PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

ALI DEAIBES

Espaces uniformes et espaces de mesures

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1975, tome 12, fascicule 4
, p. 1-166

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1975__12_4_A1_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1975 t.12-4

ESPACES UNIFORMES ET ESPACES DE MESURES

par Ali DEAIBES (*)

Ce travail consacré aux espaces uniformes, notés (X,μ), n'utilise pratiquement que des espaces uniformes séparés. Cependant dans certains cas, et en général à l'intérieur de démonstrations, on rencontrera des espaces uniformes non séparés, la plupart du temps écartisables.

Notations usuelles. - On désigne par $\mathbb{R}$ l'espace uniforme des nombres réels, muni de sa structure uniforme habituelle de groupe topologique abélien. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de la structure uniforme produit. Pour tout espace uniforme (X,μ), on désigne par $\mathcal{U}(X,\mu)$ ou $\mathcal{U}(X)$ l'espace vectoriel des fonctions uniformément continues sur (X,μ) à valeurs dans $\mathbb{R}$, et par $\mathcal{U}^\infty(X,\mu)$ ou $\mathcal{U}^\infty(X)$ l'algèbre des fonctions bornées de $\mathcal{U}(X)$. L'ensemble des noyaux $Z(f) = f^{-1}(0)$ associés aux fonctions $f \in \mathcal{U}(X)$ est noté $Z(X,\mu)$ ou $Z(X)$ et l'ensemble des conoyaux $Coz(f) = X \setminus Z(f)$ est noté $Coz(X,\mu)$ ou $Coz(X)$. On désigne par X l'espace topologique associé à (X,μ).

A la structure uniforme μ sur X, considérée comme fixée, on associe plusieurs autres structures uniformes : la structure uniforme $p\mu$ définie par les recouvrements finis de μ ; la structure uniforme $e\mu$ de Shirota définie par les recouvrements dénombrables de μ ; la struc-

(*) Ce mémoir est la thèse de doctorat ès-sciences mathématiques présentée par l'auteur.

ture uniforme faible $\sigma\mu$ définie par $\mathcal{U}(X)$. L'espace $\sigma X = (X,\sigma\mu)$ est appelé l'affaibli de (X,μ) et (X,μ) est dit espace faible lorsque $\mu = \sigma\mu$. La plus fine structure uniforme sur l'espace topologique (complètement régulier) X, compatible avec sa topologie, est notée $\theta\mu$ et son affaiblie $\sigma\theta\mu$ notée $\upsilon\mu$; on dit parfois que $\upsilon\mu$ est la structure uniforme de replétion. L'espace uniforme (X,μ) est dit fin si $\mu = \theta\mu$; un exemple en est donné avec un espace topologique complètement régulier T que l'on considère comme espace uniforme fin quand on le munit de sa structure uniforme universelle θ. A côté de $\mathcal{U}(X)$ et $\mathcal{U}^{\infty}(X)$, on introduit l'algèbre des fonctions continues sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$, notée $\mathscr{C}(X) = \mathcal{U}(X,\theta\mu)$, ainsi que sa sous-algèbre des fonctions bornées $\mathscr{C}^{\infty}(X) = \mathcal{U}^{\infty}(X,\theta\mu)$. On note encore $\beta\mu$ la structure uniforme $p\theta\mu$. En désignant comme d'habitude par $\widehat{(X,\mu)}$ ou quelquefois $(\hat{X},\mu)$, le complété de (X,μ), on voit que $\widehat{pX} = (\hat{X},p\mu)$ est le compactifié de Samuel de (X,μ) et $\beta X = (\hat{X},\beta\mu)$ est le compactifié de Stone-Čech de (X,μ). On a d'ailleurs les inclusions topologiques $X \subset \hat{X} \subset \widehat{\sigma X} \subset \widehat{pX}$.

Du point de vue compactologique on désigne par $\mathcal{H}(X,\mu)$ ou $\mathcal{H}$ la compactologie uniformément équicontinue formée des parties $H \subset \mathcal{U}(X,\mu)$ qui sont simplement bornées, uniformément équicontinues et simplement fermées. De même dans l'algèbre $\mathcal{U}^{\infty}(X,\mu)$ on désigne par $\mathcal{H}^{\infty}(X,\mu)$ ou $\mathcal{H}^{\infty}$ la famille des parties $H \in \mathcal{H}$ qui sont uniformément bornées. Il convient alors de rappeler que la structure uniforme μ est celle de la $\mathcal{H}$-convergence sur $\mathcal{U}(X)$; c'est aussi celle de la

$\mathcal{H}^\infty$-convergence sur $\mathcal{U}^\infty(X)$ [7]. Cela met clairement en évidence le rôle d'"objet dual de X" de chacun des espaces $\mathcal{U}(X)$ et $\mathcal{U}^\infty(X)$.

Résumé du travail. – Le chapitre 1 a pour but de préciser le rôle de la pseudo-dualité $(X, \mathcal{U}(X))$, en caractérisant l'ensemble $a(X)$ des sous-espaces vectoriels A de $\mathbb{R}^X$ tels qu'il existe une structure uniforme séparée μ sur X pour laquelle $\mathcal{U}(X,\mu) = A$. Le théorème est obtenu en (1.2.9). Si A est élément de $a(X)$ on identifie le couple (X,A) à l'espace uniforme (X,σ_A), où σ_A est la structure uniforme définie par A.

Le chapitre 2 est consacré à l'exposition de classes variées d'espaces uniformes qui vont intervenir dans la suite.

Le chapitre 3 est relatif au "problème de Mackey". On fixe l'espace uniforme (X,μ) et on désigne par $\mathcal{K}$ (resp. $\mathcal{K}^\infty$) l'ensemble des structures uniformes ν sur X telles que $\mathcal{U}(X,\nu) = \mathcal{U}(X)$ [resp. $\mathcal{U}^\infty(X,\nu) = \mathcal{U}^\infty(X)$]. L'ensemble $\mathcal{K}$ (resp. $\mathcal{K}^\infty$) est muni de l'ordre naturel défini par la relation de finesse. Le problème de Mackey dans les espaces uniformes, posé par R. PUPIER, consiste à savoir si l'ensemble $\mathcal{K}$ (resp. $\mathcal{K}^\infty$) possède un élément maximum. En fait la réponse à cette question est négative ; toutefois $\mathcal{K}$ (resp. $\mathcal{K}^\infty$) est un ensemble ordonné inductif. Lorsque $\mathcal{K}$ (resp. $\mathcal{K}^\infty$) possède un élément maximum $\tau\mu$ (resp. $\tau^\infty\mu$), nous dirons que (X,μ) est un m-espace (resp. m^∞-espace).

Le chapitre 4 se préoccupe de mesures sur les espaces uniformes.

L'espace uniforme (X,μ) étant fixé, on désigne par $E(X)$ l'espace vectoriel libre engendré par X, que l'on peut considérer comme l'espace des mesures à support fini sur X (mesures moléculaires de [2]). On construit ainsi canoniquement des dualités séparantes $(E(X), \mathcal{U}(X))$ et $(E(X), \mathcal{U}^\infty(X))$, permettant de placer sur $E(X)$ les topologies localement convexes de la $\mathcal{H}$-convergence et de la $\mathcal{H}^\infty$-convergence. On note $(E(X), \mathcal{H})$ ou même seulement $E(X)$, et $(E(X), \mathcal{H}^\infty)$ ou $E^\infty(X)$, les elc obtenus. On introduit alors les complétés respectifs $M(X) = M(X,\mu)$ et $M^\infty(X) = M^\infty(X,\mu)$ des espaces $E(X)$ et $E^\infty(X)$. D'après le théorème de complétion de Banach-Grothendieck, on reconnaît en $M(X)$ et $M^\infty(X)$ les duals compactologiques $(\mathcal{U}(X), \mathcal{H})^*$ et $(\mathcal{U}^\infty(X), \mathcal{H}^\infty)^*$ des espaces compactologiques $(\mathcal{U}(X), \mathcal{H})$ et $(\mathcal{U}^\infty(X), \mathcal{H}^\infty)$.

En suivant [7] on introduit l'ensemble $\mathrm{Mod}(X) = \mathrm{Mod}(X,\mu)$ des formes linéaires modulaires (ou caractères) compactologiques sur $\mathcal{U}^\infty(X)$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments $m \in M^\infty(X)$ tels que $m(1) = 1$ et $m(|f|) = |m(f)|$ pour toute $f \in \mathcal{U}^\infty(X)$. On note $\mathrm{Mod}_\delta(X) = \mathrm{Mod}_\delta(X,\mu)$ l'ensemble des $m \in \mathrm{Mod}(X)$ tels que $m(f) \in f(X)$ pour toute $f \in \mathcal{U}^\infty(X)$.

