

KHALIL NOUREDDINE

WILLIAM HABRE

Sous-algèbres localement convexes de $C(T)$

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1977, tome 14, fascicule 1
, p. 27-54

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1977__14_1_27_0

© Université de Lyon, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOUS-ALGÈBRES LOCALEMENT CONVEXES DE $C(T)$

par Khalil NOUREDDINE et William HABRE

INTRODUCTION . Dans ce travail on reprend les notions de recouvrements simples et dominants ([11]) d'un espace complètement régulier séparé T , et on procède à une classification de ces recouvrements. A tout recouvrement simple ρ de T on associe une sous-algèbre (notée $C^\rho(T)$) de l'algèbre (notée $C(T)$) des applications continues de T dans le corps \mathbb{R} des nombres réels. $C^\rho(T)$ est l'algèbre des applications de T dans \mathbb{R} , qui sont bornées sur les éléments de ρ . Dans un premier paragraphe on étudie les algèbres $C^\rho(T)$; et dans le second on cherche les relations qui existent entre ces algèbres et l'algèbre $C(T)$, où on retrouve par des démonstrations nouvelles les deux théorèmes classiques de Nachbin-Shirota. Dans le paragraphe 3 on étudie sur $C^\rho(T)$ une topologie localement convexe intermédiaire entre la topologie de la convergence compacte et celle de la convergence uniforme sur les éléments de ρ . Cette topologie a des propriétés analogues à celle de la topologie γ (étudiée dans ([11]) où à celles de la topologie sous-stricte β_0 de [16].

NOTATIONS ET PRELIMINAIRES. Tout espace topologique considéré dans ce travail est supposé séparé et complètement régulier. Pour un tel espace T on pose les notations suivantes :

$C(T)$ (resp. $C^\infty(T)$) est l'algèbre des applications continues (resp. continues et bornées) de T dans le corps \mathbb{R} des nombres réels.

Pour tout élément $f \in C^\infty(T)$, $\|f\| = \text{Sup} \{|f(t)|, t \in T\}$. L'application $f \longrightarrow \|f\|$ est la norme de la convergence uniforme sur $C^\infty(T)$.

$B^\infty = \{f \in C^\infty(T) ; \|f\| \leq 1\}$ est la boule unité fermée de $C(T)$.

$C_c(T)$ (resp. $C_c^\infty(T)$) est l'espace $C(T)$ (resp. $C^\infty(T)$) muni de la topologie de la convergence compacte .

Pour toute partie $A \subset T$, \bar{A} est l'adhérence de A dans T .

Pour toute partie $A \subset T$, ϕ_A est la fonction caractéristique de A (i.e, $\phi_A(t) = 1$ si $t \in A$ et $\phi_A(t) = 0$ si $t \in T - A$).

Un K_σ dans T est une partie de T qui est une réunion d'une suite de compacts dans T .

Pour toute partie A de T et toute application ϕ de T dans \mathbb{R} , $\|\phi\|_A = \text{Sup} \{|\phi(t)|, t \in A\}$ et $\|\phi\| = \|\phi\|_T$.

Une partie A de T est dite bornée ([3], [5]) si, pour toute application $f \in C(T)$, $\|f\|_A$ est fini . L'espace T est dit de type μ ([3]) si tout borné dans T est relativement compact.

βT est le compactifié de Stone-Čech de T ([2], [7]).

νT est le replété de T ([2], [5], [7]). L'espace νT est de type μ .

Pour toute application f de T dans \mathbb{R} , $S_0(f)$ est le support strict de f (i.e, l'ensemble des $t \in T$ tels que $f(t) \neq 0$) et $S(f)$ est le support de f (i.e, l'adhérence de $S_0(f)$ dans T).

En ce qui concerne les espaces localement convexes (elc) nous suivons les ouvrages classiques et, à titre d'exemples [8] et [13] . Pour les notions de b -espaces, espaces b -tonnelés, et autres, nous renvoyons à [10] .

1. LES ALGÈBRES $C^0(T)$.

1.1. DEFINITIONS ET GENERALITES.

Rappelons d'abord les définitions suivantes ([11])•

(1.1.1) Définitions. Soit T un espace complètement régulier séparé.

(a) On appelle recouvrement simple de T , tout recouvrement de T formé d'une suite croissante $\rho = (T_n)_{n \geq 1}$ de fermés de T . Une partie A de T est dite dominée par ρ s'il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que $A \subset T_{n_0}$.

(b) On appelle recouvrement dominant (ou k -dominant) de T , tout recouvrement simple ρ de T qui domine les parties compactes de T . Une partie A de T est dite dominée (ou k -dominée) si A est dominée par tout recouvrement dominant.

Un recouvrement simple ou dominant $\rho = (T_n)_{n \geq 1}$ est dit stationnaire s'il existe un entier n_0 tel que $T_{n_0} = T$.

La proposition suivante montre qu'en général, un recouvrement simple n'est pas nécessairement dominant :

(1.1.2) Proposition. Pour que tout recouvrement simple de T soit dominant, il faut et il suffit que tout compact de T soit fini.

Preuve. La condition est trivialement suffisante; et elle est nécessaire d'après la proposition (2.2) de [11] (voir aussi [6]).

Si $\rho = (T_n)_{n \geq 1}$ est un recouvrement simple de T , on désigne par $C^0(T)$ l'algèbre des applications continues de T dans \mathbb{R} qui sont bornées sur T_n pour tout $n \geq 1$. $C^0(T)$ est une sous-algèbre de $C(T)$; elle lui est égale si et seulement si les T_n sont des bornés T (voir notations et préliminaires). L'algèbre $C^\infty(T)$ est définie de la même manière si l'on pose $\infty = (T_n)_{n \geq 1}$, le recouvrement simple de T tel que, pour tout $n \geq 1$, $T_n = T$ (c'est le recouvrement simple "trivial" de T). Si $\rho = (T_n)$ et $\rho' = (T'_n)$ sont deux recouvrements simples de T , on rappelle que ρ est dit moins fin que ρ' (ou ρ' est plus fin que ρ) si pour tout $n \geq 1$ il existe un $m \geq 1$ tel que $T'_n \subset T_m$. Il est clair que la relation " ρ est moins fin que ρ' " est une relation de préordre sur l'ensemble des recouvrements simples de T , qui admet le recouvrement trivial ∞ comme plus petit élément. Pour cette relation, deux recouvrements simples de T admettent une borne supérieure et une borne inférieure.

Si le recouvrement simple $\rho = (T_n)$ est moins fin que le recouvrement simple $\rho' = (T'_n)$ alors on a $C^0(T) \subset C^0(T')$. Il en résulte que l'ensemble des algèbres $C^0(T)$ est un ensemble filtrant croissant et décroissant

pour la relation d'inclusion; et $C^\infty(T)$ est contenue dans $C^\rho(T)$, pour tout recouvrement simple ρ .

Pour toute application $f \in C(T)$, on pose $\rho(f) = (T_n(f))_{n \geq 1}$, où pour tout $n \geq 1$, $T_n(f) = \{t \in T; |f(t)| \leq n\}$. $\rho(f)$ est un recouvrement dominant de T , et est dit recouvrement associé à l'application f . On vérifie immédiatement que l'ensemble des algèbres $C^{\rho(f)}(T)$, lorsque f décrit $C(T)$, est filtrant croissant et a pour réunion l'algèbre $C(T)$.

1.2. TOPOLOGIES SUR $C^\rho(T)$.

Soit $\rho = (T_n)$ un recouvrement simple de T et soit $C^\rho(T)$ la sous-algèbre de $C(T)$ associée à ρ . Une première topologie qui s'impose sur $C^\rho(T)$ est la topologie de la ρ -convergence (ou topologie de la convergence uniforme sur les éléments T_n de ρ). C'est une topologie localement convexe métrisable compatible avec la structure algébrique de $C^\rho(T)$. Elle est définie par la suite des semi-normes $f \longrightarrow \|f\|_{T_n} = \sup \{|f(t)|, t \in T_n\}$ et est notée t_ρ . On note $C^\rho_0(T)$ (resp. $C^\infty_0(T)$) l'algèbre $C^\rho(T)$ (resp. $C^\infty(T)$) munie de la topologie t_ρ .

La proposition suivante précise dans quel cas la topologie t_ρ est normable :

(1.2.1) Proposition. *L'espace $C^\rho_0(T)$ est normable si et seulement si le recouvrement simple ρ est stationnaire.*

Preuve. Il est immédiat que la condition est suffisante, car si ρ est stationnaire alors $C^\rho(T) = C^\infty(T)$ et t_ρ est définie par la norme de la convergence uniforme. Inversement, si ρ n'est pas stationnaire, alors par complète régularité de T on vérifie que tout voisinage de zéro pour t_ρ contient des droites; par suite il n'existe pas de normes continues sur $C^\rho_0(T)$. La proposition est donc démontrée.

