PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

R. FRAISSE

Deux relations dénombrables, logiquement équivalentes pour le second ordre, sont isomorphes

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1977, tome 14, fascicule 2
, p. 41-62

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1977__14_2_41_0>

PUBLICATIONS DU
DEPARTEMENT DE
MATHEMATIQUES
LYON 1977 t. 14-2

DEUX RELATIONS DENOMBRABLES, LOGIQUEMENT EQUIVALENTES POUR LE SECOND ORDRE, SONT ISOMORPHES

par R. FRAISSE

Rappelons que deux relations dénombrables, et plus particulièrement deux bonordres dénombrables, peuvent être logiquement équivalents, en logique usuelle du premier ordre avec identité, sans être isomorphes. Par exemple, les ordinaux $a.\omega^{\omega} + r$ où r est un ordinal $< \omega^{\omega}$ et a un ordinal variable non nul, sont logiquement équivalents : voir par exemple [F 1974] p. 26.

En logique du second ordre, avec des formules finies dont les quanteurs portent sur les indices mais aussi sur les prédicats, l'isomorphie de deux relations dénombrables logiquement équivalentes a été conjecturée par [F 1950] . Elle a été prouvée par [M 1973] , avec l'aide de l'axiome de constructibilité, ou seulement de la constructibilité de tout ensemble hérédénombrable, dans le cas particulier des bonordres dénombrables. Elle s'étend à toutes les relations dénombrables ; cette généralisation est le but du présent article.

Dès l'origine de la question, on savait, au moins expérimentalement, que l'isomorphie conjecturée ne pouvait résulter des seuls axiomes de Zermelo-Fraenkel. En effet, considérons par exemple les relations binaires, et partons d'une numérotation de l'ensemble des formules du second ordre à un prédicat binaire libre ; numérotation aisément définissable dans la théorie de Zermelo-Fraenkel. Alors pour chaque relation binaire R, la théorie complète du second ordre de R est codée par un ensemble d'entiers, à savoir l'ensemble des numéros des formules qui prennent pour R la valeur + . Autrement dit, cette théorie de R est codée par un nombre réel. En particulier si pour chaque ordinal dénombrable, A, la théorie complète de A est distincte des théories complètes des autres ordinaux dénombrables, alors elle est codée par un réel qui ne correspond qu'au seul A. Ainsi, à la ω_1-suite des ordinaux dénombrables, correspond la ω_1-suite des réels qui codent leurs théories complètes du second ordre. Or il est connu qu'avec la seule métathéorie de Zermelo-Fraenkel on ne sait par nommer une ω_1-suite de réels, c'est-à-dire définir une telle suite avec un énoncé d'existence et un énoncé d'unicité. Cette impossibilité a été récemment prouvée, par exemple chez [L, 1970] en supposant consistante la théorie Z-F plus l'axiome du cardinal inaccessible. Enfin G. Sacks (travail non publié) obtient cette impossibilité en supposant seulement que Z-F est consistante : il construit, par forcing, une Z-F-appartenance qui ne comprend qu'une infinité dénombrable de bonordres dénombrables constructibles ; or la possibilité de nommer, avec existence et unicité, une ω_1-suite de réels, donnerait, pour chaque intervalle initial de cette suite, un bonordre dénombrable et constructible ; référence citée par [M 1973] .

1. ENSEMBLE HÉRÉDENOMBRABLE ; CODAGE D'UN HÉRÉDÉNOMBRABLE PAR UN GRAPHE ; THÉORIE DE L'APPARTENANCE SUR LES HÉRÉFINIS ET SUR LES HÉRÉDÉNOMBRABLES.

Nous savons que les héréfinis sont exactement les ensembles de rangs fondamentaux finis, ou encore les ensembles constructibles de rangs de constructions finis . Plus précisément, pour un héréfini, le rang de construction est identique au rang fondamental : égal à zéro pour le vide, et pour un ensemble non vide , égal au maximum strict (maximum augmenté de 1) des rangs des éléments. Rappelons que pour chaque entier p, l'ensemble des ensembles de rang fondamental p est fini ; donc l'ensemble des héréfinis est dénombrable.

Définissons l'ensemble *hérédénombrable* (abréviation de : héréditairement dénombrable), par les conditions suivantes :

(1) L'ensemble vide est hérédénombrable ;

(2) Tout ensemble fini ou dénombrable dont les éléments sont hérédénombrables, est hérédénombrable ;

(3) tout ensemble hérédénombrable est obtenu à partir du vide par le procédé (2) ci-dessus ; plus rigoureusement, l'ensemble des hérédénombrables est l'intersection des ensembles U tels que 0 appartient à U et tels que tout ensemble fini ou dénombrable inclus dans U, appartient à U.

D'après (3), si une propriété P est vraie pour 0, et si, quand P est vraie pour chaque élément d'un ensemble x fini ou dénombrable P est vraie pour x, alors P est vraie pour chaque ensemble hérédénombrable ; il suffit de voir que l'ensemble U des hérédénombrables qui vérifient P, satisfait à la condition (3).

Comme exemples d'hérédénombrables, citons l'ensemble ω des entiers ; plus généralement, citons chaque ordinal fini ou dénombrable (preuve par induction). Citons encore chaque ensemble héréfini, et l'ensemble de tous les héréfinis, puisqu'il est dénombrable.

Tout élément d'un hérédénombrable, ou toute partie d'un hérédénombrable, est hérédénombrable.

Tout ensemble hérédénombrable est fini ou dénombrable.

1.1. *Un ensemble* a *est hérédénombrable si et seulement si la cloture transitive de* a *est finie ou dénombrable.*

Supposons a hérédénombrable, et supposons que la cloture transitive de a soit de cardinal infini non dénombrable. Nous pouvons toujours supposer que, pour chaque élément x de a, la cloture de x est au plus dénombrable. Sinon nous aurions une suite infinie ascendante par appartenance :

suite dont chaque terme comprend comme élément le terme suivant contre l'axiome de fondement. La cloture transitive de a est la réunion de a, qui est au plus dénombrable, et des clotures transitives des éléments de a, qui sont chacune au plus dénombrable et sont au plus en infinité dénombrable.