On désigne alors par $M_\sigma(X)$ l'espace vectoriel des formes linéaires σ-régulières m sur $\mathcal{U}^\infty(X)$, c'est-à-dire telles que $m(f_n) \to 0$ pour toute suite (f_n) de $\mathcal{U}^\infty(X)$ telle que $f_n \downarrow 0$. En remplaçant la suite (f_n) par une suite généralisée (f_i) on obtient l'espace $M_\tau(X)$ des formes linéaires τ-régulières sur $\mathcal{U}^\infty(X)$. Enfin l'espace des formes linéaires m sur $\mathcal{U}^{\infty}(X)$, dont la restriction à la boule unité de $\mathcal{U}^{\infty}(X)$ est continue pour la topologie de la convergence compacte sur X, est noté $M_t(X)$; c'est l'espace des formes linéaires t-régulières.

Les espaces $M(X)$, $M^{\infty}(X)$, $M_{\sigma}(X)$, $M_{\tau}(X)$ et $M_t(X)$ ainsi définis s'identifient tous à des sous-espaces de l'espace $\mathrm{Rad}(\widehat{pX})$ des mesures de Radon sur le compactifié de Samuel $\widehat{pX}$ de X, et leurs éléments sont parfois appelés mesures sur X. On a les inclusions

$$X \subset M_t(X) \subset M_{\tau}(X) \subset M_{\sigma}(X) \subset \mathrm{Rad}(\widehat{pX})$$

$$X \subset \mathrm{Mod}_{\delta}(X) \subset \mathrm{Mod}(X) \subset M(X) \subset M^{\infty}(X) \subset \mathrm{Rad}(\widehat{pX})$$

L'espace (X,μ) est un sous-espace uniforme de chacun des espaces $M(X)$ et $M^{\infty}(X)$ dont l'adhérence est précisément $\mathrm{Mod}(X)$ et la G_{δ}-adhérence $\mathrm{Mod}_{\delta}(X)$. On en déduit que $\mathrm{Mod}(X)$ est le complété de (X,μ), tandis que $\mathrm{Mod}_{\delta}(X)$ s'identifie à son δ-complété ([7] et [14]). D'ailleurs le δ-complété $\mathrm{Mod}_{\delta}(X)$ de (X,μ) définit exactement l'ensemble des caractères compactologiques σ-réguliers de $\mathcal{U}^{\infty}(X)$, autrement dit $\mathrm{Mod}_{\delta}(X) = \mathrm{Mod}(X) \cap M_{\sigma}(X)$.

L'ensemble des recouvrements dénombrables de X extraits de la famille $\mathrm{Coz}(X,\mu)$ des conoyaux de X, définit une base d'une structure uniforme $\mu_{\circ}$ sur X telle que $M^{\infty}(X,\mu_{\circ}) = M_{\sigma}(X,\mu_{\circ}) = M_{\sigma}(X,\mu)$ (théorème (4.1.10)). Une conséquence directe de cette égalité est que toute mesure $m \in M^{\infty}(X)$ est uniformément approchée sur les $H \in \mathscr{H}(X,\mu_{\circ})$ par des mesures moléculaires.

Lorsque l'espace (X,μ) est métrisable et complet, on reconnaît en $M^{\infty}(X)$ l'espace $M_t(X)$ qui coïncide aussi avec l'espace $M_t(X,\theta\mu)$. Ceci permet de dégager une notion de support, utile dans l'étude de l'espace $M(X)$.

On désigne ainsi par $\check{M}(X) = \check{M}(X,\mu)$ l'espace des mesures de Radon sur $\widehat{pX}$ dont le support est contenu dans le complété $\hat{X}$ de X. L'étude des espaces X tels que $M(X) = \check{M}(X)$, dits espaces de type (B), et qui comprennent tous les espaces fins, se fait en utilisant les systèmes projectifs d'espaces métrisables complets introduits en (4.3). Deux autres espaces sont en rapport étroit avec $\check{M}(X)$; à savoir le dual de Riesz $M_{\rho}(X)$ du treillis vectoriel $\mathcal{U}(X)$ et l'espace $M_{\cup}(X)$ des formes linéaires σ-régulières sur $\mathcal{U}(X)$.

Plusieurs auteurs ont évidemment déjà travaillé sur ces espaces, en étudiant leurs liaisons respectives. Citons [3] et [8] pour le cas des espaces complètement réguliers, identifiés aux espaces uniformes fins, et [1] et [35] pour le cas général.

Il est clair que les problèmes examinés aux chapitres 3 et 4, qui amènent à dégager des classes particulières d'espaces (m-espaces, espaces de type (B)), nécessitent une étude préliminaire systématique des espaces uniformes. Ce qui nous ramène au chapitre 2. Cette étude est faite en prenant en première considération la notion de séparation normale, déjà intéressante dans le cas topologique. Il apparaît ainsi que les espaces uniformes pour lesquels les suites régulières sont uniformément régulières (1.2.3), et qui sont de plus tels que $\mathcal{U}(X)$ sépare $Z(X,\mu)$, sont les mieux adaptés à notre étude : il s'agit là des espaces de type (A) introduits en (2.3.3). Par exemple, tous les exemplaires de m-espaces que l'on donne sont de type (A).

A chaque espace uniforme (X,μ), on peut associer un espace uniforme aX de type (A), qui vérifie l'égalité topologique
$\mathrm{Mod}_\delta(X,\mu) = \mathrm{Mod}(aX)$.

Lorsque (X,μ) est lui-même de type (A), alors la structure uniforme $\mu_\circ$ est élément de $\mathcal{K}$ et on a $M_\rho(X) = M_\cup(X) = \check{M}(X,\mu_\circ)$. De plus $M(X,\nu) = \check{M}(X,\nu)$ pour toute structure uniforme $\nu \in \mathcal{K}$ plus fine que $\mu_\circ$ (4.5.10).

En appliquant ces résultats au cas d'un espace mesurable (X,Σ), où Σ est une tribu sur X que l'on peut supposer séparant les points de X, on trouve que l'espace A des fonctions mesurables partout définies sur X est un élément de l'ensemble $a(X)$. De plus $M^\infty(X,\sigma_A)$ s'identifie à l'espace $ca(X,\Sigma)$ des mesures signées sur (X,Σ), tandis que l'espace commun $M(X,\sigma_A) = M_\rho(X) = M_\cup(X) = \check{M}(X)$ s'identifie à l'espace $\lambda(X,\Sigma)$ des mesures signées sur (X,Σ) qui intègrent toutes les fonctions de A.

Une autre application est faite avec les espaces précompacts de type (A). On montre qu'on obtient là la "bonne" généralisation au cas uniforme des espaces complètement réguliers pseudocompacts.

Enfin l'égalité $M(X) = \check{M}(X)$, qui définit la classe des espaces de type (B), permet d'aborder dans cette classe le problème délicat des mesures produits, problème que l'on formule ainsi : Etant donnés deux espaces (X,λ) et (Y,μ) de type (B) et une structure uniforme ν de type (B) sur le produit $X\times Y$, plus fine que la structure uniforme produit $\lambda\times\mu$ (qui peut ne pas être de type (B)), sous quelles conditions existe-t-il, pour tout couple $m_1 \in M(X)$ et $m_2 \in M(Y)$, une seule mesure $m \in M(X\times Y,\nu)$ telle que

$$\lim_{k \to +\infty} m\,[\, f^{(k)} \otimes g^{(k)}] = m_1(f)\; m_2(g)$$

pour toutes $f \in \mathcal{U}(X)$ et $g \in \mathcal{U}(Y)$ (avec pour $f^{(k)}$ et $g^{(k)}$ les fonctions tronquées à la hauteur k de f et g) ? On obtient la caractérisation suivante : il faut et il suffit que les compacts-supports soient les mêmes dans les deux complétés $(X\times Y, \lambda\times\mu)^{\wedge}$ et $(X\times Y, \nu)^{\wedge}$, ce qui sous-entend déjà l'égalité ensembliste (en un sens à préciser, voir (4.7.1)) des complétés précédents. Une application est donnée dans le cadre topologique : le problème de commutation topologique $\upsilon(S\times T) = \upsilon S \times \upsilon T$ (qui rappelons-le n'est pas résolu dans le cas général) possède une réponse positive chaque fois que l'espace $\mathscr{C}(S\times T)$ est l'algèbre sur $S\times T$, au sens de (2.3.1), engendrée par l'espace $\mathscr{C}(S) \otimes \mathscr{C}(T)$.