(1.2.2) Proposition. *Tout borné de $C^\rho_0(T)$ est contenu dans l'adhérence d'un borné de $C^\infty_0(T)$. En particulier $C^\infty(T)$ est partout dense dans $C^\rho(T)$.*

Preuve. Soit B un borné dans $C_\rho^0(T)$. Pour tout entier n et tout élément $f \in B$, posons $f_n = \text{Sup}(-n, \inf(f, n))$. Il est clair que la suite (f_n) converge vers f dans $C_\rho^0(T)$. D'autre part, soit $B' = \{f_n, f \in B \text{ et } n \text{ parcourant les entiers } n \geq 1\}$; B' est un borné de $C_\rho^\infty(T)$ et son adhérence dans $C_\rho^0(T)$ contient B .

Pour un recouvrement simple quelconque ρ l'espace $C_\rho^0(T)$ n'est pas en général complet. Ce qui nous permet de poser la définition suivante :

(1.2.3) Définition. Soit $\rho = (T_n)$ un recouvrement simple de T . On dit que le recouvrement ρ est complétant si l'espace $C_\rho^0(T)$ est complet. Le recouvrement ρ est dit régulier si pour tout $n \geq 1$, T_n est contenu dans l'intérieur $\overset{\circ}{T}_{n+1}$ de T_{n+1} .

La proposition suivante explique la relation entre recouvrements dominants, complétants et réguliers :

(1.2.4) Proposition. (a) Tout recouvrement régulier est complétant. En particulier, pour tout élément $f \in C(T)$, le recouvrement $\rho(f)$ est complétant.
(b) Tout recouvrement complétant est dominant.

Preuve. (a). Soit $\rho = (T_n)$ un recouvrement régulier de T . Si (g_n) est une suite de Cauchy dans $C_\rho^0(T)$; alors (g_n) converge simplement vers une application g de T dans \mathbb{R} , continue et bornée sur chaque T_n . Mais la suite $(\overset{\circ}{T}_n)$, où $\overset{\circ}{T}_n$ est l'intérieur de T_n , recouvre T et l'application g est donc partout continue. Alors $g \in C^0(T)$ et (g_n) converge vers g dans $C_\rho^0(T)$. La deuxième assertion de (a) est évidente car pour tout $f \in C(T)$, le recouvrement $\rho(f)$ associé à f est régulier.

(b). Cette assertion résulte du lemme plus général suivant :

(1.2.5) Lemme. Si $\rho = (T_n)$ est un recouvrement complétant de T , alors toute partie bornée de T est dominée par ρ .

Preuve du lemme. Soit B une partie bornée de T et soit $V^0(B, 1) = \{f \in C^0(T) ; \|f\|_B \leq 1\}$. Il est clair que l'ensemble $V^0(B, 1)$ est un disque absorbant et simplement fermé dans $C^0(T)$; c'est donc un tonneau de $C^0(T)$, et comme cet espace est un espace de Fréchet, alors $V^0(B, 1)$ est un voisinage de zéro. Il existe, par suite, un entier $n_0 \geq 1$ et un nombre réel $r > 0$ tels que l'ensemble $V^0(T_{n_0}, r) = \{f \in C^0(T) ; \|f\|_{T_{n_0}} \leq r\}$ soit contenu dans $V^0(B, 1)$. On en déduit, par complète régularité^{n_0} de T , que B est contenu dans T_{n_0} ; et le lemme est démontré.

(1.2.6) Remarque. Il est à noter que la réciproque de l'assertion (a) de la proposition précédente n'est pas vraie en général: en effet, soient E un espace de Fréchet de dimension infinie et $(V_n)_{n \geq 1}$ un système fondamental décroissant de voisinages de zéro dans E . Soit aussi $T = E'_c$ le dual de E muni de la topologie de la convergence uniforme sur les disques compacts de E . On sait d'après [5] que E'_c est un elc de Kelley et est un k -espace (i.e., toute application de E'_c dans tout autre espace topologique, continue sur les compacts est partout continue). D'autre part si, pour tout entier $n \geq 1$, on pose $T_n = V_n^0$ (polaire de V_n dans E'); alors T_n , qui est un disque équicontinu et faiblement fermé dans E' , est compact dans $E'_c = T$. De plus, tout compact de T est contenu dans l'un des T_n . Ce qui fait que la suite $\rho = (T_n)$ est un recouvrement complétant de T . Ce recouvrement n'est pas régulier, car si l'un des éléments de la suite (T_n) avait un intérieur non vide, alors l'espace $E'_c = T$ serait de dimension finie; ce qui est absurde.

(1.2.7). Remarque. Notons encore que la réciproque de l'assertion (b) de la proposition (1.2.4) n'est pas vraie à son tour: en effet, soient E un espace normé tonnelé non complet et E'_c son dual muni de la topologie faible $\sigma(E', E)$. Pour tout entier $n \geq 1$, posons $T_n = n B^0$, où B^0 désigne le polaire dans E' de la boule unité B de E . Il est clair que T_n est compact dans E'_c et que la suite (T_n) en constitue un recouvrement dominant. Ce recouvrement n'est pas complétant, car autrement l'espace E serait complet.

La deuxième topologie sur $C^0(T)$, qui s'impose à notre étude, est la topologie de la convergence compacte. Notons par t_c la topologie de

la convergence compacte sur $C(T)$ et par t_C^ρ sa restriction à $C^\rho(T)$, pour tout recouvrement simple ρ de T . On désigne par $C_C^\rho(T)$ l'algèbre $C^\rho(T)$ muni de la topologie t_C^ρ . Pour tout recouvrement dominant ρ de T , la topologie t_C^ρ est moins fine que la topologie t_ρ . L'identité de ces deux topologies n'a lieu que dans des cas très particuliers :

(1.2.8) Proposition. Soit $\rho = (T_n)$ un recouvrement simple de T . Les deux topologies t_ρ et t_C^ρ sont identiques si et seulement si le recouvrement ρ est dominant et T_n est compact pour tout $n \geq 1$.

Preuve. La condition est évidemment suffisante. Elle est nécessaire d'après le lemme 2 de [12].

Il est facile de voir, comme dans la proposition (1.2.2), que tout borné de $C_C(T)$ est contenu dans l'adhérence d'un borné de $C_C^\infty(T)$. Il en résulte en particulier que, pour tout recouvrement simple ρ , tout borné de $C_C^\rho(T)$ est contenu dans l'adhérence d'un borné de $C_C^\infty(T)$ et par suite $C_C^\infty(T)$ est partout dense dans $C_C^\rho(T)$.

Un espace complètement régulier séparé T est dit un $k_{\mathbb{R}}$ -espace si toute application de T dans \mathbb{R} est continue dès qu'elle est continue sur les compacts de T . On sait d'après [19] que, pour que T soit un $k_{\mathbb{R}}$ -espace, il faut et il suffit que $C_C(T)$ soit complet, ou quasi-complet. La proposition suivante donne des conditions sur T et ρ pour que $C_C^\rho(T)$ soit complet :

(1.2.9) Proposition. Soit $\rho = (T_n)$ un recouvrement simple de T . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) L'espace $C_C^\rho(T)$ est complet
- (b) L'espace $C_C^\rho(T)$ est quasi-complet.
- (c) L'espace T est un $k_{\mathbb{R}}$ -espace et pour tout entier $n \geq 1$, T_n est une partie bornée de T .

Preuve. Il suffit de démontrer que (b) implique (c). Soit, en effet,

f une application de T dans \mathbb{R} continue sur tout compact de T .
 Supposons, dans une première étape, que f soit bornée sur T . A une constante multiplicative près, on peut supposer aussi que $\|f\| \leq 1$.
 Pour tout compact K de T , désignons par g_K la restriction de f à K . Par complète régularité de T il existe une fonction f_K , appartenant à la boule unité B^∞ de $C^\infty(T)$, telle que la restriction de f_K à K soit égale à g_K . La suite généralisée (f_K) , K décrivant l'ensemble des compacts de T , est une suite généralisée de Cauchy dans B^∞ qui est complet. Donc cette suite converge vers un élément de B^∞ , qui ne peut être que l'application f . Par suite f est continue.