Inversement, supposons que la cloture transitive de a soit au plus dénombrable ; donc a est fini ou dénombrable. Supposons que a ne soit pas hérédénombrable. Nous pouvons toujours supposer que chaque élément de a est hérédénombrable : sinon nous aurions une suite infinie ascendante par appartenance. Donc a est hérédénombrable, en tant qu'ensemble au plus dénombrable formé d'éléments hérédénombrables.

1.2. Appelons H_0 l'ensemble du seul ensemble vide 0. Soit i un ordinal non nul, fini ou dénombrable ; supposons défini H_j pour chaque $j < i$, et appelons H_i l'ensemble des éléments et des parties finies ou dénombrables de la réunion de $H_j (j < i)$. Nous avons donc $H_i \subseteq H_{i'}$ lorsque $i < i'$.

Pour chaque ordinal fini ou dénombrable i, *l'ensemble* H_i *est celui des ensembles hérédénombrables de rangs fondamentaux* $<i$. *La différence* $H_i - (\cup H_j)(j < i)$ *étant l'ensemble des hérédénombrables de rang fondamental* i *; c'est encore la différence* $H_i - H_{i-1}$ *lorsque* i *est un ordinal successeur.*

Il en résulte que *l'ensemble des héréfinis est la réunion des* H_i *pour les ordinaux finis* i *; l'ensemble des hérédénombrables est la réunion des* H_i *pour les ordinaux* i *finis ou dénombrables*. Ce dernier point résulte du fait que tout ensemble dénombrable d'ordinaux dénombrables, est majoré par un ordinal dénombrable.

Il en résulte encore que *tout hérédénombrable est de rang fondamental fini ou dénombrable*. Mais, alors qu'un ensemble est héréfini si et seulement si son rang fondamental est fini, l'ensemble H_ω, formé de tous les ensembles d'héréfinis, est de rang fondamental $\omega+1$, et il est continupotent, donc n'est pas hérédénombrable. Par exemple, il comprend comme élément chaque ensemble d'entiers.

L'ensemble des hérédénombrables est continupotent.

Nous voyons qu'il est au moins continupotent puisqu'il comprend comme élément chaque ensemble d'entiers. De plus il est la réunion des ensembles H_i précédemment définis. Or les ordinaux finis ou dénombrables i qui servent d'indices aux H_i sont en infinité aleph 1, donc inférieure ou égale au continupotent. D'autre part chaque H_i est fini pour les i finis, et continupotent à partir de $i = \omega$, puisque formé de toutes les parties finies ou dénombrables, plus les éléments, de la réunion des $H_j (j < i)$.

1.3. *Un ensemble constructible est hérédénombrable si et seulement si son rang de construction est fini ou dénombrable.*

Soit a un ensemble constructible hérédénombrable. Raisonnons par l'absurde en supposant que son rang de construction est infini non dénombrable. Nous pouvons toujours supposer que, pour chaque élément de a, le rang de construction est au plus dénombrable. Sinon, en remontant d'un ensemble de rang infini non dénombrable à un élément de rang infini non dénombrable, nous aurions une suite infinie ascendante par appartenance, contre l'axiome de fondement. Mais puisque a est hérédénombrable, il est dénombrable donc est dénombrable le plus petit ordinal > rangs de construction des éléments de a;d'après le corollaire du théorème de la partie constructible, le rang de construction de a est au plus dénombrable.

Inversement, soit a un ensemble constructible dont le rang de construction α est fini ou dénombrable. Raisonnons par l'absurde, en supposant a non hérédénombrable, et α minimum. Donc chaque élément de a, ayant un rang de construction $< \alpha$, est hérédénombrable.

Pour prouver que a est hérédénombrable, donc pour obtenir la contradiction, il suffit de prouver que a est fini ou dénombrable. Puisque chaque élément de a est de rang de construction $< \alpha$, chacun est défini par une formule ordinalée d'ordinal maximum $< \alpha$. Il suffit de remarquer que les suites finies d'ordinaux $< \alpha$, donc aussi les formules ordinalées correspondantes, sont au plus en infinité dénombrable. (pour les formules ordinalées, voir [F 1975] p. 1

En conséquence, *si nous admettons l'axiome de constructibilité, les hérédénombrables sont exactement les ensembles ayant un rang de construction fini ou dénombrable.*

Si nous n'admettons pas cet axiome, notons que *toute partie d'un ensemble de rang de construction dénombrable, est hérédénombrable.* Par exemple tout ensemble d'entiers, qu'il soit ou non constructible, est hérédénombrable. Notons encore que tous les hérédénombrables ne sont pas obtenus comme des parties d'un constructible de rang dénombrable : par exemple, partons d'un ensemble a supposé hérédénombrable et non constructible ; le singletons $\{a\}$ est encore hérédénombrable et non constructible, et ce singleton n'est inclus dans aucun ensemble constructible.

1.4. *La relation binaire d'appartenance, basée sur l'ensemble des héréfinis, vérifie les axiomes de Zermelo Fraenkel, excepté l'axiome de l'infini ; de plus elle vérifie l'axiome de choix et l'axiome de finitude, exprimant que tout ensemble est fini.*

Elle vérifie même l'axiome de constructibilité, les seuls rangs de construction étant les entiers.

La relation binaire d'appartenance, basée sur l'ensemble des hérédénombrables, vérifie les axiomes de Zermelo-Fraenkel, excepté l'axiome de la puissance ; de plus elle vérifie l'axiome exprimant que tout ensemble est fini ou dénombrable ; l'axiome du choix est vérifié. En effet, étant donné un ensemble hérédénombrable a dont les éléments sont disjoints, la réunion de a est dénombrable, donc en bijection avec l'ensemble des entiers.