CHAPITRE 1

LA PSEUDO-DUALITE (X,A)

INTRODUCTION. - L'étude des espaces topologiques T au moyen de l'espace $\mathscr{C}(T)$ des fonctions continues réelles (ou complexes) sur T a donné des résultats intéressants. Nombreux sont ceux qui ont travaillé dans ce sens ; dans ce domaine on est amené naturellement à utiliser une classe d'espaces topologiques : celle des espaces complètement réguliers. Or il est bien connu que ce sont les espaces uniformisables, i.e. dont la topologie est définie par une structure uniforme. Cela nous amène à franchir un pas de plus et à faire une étude systématique des espaces uniformes (X,μ) au moyen de l'espace $\mathscr{U}(X,\mu)$ des fonctions réelles uniformément continues définies sur X. Naturellement on s'inspire des résultats et des techniques déjà élaborés pour les espaces topologiques complètement régulier ; mais nous verrons que l'écart est grand entre les deux catégories ; nous identifierons les espaces complètement réguliers aux espaces uniformes *fins*.

Si (X,μ) est un espace uniforme, il est possible de construire plusieurs structures uniformes ν sur X de telle façon que $\mathscr{U}(X,\nu) = \mathscr{U}(X,\mu)$. On sait par contre que $\mathscr{C}(X)$ caractérise une topologie complètement régulière. Cette situation n'est pas la moindre des différences entre les deux théories et elle suggère une autre analogie avec les espaces vectoriels topologiques localement convexes, pour lesquels on peut trouver plusieurs topologies localement convexes fournisssant le même dual topologique.

On étudie les relations entre les espaces uniformes (X,μ) et les espaces vectoriels $\mathcal{U}(X,\mu)$ sous le nom de pseudo-dualité ; celle-ci est plus généralement définie par la donnée d'un ensemble X, d'un espace vectoriel réel A et d'une application $\varphi : X \times A \to \mathbb{R}$ tels que φ soit linéaire par rapport à la deuxième variable, le tout assorti d'une condition de séparation pour une pseudo-dualité séparante (cf. 1.1). On identifie A à une famille de fonctions sur X par la formule $f(x) = \varphi(x,f)$, pour $x \in X$; de même on identifie X à une famille de formes linéaires sur A par la formule $x(f) = \varphi(x,f)$, pour $f \in A$. Généralement il n'existe pas de structure uniforme ν sur X telle que $A = \mathcal{U}(X,\nu)$, ce qui rompt le parallélisme avec les espaces vectoriels topologiques.

On se propose donc de caractériser les sous-espaces vectoriels A de $\mathbb{R}^X$ pour lesquels il existe une structure uniforme séparée ν sur X telle que $\mathcal{U}(X,\nu) = A$. On désigne par $\mathcal{a}(X)$ l'ensemble de ces espaces vectoriels. On fixe un élément A dans $\mathcal{a}(X)$ et on s'intéresse ensuite aux structures uniformes ν sur X telles que $\mathcal{U}(X,\nu) = A$; autrement dit on étudie l'ensemble $\mathcal{K}(X,A)$ (en abrégé $\mathcal{K}$) des structures uniformes sur X compatibles avec la pseudo-dualité (X,A). On munit $\mathcal{K}$ d'un ordre naturel $(\leqslant)$, à savoir l'ordre défini par la relation de finesse sur l'ensemble des structures uniformes sur X ; et $\mathcal{K}$ muni de cet ordre est inductif, mais il ne possède pas en général de plus grand élément, ce qui serait l'analogue du théorème de Mackey pour les elc. Cela nous conduit à faire une classification des espaces uniformes afin de dégager certaines classes d'espaces pour lesquels $\mathcal{K}$ possède effectivement un plus grand élément. Cette classification est obtenue par une étude des propriétés de $\mathcal{U}(X,\nu)$ et des propriétés *uniformément locales* qui donne des résultats convenables sur les problèmes ainsi posés et éclaire également d'autres situations étudiées à ce jour par l'école américaine ou l'école tchécoslovaque ([18], [24]).

1.0 NOTIONS DE BASE ET TERMINOLOGIE.

Nous allons utiliser systématiquement les trois méthodes classiques de définition des structures uniformes ; aussi convient-il de rappeler brièvement leurs liaisons.

Si $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ et $\mathcal{V} = (V_j)_{j \in J}$ sont deux recouvrements d'un ensemble X, $\mathcal{U} \wedge \mathcal{V}$ est le recouvrement $(U_i \cap V_j)_{i,j \in I\times J}$. Pour toute partie $Y \subset X$, l'*étoile* de Y relativement à un recouvrement $\mathcal{U}$ est l'ensemble $St(Y,\mathcal{U}) = \bigcup_{U_i \cap Y \neq \emptyset} U_i$. On désigne par $\mathcal{U}^*$ le recouvrement $(St(U_i,\mathcal{U}))_{i \in I}$. On connaît la définition d'un raffinement de $\mathcal{U}$; on dira que $\mathcal{V}$ est un $*$-raffinement de $\mathcal{U}$ si $\mathcal{V}^*$ est un raffinement de $\mathcal{U}$. On utilisera constamment les propriétés des graphes (ou relations) sur X, i.e. des parties de $X \times X$; en particulier les notions de graphe symétrique, graphe composé, coupes, etc... Enfin les écarts sur X permettront d'aborder la troisième définition des structures uniformes. Si d est un tel écart, pour tout réel $\alpha > o$ on considère le graphe $B(d,\alpha) = \{(x,y) \in X \times X / d(x,y) < \alpha\}$. La coupe de $B(d,\alpha)$ pour $x \in X$ est la boule (ouverte) relative à d, de centre x et de rayon α, notée $B(d,x,\alpha)$. Enfin, si d et d' sont deux écarts, $d \vee d'$ désigne l'écart $(x,y) \longmapsto \mathrm{Max}(d(x,y),d'(x,y))$, et on dira que d' est dominé par d si pour tout $\varepsilon > o$ il existe $\alpha > o$ tel que $d(x,y) < \alpha$ implique $d'(x,y) < \varepsilon$. Plus généralement, si $\mathscr{D}$ est un ensemble d'écarts sur X, on dit qu'un écart d' est dominé par $\mathscr{D}$, si quel que soit le réel $\varepsilon > o$, il existe un réel $\alpha > o$ et un écart $d \in \mathscr{D}$, tel que $d(x,y) < \alpha$ implique $d'(x,y) < \varepsilon$.

La première définition des espaces uniformes, chère à J.R. ISBELL, est fournie par un ensemble μ de recouvrements de X, tel que μ soit stable par intersection finie, contienne un recouvrement $\mathscr{U}$ dès qu'il contient un raffinement de $\mathscr{U}$, et vérifie la propriété (*) : si $\mathscr{U} \in \mu$ il existe un *-raffinement $\mathscr{V}$ de $\mathscr{U}$ tel que $\mathscr{V} \in \mu$. Un tel ensemble μ s'appelle une structure uniforme sur X au sens T ([41]). La deuxième définition consiste à utiliser un filtre μ sur X×X dont les éléments contiennent la diagonale Δ_X, stable par symétrie, et vérifiant la propriété (°) : pour tout $B \in \mu$ il existe $B' \in \mu$ tel que $B' \circ B' \subset B$. Un tel filtre μ est une structure uniforme sur X au sens B ([B1]). Enfin la troisième définition consiste à considérer une famille μ d'écarts sur X telle que si d et d' appartiennent à μ, l'écart $d \vee d'$ appartient à μ ; et si d' est un écart dominé par μ, alors d' appartient à μ. Un tel ensemble μ est une structure uniforme au sens W ([43]). L'équivalence de ces trois définitions se montre au moyen d'une base de la structure uniforme ; une sous-base au sens T est un ensemble η de recouvrements tels que tout élément de η possède un *-raffinement appartenant à η ; une base vérifie de plus : l'intersection de deux recouvrements appartenant à η possède un raffinement appartenant à η. Une base au sens B est une base de filtre, stable par symétrie et vérifiant la propriété (°). Enfin si $\mathscr{D}$ est une famille d'écarts sur X il existe une moins fine structure uniforme μ sur X contenant $\mathscr{D}$ (au sens W) et $\mathscr{D}$ s'appelle une sous-base de μ ; on dit que $\mathscr{D}$ est une base si tout écart de μ est dominé par $\mathscr{D}$.