Pour le cas général où f n'est pas bornée, on pose $f_n = \text{Sup}(-n, \text{Inf}(f, n))$ pour tout entier $n \geq 1$. Les applications f_n sont bornées sur T , et sont continues sur tout compact de T . D'après ce qui précède, les f_n sont partout continues et appartiennent à $C^\infty(T)$ qui est un sous-ensemble de $C^p(T)$. Alors, la suite (f_n) , qui est une suite de Cauchy dans $C_c^p(T)$, converge vers une application appartenant à $C^p(T)$. Cette application est nécessairement égale à f . Ce qui montre, en même temps, que T est un $k_{\mathbb{R}}$ -espace et $C(T) = C^p(T)$, égalité qui montre que les T_n sont des bornés dans T .

(1.2.10) Corollaire. Si le recouvrement $\rho = (T_n)$ est dominant, alors l'espace $C_c^p(T)$ est complet (ou quasi-complet) si et seulement si T est un $k_{\mathbb{R}}$ -espace et ρ est une base de bornés dans T .

Preuve. D'après la proposition précédente et le lemme (1.2.5), il suffit de démontrer que le recouvrement ρ est complétant. Or il est facile de voir que, dans un $k_{\mathbb{R}}$ -espace, tout recouvrement dominant est complétant.

1.3 - CARACTERES DE $C^p(T)$, ESPACES ρT .

Par analogie avec l'étude classique de l'algèbre $C^\infty(T)$ (ou de l'algèbre $C(T)$), passons à l'examen des caractères de l'algèbre $C^p(T)$ associée à un recouvrement simple $\rho = (T_n)$ de T :

(1.3.1) Définition . On appelle caractère de l'algèbre $C^0(T)$ toute forme linéaire multiplicative et unitaire sur $C^0(T)$.

Les propriétés immédiates des caractères de $C^0(T)$ sont résumées dans la proposition suivante :

(1.3.2) Proposition . Soit u un caractère de $C^0(T)$.

- (a) Pour toute application $f \in C^0(T)$, il existe un entier n_0 tel que $u(f) \in \overline{f(T_{n_0})}$.
- (b) Pour toute $f \in C^0(T)$ on a $|u(f)| = u(|f|)$, en particulier $f \geq 0 \implies u(f) \geq 0$.
- (c) Pour toute suite finie f_1, f_2, \dots, f_n d'éléments de $C^0(T)$ et tout $\epsilon > 0$, il existe un point $t \in T$ tel que $|u(f_k) - f_k(t)| \leq \epsilon$ pour $k = 1, 2, \dots, n$.

Preuve . Elle est analogue à celle de la proposition (3.2.1) de [2]:

- (a) supposons d'abord que $u(f) = 0$. Si, pour tout $n \geq 1$, $u(f) = 0 \notin \overline{f(T_n)}$, alors il existe $r_n > 0$ tel que $|f(t)| \geq r_n$ pour tout $t \in T_n$; il en résulte que f est inversible dans $C^0(T)$; et l'égalité $f(1/f) = 1$ implique $1 = u(1) = u(f) \cdot u(1/f)$, d'où $u(f) \neq 0$, ce qui est absurde . Dans le cas où $u(f)$ est quelconque, on pose $g = f - u(f) \cdot 1$. La fonction g vérifie $u(g) = 0$ et par suite, il existe n_0 tel que $u(g) = 0 \in \overline{g(T_{n_0})}$; d'où $u(f) \in \overline{f(T_{n_0})}$.
- (b) Remarquons que, d'après (a), $f \geq 0 \implies u(f) \geq 0$. Donc $u(|f|) \geq 0$ et, puisque $f^2 = |f|^2$, on a $(u(|f|))^2 = u(f^2) = u(|f|^2)$; d'où $u(|f|) = |u(f)|$.
- (c) L'application $g = \sum_{1 \leq k \leq n} |f_k - u(f_k) \cdot 1|$ vérifie, grâce à (b), $u(g) = 0$, donc $0 \in \overline{g(T_{n_0})}$, pour un entier n_0 convenable. Ainsi il existe $t \in T_{n_0}$ tel que $g(t) \leq \epsilon$ et à fortiori on a $|u(f_k) - f_k(t)| \leq \epsilon$ pour tout k .

Dans le cas de l'algèbre $C^\infty(T)$, tout caractère est continu pour la norme de la convergence uniforme. Le compactifié de Stone-Čech βT

de T , est défini comme étant l'ensemble des caractères de $C^\infty(T)$, muni de la topologie faible. C'est à dire βT est un sous-ensemble faiblement fermé de la boule unité du dual de $C^\infty(T)$; et par suite il est compact et contient T comme sous-ensemble partout dense. βT est aussi le complété de T pour la structure uniforme la moins fine rendant les fonctions $f \in C^\infty(T)$ uniformément continues.

Mais dans le cas d'un recouvrement simple ρ quelconque, nous ignorons si tout caractère de $C^\rho(T)$ est continu pour la topologie de la ρ -convergence t_ρ . C'est pour cela, nous distinguons entre l'ensemble de tous les caractères de $C^\rho(T)$ et celui des caractères t_ρ -continus : désignons par u_ρ la structure uniforme la moins fine sur T rendant uniformément continues toutes les fonctions $f \in C^\rho(T)$. L'espace uniforme (T, u_ρ) est un sous-espace de $\mathbb{R}^{C^\rho(T)}$ qui est complet. Le complété de (T, u_ρ) est égal à l'adhérence de T dans $\mathbb{R}^{C^\rho(T)}$ muni de la structure uniforme induite. Désignons par \hat{T}^ρ ce complété et, pour toute fonction $f \in C^\rho(T)$, désignons par \hat{f}^ρ son unique prolongement à \hat{T}^ρ . Il est clair que \hat{T}^ρ est l'ensemble des caractères de l'algèbre $C^\rho(T)$, muni de la structure uniforme induite ; et la topologie sous-jacente, qui est la topologie la moins fine sur \hat{T}^ρ rendant continues les fonctions \hat{f}^ρ , induit sur T sa topologie initiale. D'autre part, notons par ρT l'ensemble des caractères continus de $C^\rho(T)$, et munissons le de la topologie induite par celle de \hat{T}^ρ . Alors, l'espace ρT contient T comme sous-espace topologique partout dense. Pour toute fonction $f \in C^\rho(T)$, on désigne par f^ρ le prolongement de f à ρT ; f^ρ est la restriction de \hat{f}^ρ à ρT .

(1.2.3) Proposition. Soit $\rho = (T_n)$ un recouvrement simple de T .

- (a) Tout élément u de ρT est complètement déterminé par sa restriction à $C^\infty(T)$.
- (b) Pour tout entier $n \geq 1$, l'ensemble $\overline{T_n}^\rho$, adhérence de T_n dans \hat{T}^ρ , est une partie compacte de ρT , et on a $\rho T = \bigcup_n \overline{T_n}^\rho$.
- (c) L'espace ρT s'identifie à un sous-espace topologique de βT ; et pour tout $n \geq 1$, $\overline{T_n}^\rho = \overline{T_n}^\beta$, où $\overline{T_n}^\beta$ désigne l'adhérence de T_n dans βT .

Preuve. L'assertion (a) est évidente car $C^\infty(T)$ est partout dense dans $C_\rho^\rho(T)$; démontrons (b) : il est clair d'abord que pour tout $f \in C^\rho(T)$ et tout $u \in \hat{T}^\rho$, on a $u(f) = \hat{f}^\rho(u)$. Ce qui fait que, si $u \in \overline{T}_n^\rho$, on a : $|u(f)| = |\hat{f}^\rho(u)| \leq \|\hat{f}^\rho\|_{\overline{T}_n^\rho} = \|f\|_{T_n}$ pour tout $f \in C^\rho(T)$. Donc u est continu sur $C_\rho^\rho(T)$. Et puisque T_n est précompact pour la structure uniforme u_ρ , il est évident que \overline{T}_n^ρ est compact. D'autre part si $v \in \rho T$ et $v \notin \overline{T}_n^\rho$ pour tout entier $n \geq 1$, alors il existe une application continue f_n^ρ de ρT dans l'intervalle $[0, 1]$ telle que $f_n^\rho(v) = 1$ et $f_n^\rho \equiv 0$ sur \overline{T}_n^ρ . Désignons par f_n la restriction de f_n^ρ à T . La suite (f_n) converge vers zéro dans $C_\rho^\rho(T)$ et pourtant $v(f_n) = f_n^\rho(v) = 1$, pour tout $n \geq 1$; ce qui est absurde et achève la démonstration de (b). Prouvons (c) : d'après (a) l'ensemble ρT s'identifie à un sous-ensemble de βT . D'autre part, il est facile de voir que l'on peut identifier aussi les trois algèbres $C^\infty(T)$, $C^\infty(\rho T)$ et $C(\beta T)$; pour tout $f \in C^\infty(T)$, le prolongement f^ρ , de f à ρT , n'est autre que la restriction du prolongement f^β de f à βT . Comme la topologie de ρT (resp. βT) est la topologie la moins fine sur ρT (resp. βT) rendant continues les $f^\rho \in C^\infty(\rho T)$ (resp. $f^\beta \in C(\beta T)$), alors ρT s'identifie, topologiquement aussi, à un sous-espace de βT . Le reste de l'assertion (c) est évident.

