

KHALIL NOUREDDINE

Topologies sur $C(T)$ et $C^\infty(T)$

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1977, tome 14, fascicule 1
, p. 1-25

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1977__14_1_1_0

© Université de Lyon, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

TOPOLOGIES SUR $C(T)$ et $C^\infty(T)$

par Khalil NOUREDDINE

INTRODUCTION . L'objet de ce travail est d'étudier une topologie du genre "strict" sur l'espace $C(T)$, espace de toutes les applications continues d'un espace complètement régulier T dans le corps \mathbb{R} des nombres réels . Pour tout espace localement convexe E , Collins ([8]) appelle topologie stricte la topologie localement convexe la plus fine sur E coïncidant sur les bornés de E avec leurs topologies propres . Une telle topologie a été appelée dans [14] topologie de b -espace associé à E . La topologie "stricte" qui est l'objet de ce travail est la topologie de b -espace (ou topologie stricte au sens de Collins) associée à la topologie de la convergence compacte sur $C(T)$. Cette topologie (notée γ) induit sur $C^\infty(T)$, espace des applications continues et bornées de T dans \mathbb{R} , une topologie γ^∞ moins fine que la topologie sous-stricte β_0 de [19] . On montrera que le dual de $C(T)$ muni de la topologie γ est l'espace des mesures de Borel t -additives dont le support est un borné war-nérien au sens de Buchwalter ([4]) . Au lieu de l'expression "borné war-nérien" on utilisera le mot "dominé", notion qui sera précisée par l'introduction de la notion de recouvrement dominant sur T . A tout recouvrement dominant est associé un borné de $C_c(T)$ (i.e. $C(T)$ muni de la topologie de la convergence compacte); et les bornés ainsi obtenus constituent une base des bornés de cet espace .

1. NOTATIONS ET PRELIMINAIRES . Tout espace topologique considéré dans ce travail est supposé complètement régulier et séparé . Pour un tel espace T on pose les notations suivantes :

$C(T)$ (resp. $C^\infty(T)$) est l'algèbre des applications continues (resp. continues et bornées) de T dans le corps des nombres réels \mathbb{R} .

Pour tout $f \in C^{\infty}(T)$, $\|f\| = \text{Sup} \{|f(t)|, t \in T\}$. L'application $f \longrightarrow \|f\|$ est la norme de la convergence uniforme sur $C^{\infty}(T)$.
 $B^{\infty} = \{f \in C^{\infty}(T); \|f\| \leq 1\}$ est la boule unité fermée de $C^{\infty}(T)$.

$C_c(T)$ (resp. $C_c^{\infty}(T)$) est l'espace $C(T)$ (resp. $C^{\infty}(T)$) muni de la topologie de la convergence compacte.

$C_s(T)$ (resp. $C_s^{\infty}(T)$) est l'espace $C(T)$ (resp. $C^{\infty}(T)$) muni de la topologie de la convergence simple.

Pour toute partie $A \subset T$, \bar{A} est l'adhérence de A dans T .

Pour toute partie $A \subset T$, ϕ_A est la fonction caractéristique de A (i.e, $\phi_A(t) = 1$ si $t \in A$ et $\phi_A(t) = 0$ si $t \in T \setminus A$).

Un K_{σ} dans T est une partie de T qui est une réunion d'une suite de compacts dans T .

Pour toute partie A de T et toute application ϕ de T dans \mathbb{R}

$$\|\phi\|_A = \text{Sup} \{|\phi(t)|, t \in A\} \text{ et } \|\phi\| = \|\phi\|_T.$$

Une partie A de T est dite bornée ([3],[5]) si, pour tout $f \in C(T)$, $\|f\|_A$ est fini. L'espace T est dit de type μ ([3])

Si tout borné dans T est relativement compact.

βT est le compactifié de Stone-Čech de T ([2],[5],[9]).

νT est le replété de T ([2],[5],[9]).

θT est le c -replété de T ([2],[5]).

θT et νT sont des espaces de type μ .

Pour toute application f de T dans \mathbb{R} , $S_0(f)$ est le support strict de f (i.e, l'ensemble des $t \in T$ tels que $f(t) \neq 0$) et $S(f)$ est le support de f ($S(f)$ est l'adhérence de $S_0(f)$ dans T).

D'autre part, si E est un espace localement convexe (l.c.) séparé et si V est un disque (resp. un tonneau) de E , alors on dit que V est un

b-disque (resp. un b-tonneau) si pour tout disque borné B de E , $V \cap B$ est un voisinage de zéro dans B . On dit que l'elc E est un b-espace (resp. un espace b-tonnelé) si tout b-disque (resp. b-tonneau) dans E est un voisinage de zéro. On dit que E est un b'-espace si toute forme linéaire sur E , continue sur les bornés de E , est continue. L'espace E est un b-espace si et seulement si E est un b'-espace b-tonnelé. Un b-espace qui admet une base dénombrable de bornés est appelé D_b -espace. Ces différentes classes d'espaces localement convexes ont été étudiées dans [12], [13], [14] et [15].

Pour la suite, on a besoin du résultat suivant :

(1.1) LEMME. Soient E un elc et F un sous-espace vectoriel de E tel que tout borné de E soit contenu dans l'adhérence d'un borné de F .

- (a) Si g est une application linéaire de F dans un elc complet G et si la restriction de g à tout disque borné de F est continue, alors g est prolongeable d'une manière unique en une application linéaire f de E dans G telle que la restriction de f à tout disque borné de E soit continue.
- (b) E est un b-espace (resp. b'-espace) si et seulement si F est un b-espace (resp. b'-espace).
- (c) Si V est un b-tonneau dans F , alors son adhérence \bar{V} est un b-tonneau dans E .
- (d) E est b-tonnelé si et seulement si F est b-tonnelé.

PREUVE. La démonstration de (a) n'offre aucune difficulté et (b) résulte de (a), en tenant compte du théorème 2 de [14] en ce qui concerne la condition b-espace.

Pour démontrer (c) il suffit de prouver que, pour tout disque borné B dans E , $\bar{V} \cap B$ est un voisinage de zéro dans B . Or par hypothèse il existe un disque borné B_0 dans F tel que $B \subset \bar{B}_0$ et, il existe un voisinage de zéro W , ouvert et tel que $W \cap B_0 \subset V$. Mais alors $W \cap \bar{B}_0 \subset \overline{W \cap B_0} \subset \bar{V}$.

D'où $W \cap B \subset \bar{V} \cap B$ et l'assertion est démontrée .

(d): la condition suffisante est évidente car F est partout dense dans E et la condition nécessaire est une conséquence de (c) .

On sait d'après [17] que tout borné de $C_c(T)$ (resp. $C_s(T)$) est contenu dans l'adhérence d'un borné de $C_c^\infty(T)$ (resp. $C_s^\infty(T)$) .

On a donc le corollaire suivant :

(1.2.) Corollaire. (a) L'espace $C_c(T)$ est un b -espace (resp. b' -espace, b -tonnelé) si et seulement si $C_c^\infty(T)$ est un b -espace (resp. b' -espace, b -tonnelé) .

(b) L'espace $C_s(T)$ est un b -espace (resp. b' -espace, b -tonnelé) si et seulement si $C_s^\infty(T)$ est un b -espace (resp. b' -espace, b -tonnelé) .