Si μ est une structure uniforme au sens T, l'ensemble des parties $B(\mathscr{V}) = \bigcup_{V \in \mathscr{V}} V \times V$ quand $\mathscr{V}$ décrit μ est une base d'une structure uniforme $B(\mu)$ sur X au sens B. Si μ est une structure uniforme sur X au sens B, l'ensemble des recouvrements $T(B) = (B(x))_{x \in X}$, $B \in \mu$, est une base de structure uniforme $T(\mu)$ sur X au sens T. On a de plus $T(B(\mu)) = \mu$ et $B(T(\mu)) = \mu$.

Si μ est une structure uniforme au sens W, l'ensemble des parties $B(d,\alpha) \subset X \times X$, quand d décrit μ et α décrit $\mathbb{R}_+^*$ est une base $B(\mu)$ au sens B. Réciproquement, étant donné une structure uniforme μ au sens B, on munit $X \times X$ d'une structure uniforme produit ; l'ensemble $W(\mu)$ des écarts uniformément continus sur $X \times X$ est une structure uniforme au sens W sur X. On a $W(B(\mu)) = \mu$ et $B(W(\mu)) = \mu$.

Désormais le symbole μ désignera indifféremment l'ensemble des recouvrements uniformes, le filtre des entourages, ou l'ensemble des écarts uniformément continus sur $X \times X$, qui définissent la structure uniforme étudiée.

(1.0.1) <u>PROPOSITION</u>. - *Soit* (X,μ) *un espace uniforme et soit* $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite d'écarts appartenant à* μ. *Il existe un écart* $d \in \mu$ *tel que tous les écarts* d_n *appartiennent à la structure uniforme* μ_d *sur* X *définie par l'unique écart* d.

Preuve. - La structure uniforme ν sur X définie par les écarts d_n est écartisable, et elle est moins fine que μ ; elle est donc définie par un seul écart d qui appartient à μ ; de plus tous les écarts d_n sont dominés par d.

On exprimera encore ce résultat en disant que l'ensemble des écarts définissant une structure uniforme est *dénombrablement filtrant croissant* pour la relation de domination entre écarts.

1.1 LA PSEUDO-DUALITE (X,A).

(1.1.1) DEFINITION. - *On appelle pseudo-dualité séparante* (X,A) *la donnée d'un ensemble* X, *d'un espace vectoriel* A *sur* $\mathbb{R}$, *et d'une application* φ *de* $X \times A$ *dans* $\mathbb{R}$ *vérifiant les axiomes suivants :*

(L) L'application $f \longmapsto \varphi(x,f)$ *est linéaire pour tout* $x \in X$;

(S_1) Quels que soient x *et* y *deux éléments distincts de* X, *il existe* $f \in A$ *tel que* $\varphi(x,f) \neq \varphi(y,f)$;

(S_2) Quels que soient f *et* g *deux éléments distincts de* A, *il existe* $x \in X$ *tel que* $\varphi(x,f) \neq \varphi(x,g)$.

En posant $f(x) = \varphi(x,f)$ on identifie A à un ensemble de fonctions réelles définies sur X et l'axiome (L) assure que A est alors un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^X$.

De la même façon on identifie X à un ensemble de formes linéaires sur A, en posant $x(f) = \varphi(x,f)$.

Dans la pratique on se donnera donc un espace vectoriel de fonctions réelles sur X, et l'application φ sera l'évaluation de la fonction f au point x ; le seul axiome à postuler sera alors l'axiome de séparation (S_1).

On munit A de la topologie de convergence simple sur X et X de la topologie de la convergence simple sur A. Toute partie de A (resp. de X) sera munie de la topologie induite correspondante.

Une partie H de A est simplement fermée (resp. simplement compacte) si elle est fermée (resp. compacte) pour la topologie de convergence simple sur X. Elle est *simplement bornée*, si pour tout $x \in X$, on a $x(H)$ borné (i.e. relativement compact) dans $\mathbb{R}$; elle est *uniformément bornée* si la réunion des $x(H)$, pour $x \in X$, est bornée dans $\mathbb{R}$. Toute partie H simplement bornée de A définit un écart fini d_H par la formule :

$$d_H(x,y) = \operatorname*{Sup}_{h \in H} |h(x)-h(y)|.$$

En particulier d_H est noté d_h quand H est réduite à une seule fonction h. Soit $\mathcal{H}$ un ensemble de parties simplement bornées de A. On désigne par $\mu_{\mathcal{H}}$ la structure uniforme définie par les écarts d_H quand H décrit $\mathcal{H}$. On notera μ_H lorsque $\mathcal{H}$ est réduit à une seule partie H, et σ_A lorsque H est l'ensemble des parties finies de A ; dans ce dernier cas, il suffit de considérer les écarts d_f pour $f \in A$.

Soit $f \in A$; son *noyau* est l'ensemble $Z(f) = f^{-1}(0) \subset X$ et son *conoyau* est le complémentaire $Coz(f) = X \setminus Z(f)$ de $Z(f)$. L'ensemble de tous les noyaux (resp. conoyaux) des fonctions $f \in A$ est noté $Z(A)$ (resp. $Coz(A)$).

Les parties simplement bornées de X sont appelées les *bornés* de X, ou les bornés de X *relativement* à A, s'il y a une confusion à craindre.

Un espace uniforme séparé (X,μ) définit une pseudo-dualité (X,A), où A est l'espace vectoriel $\mathcal{U}(X,\mu)$ des fonctions uniformément continues sur (X,μ). La réciproque est généralement fausse ; autrement dit pour une pseudo-dualité (X,A) il n'existe pas nécessairement de structure uniforme μ telle que $A = \mathcal{U}(X,\mu)$. Pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que $\mathcal{U}(X,\sigma_A) = A$. L'étude des espaces vectoriels A vérifiant cette relation permettra de caractériser les éléments de l'ensemble $a(X)$.

1.2 L'ENSEMBLE $a(X)$.

Toute partie Y d'un espace uniforme (X,μ) est munie de la structure uniforme induite $\mu|Y$. Le corps des réels $\mathbb{R}$ (resp. l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$) est muni de la structure uniforme habituelle. En particulier dans $\mathbb{R}^n$ on utilisera souvent la distance δ définie par :

$$\delta(s,t) = \operatorname*{Sup}_{1 \leqslant i \leqslant n} |s_i - t_i| .$$

On considère l'ensemble $\mathcal{L}$ (resp. $\mathcal{D}$) réunion de tous les espaces vectoriels $\mathcal{U}(Y)$ (resp. $\mathcal{C}(Y)$) quand Y parcourt les parties (resp. les parties ouvertes) de $\mathbb{R}^n$ et n décrit $\mathbb{N}^*$, et l'ensemble $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}$, réunion des algèbres $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ quand n décrit $\mathbb{N}^*$.

Soit A une famille de fonctions réelles sur un ensemble X ; pour toute famille finie ordonnée $\{f_1,\dots,f_n\}$ d'éléments de A, on désigne par γ_H l'application canonique de X dans $\mathbb{R}^n$ définie par $\gamma_H(x) = (f_1(x),\dots,f_n(x))$. S'il est besoin de spécifier γ_H on l'écrira $[f_1,\dots,f_n]$.

On désigne alors par $\mathcal{L}(A)$ (resp. $\mathcal{Q}(A)$, $\mathcal{S}(A)$) l'ensemble des applications de la forme $g\circ\gamma_H$, où H est une famille finie ordonnée de A, et g un élément de $\mathcal{L}$ (resp. $\mathcal{Q}$, $\mathcal{S}$). La condition de composition exige bien entendu que g soit définie sur une partie Y de $\mathbb{R}^n$ (où n est le nombre d'éléments de H) telle que $\gamma_H(X) \subset Y$.

Remarque. - Si Y est une partie quelconque de $\mathbb{R}^n$, comme $\overline{Y}$ est le complété de Y pour la structure uniforme induite par $\mathbb{R}^n$, on peut prolonger les $g \in \mathcal{U}(Y)$ à $\overline{Y}$; on peut alors définir $\mathcal{L}$ ou $\mathcal{L}(A)$ au moyen des seules parties fermées des $\mathbb{R}^n$.