Pour préciser les énoncés précédents, représentons l'axiome du choix par la formule suivante, où $\mathcal{D}xy$ est l'abréviation de $\neg \exists_t (t \varepsilon x \wedge t \varepsilon y)$, qui prend la valeur + lorsque x et y sont disjoints ; formule exprimant que, pour tout ensemble a dont les éléments sont non vides et deux à deux disjoints, il existe un ensemble de choix b comprenant un élément et un seul commun à b et à chaque élément de a :

$$(\forall_a (\forall_x x \varepsilon a \Rightarrow \exists_t t \varepsilon x) \wedge (\forall_{x,y} (x \varepsilon a \wedge y \varepsilon a) \Rightarrow \mathcal{D}xy))$$

$$\Rightarrow \exists_b (\forall_x x \varepsilon a \Rightarrow \exists_t ! \; t \varepsilon x \wedge t \varepsilon b).$$

Représentons comme suit l'axiome de finitude, que nous préciserons en disant que a est fini lorsque tout ensemble b de parties de a comprend un élément y minimal par inclusion, en ce sens qu'il n'existe aucun élément de b strictement inclus dans y (notons $x \subseteq a$ l'abréviation de $\forall_t \, t \varepsilon x \Rightarrow t \varepsilon a$, et $x \subset y$ l'abréviation de $x \subseteq y \wedge x \not\equiv y$) :

$$\forall_a \forall_b (\exists_x \; x \varepsilon b \wedge . \quad (\forall_x x \varepsilon b \Rightarrow x \subseteq a))$$

$$\Rightarrow (\exists_y \; y \varepsilon b \wedge \neg \exists_x x \varepsilon b \wedge x \subset y)) .$$

Enfin, pour préciser une formule exprimant qu'en ensemble a est dénombrable, c'est-à-dire équipotent à l'ensemble des entiers, il suffit de rappeler que " a est entier" s'exprime par la conjonction de "a est fini" et "a est un ordinal (ensemble transitif et totalement ordonné par appartenance)" ; enfin que "a et b sont équipotents" s'exprime par l'existence d'un ensemble c de couples (x,y) où x appartient à a et y appartient à b, avec la condition de bijectivité : pour tout x de a , il existe un y de b et un seul avec (x,y) appartenant à c, et inversement en échangeant a et b.

1.5. *Graphe codant un ensemble hérédénombrable ; ensemble hérédénombrable récursif.*

Soit a un ensemble hérédénombrable ; nous avons vu en 1.1 que la clôture transitive de a est finie ou dénombrable ; il en est de même de la clôture transitive du suivant de a, soit $a \cup \{a\}$, qui est encore hérédénombrable. Associons donc à l'ensemble a la relation binaire d'appartenance basée sur la cloture transitive du suivant de a. Si cette cloture est finie, autrement dit si a est héréfini, étendons-la à une base dénombrable en ajoutant une infinité dénombrable d'éléments, la relation prenant la valeur + pour tout couple dont l'un au moins des termes est un élément ajouté. Enfin transformons la relation par isomorphie, de façon à ce qu'elle soit basée sur l'ensemble des entiers naturels. Nous appellerons *graphe* de a l'une quelconque de ces relations, deux à deux isomorphes, basée sur les entiers naturels.

Par exemple, un graphe de l'ensemble vide est une relation prenant la valeur -seulement pour un couple de la forme (u,u) où u est un entier ; un graphe de l'ensemble $1 = \{0\}$ est une relation prenant la valeur - pour deux couples réflexifs (u,u),(v,v), ainsi que pour (v,u), l'ensemble 0 devant être appliqué sur u et 1 sur v.

Etant donné un graphe A, il existe un entier u et un seul tel que A(x,u) = - pour tout x vérifiant A(x,x) = - : cet u est le transformé de l'ensemble vide 0. Il existe un entier v et un seul tel que A(v,x) = - pour tout x vérifiant A(x,x) = - : ce v est le transformé de l'ensemble donné a, et nous l'appellerons le *sommet* du graphe. Enfin, étant donné deux éléments antiréflexifs u, v , vérifiant A(u,u) = A(v,v) = - , nous dirons que u est *un antécédent immédiat* de v lorsque A(u,v) = + , *antécédant* de v lorsqu'il existe une suite finie allant de u jusqu'à v avec valeur + pour A. Nous voyons qu'une relation est un graphe si et seulement si elle est fondée, extensionnelle et admet un sommet. Notons incidemment que l'on définira un hérédénombrable *récursif* a lorsqu'il existe au moins un graphe récursif de a, au sens usuel des relations récursives basées sur l'ensemble des entiers.

2. BONORDRE FORMALISABLE DES CONSTRUCTIBLES ; EN CALCUL LOGIQUE DU PREMIER ORDRE.

2.1. Rappelons l'existence de la formule unaire C(x) ou formule de constructibilité, telle que C(a) prend la valeur absolue + si et seulement si l'ensemble a est constructible.(valeur absolue : voir F 1975 p. 78).

Soit D(x,y) une formule binaire du seul prédicat binaire ε ; disons que D est Z-F-*réflexive pour les constructibles,* lorsque $\forall_x C(x) \Rightarrow D(x,x)$ se déduit des axiomes Z-F ; que D est Z-F-*transitive pour les constructibles,* lorsque $\forall_{x,y,z} (C(x) \wedge C(y) \wedge C(z) \wedge D(x,y) \wedge D(y,z)) \Rightarrow D(x,z)$ se déduit des axiomes Z-F ; que D est Z-F-*antisymétrique pour les constructibles,* lorsque $\forall_{x,y}(C(x) \wedge C(y) \wedge D(x,y) \wedge D(y,x)) \Rightarrow x \equiv y$ se déduit des axiomes Z-F ; que D est Z-F-*comparable pour les constructibles,* lorsque $\forall_{x,y} (C(x) \wedge C(y)) \Rightarrow (D(x,y) \vee D(y,x))$ se déduit de Z-F ; que D est Z-F-*totalement ordonnante pour les constructibles,* lorsqu'elle est à la fois Z-F-réflexive, transitive, antisymétrique et comparable pour les constructibles.