2. RECOUVREMENTS SIMPLES D'UN ESPACE COMPLETEMENT REGULIER .

(2.1) Définition. Soit T un espace complètement régulier séparé . On appelle recouvrement simple de T toute suite croissante $\rho = (R_n)_{n \geq 1}$ de fermés de T recouvrant T . Une partie A de T est dite dominée par le recouvrement simple ρ s'il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que $A \subset R_{n_0}$.

Un recouvrement simple $\rho = (R_n)_{n \geq 1}$ est dit fini s'il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que $R_{n_0} = T$. (Ce qui revient à dire aussi que T est dominé par ρ) .

Toute partie finie de T est dominée par tout recouvrement simple de T . Réciproquement on a :

(2.2.) Proposition ([7]). Si A est une partie de T , dominée par tout recouvrement simple de T , alors A est finie .

Preuve . Raisonnons par l'absurde et supposons que A soit infinie . D'après le lemme (1.3) de [7], il existe une suite $(x_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de A , deux à deux distincts; et il existe une suite $(V_n)_{n \geq 1}$ de parties fermées de T telle que, pour tout $n \geq 1$, V_n soit un voisinage de x_n et les V_n soient

deux à deux disjoints . Pour tout entier $n \geq 1$, posons

$$R_n = \left(\bigcup_{i \leq n} V_i \right) \cup \left(T - \bigcup_{i \geq 1} \overset{\circ}{V}_i \right) ; \text{ où pour tout } i \geq 1, \overset{\circ}{V}_i \text{ désigne l'intérieur de } V_i .$$

Il est clair que la suite $(R_n)_{n \geq 1}$ est un recouvrement simple de T qui ne domine pas A ; ce qui contredit l'hypothèse et par suite démontre la proposition .

Pour tout entier $n \geq 1$, on note $[-n, n] = \{x \in \mathbb{R}; -n \leq x \leq n\}$.

Si $\rho = (R_n)_{n \geq 1}$ est un recouvrement simple de T , on pose

$$B^\rho = \{f \in C(T) ; f(R_n) \subset [-n, n] \text{ pour tout entier } n \geq 1\} .$$

Les bornés de $C_S(T)$ et les recouvrements simples de T sont liés par la proposition suivante :

(2.3.) Proposition . Les ensembles B^ρ , lorsque ρ décrit l'ensemble des recouvrements simples de T , forment une base de bornés dans $C_S(T)$.

Preuve . Il est immédiat que B^ρ est un borné dans $C_S(T)$. Réciproquement, si B est borné dans $C_S(T)$ et si on pose

$$R_n(B) = \{t \in T ; -n \leq f(t) \leq n \text{ pour tout } f \in B\} , \text{ alors } \rho(B) = (R_n(B))_{n \geq 1}$$

est un recouvrement simple de T et B est contenu dans $B^{\rho(B)}$.

La proposition suivante exprime d'une autre manière un cas particulier du lemme 4 de [16] :

(2.4.) Proposition . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (a) L'espace $C_S(T)$ admet une base dénombrable de bornés .
- (a') L'espace $C_S^\infty(T)$ admet une base dénombrable de bornés .
- (b) Tout recouvrement simple de T est fini .
- (c) L'espace T est fini .

Preuve . (c) \implies (a) et (a) \implies (a') sont évidents et (b) \implies (c) résulte de la proposition (2.2.) . Reste à démontrer que (a') implique (b) :

En effet, si $\rho = (R_n)_{n \geq 1}$ est un recouvrement de T qui n'est pas fini, alors pour tout entier $n \geq 1$ il existe $t_n \in T$ et $t_n \notin R_n$. D'autre part, si $(B_n)_{n \geq 1}$ est une base de bornés dans $C_S^\infty(T)$ et si $r_n = \text{Sup} \{|f(t_n)|, f \in B_n\}$, alors d'après la complète régularité de T il existe une application continue f_n de T dans l'intervalle $[0, r_n + 1] = \{x \in \mathbb{R} ; 0 \leq x_n \leq r_n + 1\}$ telle que $f_n(t_n) = r_n + 1$ et $f_n \equiv 0$ sur R_n . Il est clair alors que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ est bornée dans $C_S^\infty(T)$, mais elle est telle que, pour tout $n \geq 1$, $f_n \notin B_n$; ce qui est absurde, et par suite la proposition est démontrée.

3. RECOUVREMENTS DOMINANTS, PARTIES DOMINÉES D'UN ESPACE COMPLETEMENT REGULIER.

(3.1.) Définition. Soit T un espace complètement régulier (séparé). On appelle recouvrement dominant (ou k -dominant) de T , tout recouvrement simple ρ qui domine les parties compactes de T . Une partie A de T est dite dominée (ou k -dominée) si A est dominée par tout recouvrement dominant.

(3.2.) Remarque. Il est clair que la famille des parties dominées de T est héréditaire à gauche (pour la relation d'inclusion) et est stable par passage à l'adhérence et à l'union finie. Elle n'est autre que la famille des bornés warnériens de T introduits et étudiés par H. Buchwalter dans [4]. Cette famille est généralement strictement plus large que la famille des parties relativement compactes de T , comme le montre le travail de Buchwalter. La notion de borné warnérien est liée à la notion de saturation d'une famille de parties de T ([4]). Dans ce travail on utilise le terme "dominé" au lieu de "borné warnérien" pour des raisons de facilité de terminologie.

A tout recouvrement dominant $\rho = (R_n)_{n \geq 1}$ de T on associe l'ensemble $B^\rho = \{f \in C(T) ; f(R_n) \subset [-n, n], \text{ pour tout entier } n \geq 1\}$. Il est évident que B^ρ est un borné dans l'espace $C_c(T)$. Réciproquement, à

tout borné B de $C_c(T)$ on associe le recouvrement $\rho(B) = (R_n(B))$, où pour tout entier $n \geq 1$, $R_n(B) = \{t \in T ; f(t) \in [-n, n] \text{ pour tout } f \in B\}$. Le recouvrement $\rho(B)$ est dominant et $B \subset B^\rho(B)$. On a donc la proposition suivante :

(3.3.) Proposition. Les ensembles B^ρ , lorsque ρ décrit l'ensemble des recouvrements dominants de T , forment une base de bornés dans $C_c(T)$.

Comme conséquence immédiate de cette proposition, on a le corollaire suivant .

(3.4.) Corollaire. L'ensemble A est une partie dominée de T si et seulement si tout borné dans $C_c(T)$ est uniformément borné sur A . En particulier, si A est dominée, alors toute application $f \in C(T)$ est bornée sur A .

Ce corollaire est l'une des caractérisations données dans [4] pour les parties dominées .

(3.5.) Proposition. Soient T, S deux espaces complètement réguliers séparés et f une application continue de T dans S . Si A est une partie dominée dans T , alors $f(A)$ est une partie dominée dans S .

Preuve. Cette proposition est le corollaire 3.8. de [4]. Cependant elle peut être démontrée ici de la façon triviale suivante : soit $\rho' = (R'_n)$ un recouvrement dominant de S . Si pour tout entier $n \geq 1$, on pose $R_n = f^{-1}(R'_n)$, alors la suite (R_n) est un recouvrement dominant de T . Par suite il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que $A \subset R_{n_0} = f^{-1}(R'_{n_0})$. Ce qui montre que $f(A) \subset R'_{n_0}$; et la proposition est démontrée .

