIOGRAPHIE. -

- [1] L.E. DICKSON, *linear groups with an exposition of the galois field theory*, Dover, New-York (1958).

S. AGOU
 Département de Mathématiques
 43, bd du 11 novembre 1918
 69621 VILLEURBANNE