(1.2.4) Corollaire. *L'espace ρT est un espace replet et contient νT (replété de T) comme sous-espace partout dense.*

Preuve. D'après l'assertion (b) de la proposition précédente, l'espace ρT est un K_ρ ; ce qui suffit pour que ρT soit replet ([2], [7]). D'autre part, on sait que νT est le plus petit sous-espace replet de βT , contenant T ; ce qui montre que $\nu T \subset \rho T$.

Désignons par $\bar{\rho} = (\overline{T}_n^\rho)$, où \overline{T}_n^ρ est l'adhérence de T_n dans ρT , qui est aussi l'adhérence de T_n dans \hat{T}^ρ . La suite $\bar{\rho}$ est un recouvrement simple de ρT et, sur l'algèbre $C(\rho T)$, on peut considérer la topologie $(\tau_{\bar{\rho}})$ de la $\bar{\rho}$ -convergence ; on désigne par $C_{\bar{\rho}}(\rho T)$ l'espace $C(\rho T)$ muni de cette topologie. Il est clair que l'on a :

(1.2.5) Théorème . L'application de prolongement $f \longrightarrow f^\rho$ de $C^\rho(T)$ dans $C(\rho T)$ et l'application de restriction $g \longrightarrow g|_T$ de $C(\rho T)$ dans $C^\rho(T)$ sont deux isomorphismes, algébriques et topologiques, réciproques l'un de l'autre des algèbres $C^\rho_\rho(T)$ et $C_{\bar{\rho}}(\rho T)$.

Comme conséquence de ce théorème on a :

(1.2.6) Corollaire . Si le recouvrement $\rho = (T_n)$ est complétant, alors ρT est un k -espace hémicompact.

Preuve . D'après le théorème précédent, les deux espaces $C^\rho_\rho(T)$ et $C_{\bar{\rho}}(\rho T)$ sont isomorphes algébriquement et topologiquement. Il en résulte que, si le recouvrement ρ est complétant, alors l'espace $C_{\bar{\rho}}(\rho T)$ est un espace de Fréchet, et par suite le recouvrement $\bar{\rho}$ est complétant. Donc, d'après la proposition (1.2.4), $\bar{\rho}$ est dominant. Ce qui fait que ρT est hémicompact et $C_{\bar{\rho}}(\rho T) = C_c(\rho T)$. D'autre part, la proposition (1.2.9) montre que ρT est un $k_{\mathbb{R}}$ -espace, et il est bien connu qu'un $k_{\mathbb{R}}$ -espace hémicompact est un k -espace (on rappelle qu'un espace topologique χ est dit un k -espace si toute partie de χ est fermée dès que son intersection avec tout compact de χ est fermée).

Si le recouvrement $\rho = \rho(f)$, où $f \in C(T)$, alors on peut améliorer sensiblement le corollaire précédent :

(1.2.7) Théorème . Si $\rho = \rho(f)$, $f \in C(T)$, alors ρT est un espace localement compact σ -compact.

Preuve . $\rho = (T_n)$, où $T_n = \{t \in T ; |f(t)| \leq n\}$. Soit f^ρ le prolongement de f à ρT et, pour tout $n \geq 1$, posons $U_n^\rho = \{u \in \rho T ; |f^\rho(u)| < n\}$ et $U_n = U_n^\rho \cap T$. Puisque U_n^ρ est un ouvert dans ρT , alors on a $U_n^\rho = U_n^\rho \cap \bar{T}^\rho \subset \overline{U_n^\rho \cap T}^\rho = \bar{U}_n^\rho \subset \bar{T}_n^\rho$. Ce qui fait que les U_n^ρ sont relativement compacts dans ρT et, comme ils recouvrent ρT , on en déduit le théorème.

(1.2.8) Remarque. On peut vérifier facilement que, lorsque $\rho = \rho(f)$, alors l'espace ρT n'est autre que l'espace $\cup_f T$ de ([7], page 125, 8B. 2).

Un autre résultat important, qui va nous être très utile pour la suite et qui se trouve d'ailleurs dans ([7], page 125), est le théorème suivant :

(1.2.9) Théorème. L'espace $\cup T$ (replété de T) est l'intersection des espaces ρT , lorsque ρ décrit l'ensemble des $\rho(f)$ pour $f \in C(T)$.

Preuve. Il suffit de démontrer que si $u \in \beta T - \cup T$, alors il existe un recouvrement $\rho = \rho(f)$, $f \in C(T)$, tel que $u \notin \rho T$. Or, on sait d'après le théorème (5.5.7) de [2] que, pour un tel u , il existe $g \in C^\infty(T)$ tel que $g > 0$ sur T et $u(g) = 0$. Soit $\rho = \rho(\frac{1}{g}) = (T_n(\frac{1}{g}))$, où $T_n(\frac{1}{g}) = \{t ; \frac{1}{n} \leq g(t)\}$. Démontrons que $u \notin \rho T$: en effet si $u \in \rho T$, alors il existe un entier n_0 tel que $u \in T_{n_0}^\rho(\frac{1}{g}) = T_{n_0}^\beta(\frac{1}{g})$; ce qui implique que $u(g) \geq \frac{1}{n_0}$. D'où la contradiction et par suite la preuve du théorème.

Nous avons signalé plus haut que nous ignorons si tout caractère de l'algèbre $C_\rho^\circ(T)$ est t_ρ -continu ? - La réponse à cette question est affirmative lorsque le recouvrement ρ est complétant ; mais avant de démontrer ce résultat, démontrons d'abord la proposition suivante :

(1.2.10) Proposition. Soit $\rho = (T_n)$ un recouvrement simple de T . Pour que le recouvrement ρ soit complétant, il faut et il suffit que toute application f de T dans \mathbb{R} , bornée et u_ρ -uniformément continue sur chaque T_n , soit continue sur T .

Preuve. La condition est suffisante : en effet, soit $(f_k)_{k \geq 1}$ une suite de Cauchy dans $C_\rho^\circ(T)$. La suite (f_k) converge simplement vers une application $f : T \rightarrow \mathbb{R}$. De plus la convergence est uniforme sur chaque T_n ; donc f est bornée et u_ρ -uniformément continue sur T_n pour tout n . D'où la continuité de f d'après l'hypothèse, et ainsi $C_\rho^\circ(T)$ est complet.

Réciproquement, soit f une application de T dans \mathbb{R} , bornée et u_ρ -uniformément continue sur T_n , pour tout $n \geq 1$. Désignons par g_n la restriction de f à T_n ; g_n admet un prolongement continu unique, \bar{g}_n , sur T_n^ρ lequel est compact dans ρT . Mais par complète régularité de ρT , il existe $f_n \in C^\infty(\rho T)$ tel que la restriction de f_n à T_n^ρ soit égale à \bar{g}_n . Il en résulte que la suite (f_n) est une suite de Cauchy dans $C_\rho^\infty(T)$; et par suite elle converge, dans $C_\rho^\infty(T)$, vers une fonction qui ne peut être que f . La condition est donc nécessaire, et la proposition est démontrée.

(1.2.11) Théorème. Si le recouvrement $\rho = (T_n)$ est complétant, alors tout caractère de l'algèbre $C^\rho(T)$ est t_ρ -continu.

Preuve. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un caractère u de l'algèbre $C^\rho(T)$, qui ne soit pas t_ρ -continu. Puisque l'espace $C_\rho^\infty(T)$ est un espace métrisable, donc bornologique, il existe une partie bornée B dans $C_\rho^\infty(T)$ telle que u ne soit pas borné sur B . Donc, pour tout entier $n \geq 1$, il existe un élément $f_n \in B$ tel que $|u(f_n)| \geq 2^n$.

Posons $h_n = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{|f_k|}{2^k}$, pour $n \geq 1$. La suite (h_n) converge uniformément sur chaque T_n vers la fonction $f = \sum_{k \geq 1} \frac{|f_k|}{2^k}$. Il en résulte que f est bornée et u_ρ -uniformément continue sur T_n pour tout $n \geq 1$; donc f est un élément de $C^\rho(T)$ d'après la proposition précédente. Or, pour tout entier $n \geq 1$, on a $u(f) \geq u(h_n) \geq n$; ce qui est absurde, et le théorème est démontré.