Un espace complètement régulier séparé T est dit dominé si T est une partie dominée de T (ce qui revient à dire aussi que tout recouvrement dominant de T est fini). Un espace dominé est nécessairement pseudocompact (i.e., $C(T) = C^\infty(T)$) car, pour tout $f \in C(T)$, le recouvrement

$\rho(f) = (R_n(f))$, où $R_n(f) = \{t \in T ; -n \leq f(t) \leq n\}$, est un recouvrement dominant dans T ; par suite $\rho(f)$ est fini et f est donc borné. Si T est dominé il en est de même de tout sous-espace de βT contenant T .

La proposition suivante est une autre façon d'exprimer le théorème 11 de [21] :

(3.6.) Proposition. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) L'espace $C_c(T)$ admet une base dénombrable de bornés.
- (a') L'espace $C_c^\infty(T)$ admet une base dénombrable de bornés.
- (b) L'espace T est dominé.

Preuve. (a) \iff (a') est évident. D'autre part si T est dominé, alors tout recouvrement dominant de T est fini; par suite les ensembles $B_n = \{f \in C(T) ; f(T) \subset [-n, n]\}$ forment une base de bornés dans $C_c(T)$; ce qui montre que (b) implique (a). Enfin la démonstration de l'implication (a') \implies (b) est identique à celle de (a') \implies (b) dans la proposition (2.4).

(3.7.) Remarque. Les espaces dominés sont les espaces de Warner pseudo-compacts de [4]. On sait, d'après [4], que tout produit d'espaces dominés est dominé et si S est un fermé d'un espace dominé tel que S soit égal à l'adhérence de son intérieur, alors S est aussi un espace dominé.

4. MESURES DE RADON A SUPPORT DOMINE.

Soit toujours T un espace complètement régulier séparé. On entend par mesure de Borel positive sur T toute mesure ⁽⁴⁴⁾ finie et dénombrablement additive) positive définie sur la tribu de Borel de T telle que, pour tout borélien A de T , $\mu(A) = \text{Inf} \{\mu(U), U \text{ ouvert contenant } A\}$. Une mesure de Borel signée est une différence de deux mesures de Borel positives. Pour une telle mesure μ sur T on note μ^+ (resp. μ^-) la partie positive

(resp. négative) de la décomposition de Jordan-Hahn de μ . La mesure $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$ est la variation totale de μ . On appelle mesure de Radon ([1]) sur T toute mesure de Borel sur T telle que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un compact $K \subset T$ tel que $|\mu|(T \setminus K) \leq \epsilon$. Il en résulte que; pour tout borélien A dans T et tout $\epsilon > 0$, il existe un compact $K \subset A$ tel que $|\mu|(A \setminus K) \leq \epsilon$. On montre ([1], [20]) que μ est une mesure de Radon sur T si et seulement si μ^+ et μ^- le sont; et par définition même, μ est de Radon si et seulement si $|\mu|$ l'est.

(4.1.) Lemme : Soit μ une mesure de Radon sur T . Si U est un ouvert dans T , alors $|\mu|(U) = \text{Sup} \left\{ \int f d|\mu| ; f \in C(T), 0 \leq f \leq 1 \text{ et } S(f) \subset U \right\}$.

Preuve . La mesure μ étant de Radon, alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe un compact $K \subset U$ tel que $|\mu|(U \setminus K) \leq \epsilon$. La compacité de K et la complète régularité de T assurent l'existence d'un ouvert V tel que $K \subset V \subset \bar{V} \subset U$. Si l'on pose $F = T \setminus V$, alors F est un fermé de T disjoint de K . Donc, par complète régularité de T , il existe une application continue f de T dans l'intervalle $[0, 1]$ telle que $f \equiv 1$ sur K et $f \equiv 0$ sur F . Il en résulte que $S(f)$ est inclus dans \bar{V} qui est inclus dans U et par suite $|\mu|(K) \leq \int f d|\mu| \leq |\mu|(U)$ et $|\mu|(U) - \int f d|\mu| \leq \epsilon$. Le lemme est donc démontré.

Soit μ une mesure de Radon sur T . On appelle support de μ (et on note $S(\mu)$) le plus petit fermé F de T tel que $|\mu|(T \setminus F) = 0$. Il est clair qu'un tel fermé existe et est caractérisé aussi comme étant le plus petit fermé F de T tel que $\int f d\mu = 0$ chaque fois que $f \in C^\infty(T)$ avec $f \equiv 0$ sur F . Le support de μ est l'adhérence d'un K_σ dans T .

(4.2.) Lemme . Soit μ une mesure de Radon sur T . Si U est un ouvert dans T tel que $U \cap S(\mu) \neq \emptyset$, alors il existe $f \in C^\infty(T)$ tel que $S(f) \subset U$ et $\int f d\mu = 1$.

Preuve . Il suffit de montrer qu'il existe $f \in C^\infty(T)$ tel que $S(f) \subset U$ et $\int f d\mu \neq 0$. En effet, si pour tout $f \in C^\infty(T)$ tel que $S(f) \subset U$, on avait $\int f d\mu = 0$; alors pour tout $f \in C^\infty(T)$ tel que $0 \leq f \leq 1$ et $S(f) \subset U$, on aurait

$$\int f d|\mu| = \text{Sup} \left\{ \left| \int g d\mu \right|, g \in C^\infty(T) \text{ et } 0 \leq |g| \leq f \right\} = 0 .$$

Il en résulte (d'après le lemme précédent) que $|\mu|(U) = 0$ et par suite $U \cap S(\mu) = \emptyset$; ce qui est absurde.

On sait (d'après [1] et [20]) qu'il existe une isométrie linéaire entre l'espace des mesures de Radon μ sur T et l'espace des formes linéaires L sur $C^\infty(T)$ continues sur la boule unité B^∞ munie de la topologie de la convergence compacte - Les deux espaces sont supposés munis des normes respectives $\mu \longrightarrow \|\mu\| = |\mu|(T)$ et $L \longrightarrow \|L\| = \text{Sup} \{|L(f)|, f \in B^\infty\}$ - . Le théorème suivant montre qu'il y a une isométrie analogue entre l'espace des mesures de Radon à support dominé sur T et l'espace des formes linéaires continues sur les bornés de $C_C^\infty(T)$ ou $C_C(T)$:

(4.3.) Théorème . (a) Si L est une forme linéaire continue sur les bornés de $C_C^\infty(T)$, alors la mesure de Radon correspondante est à support dominé .

(b) Si μ est une mesure de Radon à support dominé sur T , alors la forme linéaire $f \longrightarrow L(f) = \int f d\mu$ est continue sur les bornés de $C_C^\infty(T)$.

Preuve. (a) Soit μ la mesure de Radon sur T identifiée à L et soit $S(\mu)$ son support . Si $S(\mu)$ n'est pas dominé dans T , alors il existe un recouvrement dominant $\rho = (R_n)$ de T tel que, pour tout $n \geq 1$, $S(\mu) \cap (T \setminus R_n) \neq \emptyset$. D'après le lemme (4.2), il existe $f_n \in C^\infty(T)$ tel que $S(f_n) \subset T \setminus R_n$ et $\int f_n d\mu = 1$. La suite (f_n) , ainsi obtenue, converge vers zéro dans $C_C^\infty(T)$ et est donc bornée . Comme L est continue sur les bornés de $C_C^\infty(T)$, la suite $(\int f_n d\mu)$ doit converger vers zéro; d'où la contradiction.