(1.2.1) PROPOSITION. - *Pour tout ensemble* A *de fonctions sur* X *on a :*

$$\mathcal{L}(\mathcal{L}(A)) = \mathcal{L}(A),\ \mathcal{Q}(\mathcal{Q}(A)) = \mathcal{Q}(A) \text{ et } \mathcal{S}(\mathcal{S}(A)) = \mathcal{S}(A).$$

Preuve. - Montrons-le pour $\mathcal{L}$: soit H une famille finie ordonnée de $\mathcal{L}(A)$; il existe des familles finies ordonnées $H_1,\dots,H_n$ de A et des fonctions $g_1,\dots,g_n$ appartenant à $\mathcal{L}$ telles que $H = (g_1\circ\gamma_{H_1},\dots,g_n\circ\gamma_{H_n})$. On peut écrire, en désignant par K la famille concaténée des H_i :

$$\begin{aligned} g\circ\gamma_H &= g\circ [g_1\circ\gamma_{H_1},\dots,g_n\circ\gamma_{H_n}] \\ &= g\circ [g_1,\dots,g_n] \circ [\gamma_{H_1},\dots,\gamma_{H_n}] \\ &= g\circ [g_1,\dots,g_n] \circ \gamma_K \ ; \end{aligned}$$

et bien entendu $g\circ[g_1,\dots,g_n] \in \mathcal{L}$. Ainsi $\mathcal{L}(\mathcal{L}(A)) \subset \mathcal{L}(A)$; comme par ailleurs $A \subset \mathcal{L}(A)$, le résultat est acquis.

(1.2.2) DEFINITION. - *On dit qu'un ensemble* A *de fonctions sur* X *est stable par composition avec* $\mathcal{L}$ *(resp.* $\mathcal{D}$, $\mathcal{S}$*) si* $A = \mathcal{L}(A)$ *(resp.* $\mathcal{D}(A) = A$, $\mathcal{S}(A) = A$*).*

(1.2.3) DEFINITION. - *On dit qu'une suite* $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de parties d'un espace uniforme* (X,μ) *est régulière (resp. uniformément régulière) si :*

a) la suite (ω_n) *est croissante pour l'inclusion et* $\cup\, \omega_n = X$ *;*

b) il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *dans* $\mathcal{U}(X)$ *(resp. uniformément équicontinue) telle que* $0 \leqslant f_n \leqslant 1$, $f_n(\omega_n) = \{0\}$ *et* $f_n(X \setminus \omega_{n+1}) = \{1\}$ *, pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

La suite (ω_n) n'est pas forcément strictement croissante.

(1.2.4) LEMME. - *Soient* (ω_n) *une suite régulière dans* (X,μ) *et* δ *un nombre réel strictement positif. Alors il existe une fonction* f *positive sur* X, *telle que :*

a) $f(x) = 0$ *si* x *appartient à* ω_o *;*

$n\delta \leqslant f(x) \leqslant (n+1)\delta$ *si* x *appartient à* $\omega_{2n+1} \setminus \omega_{2n}$ *;*

$f(x) = n\delta$ *si* x *appartient à* $\omega_{2n} \setminus \omega_{2n-1}$, *pour* $n \geqslant 1$.

b) pour tout nombre réel positif t *la fonction* $f^{(t)}$ *définie par* $f^{(t)}(x) = \mathrm{Inf}(f(x),t)$ *appartient à* $\mathcal{U}(X)$. *De plus si* (ω_n) *est uniformément régulière,* f *peut être choisie dans* $\mathcal{U}(X)$.

Preuve. - Soit (f_n) une suite de $\mathcal{U}(X)$ vérifiant les conditions de la définition (1.2.3). On définit la fonction f par : $f(x) = f_o(x)$ si

$x \in \omega_1$, $f(x) = \delta f_{2n}(x) + n\delta$ si $x \in \omega_{2n+1} \setminus \omega_{2n-1}$ pour $n \geqslant 1$. Supposons que l'on ait $\sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)-f_n(y)| < \varepsilon$, avec $\varepsilon < 1$, et soient p le plus petit entier tel que $x \in \omega_p$ et q le plus petit entier tel que $y \in \omega_q$; on peut supposer $p \leqslant q$. Si $p+1 < q$, on a $f_p(x) = 0$ et $f_p(y) = 1$, donc $|f_p(x)-f_p(y)| = 1$ ce qui contredit l'hypothèse ; donc $p \leqslant q \leqslant p+1$. On vérifie alors que si p est pair on a $f(x) = \delta f_p(x) + p\,\frac{\delta}{2}$ et $f(y) = f_p(y) + p\,\frac{\delta}{2}$ et si p est impair, $f(x) = \delta f_{p-1}(x) + (p-1)\frac{\delta}{2}$ et $f(y) = f_{p-1}(y) + (p-1)\frac{\delta}{2}$, et dans tous les cas $|f(x)-f(y)| < \varepsilon\delta$, ce qui montre que si la suite (f_n) est uniformément équicontinue, alors f appartient à $\mathcal{U}(X)$, de même que les fonctions $f^{(t)}$. Dans le cas général, soit t un réel positif ; il existe un plus petit entier m tel que $t \leqslant 2m$. Supposons que l'on ait $\sup_{n \leqslant 2m} |f_n(x)-f_n(y)| < \varepsilon$, avec $\varepsilon < 1$; une démonstration analogue à la précédente montre que si $x \in \omega_p \setminus \omega_{p-1}$ et $y \in \omega_q \setminus \omega_{q-1}$ avec $p \leqslant q$, on a nécessairement $p \leqslant q \leqslant p+1$ ou $2m < p$. Dans ces conditions, si $p \leqslant 2m$, on a $|f^{(t)}(x) - f^{(t)}(y)| < \varepsilon$ et si $2m < p$, on a $f^{(t)}(x) = f^{(t)}(y) = t$, ce qui montre que $f^{(t)}$ est élément de $\mathcal{U}(X)$.

Dans la suite, on dira que f est de pas δ sur la suite (ω_n).

(1.2.5) PROPOSITION. - *Soit* $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite croissante de parties d'un espace uniforme* (X,μ) *qui recouvre* X. *S'il existe un écart* d *de* μ *et un nombre réel* $\alpha > 0$, *tels que* $d(\omega_n, X \setminus \omega_{n+1}) = \operatorname{Inf}(d(x,y) / x \in \omega_n,\ y \in X \setminus \omega_{n+1}) \geqslant \alpha$ *pour tout* $n \in N$, *alors la suite* (ω_n) *est uniformément régulière.*

Preuve. - Soit f_n la fonction sur X définie par $f_n(x) = d(\omega_n, x)$, pour

$n \in \mathbb{N}$; la suite (h_n), où $h_n = \alpha^{-1}\,\mathrm{Inf}(f_n, \mu)$ est uniformément continue puisque $|h_n(x)-h_n(y)| \leqslant \alpha^{-1}\, d(x,y)$. De plus $h_n(\omega_n) = \{0\}$ et $h_n(X \setminus \omega_{n+1}) = \{1\}$.

(1.2.6) PROPOSITION. - *Soient* (X,μ) *un espace uniforme et* f *une fonction positive sur* X *; les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) f *appartient à* $\mathscr{U}(X,\mu)$ *;*

b) pour tout réel $\alpha>0$, *la suite des parties* $\omega_n = \{x \in X / f(x) \leqslant n\alpha\}$, $\omega_n \neq \emptyset$, *et* $n \in \mathbb{N}$, *est uniformément régulière.*

Preuve. - Dans un sens, l'écart d_f appartient à μ, et on a $d_f(\omega_n, X \setminus \omega_{n+1}) \geqslant \alpha$, ce qui montre b) d'après la proposition précédente.

Réciproquement, on peut supposer $\displaystyle\mathrm{Inf}_{x \in X} f(x) = 0$; fixons $\alpha>0$ et soit $g \in U(X)$ de pas 2α satisfaisant aux conditions du lemme (1.2.4) ; on vérifie immédiatement que $\displaystyle\mathrm{Sup}_{x \in X} |f(x)-g(x)| \leqslant 2\alpha$; ce qui montre que f appartient à $\mathscr{U}(X,\mu)$.

Etant donné un ensemble A de fonctions réelles sur un ensemble X, on désigne par $\overline{A}^u$ son adhérence dans $\mathbb{R}^X$ pour la topologie de convergence uniforme sur X. L'ensemble A est dit uniformément fermé, ou stable par limites uniformes, si $A = \overline{A}^u$.