2. $C(T)$ et $C^\rho(T)$.

2.1 - PREMIER THEOREME DE NACHBIN-SHIROTA.

Dans ce qui suit nous étudions la relation entre l'espace $C_c(T)$ et les sous-espaces $C_c^\rho(T)$, lorsque le recouvrement ρ décrit l'ensemble des recouvrements $\rho(f)$, où $f \in C(T)$.

D'abord, nous avons le résultat suivant :

(2.1.1.) Theorème . L'espace $C_c(T)$ est la limite inductive des espaces $C_c^\rho(T)$, ρ décrivant l'ensemble des $\rho(f)$, $f \in C(T)$.

Preuve. Nous avons déjà remarqué que l'espace $C(T)$ est égal à la réunion des $C_c^\rho(T)$ pour $\rho = \rho(f)$ et $f \in C(T)$, et que l'ensemble de ces sous-espaces est filtrant croissant pour la relation d'inclusion. Il est clair aussi que la topologie de la convergence compacte t_c sur $C(T)$ est moins fine que la topologie t' (limite inductive des topologies $t_c^{\rho(f)}$). Reste à démontrer que t_c est plus fine que t' . Or $C^\infty(T)$ est partout dense dans $C_c(T)$ et dans chacune des algèbres $C_c^\rho(T)$. Il en résulte que $C^\infty(T)$ est, aussi, partout dense dans $C_t(T)$; et que les deux topologies t_c et t' coïncident sur cet ensemble. D'autre part, soit V' un voisinage fermé de zéro dans $C_t(T)$; et soit V un voisinage ouvert de zéro dans $C_c(T)$ tel que $V \cap C^\infty(T) \subset V' \cap C^\infty(T)$. Comme t' est plus fine que t_c , V est aussi un ouvert pour t' . Par conséquent on a

$$V = V \cap \overline{C^\infty(T)}^{t'} \subset \overline{V \cap C^\infty(T)}^{t'} \subset \overline{V' \cap C^\infty(T)}^{t'} \subset V' .$$

Les adhérences sont dans $C_t(T)$. Donc V' est un voisinage de zéro dans $C_c(T)$ et le théorème est démontré.

Le théorème précédent nous permet de trouver une nouvelle démonstration du théorème classique suivant : L'espace $C_c(T)$ est tonnelé si et seulement si T est un μ -espace ([3], [9], [17]). Dans cette démonstration nous utiliserons les mesures de Radon sur T . Pour cette notion de mesures nous nous référons à [1] . Si μ est une mesure de Radon sur T , nous notons par $|\mu|$ la variation totale de μ et nous appelons support de μ le plus petit fermé $S(\mu)$ de T tel que $|\mu|(T - S(\mu)) = 0$. On sait qu'il existe une isométrie linéaire entre l'espace des mesures de Radon sur T et l'espace des formes linéaires sur $C^\infty(T)$, continues sur la boule unité B^∞ pour la topologie de la convergence compacte ; chacun de ces espaces étant supposé muni de sa norme habituelle. Donc toute mesure de Radon μ sur T définit sur B^∞ une mesure de Radon que nous notons μ^B . On vérifie facilement que le support de μ est la trace sur T du support de μ^B .

Le lemme suivant ([11]) nous permet de donner une caractérisation plus utile du support d'une mesure de Radon sur T :

(2.1.2) Lemme. Soit μ une mesure de Radon sur T . Si U est un ouvert de T , alors $|\mu|(U) = \text{Sup} \left\{ \int f d|\mu|, f \in C(T), 0 \leq f \leq 1 \text{ et } S(f) \subset U \right\}$.

Partant de ce lemme, on démontre aisément que le support de μ est le plus petit fermé $S(\mu)$ dans T tel que $\int f d\mu = 0$ chaque fois que l'on a $f \in C^\infty(T)$ et $\|f\|_{S(\mu)} = 0$.

Plus généralement si H est un ensemble de mesures de Radon sur T , on appelle support de H le plus petit fermé $S(H)$ de T tel que $|\mu|(T - S(H)) = 0$, pour toutes les mesures $\mu \in H$. $S(H)$ est l'adhérence de la réunion des $S(\mu)$, $\mu \in H$; c'est aussi le plus petit fermé de T tel que $\int f d\mu = 0$, pour toute mesure $\mu \in H$, chaque fois que $f \in C^\infty(T)$ et $\|f\|_{S(H)} = 0$.

Revenons maintenant à l'espace $C_c(T)$: d'abord toute forme linéaire continue sur $C_c(T)$ peut être identifiée à une mesure de Radon μ sur T et à la mesure de Radon μ^β sur βT , définie par μ . Dans ce cas $S(\mu) = S(\mu^\beta)$; et $S(\mu)$ est donc compact. Par conséquent, on peut identifier le dual de $C_c(T)$ à l'espace des mesures de Radon sur βT , à support compact contenu dans T .

(2.1.3) Théorème (Nachbin). Si H est une partie faiblement bornée du dual de $C_c(T)$, alors $S(H)$ est une partie bornée de T .

Preuve. Il s'agit de prouver que $S(H)$ est dominé par tout $\rho(f)$, $f \in C(T)$. Or d'après le théorème (2.1.1), l'espace $C_c(T)$ est la limite inductive des sous-espaces $C_c^\rho(T)$, $\rho = \rho(f)$ et $f \in C(T)$. Comme $C_c^\rho(T)$ est partout dense dans $C_c(T)$, alors H est une partie faiblement bornée du dual de $C_c^\rho(T)$, pour $\rho = \rho(f)$. H est aussi une partie faiblement bornée du dual de $C_c^\rho(T)$, car pour $\rho = \rho(f)$, la topologie t_c^ρ est moins fine que t_ρ .

Mais l'espace $C_\rho^0(T)$, pour $\rho = \rho(f)$, est un espace de Fréchet ; et on sait que toute partie faiblement bornée dans le dual d'un tel espace, est équicontinue. Il en résulte qu'il existe un entier n_0 et un nombre réel $r > 0$ tels que $|\mu(g)| \leq r \|g\|_{T_{n_0}}$ pour toute mesure $\mu \in H$ et toute fonction $g \in C^0(T)$. Donc pour toute mesure $\mu \in H$ et toute fonction $g \in C^\infty(T)$, on a $\|g\|_{T_{n_0}} = 0 \implies \mu(g) = 0$. Par suite $S(H) \subset T_{n_0} = T_{n_0}(f) = \{t \in T ; |f(t)| \leq n_0\}$; et le théorème est démontré.

Pour toute partie V de $C_c(T)$, désignons par V° son polaire dans le dual de $C_c(T)$; et pour toute partie A de T et tout réel $r > 0$, désignons par $V(A, r) = \{f \in C(T) ; \|f\|_A \leq r\}$.

Le lemme suivant est l'assertion (b) du théorème 7 de [3].

(2.1.4) Lemme. Soit V un tonneau de $C_c(T)$ contenant la boule unité B^∞ de $C^\infty(T)$. Alors, on a $V(S(V^\circ), 1) \subset V$.

Avant de prouver le premier théorème de Nachbin-Shirota, remarquons que, si V est un tonneau quelconque de $C_c(T)$, alors $V \cap C^\infty(T)$ est un tonneau dans l'espace de Banach $C^\infty(T)$. $V \cap C^\infty(T)$ est donc un voisinage de zéro pour la norme de la convergence uniforme, et par suite il existe $r > 0$ tel que $B^\infty \subset rV$.

(2.1.5) Théorème (NACHBIN-SHIROTA). L'espace $C_c(T)$ est tonnelé si et seulement si T est un μ -espace.

Preuve. La condition est suffisante : en effet, soit V un tonneau de $C_c(T)$. En multipliant, au besoin, par un réel positif, on peut supposer que V contient la boule unité B^∞ . Soient V° le polaire de V dans le dual de $C_c(T)$, et $S(V^\circ)$ le support de V° . D'après le théorème (2.1.3), $S(V^\circ)$ est un borné de T lequel est un μ -espace. Donc $S(V^\circ)$ est compact ; et pour conclure que V est un voisinage de zéro dans $C_c(T)$, il suffit d'appliquer le lemme (2.1.4).

Réciproquement, supposons que $C_c(T)$ soit tonnelé et démontrons que

T est un μ -espace : en effet, soit A un borné de T ; alors l'ensemble $V(A, 1) = \{f \in C(T) : \|f\|_A \leq 1\}$ est évidemment un tonneau de $C_c(T)$. C'est donc un voisinage de zéro, et par suite il existe un compact $K \subset T$ et un nombre réel $r > 0$, tels que $V(K, r) \subset V(A, 1)$. Par complète régularité de T , on a alors $A \subset K$; et le théorème est démontré.