(b) Puisque les ensembles $B^p \cap C^\infty(T)$ forment une base de bornés dans $C_C^\infty(T)$ il suffit de montrer que, si $\rho = (R_n)$ est un recouvrement dominant quelconque de T , alors la restriction de L à $B^p \cap C_C^\infty(T)$ est continue . Et puisque le borné $B^p \cap C_C^\infty(T)$ est un disque, il suffit donc de démontrer que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un compact $K \subset T$ et un nombre réel $r > 0$ tels que, si $f \in B^p \cap C^\infty(T)$ avec $\|f\|_K \leq r$, on ait $|\int f d\mu| \leq \epsilon$. Or le support de μ

est dominé dans T , donc il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que $S(\mu) \subset \overset{\circ}{n}_0$; et puisque μ est de Radon, il existe un compact $K \subset S(\mu)$ tel que

$|\mu|(S(\mu) \setminus K) \leq \frac{\epsilon}{2n_0}$. Posons $r = \frac{\epsilon}{2\|\mu\|}$ (on suppose que $\|\mu\| > 0$, car le cas $\|\mu\| = 0$ est trivial). Si $f \in B^p \cap C^\infty(T)$ avec $\|f\|_K \leq r$, on a alors ,

$$\begin{aligned} |L(f)| &= \left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d|\mu| = \int_{S(\mu)} |f| d|\mu| = \int_K |f| d|\mu| + \int_{S(\mu)-K} |f| d|\mu| \\ &\leq r \cdot |\mu|(K) + n_0 \cdot |\mu|(S(\mu) \setminus K) \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon . \end{aligned}$$

Et le théorème est démontré .

Dans la suite, $M_\gamma(T)$ désigne l'espace des mesures de Radon à support dominé sur T . $M_\gamma(T)$ est un sous-espace de $M_t(T)$, espace des mesures de Radon sur T . Le théorème précédent et le lemme (1.1) montrent que $M_\gamma(T)$ est l'espace des formes linéaires continues sur les bornés de $C_c(T)$

5. UNE TOPOLOGIE STRICTE SUR $C(T)$.

Soit T un espace complètement régulier séparé . On désigne par Φ l'ensemble des applications bornées ϕ de T dans \mathbb{R} , à support dominé et telles que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un compact $K \subset T$ tel que $\|\phi\|_{T \setminus K} \leq \epsilon$. Pour tout $\phi \in \Phi$ on note $\|\cdot\|_\phi$ la semi-norme sur $C(T)$ définie par $\|f\|_\phi = \|f\phi\|$ pour tout $f \in C(T)$. Les semi-normes $\|\cdot\|_\phi, \phi \in \Phi$, déterminent sur $C(T)$ (resp. $C^\infty(T)$) une topologie localement convexe notée γ (resp. γ^∞) . Un système fondamental de voisinages de zéro pour γ (resp. γ^∞) est donné par les ensembles

$$V_\phi = \{f \in C(T) ; \|f\|_\phi = \|f\phi\| \leq 1\} \quad (\text{resp. } V_\phi^\infty = V_\phi \cap C^\infty(T)) .$$

On désigne par $C_\gamma(T)$ (resp. $C_\gamma^\infty(T)$) l'espace $C(T)$ (resp. $C^\infty(T)$) muni de la topologie γ (resp. γ^∞) .

(5.1.) Proposition . (a) La topologie γ est plus fine que la topologie de la convergence compacte .

(b) La topologie γ^∞ est moins fine que la topologie sous-stricte β_0 ([19]).

Preuve . (a) est évident et (b) résulte du fait que la topologie β_0 est définie par les semi-normes $\|\cdot\|_\phi$; où ϕ décrit l'ensemble de toutes les applications bornées de T dans \mathbb{R} telles que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un compact $K \subset T$ tel que $\|\phi\|_{T \setminus K} \leq \epsilon$; sans aucune restriction sur le support de ϕ .

(5.2.) Proposition : Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (a) La topologie γ est la topologie de la convergence compacte
- (a') La topologie γ^∞ est la topologie de la convergence compacte
- (b) Tout K_0 dominé dans T est relativement compact .

Preuve . (a) \implies (a') et (b) \implies (a) sont évidents; démontrons que (a') implique (b) en suivant la preuve de la proposition 1. (b) de [16]; comme dans [10], soit $(K_n)_{n \geq 1}$ une suite croissante de compacts dans T telle que la réunion $\bigcup_{n \geq 1} K_n$ soit dominée dans T sans qu'elle soit relative-

ment compacte . Alors, pour tout compact K de T , on a $\bigcup_{n \geq 1} K_n \not\subset K$ et

par suite il existe $x_K \in \bigcup_{n \geq 1} K_n$ et $x_K \notin K$. Soit n_K le plus petit entier $n \geq 1$ tel que $x_K \in K_n$ et soit f_K une application continue de T dans $[0, n_K]$ telle que $f_K(x_K) = n_K$ et $f_K \equiv 0$ sur K . La suite généralisée (f_K) converge vers zéro dans $C_c^\infty(T)$. D'autre part soit ϕ l'élément de ϕ défini par : $\phi \equiv 0$ sur $T \setminus \bigcup_{n \geq 1} K_n$, $\phi \equiv 1$ sur K_1 et $\phi \equiv \frac{1}{n}$

sur $K_n \setminus K_{n-1}$ pour $n \geq 2$. Pour tout compact $K \subset T$, on a

$\|f_K \phi\| \geq |\phi(x_K) f_K(x_K)| = 1$. Par suite (f_K) ne converge pas vers zéro pour la topologie γ^∞ . Cette contradiction achève la démonstration de la proposition .

(5.3.) Proposition . La topologie γ coïncide sur les bornés de $C_c(T)$ avec la topologie de la convergence compacte. En particulier $C_c(T)$ et $C_\gamma(T)$

ont les mêmes bornés .

Preuve . Il suffit de prouver que si $\rho = (R_n)$ est un recouvrement dominant quelconque de T , alors sur le disque borné B^p la topologie γ est moins fine que la topologie de la convergence compacte . De fait, soit $\phi \in \Phi$, $\phi \neq 0$ et $V_\phi = \{f \in C(T) ; \|f\phi\| \leq 1\}$. Puisque le support de ϕ est dominé, il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que $S(\phi) \subset P_{n_0}$. D'autre part il existe un compact $K \subset T$ tel que $\|\phi\|_{TK} \leq \frac{1}{n_0}$. Si l'on pose $W = \{f \in C(T) ; \|f\|_K \leq \frac{1}{\|\phi\|}\}$, alors on a $W \cap B^p \subset V_\phi \cap B^p$ et l'assertion est démontrée . Ce qui démontre la proposition car la deuxième assertion est évidente .

(5.4.) Corollaire . La topologie γ^∞ est identique à la topologie sous-strictes β_0 si et seulement si l'espace T est dominé .

Preuve . La condition est suffisante car si T est dominé , alors tout K_σ est dominé dans T . Réciproquement si $\gamma^\infty = \beta_0$, alors l'espace $C_Y^\infty(T)$ admet une base dénombrable de bornés et il en est de même de $C_C^\infty(T)$. Ce qui implique que T est dominé d'après la proposition (3.6) .

Le corollaire suivant est une autre conséquence immédiate de la proposition précédente :

(5.5.) Corollaire . Tout borné dans $C_Y(T)$ est contenu dans l'adhérence d'un borné de $C_Y^\infty(T)$. En particulier $C_Y^\infty(T)$ est partout dense dans $C_Y(T)$ et a le même dual .