Disons que la formule D est Z-F-*bien-ordonnante pour les constructibles* lorsqu'elle est Z-F-totalement ordonnante pour les constructibles et que de plus la formule suivante se déduit des axiomes Z-F :

$$\forall_u (((\exists_x x \varepsilon u) \wedge (\forall_x x \varepsilon u \Rightarrow C(x))) \Rightarrow \exists_x (x \varepsilon u \wedge (\forall_y y \varepsilon u \Rightarrow D(x,y)))).$$

1. *Il existe une formule* D(x,y) *, binaire et du seul prédicat binaire* ε *, qui est* Z-F *-bien-ordonnante pour les constructibles.*

2. *Etant donné une formule* D *vérifiant le* (1) *ci-dessus, il existe un bonordre des constructibles, tel que, pour tous constructibles* a,b *la formule* D(a,b) *prend la valeur absolue + si et seulement si* a *est antérieur ou identique à* b *dans le bonordre.*

Ce bonordre sera dit *défini par la formule* D.

Prouvons d'abord que le (2) résulte du (1). Rappelons que chaque axiome Z-F prend la valeur absolue + (cela étant prouvable simplement en supposant notre métathéorie fondée sur les axiomes Z-F eux-mêmes ; par contre ce serait un nouvel axiome que d'affirmer que l'ensemble de tous les axiomes Z-F prend la valeur + , d'où résulterait que cet ensemble est consistant). Par hypothèse, notre formule de réflexivité $\forall_x C(x) \Rightarrow D(x,x)$ se déduit des axiomes Z-F, donc d'un nombre fini d'entre-eux d'après le théorème de compacité. Donc nous pouvons énoncér ces axiomes en nombre fini, prouver que chacun prend la valeur absolue +, et en conclure que notre formule de réflexivité prend la valeur +. Ainsi, pour tout ensemble constructible a, qui donne pour C(a) la valeur absolue +, la formule D(a,a) prend encore la valeur absolue +.

D'une façon analogue, pour tous ensembles constructibles a,b,c, nous prouvons que, si D(a,b) et D(b,c) prennent la valeur absolue +, il en est de même de D(a,c). Pour tous constructibles a,b, si D(a,b) et D(b,a) prennent la valeur absolue +, il en est de même de $a = b$, donc a et b sont identiques. Pour tous constructibles a,b, ou bien D(a,b) prend la valeur absolue +, ou bien D(b,a) prend la valeur absolue +. Enfin, pour tout ensemble u, non vide, dont les éléments sont constructibles, la formule $\exists_x (x \in u \wedge (\forall_y y \in u \Rightarrow D(x,y)))$ prend la valeur absolue +. Donc il existe un élément a de u, qui est antérieur à tout autre élément b de u, en ce sens que D(a,b) prend la valeur absolue + pour tout b de u.

Prouvons l'énoncé (1) en construisant la formule D comme la disjonction des quatre formules décrites ci-après.

1. Rappelons qu'il existe une formule Q(x,t) qui exprime que t est un ordinal et que x est constructible avec un rang de construction $\leq$ t. Alors la formule $Q(x,t) \wedge (\forall_{t'} Q(x,t') \Rightarrow (t \in t' \vee t = t'))$ exprime que t est un ordinal, rang de construction de x ; notons-la "t rang de x".

Le premier terme de notre disjonction D sera : $\exists_{t,u}$ t rang de x $\wedge$ u rang de y $\wedge$ $t \varepsilon u$; il exprime que le rang de x est strictement inférieur au rang de y.

2. Reprenons la formule "t rang de x" ;conjonctons-la avec la deuxième formule

: "t ordinal non nul, et h application de domaine t, à valeurs non vides et croissantes par inclusion, et z formule ordinalée formée d'un opérateur libre n-aire et d'un préfixe de n-1 quanteurs affectés d'ordinaux $\leq$ t, et x ensemble des éléments de la réunion du codomaine de h, donnant la valeur + à z". Conjonctons encore avec une formule exprimant que l'application h de domaine t transforme chaque ordinal $t' < t$ (ou élément de t) en l'ensemble des constructibles de rangs $\leq t'$;

Affectons la conjonction ainsi obtenue, de quanteurs $\exists$ portant sur h et z, de façon à obtenir une formule exprimant ce qui suit :"t rang de x, et il existe une formule ordinalée d'ordinaux $\leq$ t, dont l'opérateur libre est n-aire, formule prenant valeur + pour les éléments de x et eux seuls ". Notons-la brièvement : "t rang de x et n arité d'une formule représentant x".

Notons "n arité minimum pour x" la formule suivante : $\exists_t$ ((t rang de x et n arité d'une formule représentant x)$\wedge \forall_{n'}$ ((t rang de x et n' arité d'une formule représentant x) $\Rightarrow$ ($n \varepsilon n' \vee n = n'$))). Alors le deuxième terme de notre disjonction D sera : $\exists_t$ (t rang de x $\wedge$ t rang de y) $\wedge$ $\exists_{m,n}$ (m arité minimum pour x$\wedge$n arité minimum pour y$\wedge$ $m \varepsilon n$).Ce deuxième terme exprime que x et y sont de rangs égaux, mais que l'arité minimum des formules représentant x, ordinalées par des ordinaux $\leq$ rang de x, est strictement inférieure à l'arité minimum des formules représentant y, et ordinalées par des ordinaux $\leq$ rang de x = rang de y.

3. Reprenons la formule du 1 ci-dessus, exprimant que t est le rang de x ; et reprenons la formule du 2, exprimant que n est l'arité minimum pour x. Reprenons la conjonction du début du 2, affectée de quanteurs $\exists$ portant sur t, h, n. Cela exprime que " z est une formule ordinalée représentant x". Construisons une formule exprimant que z est le couple (p,r) où r est un opérateur libre n-aire (voir addendum) et p un préfixe de n-1 quanteurs affectés chacun d'un ordinal $\leq$ t. Autrement dit, pour chaque entier i ($1 \leq i \leq n-1$), le préfixe p comprend comme élément soit un triplet $(i, \forall, u)$ soit un triplet $(i, \exists, u)$, l'un excluant l'autre, avec $u \leq t$.

Notons $p < p'$, ou plus explicitement "le préfixe p est strictement antérieur au préfixe p' ", la formule décrite comme suit. Il existe un entier i ($1 \leq i \leq n-1$) tel que, pour tout j ($1 \leq j < i$), les préfixes p et p' ont le même triplet de premier terme j ; le triplet de premier terme i étant $(i, \forall, u)$ ou $(i, \exists, u)$ pour p, et $(i, \forall, u')$ ou $(i, \exists, u')$ pour p', avec $u < u'$; ou encore $(i, \forall, u)$ pour p et $(i, \exists, u)$ pour p' : cela revient à placer $\forall$ (identifié à 0) avant $\exists$ (identifié à 1) dans l'ordre lexicographique choisi.

