PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

AUGUSTIN BANYAGA

Sur la structure de certains groupes de difféomorphismes

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1976, tome 13, fascicule 3
, p. 57-61
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1976__13_3_57_0>

Publication du
Département de
Mathématiques
Lyon 1976 t. 13-3

SUR LA STRUCTURE DE CERTAINS GROUPES DE DIFFEOMORPHISMES

par Augustin BANYAGA

Soit M une variété différentiable de classe C^∞ paracompacte et connexe et soit $\mathrm{Diff}^k_K(M)$ le groupe des difféomorphismes de M de classe C^k, à support dans un compact fixe K de M, muni de la C^k-topologie. Le groupe des difféomorphismes de classe C^k à support compact noté $\mathrm{Diff}^k(M)$, est la limite directe des $\mathrm{Diff}^k_K(M)$. Désignons par $\mathrm{Diff}^k(M)_o$ la composante connexe de l'identité dans $\mathrm{Diff}^k(M)$.

Pour toute forme différentielle α de classe C^∞ sur M, on note par $\mathrm{Diff}^\infty_\alpha(M)$, resp. $\mathrm{Diff}^\infty_\alpha(M)_o$, le sous-groupe de $\mathrm{Diff}^\infty(M)$, resp. de $\mathrm{Diff}^\infty(M)_o$ formé des difféomorphismes qui laissent invariante la forme α Dans la suite, nous nous intéresserons au cas où α est une forme-volume, une forme symplectique ou une forme de contact.

Rappelons qu'une *forme-volume* sur une variété différentiable de dimension n est une n-forme partout non nulle, qu'une *forme symplectique* sur une variété différentiable de dimension paire 2n est une 2-forme fermée Ω telle que $\Omega^n = \Omega\wedge\ldots\wedge\Omega$ soit une forme-volume et, enfin, qu'une 1-forme ω sur une variété différentiable de dimension impaire 2n+1 s'appelle une *forme de contact* si $\omega\wedge(d\omega)^n$ est une forme-volume. Soit ω une forme de contact sur une variété différentiable M.

On sait qu'alors sur M, il existe un champ de vecteurs X sans singularité tel que $i(X)\omega = 1$ et $i(X)d\omega = 0$, où $i(X)$ désigne le produit intérieur par X. On dit que ω est une forme de contact *régulière* si l'orbite de X est le cercle S^1 .

Le but de cet exposé est d'énoncer quelques résultats sur la structure des groupes de difféomorphismes qui préservent une forme-volume, une forme symplectique, ou une forme de contact régulière.

Plus généralement, si g est une structure géométrique sur une variété différentiable M, on peut se poser le problème d'étudier la structure algébrique du groupe $\mathrm{Diff}_g(M)$ des automorphismes de cette structure. Les résultats obtenus dans ce domaine sont rares. Nous signalons ici un résultat sur la structure du groupe des automorphismes de T^n-fibrés principaux (T^n désignant le tore $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ de dimension n).

Un groupe G est dit parfait s'il est égal à son sous-groupe des commutateurs $[G,G]$, c.à.d. si son abélianisé $G/[G,G]$, noté $H_1(G)$, est trivial. Un groupe G est dit simple s'il ne possède pas d'autres sous-groupes normaux que les sous-groupes triviaux.

Le résultat fondamental suivant est dû à Mather [1] et à Thurston [2] pour le cas C^∞.

THEOREME. 1. - *Soit* M *une variété différentiable paracompacte et connexe de dimension* n. *Pour* $0 \leqslant k \leqslant \infty$, $k \neq n+1$, *le groupe* $\mathrm{Diff}^k(M)_0$ *est un groupe simple.*

En adaptant judicieusement les techniques de démonstration du théorème 1 (cas C^∞), Thurston [3] a obtenu le résultat suivant :

THEOREME 2. - *Si* θ *est une forme-volume sur une variété différentiable close et connexe* M *de dimension* n, *alors si* $\widetilde{\mathrm{Diff}^\infty_\theta(M)_o}$ *est le revêtement universel du groupe* $\mathrm{Diff}^\infty_\theta(M)_o$, *on a :*

(i) $H_1(\widetilde{\mathrm{Diff}^\infty_\theta(M)_o}) \cong H^{n-1}(M,\mathbb{R})$ *et* $H_1(\mathrm{Diff}^\infty_\theta(M)_o) \cong$ *quotient de* $H^{n-1}(M,\mathbb{R})$.