(1.2.7) PROPOSITION. - *Soit* A *un ensemble de fonctions réelles sur l'ensemble* X, *stable par composition avec* $\mathcal{L}$. *Alors* $\mathscr{U}(X,\sigma_A) = \overline{A}^u$.

Preuve. - Il suffit de prouver que toute fonction positive non constante f appartenant à $\mathcal{U}(X,\sigma_A)$ est dans $\overline{A}^u$. Soit un nombre réel $\varepsilon > o$; il existe une suite finie ordonnée $H = \{f_1,\dots,f_n\}$ de A et un nombre réel $\alpha > o$, tels que $d_H(x,y) < \alpha$ implique $d_f(x,y) < \varepsilon$. On peut encore supposer que $\operatorname{Inf}_{x \in X} f(x) = 0$; la suite $\omega_n = \{x \in X / f(x) \leqslant n\varepsilon\}$, $n \in \mathbb{N}$, est uniformément régulière, car pour tout n, on a $d_H(\omega_n, X \setminus \omega_{n+1}) \geqslant \alpha$. Si l'on pose $Y = \gamma_H(X) \subset \mathbb{R}^n$ et $\omega'_n = \gamma_H(\omega_n)$, la suite (ω'_n) est uniformément régulière dans Y, car pour s et t appartenant à Y, il existe x et y dans X tels que $s = \gamma_H(x)$ et $t = \gamma_H(y)$ et $\delta(s,t) = d_H(x,y)$ d'après la définition de la distance δ sur $\mathbb{R}^n$; par suite

$$\delta(\omega'_n, Y \setminus \omega'_{n+1}) = d_H(\omega_n, X \setminus \omega_{n+1}) \geqslant \alpha .$$

Soit alors $g \in U(Y)$ de pas 2ε sur la suite (ω'_n) et vérifiant les conditions du lemme (1.2.4) ; on a $g \circ \gamma_H \in A$ et $\sup_{x \in X} |g \circ \gamma_H(x) - f(x)| < 2\varepsilon$; ceci montre que $f \in \overline{A}^u$.

Plus généralement, si on remarque que pour un ensemble A, on a $\mathcal{L}(A) \subset \mathcal{U}(X,\sigma_A)$, on obtient :

(1.2.8) <u>COROLLAIRE</u>. - *Soit* A *un ensemble de fonctions réelles sur un ensemble* X *; alors* $\mathcal{U}(X,\sigma_A) = \overline{\mathcal{L}(A)}^u$.

En effet, $\sigma_A = \sigma_{\mathcal{L}(A)}$ d'après la remarque précédente.

Il en résulte alors immédiatement le résultat essentiel :

(1.2.9) <u>THEOREME</u>. - *Soit* A *un ensemble de fonctions réelles définies sur* X *; les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) il existe une structure uniforme μ *sur* X *telle que* $\mathcal{U}(X,\mu) = A$ *;*

b) A *est stable par composition avec* $\mathcal{L}$ *et par limites uniformes.*

En ce qui concerne la propriété de séparation, on sait qu'une structure uniforme μ est séparée si et seulement si son affaiblie $\sigma\mu$ est elle-même séparée, c'est-à-dire si et seulement si l'espace vectoriel $\mathcal{U}(X)$ sépare les points de X. On vient de voir que si A est un ensemble de fonctions réelles, $\mathcal{U}(X,\sigma_A) = \overline{\mathcal{L}(A)}^u$. On vérifie aisément que $\overline{\mathcal{L}(A)}^u$ sépare les points de X dès que $\mathcal{L}(A)$ les sépare, ce qui a lieu dès que A sépare les points de X. Ainsi une structure uniforme μ sur X telle que $\mathcal{U}(X,\mu) = \overline{\mathcal{L}(A)}^u$ est séparée si et seulement si l'ensemble A sépare les points de X.

On désignera par $\mathcal{a}(X)$ l'ensemble des parties A de $\mathbb{R}^X$ qui séparent X et qui vérifient $A = \overline{\mathcal{L}(A)}^u$; ce sont évidemment des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. Cet ensemble $\mathcal{a}(X)$ est exactement l'ensemble des espaces vectoriels $\mathcal{U}(X,\mu)$ où μ est une structure uniforme séparée sur X.

(1.2.10) <u>PROPOSITION</u>. - *Soit* A *un ensemble de fonctions réelles sur* X, *stable par composition avec* $\mathcal{S}$. *Alors* $\mathcal{U}(X,\sigma_A) = \overline{A}^u$.

Preuve. - Si Y est une partie d'un espace uniforme (X,μ), toute fonction $f \in \mathcal{U}(Y)$ possède un prolongement $\overline{f}$ appartenant à $\mathcal{C}(X)$. Ainsi $\mathcal{L} \subset \mathcal{S}$ et la stabilité par composition avec $\mathcal{S}$ implique la stabilité par composition avec $\mathcal{L}$.

De la même façon la stabilité avec $\mathcal{Q}$ implique la stabilité avec $\mathcal{L}$, car $\mathcal{Q} \supset \mathcal{S} \supset \mathcal{L}$.

Les ensembles séparants de fonctions réelles définies sur X, uniformément fermés et stables soit avec $\mathcal{S}$, soit avec $\mathcal{Q}$, sont donc des éléments de $\mathcal{a}(X)$. Néanmoins les propriétés élémentaires diffèrent pour les diverses stabilités : ainsi, alors que $\mathcal{L}(\overline{\mathcal{L}(A)}^u) = \overline{\mathcal{L}(A)}^u$, en général on a

$$\mathcal{Q}(\overline{\mathcal{Q}(A)}^u) \neq \overline{\mathcal{Q}(A)}^u \quad \text{et} \quad \mathcal{S}(\overline{\mathcal{S}(A)}^u) \neq \overline{\mathcal{S}(A)}^u.$$

La première égalité est une conséquence du corollaire (1.2.8). Des contre-exemples pour les autres affirmations sont donnés dans [27], Ex. 1.8.

Soit maintenant A un ensemble de fonctions qui sépare les points de X ; l'espace uniforme (X,σ_A) est séparé ; désignons par A^σ l'ensemble des prolongées au complété $(\hat{X},\sigma_A)$ de (X,σ_A) des fonctions f appartenant à A. On vérifie aisément que $\overline{\mathcal{L}(A^\sigma)}^u = [\overline{\mathcal{L}(A)}^u]^\sigma = \mathcal{U}(\hat{X},\sigma_A)$ et qu'ainsi A^σ sépare les points de $\hat{X}$.

Supposons que les fonctions f appartenant à A soient bornées ; l'espace uniforme (X,σ_A) est alors précompact et le complété $(\hat{X},\sigma_A)$ est compact. Une application du théorème de Stone-Weierstrass permet d'écrire :

(1.2.11) PROPOSITION. - *Soit* A *un ensemble de fonctions réelles bornées sur un ensemble* X*, séparant les points de* X*, contenant les constantes et stable par limites uniformes sur* X*. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) A *est un treillis ;*

b) A *est un anneau ;*

c) A *est stable par composition avec* $\mathcal{S}$ *;*

d) A *est stable par composition avec* $\mathcal{L}$ *;*

e) A *appartient à* $\mathcal{a}(X)$.

Preuve. - La seule implication non triviale est e) ⟹ c). Or si $g \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^n)$, alors g est uniformément continue sur toute partie bornée Y de $\mathbb{R}^n$ et les $f \in A$ étant bornées, pour toute famille finie ordonnée $H \subset A$, γ_H a son image bornée dans $\mathbb{R}^n$; alors $g \circ \gamma_H \in \mathscr{U}(X,\sigma_A) = A$.

Dans un espace uniforme (X,μ) on sait que pour toute partie H appartenant à l'ensemble $\mathscr{H}(X,\mu)$ des parties uniformément équicontinues et simplement bornées de $\mathscr{U}(X,\mu)$, l'adhérence simple $\overline{H}^s$ dans $\mathbb{R}^X$ est contenue dans $\mathscr{U}(X,\mu)$ et appartient à $\mathscr{H}(X,\mu)$. Si A appartient à $a(X)$, les parties H de $\mathscr{U}(X,\sigma_A)$ appartenant à $\mathscr{H}(X,\sigma_A)$ sont donc contenues dans A. Ceci permet de caractériser les éléments de $a(X)$.