Notons "p préfixe minimum pour x " la formule exprimant qu'il existe un t rang de x, un entier n arité minimum pour x, un p préfixe d'une formule représentant x, avec l'ordinal maximum t et avec n comme arité de son opérateur libre, et que, quel que soit p', si p' est le préfixe d'une formule représentant x avec l'ordinal maximum t et l'arité n, alors $p < p'$ au sens ci-dessus, ou $p = p'$.

Alors le troisième terme de notre disjonction D exprimera qu'il existe un t, rang commun de x et y, un entier n, arité minimum commune de x et y, et un p, préfixe minimum pour x, et un q, préfixe minimum pour y, avec $p < q$ au sens ci-dessus.

4. Reprenons la formule du 1, exprimant que t est le rang de x ; reprenons la formule du 2, exprimant que n est l'arité minimum pour x ; reprenons celle du 3, exprimant que p est le préfixe minimum pour x. Puis une formule exprimant que z est une formule ordinalée représentant x, et que z est le couple (p,r) où r est un opérateur libre n-aire, autrement dit une application prenant les valeurs + , - , et dont le domaine est l'ensemble des couples formés chacun d'une suite canonique de longueur n et d'une relation binaire basée sur le codomaine de cette suite.

Notons $f < f'$ la formule suivante, que nous lirons "la suite canonique f est strictement antérieure à la suite canonique f' " : il existe un entier i ($0 \leq i \leq n-1$) tel que, pour tout $j < i$, les suites f et f' ont les mêmes éléments de premier terme j, cependant que les éléments de premier terme i sont (i,u) pour f et (i,u') pour f', avec $u < u'$.

Notons $(f,a) < (f',a')$ la formule suivante, que nous lirons "le couple suite canonique f et relation binaire a basée sur le codomaine f, est strictement antérieur au couple analogue (f',a') " : ou bien $f < f'$ au sens précédent, ou bien $f = f'$ et il existe un couple d'entiers (u,v) où u et v appartiennent au codomaine de f, tel que a et a' prennent les mêmes valeurs (+ ou -) pour chaque couple dont le premier terme est $< u$, ou dont le premier terme est u et le deuxième est $< v$; cependant que pour (u,v), la relation a prend la valeur - et a' prend la valeur + (identifiées aux entiers 0 et 1).

Notons $r < r'$ la formule suivante, que nous lirons " l'opérateur libre r est strictement antérieur à l'opérateur libre r' " : il existe un couple (f,a), où f est une suite canonique n-aire et a une relation binaire basée sur le codomaine de f ; et pour chaque couple $(g,b) < (f,a)$ au sens précédent, les opérateurs r et r' ont les mêmes éléments de premier terme g et de deuxième terme b ; cependant que r comprend le triplet (f,a,-) et r' le triplet (f,a,+) (les valeurs - et + étant identifiées à 0 et 1).

Notons " r opérateur libre minimum pour x " la formule exprimant qu'il existe un t rang de x, un entier n arité minimum pour x, un préfixe p minimum pour x, enfin que tout opérateur libre r' d'arité n, pour lequel la formule ordinalée (p,r') représente x, vérifie r < r'au sens précédent ; ou vérifie r = r'. Alors le quatrième et dernier terme de la disjonction exprimera qu'il existe un ordinal t, rang commun à x et y, un entier n, arité minimum commune à x et y, un préfixe p minimum commun à x et y, et deux opérateurs libres n-aires r et s, tels que r < s au sens précédent, ou r = s , la formule ordinalée (p,r) représentant x et la formule ordinalée (p,s) représentant y.

De notre énoncé précédent, il résulte immédiatement que *l'axiome du choix se déduit de l'axiome de constructibilité*. De plus la formule bien ordonnante décrite ci-dessus sera utilisée pour prouver à l'aide de l'axiome de constructibilité, que deux relations dénombrables logiquement équivalentes pour le second ordre, sont isomorphes.

2.2. Il existe un bonordre de l'ensemble des hérédénombrables constructibles, et une formule D(x,y) du calcul logique usuel (premier ordre avec identité), binaire et comprenant un unique prédicat binaire ε de sorte que :

si nous substituons ε par l'appartenance basée sur les hérédénombrables constructibles, alors D *prend la valeur + si et seulement si l'ensemble hérédénombrable constructible substitué à* x, *est antérieur à celui substitué à* y, *dans le bonordre considéré.*

Notons d'abord que la formule usuelle " x est un ordinal " , autrement dit " x transitif et totalement ordonné par appartenance", prend la valeur + pour les ordinaux dénombrables et eux seuls, une fois le prédicat ε substitué par l'appartenance basée sur les hérédénombrables ou même seulement sur les hérédénombrables constructibles.

Reprenons la formule binaire $D(x,y)$ définie en 2.1, et qui bien-ordonne les constructibles. Rappelons qu'à chaque ensemble constructible x est associé son rang de construction α, et au moins une formule ordinalée d'ordinal maximum α, qui définit x ; donc une formule au sens usuel, et une suite finie d'ordinaux de maximum α, affectés chacun du quanteur $\forall$ ou $\exists$. Notre formule D ordonne les rangs de constructions par valeurs croissantes. Puis pour chacun d'eux, soit α, la formule D bien-ordonne les suites finies d'ordinaux dont le maximum est α. Enfin, pour chacune de ces suites, D ordonne totalement l'ensemble, fini, des fonctions qui leur associent 0 ou 1 (identifiées à $\forall$ ou $\exists$), et l'ensemble encore fini, des opérateurs libres ayant un prédicat binaire ε, et ayant une arité égale au nombre des termes de la suite des ordinaux, plus 1, de façon à ce que le premier indice reste libre, les autres étant liés par les quanteurs ordinalés.