(ii) $[\widetilde{\mathrm{Diff}^\infty_\theta(M)_o}, \widetilde{\mathrm{Diff}^\infty_\theta(M)_o}]$ *est parfait et* $[\mathrm{Diff}^\infty_\theta(M)_o, \mathrm{Diff}^\infty_\theta(M)_o]$ *est simple.*

En raffinant encore les techniques de démonstration du théorème 2 nous avons obtenu le résultat suivant [4] :

THEOREME 3. - *Si* Ω *est une forme symplectique sur une variété close et connexe* M, *alors :*

(i) $H_1(\widetilde{\mathrm{Diff}^\infty_\Omega(M)_o}) \cong H^1(M,\mathbb{R})$ *et* $H_1(\mathrm{Diff}^\infty_\Omega(M)_o) \cong$ *quotient de* $H^1(M,\mathbb{R})$;

(ii) $[\widetilde{\mathrm{Diff}^\infty_\Omega(M)_o}, \widetilde{\mathrm{Diff}^\infty_\Omega(M)_o}]$ *est parfait et* $[\mathrm{Diff}^\infty_\Omega(M)_o, \mathrm{Diff}^\infty_\Omega(M)_o]$ *est simple.*

Au cours de la démonstration du théorème 3, on obtient le résultat important suivant :

THEOREME 4. - *Soit* $\Omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 + \dots + dx_{2n-1} \wedge dx_{2n}$ *la forme symplectique canonique de* R^{2n}. *On a :*

(i) $H_1(\widetilde{\mathrm{Diff}^\infty_\Omega(\mathbb{R}^{2n})_o}) \cong \mathbb{R}$ *et* $H_1(\mathrm{Diff}^\infty_\Omega(\mathbb{R}^{2n})) =$ *quotient de* $\mathbb{R}$

(ii) $[\widetilde{\mathrm{Diff}^\infty_\Omega(\mathbb{R}^{2n})_o}, \widetilde{\mathrm{Diff}^\infty_\Omega(\mathbb{R}^{2n})_o}]$ *est parfait et* $[\mathrm{Diff}^\infty_\Omega(\mathbb{R}^{2n})_o, \mathrm{Diff}^\infty_\Omega(\mathbb{R}^{2n})_o]$ *est simple.*

Le résultat suivant se déduit du théorème 3 et du fait qu'une variété munie d'une forme de contact régulière est l'espace total d'un fibré S^1-principal dont la base porte une forme symplectique à périodes entieres.

THEOREME 5. - *Si* ω *est une forme de contact régulière sur une variété différentiable close et connexe* M *, on a :*

(i) $H_1(\mathrm{Diff}^\infty_\omega(M)_o) \cong$ *quotient de* S^1

(ii) $\widetilde{\mathrm{Diff}}^\infty_\omega(M)_o \cong [\widetilde{\mathrm{Diff}}^\infty_\omega(M)_o, \widetilde{\mathrm{Diff}}^\infty_\omega(M)_o] \times \mathbb{R}$

(iii) $[\widetilde{\mathrm{Diff}}^\infty_\omega(M)_o , \widetilde{\mathrm{Diff}}^\infty_\omega(M)_o]$ *et* $[\mathrm{Diff}^\infty_\omega(M)_o, \mathrm{Diff}^\infty_\omega(M)_o]$ *sont parfaits.*

Soit G un groupe de Lie et soit $\pi : M \to B$ un fibré G-principal. Les difféomorphismes équivariants de M (i.e. les difféomorphismes qui commutent avec l'action de G sur M) se projettent sur les difféomorphismes de la base. Soit $\mathrm{Diff}^k_G(M)_o$ la composante connexe de l'identité dans le groupe des difféomorphismes équivariants de classe C^k , on a un homomorphisme surjectif $p : \mathrm{Diff}^k_G(M)_o \to \mathrm{Diff}^k(B)_o$. En étudiant le noyau de cette projection et en utilisant le théorème I, nous obtenons le résultat suivant [5] :

THEOREME 6. - *Soit* $M \to B$ *un* T^n *fibré-principal, où* M *et* B *sont des variétés différentiables closes et connexes. Supposons que* M = *(dimension de* M*) soit supérieure ou égale à* $2n$*. Alors, pour tout* $k \neq m - n + 1$, $1 \leqslant k \leqslant \infty$ *, on a :*

(i) $H_1(\mathrm{Diff}^k_{T^n}(M)_o)$ *est isomorphe à un quotient d'un sous-groupe de* $H^1(B,Z)$.

(ii) si le fibré $M \to B$ *est trivial, ou si* $\pi_1(\mathrm{Diff}^k(B)_o) = 0$ *, alors le groupe* $\mathrm{Diff}^k_{T^n}(M)_o$ *est un groupe parfait.*

BIBLIOGRAPHIE. -

[1] MATHER J.M., Commutators of diffeomorphisms, I et II, *Comment. Math. Helv. 49* (1974) p. 512-528, et 50 (1975), p. 33-40.

[2] THURSTON W., Foliations and group of diffeomorphisms, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 80 (1974), p. 304-307.

[3] THURSTON W., On the structure of volume preserving diffeomorphisms, *Preprint*.

[4] BANYAGA A., Thèse, *Université de Genève*, 1976.

[5] BANYAGA A., On the structure of the group of equivariant diffeomorphisms, *Preprint*.

A. BANYAGA
Université de Genève
Section de Mathématiques
2-4 rue du Lièvre
CH 1211 GENEVE 24
SUISSE