On sait, avec le théorème 1 de [21] que les conditions suivantes sont équivalentes : 1) L'espace $C_C(T)$ est complet, 2) l'espace $C_C(T)$ est quasi-complet, 3) T est un $k_{\mathbb{R}}$ -espace (i.e, toute application de T dans \mathbb{R} , continue sur les compacts de T , est continue) . La proposition suivante montre que ces conditions équivalentes sont nécessaires et suffisantes pour que $C_Y(T)$ soit complet ou quasi-complet .

(5.6.) Proposition . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (a) L'espace $C_Y(T)$ est complet
- (b) L'espace $C_Y(T)$ est quasi-complet
- (b') L'espace $C_C(T)$ est quasi-complet .
- (a') L'espace $C_C(T)$ est complet .
- (c) L'espace T est un $k_{\mathbb{R}}$ -espace .

Preuve . Les deux implications (a) \implies (b) et (b) \implies (b') sont évidentes ; et on sait que les assertions (a'), (b') et (c) sont équivalentes. démontrons seulement que (a') implique (a) : en effet, il est facile de voir que, pour tout $\phi \in \Phi$, l'ensemble $V_\phi = \{f \in C(T) ; \|f\phi\| \leq 1\}$ est un tonneau dans $C_C(T)$ (c'est même un tonneau dans $C_S(T)$). Il en résulte que $C_Y(T)$ admet un système fondamental de voisinages de zéro fermés dans $C_C(T)$ et que l'implication résulte d'un théorème classique sur les groupes topologiques complets .

(5.7.) Corollaire . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (a) L'espace $C_Y^\infty(T)$ est complet
- (b) L'espace $C_Y^\infty(T)$ est quasi-complet .
- (c) L'espace T est un $k_{\mathbb{R}}$ -espace dominé .

Preuve . (a) \implies (b) est évident et (c) implique (a) d'après la proposition précédente; reste à démontrer que (b) implique (c) : en effet, si $C_Y^\infty(T)$ est quasi-complet, alors il en est de même de $C_C^\infty(T)$. Donc tout disque borné fermé B de $C_C^\infty(T)$ engendre un sous-espace vectoriel de $C_C^\infty(T)$, qui est un espace de Banach pour la norme jauge . Ce qui implique facilement que $C_C^\infty(T)$ admet une base dénombrable de bornés et par suite T est dominé . Il est clair alors que l'égalité $C(T) = C^\infty(T)$ et la proposition précédente montrent que l'espace T est un $k_{\mathbb{R}}$ -espace .

6. DUAL DE $C_Y(T)$ ET $C_Y^\infty(T)$.

On a déjà remarqué que les deux espaces $C_Y(T)$ et $C_Y^\infty(T)$ ont le même dual . Plus précisément on a :

(6.1.) Théorème. *Le dual de $C_Y(T)$ (ou $C_Y^\infty(T)$) est l'espace $\mathcal{M}_Y(T)$, espace des mesures de Radon sur T , à support dominé .*

Preuve . Si L est une forme linéaire continue sur $C_Y^\infty(T)$, alors sa restriction à tout borné de $C_c^\infty(T)$ est continue . Par suite elle peut être identifiée à une mesure de Radon à support dominé d'après le théorème (4.3.) .

Réciproquement, soit μ une mesure de Radon à support dominé sur T et soit $(K_n)_{n \geq 1}$ une suite croissante de compacts contenus dans $S(\mu)$ telle que

$|\mu|(T \setminus K_n) \leq 2^{-2n}$ pour tout entier $n \geq 1$. La fonction $\phi = \sum_{n \geq 1} 2^{-2n} \phi_{K_n}$, où ϕ_{K_n} est la fonction caractéristique de K_n appartient à ϕ et, pour tout $f \in C^\infty(T)$ tel que $\|f \phi\| \leq 1$, on a $\|f\|_{K_{n+1} \setminus K_n} \leq 2^n$. Il en résulte que, pour des tels f , on a

$$\begin{aligned} \left| \int f \, d\mu \right| &\leq \int |f| \, d|\mu| = \int_{K_1} |f| \, d|\mu| + \sum_{n \geq 1} \int_{K_{n+1} \setminus K_n} |f| \, d|\mu| \\ &\leq |\mu|(K_1) \cdot \|f\|_{K_1} + \sum_{n \geq 1} 2^{-2n} \|f\|_{K_{n+1} \setminus K_n} \leq |\mu|(T) + 1 . \end{aligned}$$

Par suite la forme linéaire $f \longrightarrow \int f \, d\mu$ est continue pour γ^∞ et le théorème est démontré .

Pour toute partie H de $\mathcal{M}_t(T)$ (espace des mesures de Radon sur T), on appelle support de H , et on note $S(H)$, le plus petit fermé F de T tel que $|\mu|(T \setminus F) = 0$ pour toute mesure $\mu \in H$. Le support de H n'est autre que l'adhérence dans T de la réunion $\bigcup_{\mu \in H} S(\mu)$ des supports de toutes les mesures μ appartenant à H .

Le théorème suivant caractérise les parties γ^∞ -équivariantes de $\mathcal{M}_Y(T)$ au moyen des supports de ces parties :

(6.2.) Théorème . Soit H une partie de $M_\gamma(T)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (a) L'ensemble H est γ -équicontinu .
- (a') L'ensemble H est γ^∞ -équicontinu .
- (b) L'ensemble H est fortement borné dans $M_\gamma(T)$ et il existe une partie dominée fermée S de T telle que, pour tout recouvrement dominant $\rho = (R_n)$ de T et tout $\epsilon > 0$, il existe un compact $K \subset S$ tel que $|\mu|(|f|) \leq \epsilon$ pour tout $\mu \in H$ et tout $f \in B^\rho \cap C^\infty(T)$ avec $f \equiv 0$ sur K .
- (c) $\text{Sup} \{ |\mu|(T) , \mu \in H \}$ est fini, le support $S(H)$ est dominé et, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un compact $K \subset T$ tel que $|\mu|(T \setminus K) \leq \epsilon$ pour tout $\mu \in H$.

Preuve . Il est clair que (a) est équivalente à (a'); il suffit donc de prouver l'équivalence entre (a') et les autres assertions en suivant [18] ou [19] : (a') \implies (b) : d'abord H est évidemment borné dans le dual fort de $C_\gamma^\infty(T)$ (qui est aussi le dual fort de $C_\gamma(T)$) . D'autre part la γ^∞ -équicontinuité (ou la γ -équicontinuité) de H implique l'existence d'une fonction $\phi \in \Phi$ telle que $H \subset V_\phi^\circ$, où V_ϕ° désigne le polaire de V_ϕ (ou de $V_\phi^\infty = V_\phi \cap C^\infty(T)$) dans $M_\gamma(T)$. Comme le support $S(\phi)$ est dominé; alors pour le recouvrement $\rho = (R_n)$, il existe un entier n_0 tel que $S(\phi) \subset R_{n_0}$; et pour tout $\epsilon > 0$, il existe un compact $K \subset S(\phi)$ tel que $\|\phi\|_{T \setminus K} \leq \frac{\epsilon^\circ}{2n_0}$. Donc, si $f \in B^\rho \cap C^\infty(T)$ avec $f \equiv 0$ sur K , $\frac{2}{\epsilon} f$ appartient à V_ϕ et pour toute mesure $\mu \in H$ on a $|\mu(f)| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Il en résulte que

$|\mu|(|f|) = \mu^+(|f|) + \mu^-(|f|) \leq \epsilon$. (b) \implies (c) : il est clair que

$\text{Sup} \{ |\mu|(T) , \mu \in H \}$ est fini; et par hypothèse il existe une partie dominée fermée S de T telle que, pour le recouvrement trivial $\omega = (P_n)$ (où $P_n = T$ pour tout entier n) et pour tout $\epsilon > 0$, il existe un compact $K \subset S$ tel que $|\mu|(|f|) \leq \epsilon$ pour tout $\mu \in H$ et tout $f \in B^\omega$ avec $f \equiv 0$ sur K . Or $|\mu|(T \setminus K) = \text{Sup} \{ |\mu|(K'), K' \text{ compact } \subset T \setminus K \}$. Mais pour tout compact

$K' \subset T - K$, il existe $f \in B^\infty$ tel que $f \equiv 0$ sur K et $f \equiv 1$ sur K' .