D'après le théorème de la partie constructible, le rang de construction d'un ensemble hérédénombrable est au plus dénombrable. Il en résulte que la formule D bien-ordonne les hérédénombrables constructibles, une fois le prédicat ε substitué par l'appartenance basée sur les hérédénombrables constructibles : cela du fait que la bien-ordonnance est faite par rangs croissants, et que, d'après 1.3, les constructibles hérédénombrables sont exactement les constructibles dont les rangs de construction sont finis ou dénombrables.

3. TRADUCTION DE LA FORMULE BIEN ORDONNANTE DU PREMIER ORDRE, EN FORMULE DU SECOND ORDRE. (SANS PRÉDICAT D'APPARTENANCE).

3.1. Dans ce qui suit, nous utiliserons d'abord une formule du second ordre notée $I(\iota)$, du seul prédicat binaire libre ι, et qui exprimera que ι, ou plus exactement la relation substituée à ι, *est un* ω *-bonordre*. Autrement dit, ι est réflexif, transitif, antisymétrique ; deux éléments quelconques de la base sont comparables pour ι ; de plus ι est bien-ordonnant, c'est-à-dire que pour toute relation unaire, représentée par un prédicat ξ lié par le quanteur $\forall$, s'il existe un élément de la base vérifiant ξ , il en existe un qui soit minimum pour ι ; enfin tout élément autre que le minimum de ι admet pour ι un prédécesseur immédiat.

3.2. Reprenons le codage de chaque ensemble hérédénombrable a au moyen d'un graphe, qui est une relation binaire basée sur l'ensemble des entiers naturels, et isomorphe à la relation d'appartenance basée sur la cloture transitive du suivant de a (ou à l'extension à valeurs + d'une telle relation, lorsque a est héréfini) ; voir 1.5.

En rapport avec ce codage, construisons une formule $G(\iota , \xi)$ du second ordre, à deux prédicats binaires libres ι et ξ , telle que, si est substitué par la comparaison des entiers naturels, G *prend la valeur + si et seulement si ξ est substitué par un graphe ;* autrement dit G exprime que ξ est antireflexive, fondée, extensionnelle, et admet un sommet, au sens de 1.5. Ou encore G prend la valeur + pour tous couples sauf certains pris dans une partie finie de la base, la restriction à cette partie finie étant antiréflexive, fondée, extensionnelle et admettant un sommet.

3.3. Associons, à chaque identiteur $x \equiv y$, ou formule atomique d'identité du calcul logique du premier ordre, une formule du second ordre que nous noterons $\xi \equiv^{*} \eta$. Cette formule exprimera l'isomorphie entre la relation binaire substituée au prédicat binaire ξ (que nous considérerons comme le transformé de l'indice x), et la relation substituée au prédicat binaire η (transformé de l'indice y). Plus précisément, la formule exprimera l'existence d'une relation binaire qui permute la base et qui transforme la première relation en la deuxième. En particulier, si nous conjonctons $G(\iota , \xi), G(\iota , \eta)$ et $\xi \equiv^{*} \eta$, et si nous substituons au prédicat la comparaison des entiers naturels, alors la conjonction considérée exprime que ξ et η *sont deux graphes isomorphes, donc représentant un même ensemble hérédénombrable*.

3.4. Associons, à chaque opérateur $x \varepsilon y$, ou formule atomique d'appartenance du calcul du premier ordre, une formule du second ordre que nous noterons $\xi \varepsilon^* \eta$. Cette formule, à trois prédicats binaires libres ι , ξ et η , sera la conjonction de $G(\iota, \xi)$, $G(\iota, \eta)$ qui expriment que ξ et η sont deux graphes (une fois ι substitué par la comparaison des entiers) ; et d'une troisième formule exprimant que *le graphe substitué à ξ est obtenu en partant du graphe substitué à η , en prenant un élément* u *, antécédent immédiat du sommet du graphe η , puis en prenant ξ isomorphe à la restriction du graphe η aux éléments antécédents de* u *;* si de plus, ces derniers éléments sont en nombre fini, le graphe ξ est complété par des valeurs +, puisqu'il est basé sur l'ensemble des entiers.

Notons que, dans la construction des formules G et ε^*, le prédicat est notamment utilisé pour exprimer la finitude de certains ensembles. Ainsi, dans G, pour exprimer que ξ est soit antiréflexive, soit de valeurs + sauf sur un ensemble fini où elle est antiréflexive, fondée et extensionnelle ; la finitude pourra s'exprimer en identifiant l'ensemble fini avec les entiers antérieurs, pour ι , à l'un d'eux. De même, dans la formule $\xi \varepsilon^* \eta$, la condition d'antécédence d'un élément u à un élément v, pour le graphe η , s'exprimera par l'existence d'un entier r et d'une permutation de la base qui transforme chaque entier $i \leq r$ en un élément u_i , avec $u_0 = u$, $u_r = v$ et $\eta(u_i, u_{i+1})$ + pour chaque $i < r$; la consécutivité $j = i+1$ s'exprimant de façon évidente à l'aide du prédicat ι .

3.5. A l'aide de la formule D du premier ordre, du 2.1 ci-dessus, et des formules I, G, $\equiv^*$ et ε^*précédentes, et en utilisant l'axiome de constructibilité des hérédénombrables, nous allons obtenir une formule du second ordre à trois prédicats binaires libres ι, ξ , η , soit $D^*(\iota, \xi, \eta)$, vérifiant ce qui suit :

si ι est substitué par la comparaison des entiers naturels, D^* vaut + si et seulement si ξ et η sont substitués par deux graphes représentant deux ensembles hérédénombrables, et si l'ensemble représenté par ξ est antérieur à l'ensemble représenté par η, dans le bonordre défini par la formule D de 2.1. sur l'ensemble des hérédénombrables.