(1.2.12) PROPOSITION. - *Soit* A *un treillis de fonctions sur un ensemble* X, *contenant les constantes et séparant les points de* X. *Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) A *appartient à* $a(X)$ *;*

b) toute partie H *de* A *appartenant à* $\mathscr{H}(X,\sigma_A)$ *a son adhérence simple* $\overline{H}^s$ *contenue dans* A.

Preuve. - Il suffit de prouver b) ⟹ a), autrement dit que A est uniformément fermé et stable par composition avec $\mathcal{L}$. Soit f la limite uniforme d'une suite (f_n) d'éléments de A. La partie $H = \{f_n\}$ appartient à $\mathscr{H}(X,\sigma_A)$ et $f \in \overline{H}^s$, donc $f \in A$. Soient maintenant $K = \{f_1,\dots,f_n\}$ une famille finie ordonnée de A, $Y \subset \mathbb{R}^n$ une partie contenant $\gamma_K(X)$ et $g \in \mathscr{U}(Y)$. Pour tout entier $k \geqslant 1$, posons

$$K(k) = \{f_1^{(k)},\dots,\ f_n^{(k)}\}$$

où $f_i^{(k)} = (-k) \vee (f_i \wedge k)$ (tronquée de f_i par k). Alors K(k) est une famille finie ordonnée de l'ensemble A^∞ des fonctions bornées appartenant à A, et A^∞ est un treillis stable par limites uniformes. La fonction $g\circ\gamma_{K(k)}$ appartient donc à A^∞ d'après (1.2.11). Si l'ensemble $H = \{h_k\}_{k \geq 1}$, avec $h_k = g\circ\gamma_{K(k)}$, appartient à $\mathcal{H}(X,\sigma_A)$ alors $g\circ\gamma_K \in A$ car $g\circ\gamma_K \in \overline{H}^s$. Or, si $s = \gamma_K(x)$ et $t = \gamma_K(y)$, on a déjà vu que $\delta(s,t) = d_K(x,y)$. Soit $\alpha > o$ tel que $\delta(s,t) < \alpha$ implique $|g(s)-g(t)| < \varepsilon$, alors $d_K(x,y) < \alpha$ implique $|g\circ\gamma_K(x) - g\circ\gamma_K(y)| < \varepsilon$. Si on remarque que $|f_i^{(k)}(x) - f_i^{(k)}(y)| \leq |f_i(x) - f_i(y)|$, on a pour tout $k \geq 1$, $d_K(x,y) < \alpha$ implique $|g\circ\gamma_{K(k)}(x) - g\circ\gamma_{K(k)}(y)| < \varepsilon$, ce qui montre que $H \in \mathcal{H}(X,\sigma_A)$.

Remarque. - Il est clair que dans la condition b) on peut se borner aux parties H dénombrables.

(1.2.13) <u>COROLLAIRE</u> (CSASZAR). - *Sous les mêmes hypothèses,* A *appartient à* $a(X)$ *si et seulement si* A *contient toute fonction* f *limite simple d'une suite* (f_n) *d'éléments de* A*, telle que* $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *appartienne à* $\mathcal{H}(X,\sigma_A)$.

(1.2.14) <u>COROLLAIRE</u> (HAGER). - *Soit* A *un treillis vectoriel de fonctions sur un ensemble* X*, contenant les constantes et stable par limites uniformes. Pour que* A *appartienne à* $a(X)$ *il faut et il suffit que la condition (F) suivante soit vérifiée :*

(F) $\left\{\begin{array}{l}\textit{Pour toute suite } (f_n) \textit{ de } A \textit{ telle que } H = \{f_n\} \in \mathcal{H}(X,\sigma_A) \\ \textit{et telle que la suite } (\mathrm{Coz}(f_n)) \textit{ soit } *\textit{-finie, la fonction } f = \mathrm{Sup}\, f_n \textit{ est élément de } A.\end{array}\right.$

Preuve. - Il suffit de prouver que la condition (F) implique l'égalité $A = \mathcal{L}(A)$. Soient $H = \{f_1,\dots,f_n\}$ une famille finie ordonnée de A, g une fonction de $\mathcal{L}$, telle que $g\circ\gamma_H$ ait un sens, et un réel $\varepsilon > o$. La fonction identité sur $\mathbb{R}$, notée id, vérifie la propriété suivante : pour tout $\varepsilon > o$ il existe une suite de fonctions $h_n \in \mathcal{U}^\infty(\mathbb{R})$, avec $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}(\mathbb{R})$ et $(\mathrm{Coz}(h_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est $*$-fini, telle $\|\mathrm{id} - \mathrm{Sup}\, h_n\| < \varepsilon$. Alors :

$$\|g\circ\gamma_H - (\operatorname{Sup}_n h_n) \circ g\circ\gamma_H\| < \varepsilon$$

et par conséquent

$$\|g\circ\gamma_H - \operatorname{Sup}_n (h_n \circ g\circ\gamma_H)\| < \varepsilon.$$

Or $h_n \circ g\circ\gamma_H$ appartient à A^∞ (1.2.11) et $\mathrm{Sup}(h_n \circ g\circ\gamma_H)$ appartient à A. Comme ε est arbitraire, $g\circ\gamma_H$ appartient à A, et $A = \mathcal{L}(A)$.

Remarque. - Avec les hypothèses de (1.2.14), il est clair que la condition sur la suite $(\mathrm{Coz}(f_n))$ peut être remplacée par une autre; par exemple : (f_n) est une suite croissante de A^+ ou même de $(A^\infty)^+$.

On dira par la suite que (X,A) est une pseudo-dualité *uniforme* si A appartient à $\mathcal{a}(X)$.

CHAPITRE 2

CERTAINES CLASSES D'ESPACES UNIFORMES

La résolution des problèmes posés dans ce travail nécessite l'utilisation d'espaces uniformes ayant des propriétés particulières en ce qui concerne $\mathcal{U}(X,\mu)$ ou $\mathcal{U}^{\infty}(X,\mu)$. Dans la plupart des cas nous aurons besoin de "théorèmes d'approximation" pour les fonctions uniformément continues. Ces théorèmes ont généralement été établis sans le souci particulier des espaces uniformes, et c'est a posteriori qu'ils sont utilisables dans notre cadre restreint ; cependant certains d'entre eux peuvent être montrés en travaillant d'abord dans les espaces uniformes (§ 2 et 3). Une première utilisation en rapport avec les espaces uniformes a été faite par J. ISBELL ([27]), qui montre en particulier que les algèbres A de fonctions sur un ensemble X, stables par composition avec $\mathcal{S}$, sont telles que leur adhérence $\overline{A}^{u}$ dans $\mathbb{R}^{X}$ appartient à $a(X)$; il étudie alors l'espace (X,σ_{A}).

Dans ce chapitre nous faisons une étude systématique des divers types d'espaces conduisant à des propriétés d'approximation sur les espaces $\mathcal{U}(X,\mu)$ et $\mathcal{U}^{\infty}(X,\mu)$. Les espaces réguliers (§ 1), les espaces de type (Ab)(§ 2), (A) (§ 3) et (C)(§ 6) sont les plus importants.

Les propriétés uniformément locales fournissent un autre groupe d'espaces uniformes :

1. Les espaces localement fins ([19]) qui permettent de généraliser certains résultats sur les espaces métriques et le théorème de SHIROTA sur la replétion d'un espace topologique complètement régulier.

2. Les espaces simplement fins ou δ-localement fins ([35]) qui permettent d'obtenir l'analogue des théorèmes de NACHBIN-SHIROTA pour les espaces complètement réguliers et des théorèmes sur les mesures ([1]).

A. HAGER a introduit récemment ([21]) les espaces M-fins (ou métriquement fins) et étudié leurs propriétés dans [24]. D'autres travaux sur les espaces M-fins ont été faits par Z. FORLIK ([18]) et M.D. RICE ([38]).

Enfin la notion de $\mathscr{U}$-plongement fournit les espaces (UP) (espaces (RE) de H.H. CORSON et J. ISBELL ([11])), et celle de bornés d'un espace uniforme ([30]) fournit les espaces (BP) dont tous les bornés sont précompacts ([1], [35]).

On éclaircit les rapports entre ces différents types d'espaces ce qui donne une classification des espaces uniformes de type (C). On trouvera dans les tableaux I et II qui suivent les liaisons établies : les implications sont indiquées par des flèches ($\rightarrow$) ; les flèches barrées ($A \not\longrightarrow B$) indiquent que la classe B ne contient pas la classe A, ce qui est généralement obtenu par un contre-exemple. Certains problèmes restent posés : un espace localement fin est-il subfin ([19]) ? Un espace régulier est-il de type (A) ?