Ce qui implique que $|\mu|(K') = \int_{K'} |f| d|\mu| \leq |\mu|(K') \leq \epsilon$. Par suite on a

$|\mu|(T \setminus K) \leq \epsilon$ pour toute mesure $\mu \in H$. Il en résulte que le support $S(H)$ est contenu dans S et l'assertion (c) est démontrée.

(c) \implies (a') : soit (K_n) une suite croissante de compacts contenus dans $S(H)$ telle que $\sup \{ |\mu|(T \setminus K_n), \mu \in H \} \leq 2^{-2n}$, pour tout entier $n \geq 1$.

La fonction $\phi = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} \phi_{K_n}$ appartient à Φ et, pour tout $f \in V_\phi^\infty = V_\phi \cap C^\infty(T)$.

on a $\|f\|_{K_{n+1} \setminus K_n} \leq 2^n$. Donc pour tout $f \in V_\phi^\infty$ et tout $\mu \in H$, on a

$$\begin{aligned} \left| \int f d\mu \right| &\leq \int |f| d|\mu| = \int_{K_1} |f| d|\mu| + \sum_{n \geq 1} \int_{K_{n+1} \setminus K_n} |f| d|\mu| \\ &\leq |\mu|(K_1) \cdot \|f\|_{K_1} + \sum_{n \geq 1} 2^{-2n} \cdot \|f\|_{K_{n+1} \setminus K_n} \leq |\mu|(T) + 1. \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration du théorème.

7. AUTRES PROPRIETES DE $C_\gamma(T)$ ET $C_\gamma^\infty(T)$.

Le théorème suivant montre bien que les deux topologies γ et γ^∞ sont des topologies strictes au sens de Collins ([8]).

(7.1.) Théorème. Les deux espaces $C_\gamma(T)$ et $C_\gamma^\infty(T)$ sont des b-espaces.

Preuve. Le corollaire (5.2) et le lemme (1.1.) montrent qu'il suffit de prouver que $C_\gamma^\infty(T)$ est un b-espace. En effet, soit γ' la topologie localement convexe la plus fine sur $C^\infty(T)$ qui coïncide avec γ^∞ sur les bornés de $C_\gamma^\infty(T)$. Il est clair que γ' est plus fine que γ^∞ ; mais ces deux topologies sur $C^\infty(T)$ donnent le même dual $M_\gamma(T)$ et par suite ont les mêmes bornés. On note $C_{\gamma'}^\infty(T)$ l'espace $C^\infty(T)$ muni de la topologie γ' . Le théorème serait prouvé si on démontre que, si V est un voisinage disqué et

fermé de zéro dans $C_Y^\infty(T)$, alors son polaire V° dans $M_Y(T)$ vérifie la condition (c) du théorème (6.2). D'abord V est un tonneau bornivore (i.e, V absorbe les bornés) dans $C_Y^\infty(T)$. Donc $\text{Sup} \{|\mu|(T), \mu \in V^\circ\}$ est fini. D'autre part, la topologie sous-stricte β_0 est une topologie de b-espace ([19]) et est plus fine que γ^∞ , et par suite plus fine aussi que γ' ([14]). Il en résulte que V° est β_0 -équicontinu et le théorème 5.1. de [19] montre que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un compact $K \subset T$ tel que $|\mu|(T \setminus K) \leq \epsilon$ pour toute mesure $\mu \in V^\circ$. Reste à démontrer que le support $S(V^\circ)$ est dominé, et il suffit d'utiliser alors la technique de la preuve du théorème (3.11) de [4]: soit en effet $\rho = (R_n)$ un recouvrement dominant de T ne dominant pas $S(V^\circ)$. Pour tout entier $n \geq 1$ on a alors $S(V^\circ) \cap (T \setminus R_n) \neq \emptyset$. Comme $S(V^\circ) = \bigcup \{S(\mu), \mu \in V^\circ\}$, il existe donc $\mu_n \in V^\circ$ tel que $S(\mu_n) \cap (T \setminus R_n) \neq \emptyset$; et d'après le lemme (4.2), il existe $f_n \in C^\infty(T)$ tel que $S(f_n) \subset T \setminus R_n$ et $\int f_n d\mu_n = n$. La suite (f_n) ainsi formée est bornée dans $C_C^\infty(T)$ et par suite elle est bornée aussi dans $C_Y^\infty(T)$ (Elle converge même vers zéro dans $C_C^\infty(T)$ et $C_Y^\infty(T)$). Comme V est un tonneau bornivore dans $C_Y^\infty(T)$; alors V° est uniformément borné sur la suite (f_n) . D'où la contradiction, et par conséquent la démonstration du théorème est achevée.

(7.2.) Corollaire. L'espace $C_Y(T)$ (resp. $C_Y^\infty(T)$) est le b-espace et l'espace b-tonnelé associés à $C_C(T)$ (resp. $C_C^\infty(T)$).

Preuve. Le fait que $C_Y(T)$ (resp. $C_Y^\infty(T)$) est le b-espace associé à $C_C(T)$ (resp. $C_C^\infty(T)$) résulte trivialement du théorème précédent et de la définition du b-espace associé à un espace localement convexe ([12], [14]). D'autre part les ensembles V_ϕ (resp. $V_\phi^\infty = V_\phi \cap C^\infty(T)$) qui forment un système fondamental de voisinages de zéro dans $C_Y(T)$ (resp. $C_Y^\infty(T)$), sont des b-tonneaux dans $C_C(T)$ (resp. $C_C^\infty(T)$). Sachant alors que tout b-espace est b-tonnelé, le théorème précédent et la définition de l'espace b-tonnelé associé à un elc ([12], [14]) montrent que $C_Y(T)$ (resp. $C_Y^\infty(T)$) est l'espace b-tonnelé associé à $C_C(T)$ (resp. $C_C^\infty(T)$).

Le théorème et le corollaire précédents permettent d'énoncer le théorème de caractérisation suivant :

(7.3.) Théorème . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) L'espace $C_c(T)$ est un b-espace .
- (b) L'espace $C_c(T)$ est b-tonnelé .
- (a') L'espace $C_c^\infty(T)$ est un b-espace .
- (b') L'espace $C_c^\infty(T)$ est b-tonnelé .
- (c) Tout K_σ dominé dans T est relativement compact .

Preuve . Ce théorème résulte immédiatement du corollaire (7.2) et de la proposition (5.2), sachant bien entendu qu'un elc $-E$ est un b-espace (resp. un espace b-tonnelé) si et seulement si E est égal à son b-espace (resp. espace b-tonnelé) associé .