2.2 - DEUXIEME THEOREME DE NACHBIN-SHIROTA.

Le deuxième théorème classique de Nachbin-Shirota assure que l'espace $C_c(T)$ est bornologique si et seulement si l'espace T est replet. Ce théorème important, nous allons le redémontrer en nous servant de la technique utilisée pour démontrer les théorèmes (2.1.3) et (2.1.5) ; rappelons d'abord, qu'à tout elc séparé E on associe un espace bornologique E_b , dit espace bornologique associé à E . Un système fondamental de voisinages de zéro dans E_b est donné par les disques bornivores dans E . L'espace E est bornologique si et seulement si $E = E_b$.

Le théorème suivant donne l'espace bornologique associé à l'espace $C_c(T)$:

(2.2.1) Théorème. *L'espace bornologique associé à l'espace $C_c(T)$ est la limite inductive des espaces $C_c^\rho(T)$, lorsque ρ décrit l'ensemble des recouvrements dominants de T .*

Preuve. Soit, sur $C(T)$, t_b la topologie localement convexe, limite inductive des topologies t_ρ . Puisque les recouvrements ρ sont dominants ; il est clair que la topologie t_c , topologie de la convergence compacte sur $C(T)$, est moins fine que t_b . Sachant, d'autre part, que l'espace $C(T)$ muni de la topologie t_b est bornologique (c'est une limite inductive d' elc métrisables, donc bornologiques); alors, pour démontrer l'identité des deux topologies t_c et t_b , il suffit de prouver que les parties t_c -bornées de $C(T)$ sont aussi t_b -bornées ; en effet, soit B un borné dans $C_c(T)$ et soit $\rho(B) = (T_n(B))$, où pour tout $n \geq 1$, $T_n(B) = \{t \in T ; |f(t)| \leq n, \text{ pour toute fonction } f \in B\}$. Il est clair que la suite $\rho = \rho(B)$ est un recouvrement dominant de T , et B est borné dans $C_c^\rho(T)$. Par suite B est t_b -borné, et le théorème est démontré.

(2.2.2) Théorème (Nachbin-Shirota) *L'espace $C_c(T)$ est bornologique si et seulement si l'espace T est replet.*

Preuve. La condition est nécessaire : il s'agit de montrer que le repleté $\cup T$ de T est égal à T . Soit, en effet, u un élément de $\cup T$. D'après le corollaire (1.2.4), le caractère u appartient à ρT pour tout recouvrement simple ρ de T , et est continu sur $C_\rho^p(T)$. Mais l'espace $C_c(T)$, étant bornologique, est alors la limite inductive des espaces $C_\rho^p(T)$; ρ décrivant l'ensemble des recouvrements dominants de T . Il en résulte que u est t_c -continu sur $C(T)$, et par suite il appartient à T .

La condition est suffisante : notons d'abord que tout espace topologique replet est un μ -espace. Donc, d'après le théorème (2.1.5), l'hypothèse sur T implique que $C_c(T)$ est tonnelé. Sachant, d'autre part, que la topologie d'un elc tonnelé E est la topologie localement convexe la plus fine, compatible avec la dualité (E, E') E' étant le dual de E ; alors pour démontrer que la topologie t_c est identique à t_b , il suffit de prouver que t_c donne le même dual que la topologie t_b (preuve du théorème (2.2.1)). Soit, en effet, u une forme linéaire t_b -continue sur $C(T)$. Il est clair que u définit sur βT une mesure de Radon, μ^β ; et que, pour tout recouvrement dominant ρ , u est t_ρ -continue sur $C^\rho(T)$ et par suite est t_ρ -continue sur $C(\rho T)$. Ce qui entraîne que, pour tout recouvrement dominant ρ , le $S(\mu^\beta)$, qui est compact dans βT , est en fait un compact de ρT et est dominé par le recouvrement $\bar{\rho} = (\bar{T}_n^\rho)$. Comme l'espace T est replet, alors d'après le théorème (1.2.9), on a $T = \cup T = \cap \rho T$, $\rho = \rho(f)$ et $f \in C(T)$. Il en résulte que $S(\mu^\beta) \subset T$. par conséquent u est t_c -continue, et le théorème est démontré.

J. Schmets et M. De Wilde ([14]) ont élargi le théorème précédent, en démontrant que T est replet si et seulement si $C_c(T)$ est ultra bornologique. Ce résultat de Schmets et De Wilde, nous allons le retrouver en appliquant la même technique précédente.

(2.2.3) Théorème. L'espace $C_c(\cup T)$ est la limite inductive des espaces $C_\rho^p(T)$, lorsque ρ décrit l'ensemble des $\rho(f)$ pour $f \in C(T)$.

Preuve. Désignons par t_c^u la topologie de $C_c(\cup T)$ et par t_{ub} la topologie limite inductive des topologies t_ρ , $\rho = \rho(f)$ et $f \in C(T)$. Puisque,

pour toute fonction $f \in C(T)$, le recouvrement $\rho = \rho(f)$ est complétant, alors la suite $\bar{\rho} = (T_n^\rho(f))$ est aussi un recouvrement complétant de l'espace ρT , lequel contient $\cup T$. Donc tout compact de $\cup T$ est dominé par $\bar{\rho}$; et par suite la topologie t_C^U est moins fine que la topologie t_{ub} . D'autre part, l'espace $C_C(\cup T)$ étant tonnelé, il est clair alors que, pour démontrer que les deux topologies t_C^U et t_{ub} sont identiques, il suffit de prouver que toute forme linéaire t_{ub} -continue sur $C(\cup T)$ est aussi t_C^U -continue. Ce qui est visible d'après la démonstration du théorème (2.2.2)

(2.2.4) Corollaire (Schmets - De Wilde). L'espace $C_C(\cup T)$ est ultrabornologique.

Preuve. Pour tout recouvrement $\rho = \rho(f)$, l'espace $C_\rho^0(T)$ est un espace de Fréchet (donc ultrabornologique). Comme toute limite inductive séparée d'espaces ultrabornologiques est aussi ultrabornologique; le corollaire est donc démontré.

Nous terminons ce paragraphe en démontrant deux résultats concernant les espaces $C_C^\rho(T)$ et $C_\rho^0(T)$.

(2.2.5) Proposition. Pour un recouvrement dominant $\rho = (T_n)$ de T , les assertions suivantes sont équivalentes :

- (a) La topologie t_ρ est identique à la topologie t_C^ρ .
- (b) L'espace $C_C^\rho(T)$ est tonnelé.
- (c) L'espace $C_C^\rho(T)$ est ultrabornologique.
- (d) Pour tout $n \geq 1$, T_n est une partie compacte de T .

Preuve. (a) implique (d) d'après la proposition (1.2.8), et si l'on a (d), alors l'espace T est un espace hémicompact (donc replet) et $C^\rho(T) = C(T)$; par suite (d) \iff (c) d'après le corollaire (2.2.4). Reste à démontrer que (b) \iff (a) : or par hypothèse, la topologie t_ρ est plus fine que la topologie t_C^ρ . D'autre part, les ensembles $V^\rho(T_n, \frac{1}{n}) = \{f \in C^\rho(T); \|f\|_{T_n} \leq \frac{1}{n}\}$ pour $n \geq 1$, forment un système fondamental de voisinages de zéro dans $C_C^\rho(T)$;

et ce sont évidemment des tonneaux dans l'espace $C_c^\rho(T)$ qui est tonnelé .
Ce qui montre que t_ρ est moins fine que t_c^ρ et achève la démonstration de la proposition .

(2.2.6) Proposition . Soit $\rho = (T_n)$ un recouvrement simple de T .

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (a) L'espace $C_\rho^\rho(T)$ est ultrabornologique.
- (b) L'espace $C_\rho^\rho(T)$ est tonnelé.
- (c) La suite $\bar{\rho} = (\bar{T}_n^\rho)$ est un recouvrement dominant de ρT .

Preuve . (a) \implies (b) est évident ; démontrons (b) \implies (c) : en effet, soit K un compact de ρT et soit $V^\rho(K, 1) = \{f \in C(\rho T) ; \|f\|_K \leq 1\}$. L'ensemble $V^\rho(K, 1)$ est un tonneau de $C_\rho(\rho T)$, lequel est tonnelé . Donc $V^\rho(K, 1)$ est un voisinage de zéro dans $C_\rho(\rho T)$, et par suite il existe un entier $n_0 \geq 1$ et un nombre réel $r > 0$ tels que $V^\rho(K, 1) \subset V^\rho(\bar{T}_{n_0}^\rho, r) = \{f \in C(\rho T) ; \|f\|_{\bar{T}_{n_0}^\rho} \leq r\}$. On en déduit, par complète régularité de ρT , que $K \subset \bar{T}_{n_0}^\rho$.