A chaque indice x, libre ou lié, de la formule D de 2.1, associons un prédicat binaire ξ. A chaque identiteur $x \equiv y$ figurant comme sous-formule dans D, associons une formule $\xi \equiv^* \eta$ construite comme en 3.3 ci-dessus, les prédicats binaires ξ, η étant transformés des indices x,y . A chaque opérateur $x\ \varepsilon\ y$ figurant comme sous-formule dans D, associons une formule $\xi\ \varepsilon^*\ \eta$ comme en 3.4. Conservons les connections qui figurent dans D ; enfin à chaque quanteur $\underset{x}{\forall}$ figurant dans D, associons le quanteur $\forall$ portant sur un prédicat binaire ξ, transformé de l'indice x, et relativisé aux graphes ; plus précisément, remplaçons $\underset{x}{\forall}$ par $\underset{\xi}{\forall}$ $G(\iota, \xi) \Rightarrow$ où G est la formule construite en 3.2 ci-dessus ; de même, remplaçons $\underset{x}{\exists}$ par $\underset{\xi}{\exists}$ $G(\iota, \xi) \wedge$. Nous obtenons au lieu de D, une formule du second ordre à trois prédicats binaires libres ι, ξ, η. Conjonctons-la avec les trois formules $I(\iota)$, $G(\iota, \xi)$ et $G(\iota, \eta)$ de 3.1 et 3.2, qui exigent, pour prendre la valeur +, que ι soit substitué par la comparaison des entiers naturels (ou une relation isomorphe), et que ξ et η soient substitués par des graphes représentant des hérédénombrables : nous obtenons alors la formule D^* de l'énoncé .

3.6 Dans ce qui suit, nous noterons $H(x, \iota, \xi)$ une formule du second ordre comprenant un seul indice libre x et deux prédicats binaires libres ι et ξ. Cette formule, une fois ι substitué par la comparaison des entiers naturels, vaudra + si et seulement si, x étant substitué par un élément de la base, qui se trouve être un entier naturel du fait de la comparaison ι, le prédicat ξ est substitué par l'un quelconque des graphes (isomorphes entre eux) qui représentent l'entier x. Pour préciser la construction de la formule H, rappelons que le graphe de l'entier x est, à l'isomorphie près, la relation binaire d'appartenance, ou équivalemment l'ordre strict ($<$) entre les entiers 0,1,..., x-1, x, complété par la valeur + pour tout couple d'entiers dont l'un au moins est > x. D'après ce qui précède, la formule $\underset{x}{\exists} H(x, \iota, \xi)$, où ι est substitué par la comparaison des entiers, vaut + si et seulement si ξ *est un graphe d'un entier.*

3.7. Soit n un entier positif, fixe dans ce qui suit, et que nous appellerons l'arité. Convenons de définir le n-uple d'entiers $(a_0,\ldots,a_{n-1})$ comme étant l'ensemble des paires $\{0, \{\{a_0\}\}\}$ $,\{1, \{\{a_1\}\}\}$ $,\ldots,$ $\{n-1\ , \{\{a_{n-1}\}\}\}$. Aucune confusion n'est possible entre un rang $i (0 \leqslant i < n)$, qui est un entier et le bi-singleton $\{\{a_i\}\}$, puisque le seul entier qui soit un singleton est $1 = \{0\}$, et ce n'est pas un bi-singleton. Sur le modèle de la formule H, construisons une formule $H_n(x^0,x^1,\ldots,x^{n-1}, \iota\ , \xi\ )$, du second ordre, comprenant n indices libres $x^i (0 \leqslant i < n)$, et deux prédicats binaires libres ι et ξ . Cette formule, une fois ι substitué par la comparaison des entiers naturels, vaudra + si et seulement si, chaque x^i étant substitué par un élément de la base, qui se trouve être un entier naturel a_i du fait de la comparaison ι, le prédicat ξ est substitué par l'un quelconque des graphes (isomorphes entre eux) qui représentent le n-uple $(a_0,\ldots,a_{n-1})$, défini comme ci-dessus par des bi-singletons. D'après ce qui précède, la formule $\exists_{0,\ldots,n-1}$ $H_n(x^0,\ldots,x^{n-1}, \iota\ , \xi\ )$, où ι est substitué par la comparaison des entiers, vaut + si et seulement si seulement si ξ *est un graphe d'un n-uple d'entiers.*

Il en résulte que la formule suivante, où ι est substitué de même, que nous noterons $G_n(\ \iota\ , \alpha)$ vaut + si et seulement si α *est un graphe d'une relation* n-*aire basée sur les entiers naturels :*

$\forall_\xi(\ \xi\ \varepsilon^*\alpha \Rightarrow \exists_{0,\ldots,n-1} H_n(x^0,\ldots,x^{n-1}, \iota, \xi\ )$. Conjonctons cette formule avec la formule suivante ; $\exists_\xi$ $H_n(x^c,\ldots,x^{n-1}, \iota\ , \xi\ ) \wedge \xi\ \varepsilon^*\alpha$; alors ι étant substitué par la comparaison des entiers, les indices libres $x^0,\ldots,x^{n-1}$ étant substitués par les entiers $a_0,\ldots,a_{n-1}$, la conjonction obtenue vaudra + si et seulement si α *est substitué par le graphe d'une relation* n-*aire valant + pour le* n-*uple* $(a_0,\ldots,a_{n-1})$.

3.8 Construisons maintenant une formule qui exprimera, ι étant substitué par la comparaison, que *les relations binaires substituées aux prédicats* α *et* β *sont des graphes représentant deux relations* n-*aires isomorphes.*

Cette formule, que nous noterons Is(ι , α, β) exprimera l'existence d'une permutation notée $\overline{\omega}$ (plus exactement, substituant un prédicat binaire $\overline{\omega}$), telle que, pour tous $x^0,\ldots,x^{n-1}$, nous ayons $\underset{\xi}{\exists}\, H_n(x^0,\ldots,x^{n-1}, \iota, \xi)$ si et seulement si'il existe $y^0,\ldots,y^{n-1}$ et une relation binaire η telle que: $\overline{\omega}(x^0,y^0) \wedge \ldots \wedge \overline{\omega}(x^{n-1},y^{n-1}) \wedge H_n(y^0,\ldots,y^{n-1}, \iota, \eta) \wedge \eta\, \varepsilon^* \beta$.