Le corollaire suivant a été déjà démontré dans [15] et généralisé dans [16] :

(7.4) Corollaire . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) L'espace $C_c(T)$ est un D_b -espace .
- (a') L'espace $C_c^\infty(T)$ est un D_b -espace .
- (b) Tout K_σ dans T est relativement compact .

Preuve . L'équivalence (a) \iff (a') étant évidente; démontrons que (a') implique (b) : en effet, si $C_c^\infty(T)$ est un D_b -espace, alors il admet une base dénombrable de bornés ; donc T est dominé et par suite toute partie de T est dominée dans T . En particulier les K_σ sont dominés dans T , et l'assertion (c) du théorème (7.1) montrent qu'ils sont relativement compacts . Réciproquement, pour démontrer que (b) implique (a) ou (a'), il suffit de prouver (compte tenu du théorème précédent) que (b) implique que l'espace T est dominé . Raisonnons par l'absurde et supposons que T ne soit pas dominé . Soit alors $\rho = (R_n)$ un recouvrement dominant de T tel que $R_n \neq T$ pour tout $n \geq 1$. Ce qui fait que, pour tout entier $n \geq 1$, il existe un élément $t_n \in T - R_n$. Mais l'ensemble $\{t_n, n \geq 1\}$ est un K_σ et est donc relativement compact . Par suite il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que

$\{t_n, n \geq 1\} \subset R_{n_0}$; ce qui est absurde et le corollaire est démontré .

(7.5.) Remarque . On sait d'après [17] que la condition (c) du théorème (7.3.) est équivalente à dire que l'espace $C_c(T)$ est d-infratonnelé ([7]) et on sait aussi que la condition (b) du corollaire précédent est équivalente à dire que $C_c(T)$ est un espace DF ([21]) .

(7.6.) Corollaire . Si dans l'espace T toute partie dominée est relativement compacte - En d'autres termes si l'espace $C_c(T)$ est infratonnelé ([4], [21]) -, alors $C_c(T)$ et $C_c^\infty(T)$ sont des b-espaces .

Preuve . Ce corollaire est évident si l'on tient compte du théorème (7.3), du théorème de Warner ([4], [21]) et du fait que $C_c(T)$ et $C_c^\infty(T)$ sont simultanément infratonnelés ou non .

(7.7.) Remarque. Le corollaire précédent montre, en particulier, que si l'espace T est paracompact, ou replet, ou C-replet, ou plus généralement de type (μ) , alors $C_c(T)$ et $C_c^\infty(T)$ sont des b-espaces. Dans chacun de ces cas et dans le cas du corollaire (7.6.) la topologie γ^∞ coïncide sur $C_c^\infty(T)$ avec la topologie de la convergence compacte et est une topologie d'espace infratonnelé. Par suite dans tous ces cas l'espace $C_c^\infty(T) = C_c^\infty(T)$ est un espace de Mackey.

Pour la suite de ce paragraphe on a besoin de rappeler que l'espace $C_c(\mu T)$ est l'espace tonnelé associé à $C_c(T)$ ([3], l'espace μT est le plus petit sous-espace de type μ de νT contenant l'espace T). D'autre part on vient de démontrer que $C_\gamma(T)$ est l'espace b-tonnelé associé au même espace $C_c(T)$. Il en résulte donc que la topologie γ est moins fine que la topologie de $C_c(\mu T)$. Par suite, si l'on veut chercher une famille P de parties de νT telle que γ soit la topologie de P -convergence (i.e, topologie de la convergence uniforme sur les éléments de P), alors tout élément de cette famille devrait être une partie relativement compacte dans μT . Comme dans [16] le théorème suivant montre que, si une telle famille P existe, alors elle serait nécessairement une sous-famille de la famille des parties relativement compactes de T .

(7.8.) Théorème . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) La topologie γ est la topologie de la convergence compacte .
- (a') La topologie γ^{∞} est la topologie de la convergence compacte .
- (b) La topologie γ (ou γ^{∞}) est une topologie de \mathcal{P} -convergence, où \mathcal{P} est une famille de parties relativement compactes dans μT .

Preuve . Il est clair que (a) \iff (a') et (a') \implies (b) sont évidents ; reste à prouver que, si γ^{∞} est une topologie de \mathcal{P} -convergence (où \mathcal{P} est une famille de parties relativement compactes dans μT), alors γ^{∞} est moins fine que la topologie de la convergence compacte sur $C^{\infty}(T)$; et pour cela, il suffit de démontrer que tout élément de \mathcal{P} est une partie relativement compacte dans T . Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un élément $A \in \mathcal{P}$ tel que A ne soit pas une partie relativement compacte dans T . Pour tout compact $K \subset T$, il existe alors un élément $x_K \in A$ tel que $x_K \notin K$. Par complète régularité de T , il existe une application continue f_K de T dans $[0, 1]$ telle que $f_K(x_K) = 1$ et $f_K \equiv 0$ sur K . On obtient ainsi une suite généralisée (f_K) dans la boule unité B^{∞} de $C^{\infty}(T)$ qui converge vers zéro dans $C_c^{\infty}(T)$. Comme la topologie γ^{∞} coïncide sur B^{∞} avec la topologie de $C_c^{\infty}(T)$, alors la suite généralisée (f_K) , K décrivant l'ensemble des compacts de T , converge vers zéro pour la topologie γ^{∞} . Ce qui n'est pas le cas car on a $\|f_K\|_A = 1$ pour tout compact $K \subset T$. Cette contradiction achève la démonstration du théorème .

(7.9.) Corollaire . Si l'espace $C_{\gamma}(T)$ (ou $C_{\gamma}^{\infty}(T)$) est infratunnelé, alors la topologie γ est la topologie de la convergence compacte .

Preuve . D'abord il est facile de démontrer que, moyennant le corollaire (5.5), les deux espaces $C_{\gamma}(T)$ et $C_{\gamma}^{\infty}(T)$ sont en même temps infratunnelés ou non. D'autre part on sait avec le corollaire (7.2) que $C_{\gamma}(T)$ est l'espace b-tunnelé associé à $C_c(T)$. Comme tout espace infratunnelé est b-tunnelé, alors la topologie γ est moins fine que la topologie de l'espace infratunnelé associé à $C_c(T)$. Ce qui fait que, si $C_{\gamma}(T)$ est infratunnelé, alors il est l'espace infratunnelé associé à

$C_c(T)$; et dans ce cas γ est une topologie de convergence uniforme sur une famille de parties relativement compactes de μT (comme on le sait d'après [6]). Donc le corollaire résulte du théorème précédent.

(7.10.) Remarque. Le théorème (7.8) montre que, si $C_c(T)$ n'est pas un b-espace, alors la topologie γ associée à $C_c(T)$ n'est pas une topologie de convergence uniforme sur une famille de parties de μT ou νT . Le plan de Tychonoff \mathbf{T} ([2], [9]) donne l'exemple d'un espace complètement régulier, pseudocompact et dans lequel il existe un K_σ qui n'est pas relativement compact. Or il est facile de démontrer que \mathbf{T} est un espace dominé. Par suite $C_c(\mathbf{T})$ est un espace localement convexe qui admet une base dénombrable de bornés et qui n'est pas un b-espace ou un D_b -espace.