(c) \implies (a): si l'assertion (c) est vraie, alors l'espace T est hémicompact et par suite replet. Il en résulte, compte tenu du corollaire (2.2.4), que l'espace $C_\rho(\rho T) = C_c(\rho T)$ est ultrabornologique. Il en est de même de $C_\rho^\rho(T)$ qui lui est égal .

3 - TOPOLOGIE STRICTE SUR $C^\rho(T)$.

Dans cette partie de notre travail, nous étudions, sur l'algèbre $C^\rho(T)$, une topologie localement convexe dont la définition et les propriétés sont analogues à la définition et les propriétés de la topologie sous-stricte β_ρ ([16]) .

3.1 - LA TOPOLOGIE STRICTE. γ_ρ :

Soient toujours T un espace complètement régulier séparé et $\rho = (T_n)_{n \geq 1}$ un recouvrement dominant de T . On désigne par ϕ_ρ l'ensemble

des applications bornées ϕ de T dans \mathbb{R} , à support dominé par ρ et telles que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subset T$ tel que $\|\phi\|_{T-K} \leq \varepsilon$. Pour toute application $\phi \in \Phi_\rho$ on note $\|\cdot\|_\phi$ la semi-norme sur $C^\rho(T)$ définie par $\|f\|_\phi = \|f\phi\|$ pour toute fonction $f \in C^\rho(T)$. Les semi-normes $\|\cdot\|_\phi$, $\phi \in \Phi_\rho$, déterminent sur $C^\rho(T)$ (resp. $C^\infty(T)$) une topologie localement convexe notée γ_ρ (resp. γ_ρ^∞). Un système fondamental de voisinages de zéro pour γ_ρ (resp. γ_ρ^∞) est donné par les ensembles

$$V_\phi^\rho = \{f \in C^\rho(T) ; \|f\|_\phi = \|f\phi\| \leq 1\} \quad (\text{resp. } V_\phi^\infty = V_\phi \cap C^\infty(T)).$$

On désigne par $C_{\gamma_\rho}^\rho(T)$ (resp. $C_{\gamma_\rho^\infty}^\infty(T)$) l'espace $C^\rho(T)$ (resp. $C^\infty(T)$) muni de la topologie γ_ρ (resp. γ_ρ^∞).

Rappelons que si l'on désigne par Φ l'intersection des Φ_ρ , lorsque ρ décrit l'ensemble des recouvrements dominants de T , alors la topologie définie sur $C(T)$ (resp. $C^\infty(T)$) par les semi-normes $\|\cdot\|_\phi$, $\phi \in \Phi$, est la topologie γ (resp. γ^∞) introduite et étudiée dans [11]

(3.1.1) Proposition. (a) La topologie γ , qui est plus fine que la topologie de la convergence compacte, induit sur $C^\rho(T)$ une topologie moins fine que la topologie γ_ρ .

(b) La topologie γ_ρ^∞ est plus fine que la topologie γ^∞ , et est moins que la topologie sous-stricte β_ρ ([16]).

Preuve. (a) résulte trivialement du fait que $\Phi \subset \Phi_\rho$. L'assertion (b) résulte de (a) et du fait que la topologie β_ρ est définie par les semi-normes $\|\cdot\|_\phi$, où ϕ décrit l'ensemble de toutes les applications bornées de T dans \mathbb{R} telles que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subset T$ tel que $\|\phi\|_{T-K} \leq \varepsilon$; sans aucune restriction sur le support de ϕ .

(3.1.2) Proposition. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (a) La topologie γ_ρ est identique à la topologie de la convergence compacte.
- (a') La topologie γ_ρ^∞ est identique à la topologie de la convergence compacte.

(b) Tout K_σ dominé par ρ est relativement compact.

Preuve. Même démonstration que la proposition (5.2) de [11]

(3.1.3) Proposition. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (a) La topologie induite par γ sur $C^0(T)$ est identique à γ_ρ
- (a') La topologie γ^∞ est identique à la topologie γ_ρ^∞
- (b) Pour tout entier $n \geq 1$, T_n est une partie dominée de T .

Preuve. (a) \implies (a') est évident et si (b) est vraie, alors on a : $\phi_\rho = \phi$ et $C^0(T) = C(T)$ et par suite $\gamma = \gamma_\rho$. Reste à démontrer que (a') \implies (b) : raisonnons par l'absurde et supposons que l'un des éléments de $\rho = (T_n)$, T_1 par exemple, ne soit pas dominé dans T . Il existe alors un recouvrement dominant $\rho' = (T'_n)$ tel que pour tout entier $n \geq 1$, il existe un élément $x_n \in T_1$ et $x_n \notin T'_n$. Par complète régularité de T , il existe une application continue f_n de T dans l'intervalle $[0, n]$ de \mathbb{R} telle que $f_n(x_n) = n$ et $f_n \equiv 0$ sur T'_n . D'autre part, si ϕ est un élément quelconque de ϕ , il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que $S(\phi) \subset T'_{n_0}$. Il en résulte que, pour tout $n \geq n_0$, $\|f_n \phi\| = 0$; et par conséquent la suite (f_n) converge vers zéro pour la topologie γ^∞ . Mais si on désigne par ϕ_0 l'application de T dans \mathbb{R} définie par $\phi_0 \equiv 0$ sur $T - \{x_n, n \geq 1\}$ et $\phi_0(x_n) = \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$; alors $\phi_0 \in \phi_\rho$ et, pour tout $n \geq 1$, on a $\|f_n \phi_0\| \geq |\phi_0(x_n) f_n(x_n)| = 1$. Ce qui montre que la suite (f_n) ne converge pas vers zéro pour la topologie γ_ρ^∞ , et par suite contredit l'hypothèse que $\gamma_\rho^\infty = \gamma^\infty$.

(3.1.4) Proposition. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (a) La topologie γ_ρ^∞ est identique à la topologie sous-stricte β_ρ
- (b) Tout K_σ dans T est dominé par ρ .
- (c) Le recouvrement ρ est stationnaire.

Preuve. Les deux implications (b) \implies (c) et (c) \implies (a) sont

évidentes ; et pour démontrer que (a) \implies (b) on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un K_σ dans T , non dominé par ρ . Il suffit, alors, de répéter la démonstration de la proposition précédente pour construire une suite dans $C^\infty(T)$ convergente vers zéro pour γ_ρ^∞ , et qui ne converge pas vers zéro pour la topologie β_ρ .

Pour la suite, nous aurons besoin d'un lemme analogue au lemme (3.1) de [15] :

(3.1.5) Lemme. Soit H un ensemble d'applications de T dans \mathbb{R} .
 Pour que H soit uniformément borné sur chaque élément T_n de ρ , il faut et il suffit que, pour toute fonction $\phi \in \phi_\rho$,
 $\text{Sup} \{ \|f\phi\|, f \in H \}$ soit fini.

Preuve. La condition est trivialement nécessaire, car pour toute fonction $\phi \in \phi_\rho$, il existe un entier n_0 tel que $S(\phi) \subseteq T_{n_0}$. Réciproquement si H n'est pas uniformément borné sur T_1 , (par exemple), alors pour tout entier $n \geq 1$, il existe $x_n \in T_1$ et $f_n \in H$ tels que $|f_n(x_n)| \geq n \cdot 2^n$.

La fonction $\phi = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} \phi_{\{x_n\}}$ appartient à ϕ_ρ et est telle $\|f_n \phi\| \geq n$.

Cette contradiction montre que la condition est suffisante.

(3.1.6) Proposition. (a) La topologie γ_ρ est moins que la topologie τ_c ;
 (b) Les deux espaces $C_\rho^0(T)$ et $C_{\gamma_\rho}^0(T)$ ont les mêmes parties bornées.
 (c) Sur les bornés de $C_\rho^0(T)$ la topologie γ_ρ coïncide avec la topologie de la convergence compacte.

Preuve. L'assertion (a) est évidente et (b) découle du lemme précédent. Pour démontrer (c), il suffit de prouver que la topologie induite par γ_ρ sur un disque τ_ρ -borné B est moins fine que celle induite par la topologie de la convergence compacte τ_c : considérons, en effet, un élément $\phi \in \phi_\rho$, $\phi \neq 0$ et soit $V_\phi^0 = \{f \in C^0(T) ; \|f\phi\| \leq 1\}$. Puisque le support de ϕ est dominé par $\rho = (T_n)$, il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que $S(\phi) \subset T_{n_0}$.