Cette isomorphie entre relations n-aires se traduit, sur les graphes, par une équivalence plus large que l'isomorphie entre α et β : rappelons en effet que l'isomorphie des graphes correspond à l'identité des ensembles hérédénombrables qu'ils représentent, donc ici à l'identité des relations. Nous voyons ainsi que, même si nous avons n=2, nous ne pouvons pas identifier une relation binaire basée sur les entiers, avec son graphe représentatif ; le travail précédent est donc à faire même dans ce cas.

4. PREUVE FINALE.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver que deux relations n-aires dénombrables logiquement équivalentes pour le second ordre, sont isomorphes.

Etant donné une relation n-aire R, associons-lui un ω-bonordre I de la base $|R|$; à chacun des bonordres I, correspond une interprétation des éléments de la base $|R|$ comme entiers naturels, donc une interprétation de R comme relation basée sur l'ensemble de ces entiers. Ainsi, à chaque ω-bonordre I, correspond un graphe et un seul (à l'isomorphie près) qui représente une isomorphe de R sur les entiers naturels. Choisissons I de façon à obtenir le graphe minimum dans le bonordre des graphes défini par la formule D^*de 3.5. Appelons A le graphe correspondant (défini à l'isomorphie près). Nous voyons qu'en notant ρ le prédicat n-aire substituable par R, et notant α le prédicat binaire substituable par A, et naturellement ι celui substituable par I, la formule du second ordre suivante, des prédicats libres ι , ρ , α , une fois ρ substitué par R, prendra la valeur + si et seulement si ι est substitué par le ω-bonordre I qui rend minimum (dans le bonordre défini par D^*) le graphe représentant R , rapportée aux entiers

définis par l'ordre I ; et si de plus α est substitué par ce graphe minimum A :
$I(\iota) \wedge (\underset{0,\ldots,n-1}{\forall} \rho x^{0} \ldots x^{n-1} \Leftrightarrow (\underset{\xi}{\exists} H_{n}(x^{0},\ldots,x^{n-1}, \iota , \xi) \wedge \xi \, \varepsilon^{*} \alpha)) \wedge G_{n} (\iota , \alpha)$
$\wedge \underset{\beta}{\forall} Is(\iota , \alpha , \beta) \Rightarrow D^{*} (\iota , \alpha , \beta)$ (rappelons que $G_{n}(\iota , \alpha)$ exprime que α est le graphe d'une relation n-aire (voir 3.7).

Soit maintenant S une relation n-aire dénombrable et non isomorphe à R. Comme nous l'avons fait pour R, associons à S le ω-bonordre que nous noterons encore I, qui rend minimum (dans le bonordre défini par D^{*}) le graphe représentant S, rapportée aux entiers définis par l'ordre I. Alors en confondant l'ordre I associé à R et celui associé à S (qui sont tous deux isomorphes à l'ordinal ω), les relations R et S ainsi redéfinies sur les entiers, sont évidemment distinctes, puisque non isomorphes. Fixons les idées en désignant par $(a_{0},\ldots,a_{n-1})$ un n-uple d'entiers qui donne la valeur + à R et la valeur - à S. Soit b le maximum des entiers $a_{i} (0 \leq i < n)$. Notons σx (x égale zéro) l'abréviation de $\underset{y}{\forall} \iota xy$; notons γxy (y consécutif à x) l'abréviation de $\iota xy \wedge x \neq y \wedge \underset{x}{\forall} (\iota zx \vee \iota yz)$. Alors pour obtenir une formule du second ordre et du seul prédicat libre ρ, valant + pour R et - pour S, il suffit de reprendre la formule ci-dessus, de la conjoncter avec la formule suivante :

$$\underset{0,\ldots,b}{\exists} (\sigma x^{0} \wedge \gamma x^{0} x^{1} \wedge \ldots \wedge \gamma x^{b-1} x^{b} \quad \rho x^{a_{0}} \ldots x^{a_{n-1}} \quad .$$

puis de faire précéder cette conjonction du quanteur $\exists$ portant sur les deux prédicats ι et α.

BIBLIOGRAPHIE.

Paul COHEN, *The independence of the continuum hypothesis*, 1963, Proceedings Nat. Acad. Sc., t. 50, p. 1143-1148, et t; 51, p. 105-110.

Set theory and the continuum hypothesis, 1966, 154, p., New-York ed. Benjamin.

Roland FRAÏSSÉ, *Une nouvelle classification des systèmes de relations*, 1950, Comptes rendus, t. 230, p. 1022-1024.

Course of mathematical logic, 1974, Vol. 2, Model theory, 192, p., trad. David Louvish, Dordrecht, ed. Reidel.

Cours de logique mathématique, t; 3, Récursivité et constructibilité, 1975, 138, p., Paris. ed. Gauthier-Villars.

Azriel LEVY, *Definability in set theory*, 1970, Logic and Foundations of set theory, Amsterdam, ed. North-Holland.

Wiktor MAREK, *Consistance d'une hypothèse de Fraîssé sur la définissabilité dans un langage du second ordre*, 1973, Comptes rendus, t. 276 (A), p. 1147-1150, et 1169-1172.

P. ZBIERSKI, *Models for higher order arithmetics*, 1971, Bull. Acad. Pol. Sc. (math. astr. phys.); t. 19, p. 557-562.

ADDENDUM. - Pour chaque suite $u_0,\dots,u_{n-1}$, nous appelons sa *transformée canonique* la suite, isomorphe, $v_0 = 0$, $v_1 = 0$ si $u_1 = u_0$, ou 1 si $u_1 \neq u_0$; et en général $v_i = v_j$ si $u_i = u_j$, ou sinon v_i = plus petit entier distinct des $v_j (j < i)$. Un *opérateur libre* n-aire, usuellement noté par une formule libre (sans quanteur) à n variables et un prédicat binaire, est alors défini comme une fonction associant la valeur + ou - à chaque système forme d'une suite canonique $v_0,\dots,v_{n-1}$ et d'une relation binaire basée sur l'ensemble des valeurs $v_i (i = 0,\dots,n-1)$. Une formule est alors définie sous forme prénexe, par un opérateur libre et une suite de quanteurs. Pour une formule ordinalée, chaque quanteur est relativisé aux constructibles de rangs inférieurs à un certain ordinal. Enfin la valeur absolue est, intuitivement, définie par l'appartenance sur la totalité des ensembles.