(7.11.) Remarque. On peut noter (comme cas analogue à celui du corollaire (7.9)) que si l'espace $C_\gamma(T)$ est séparable, alors la topologie γ est la topologie de la convergence compacte. Car dans ce cas l'espace $C_c(T)$ est séparable aussi, et le théorème 5 de [21] montre qu'il existe sur T une topologie métrisable séparable moins fine que la topologie de T . Mais alors l'espace T est c-replet ([5]) et par suite l'espace $C_c(T)$ est un b-espace d'après la remarque (7.7).

8. GENERALISATIONS AUX ESPACES $C_p(T)$.

Soit \mathcal{P} une famille de parties relativement compactes de T . On suppose que \mathcal{P} est héréditaire à gauche, stable par réunion finie et par passage à l'adhérence, et en plus recouvrant T . Une partie A de T est dite un $K_{p\sigma}$ si A est une réunion d'une suite de compacts appartenant à \mathcal{P} . On pose aussi les notations et les définitions suivantes :

- $C_p(T)$ (resp. $C_p^\infty(T)$) désigne l'espace $C(T)$ (resp. $C^\infty(T)$) muni de la topologie de convergence uniforme sur les éléments de \mathcal{P} . (On sait d'après [17] que tout borné dans $C_p(T)$ est contenu dans l'adhérence d'un borné dans $C_p^\infty(T)$).

- Un recouvrement simple ρ de T est dit p -dominant si ρ

domine tout élément de \mathcal{P} ; et une partie de T est dite p -dominée si elle est dominée par tout recouvrement p -dominant .

- $\tilde{\mathcal{P}}$ désigne la famille des parties p -dominées de T . Tout élément de $\tilde{\mathcal{P}}$ est une partie bornée de T et $\tilde{\mathcal{P}}$ est la famille saturée de \mathcal{P} ([4]) . \mathcal{P} est dite saturée si $\mathcal{P} = \tilde{\mathcal{P}}$. Il est à noter que les éléments de $\tilde{\mathcal{P}}$ ne sont pas nécessairement relativement compacts dans T ([4]).

- Φ_p désigne l'ensemble des applications bornées ϕ de T dans \mathbb{R} , à support p -dominé et telles que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un compact $K \in \mathcal{P}$ tel que $\|\phi\|_{TK} \leq \epsilon$.

- γ_p est la topologie localement convexe définie sur $C(T)$ par la famille des semi-normes $\|\cdot\|_\phi$, $\phi \in \Phi_p$. γ_p^∞ est la topologie induite sur $C^\infty(T)$ par la topologie γ_p .

- $C_{\gamma_p}(T)$ (resp. $C_{\gamma_p}^\infty(T)$) est l'espace $C(T)$ (resp. $C^\infty(T)$) muni de la topologie γ_p (resp. γ_p^∞) .

- $M_{\gamma_p}(T)$ est l'espace des mesures de Radon sur T , à support p -dominé .

Avec les notations et les définitions précédentes, les théorèmes (4.3), (6.1), (6.2), (7.1) et (7.3), et le corollaire (7.2) restent vrais lorsqu'on y remplace : c par p , dominé par p -dominé, dominant par p -dominant, γ par γ_p , γ^∞ par γ_p^∞ , compact par compact appartenant à \mathcal{P} , K_σ par $K_{\mathcal{P}\sigma}$, et relativement compact par "appartient ou appartenant à \mathcal{P} ".

Comme conséquence du théorème (7.3) adapté à la famille \mathcal{P} , on a

(8.1) Théorème . Si la famille \mathcal{P} est saturée (i.e, $\mathcal{P} = \tilde{\mathcal{P}}$), alors l'espace $C_{\mathcal{P}}(T)$ est un b -espace infratonnelé .

Preuve . En effet, $C_{\mathcal{P}}(T)$ est un b -espace d'après le théorème (7.3) et est infratonnelé d'après le corollaire 1 du théorème 1 de [6] .

(8.2) Corollaire . L'espace $C_S(T)$ est un b -espace .

Preuve . Ce corollaire est évident car la famille des parties finies de T est saturée comme l'a montré la proposition (2.2) . (voir [7])

(8.3.) Remarque . Le corollaire précédent montre, en particulier, que l'espace $C_S(T)$ est un b' -espace . Par suite le dual fort de $C_S(T)$ est complet - Ce résultat est dû à Gulick ([11]) .

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] A. BADRIKIAN, Séminaire sur les fonctions aléatoires linéaires et mesures cylindriques, Lecture notes in Mathematics, 139 (1970).
- [2] H. BUCHWALTER, Problèmes de complétion topologiques, D.E.A. Math. Pures, Ed. Ronéotypée, Lyon, 1969-1970.
- [3] H. BUCHWALTER, Parties bornées d'un espace topologique complètement régulier, séminaire Choquet, 9, n° 14, 15 pages (1969-1970).
- [4] H. BUCHWALTER, Sur le théorème de Nachbin-Shirota, J. Math. pures et app. 51, 399-418 (1972).
- [5] H. BUCHWALTER, Topologies et compactologies, Pub. Dép. Math., Lyon, 6-2, 1-74 (1969).
- [6] H. BUCHWALTER et K NOUREDDINE, Topologies localement convexes sur les espaces de fonctions continues, C.R.A.S. Paris. 274 (A), 1931 - 1934 (1972).
- [7] BUCHWALTER H. et J. SCHMETS, Sur quelques propriétés de l'espace $C_S(T)$, J. Math. pures et appl. 52, p. 337-552 (1973).
- [8] H. S. COLLINS, Strict, Weighted, and mixed topologies, and applications, à paraître.
- [9] L. GILLMAN et M. JERISON, Rings of continuous functions, University series in higher Math. Van Nostrand, Princeton N.J. (1960).
- [10] D. GULICK, The σ -compact - open topology and its relatives, Math. scand. 30, p. 159-176. (1972).
- [11] GULICK D., Duality theory for the topology of simple convergence, à paraître dans J. Math. pures et appl.
- [12] K. NOUREDDINE, Nouvelles classes d'espaces localement convexes, C.R. Acad. Sc. Paris., 276 (A), p. 1209-1212 (1973).

- [13] K. NOUREDDINE, Espaces du type D_b , *C. R. Acad. Sc. Paris*, 276 (A), p. 1301-1303 (1973).
- [14] K. NOUREDDINE, Nouvelles classes d'espaces localement convexes. 2e coll. NAnal. Fonct. Bordeaux, *Pub. Dép. Math. Lyon*, 10-3, p. 259-277 (1973).
- [15] K. NOUREDDINE, Note sur les espaces D_b , *Math. Ann.* 219-, p. 97-103 (1976).
- [16] K. NOUREDDINE, et W. HABRE, Topologies P-strictes, à paraître.
- [17] J. SCHMETS, Espaces associés à un espace linéaire à semi-normes, application aux espaces de fonctions continues, *Notes du cours tenu à la réunion d'école d'été d'analyse fonctionnelle (20 août - 8 sept. 1973) Faculté des sciences de l'Université Libanaise - Hadath - Beyrouth (Liban)*.
- [18] J. SCHMETS et J. ZAFARANI, Topologie stricte faible et mesures discrètes, *Bull. Soc. Roy. Liège*, 43, p. 405-418, (1974).
- [19] F.D. SENTILLES, Bounded continuous functions on a completely regular space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, p. 168, 311-336 (1972).
- [20] V.S. VARADARAJAN, Measures on topological spaces, *Amer. Math. Soc. Transl.* 48, p. 161-228 (1965)?
- [21] Warner, S. The topology of compact convergence on continuous functions spaces, *Duke Math. J.* 25, p. 265-282 (1958).