Si, d'autre part, r est un nombre réel tel que $r > \text{Sup}\{\|f\|_{T_n}, f \in B\}$, il existe un compact $K \subset T$ tel que $\| \cdot \|_{T-K} \leq \frac{1}{r}$, et si l'on pose $W^{\rho} = \{f \in C^{\rho}(T) ; \|f\|_K \leq \frac{1}{\|\phi\|}\}$, alors on a $W^{\rho} \cap B \subset V_{\phi}^{\rho} \cap P$.
L'assertion est donc démontrée.

(3.1.7) Corollaire 1. Les assertions suivantes sont équivalentes

- (a) La topologie γ_{ρ} est identique à la topologie t_{ρ}
- (b) Les éléments T_n de ρ sont des parties compactes de T .

Preuve. (b) \implies (a) est évident et (a) \implies (b) résulte de la proposition précédente et du lemme 2 de [12].

(3.1.8) Corollaire 2. Tout borné de $C_{\gamma_{\rho}}^{\rho}(T)$ est contenu dans l'adhérence d'un borné de $C_{\gamma_{\rho}}^{\infty}(T)$. En particulier $C_{\gamma_{\rho}}^{\infty}(T)$ est partout dense dans $C_{\gamma_{\rho}}^{\rho}(T)$ et a le même dual.

Preuve. Ce corollaire résulte trivialement du fait, que tout borné de $C_{\rho}^{\rho}(T)$ est contenu dans l'adhérence d'un borné de $C_{\rho}^{\infty}(T)$.

(3.1.9) Proposition . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) L'espace $C_{\gamma_{\rho}}^{\rho}(T)$ est complet
- (b) L'espace $C_{\gamma_{\rho}}^{\rho}(T)$ est quasi-complet.
- (c) Toute application de T dans \mathbb{R} , bornée sur les éléments de ρ et continue sur les compacts de T , est continue.

Preuve. La démonstration est analogue à celle de la proposition 5 de [12], ou à celle de la proposition 3.6 de [15].

3.2 - DUAL DE $C_{\gamma_{\rho}}^{\rho}(T)$ ET $C_{\gamma_{\rho}}^{\infty}(T)$.

Dans ce qui suit nous aurons besoin du lemme suivant ([11] et [3]):

(3.2.1) Lemme . Soit μ une mesure de Radon sur T . Si U est un ouvert de T tel que $U \cap S(\mu) \neq \emptyset$, alors il existe $f \in C^\infty(T)$ tel que $S(f) \subset U$ et $\int f d\mu = 1$.

Les démonstrations des théorèmes (4.3), (6.1), (6.2), (7.1) de [11] s'adaptent bien aux démonstrations des théorèmes (3.2.2), (3.2.3), (3.2.4) et (3.2.5) suivants :

(3.2.2) Théorème . (a) Si L est une forme linéaire continue sur les bornés de $C_\rho^\infty(T)$ pour la topologie de la convergence compacte, alors la mesure de Radon correspondante est à support dominé par ρ .

(b) Si μ est une mesure de Radon à support dominé par ρ , alors la forme linéaire correspondante $f \rightarrow \int f d\mu$, est continue sur les bornés de $C_\rho^\infty(T)$ pour la topologie de la convergence compacte.

Désignons par $M_\rho(T)$ l'espace des mesures de Radon sur T , à support dominé par ρ .

(3.2.3) Théorème . Le dual de $C_{\gamma_\rho}^\infty(T)$ (ou $C_{\gamma_\rho}^0(T)$) est l'espace $M_\rho(T)$.

(3.2.4) Théorème . Pour une partie H de $M_\rho(T)$, les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) L'ensemble H est γ_ρ -équicontinu.

(a') L'ensemble H est γ_ρ^∞ -équicontinu.

(b) L'ensemble H est fortement borné dans $M_\rho(T)$ et il existe une partie fermée S de T , dominée par ρ et telle que, pour toute partie bornée B de $C_{\gamma_\rho}^\infty(T)$ et tout $\epsilon > 0$, il existe un compact $K \subset S$ tel que $|\mu|(|f|) \leq \epsilon$ pour toute mesure $\mu \in H$ et toute fonction $f \in B$ telle que $\|f\|_K = 0$.

(c) $\sup \{ |\mu|(T), \mu \in H \}$ est fini, le support $S(H)$ est dominé par ρ et, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un compact $K \subset T$ tel que $|\mu|(T - K) \leq \epsilon$ pour toute mesure $\mu \in H$.

(3.2.5) Théorème . Les deux espaces $C_{\gamma_0}^2(T)$ et $C_{\gamma_0}^\infty(T)$ sont des b-espaces ([10]).

Enfin, nous avons le résultat suivant :

(3.2.6) Théorème . L'espace $C(T)$ muni de la topologie γ est la limite inductive des espaces $C_{\gamma_0}^f(T)$, lorsque f décrit l'ensemble des recouvrements dominants de T .

Preuve. Désignons par γ' la topologie localement convexe sur $C(T)$, limite inductive des topologies γ_{ρ} . L'espace $C_{\gamma'}(T)$ est un b-espace, car toute limite inductive (séparée) de b-espaces est un b-espace ([10]). D'autre part, il est clair que γ est moins fine que γ' ; et comme il est facile de voir que γ' induit sur les bornés de $C_c(T)$, une topologie identique à celle induite par la topologie de la convergence compacte ; alors on en déduit que γ est identique à γ' ; et le théorème est démontré .

BIBLIOGRAPHIE. -

- [1] A. BADRIKIAN, *Séminaire sur les fonctions aléatoires linéaires et mesures cylindriques*, Lecture notes in Mathematics, 139 (1970).
- [2] H. BUCHWALTER, *Problèmes de complétion topologique*, D.E.A. Math. pures, Ed. ronéotypée, Lyon 1969-1970.
- [3] BUCHWALTER H., *Parties bornées d'un espace topologique complètement régulier*, *Séminaire Choquet*, 9, n° 14, 15 pages (1969-1970).
- [4] H. BUCHWALTER, *Sur le théorème de Nachbin-Shirota*, *J. Math. Pures et appl.* 51, p. 399-418 (1972).
- [5] H. BUCHWALTER, *Topologies et compactologies*, *Publ. Dép. Math. Lyon* , 6-2, p. 1-74 (1969).
- [6] H. BUCHWALTER et J. SCHMETS, *Sur quelques propriétés de l'espace $C_g(T)$* , *J. Math. Pures et appl.*, 52, p.337-552 (1973).

- [7] L. GILLMAN, et H. JERISON, *Rings of continuous functions*, Van Nostrand, Princeton N.J. (1960).
- [8] G. KOTHE, *Topological vector spaces*, I, Springer, 1968.
- [9] L. NACHBIN, Topological vector spaces of continuous functions, *Proc. Nat. Acad. U.S.A.*, 40, p. 471-474 (1954).
- [10] K. NOUREDDINE, Nouvelles classes d'espaces localement convexes, 2° coll. Anal. Fonct. Bordeaux (1973), *Pub. Dép. Math. Lyon*, 10-3, p. 259-277 (1973).
- [11] K. NOUREDDINE, Topologies strictes sur $C(T)$ et $C^\infty(T)$ *Publ. Dép. Math. Lyon*, 14-1 (1976).
- [12] K. NOUREDDINE et W. HABRE, Topologies p-strictes, *Publ. Dep. Math. Lyon*, 14-1 (1976).
- [13] H.H. SCHAEFER, *Topological vector spaces*, Springer,
- [14] J. SCHMETS et M. DE WILDE, Caractérisation des espaces $C(X)$ ultra-bornologiques, *Bull. Soc. Roy. Sc. Liège*, 40 (1971), p. 119-121.
- [15] J. SCHMETS et J. ZAFARANI, Topologie stricte faible et mesures discrètes, *Bull. Soc. Roy. Liège*, 43, p. 405-418, (1974).
- [16] F.D. SENTILLES, Bounded continuous functions on a completely regular space, *Trans. Amer. Math. Soc.* 168, p. 311-336 (1972).
- [17] T. SHIROTA, On locally convex vector spaces of continuous functions, *Proc. Japan Acad.* 30, p. 294-298 (1954).
- [18] V.S. VARADARAJAN, Measures on topological spaces, *Amer. Math. Soc. Transl.* 48, p. 161-228 (1965).
- [19] WARNER S., The topology of compact convergence on continuous functions spaces, *Duke Math. J.* 25, p. 265 -282 (1958).