Nous étudions plus en détail les espaces de type (A) à l'aide de plusieurs caractérisations. En particulier ils jouent, par rapport à la structure uniforme de replétion d'un espace métrique, le même rôle que les espaces M-fins par rapport à la structure uniforme universelle de ces mêmes espaces métriques : toute application uniformément continue de (X,μ) dans un espace métrique M reste uniformément continue quand on munit M de la structure uniforme faible définie par $\mathscr{C}(M)$ (§ 5).

TABLEAU I

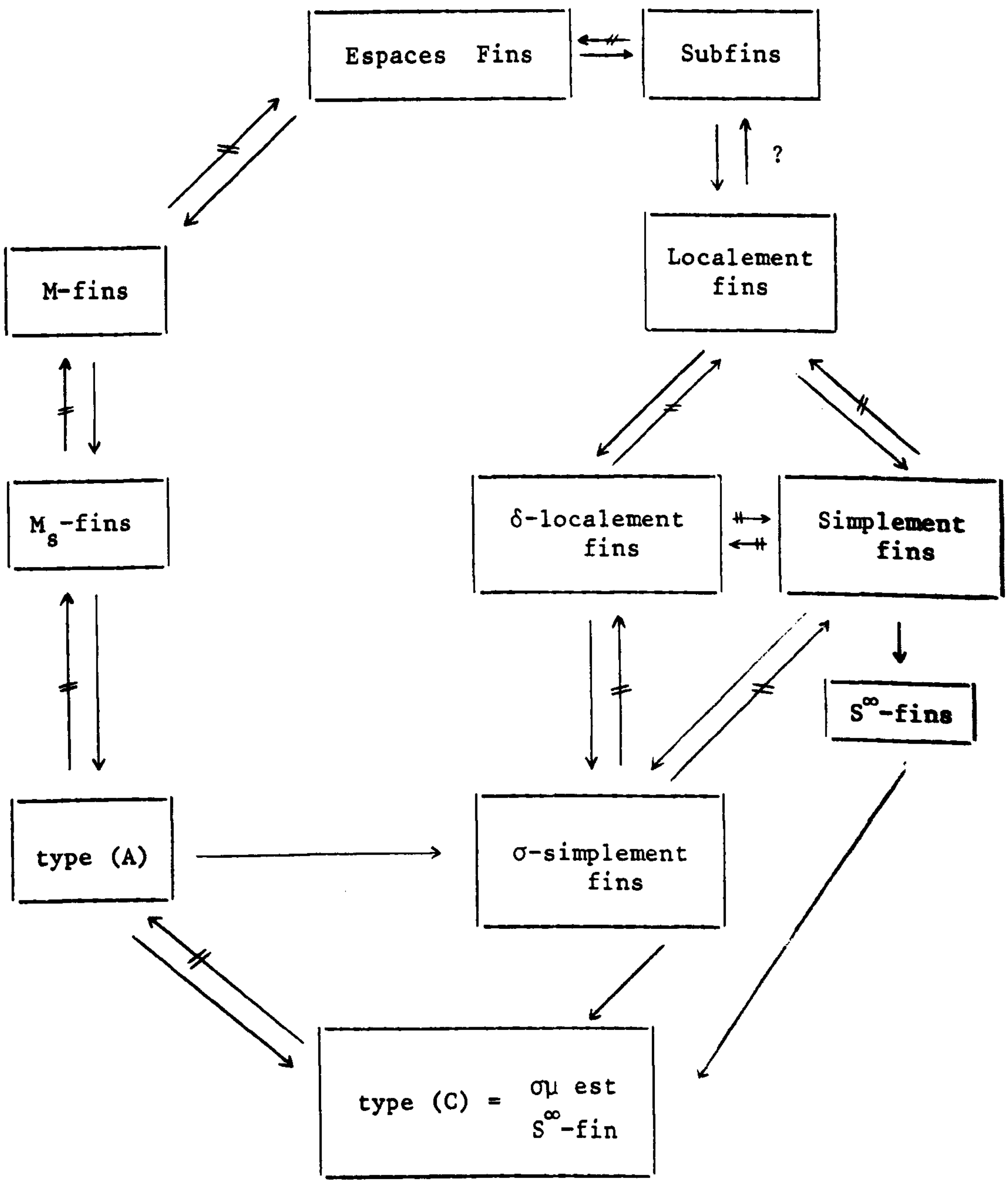
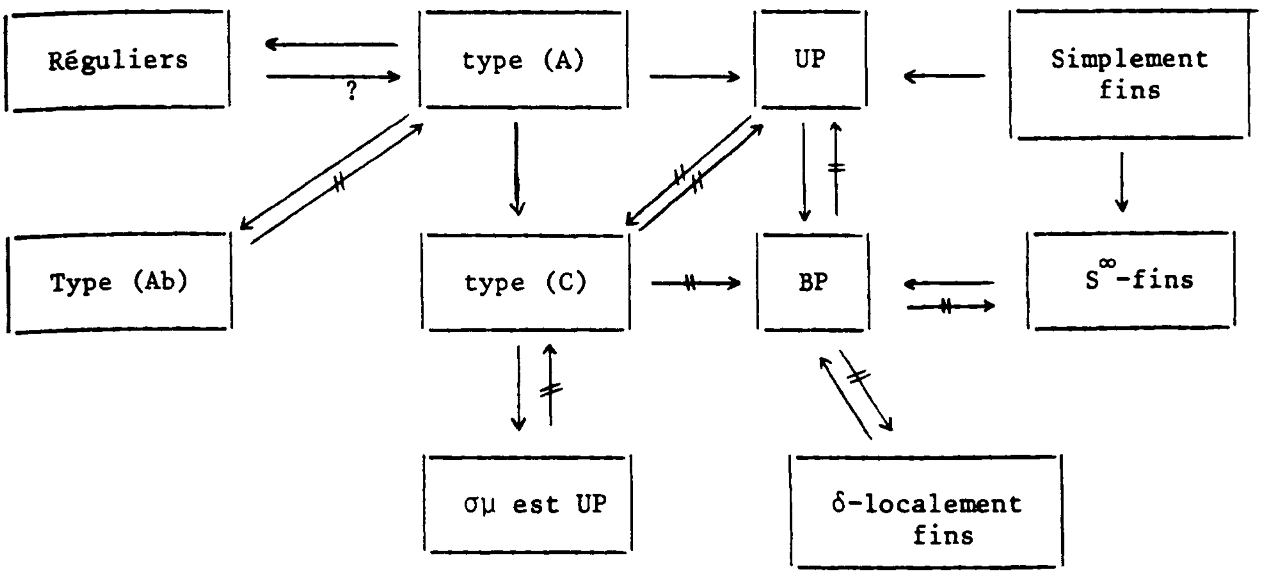

Espaces Fins
Subfins
?
M-fins
Localement fins
M_s-fins
δ-localement fins
Simplement fins
S^∞-fins
type (A)
σ-simplement fins
type (C) = σμ est S^∞-fin

TABLEAU II



Remarque. - Une conséquence des résultats démontrés plus loin est que tout espace régulier est de type (A).

Preuve. - Soient (X,μ) un espace régulier et f une fonction de $\mathcal{U}(X)$, la formule $(f^2)^{(n)} = (f^{(\sqrt{n})})^2$ pour tout $n \geqslant 1$ prouve que f^2 est dans $\mathcal{U}(X)$. La formule $(f+g)^2 = f^2 + g^2 + 2f.g$ prouve alors que $\mathcal{U}(X)$ est une R-algèbre. Si $Z_1 = Z(f)$ et $Z_2 = Z(g)$ sont deux noyaux disjoints de $Z(X,\mu)$, la fonction $h = \frac{|f|}{|f|+|g|}$ est dans $\mathcal{U}(X)$ et vaut 0 sur Z_1 et 1 sur Z_2. Alors (X,μ) est de type (A) (2.3.2.b).

2.1 LES ESPACES UNIFORMES REGULIERS.

Soit f une fonction réelle définie sur un ensemble X ; on appelle tronquée de f par l'entier $n \geqslant 1$, la fonction :

$$f^{(n)}(x) = \mathrm{Max}(-n, \mathrm{Min}(f(x),n)).$$

(2.1.1) <u>PROPOSITION</u>. - *Soit* A *un treillis vectoriel de fonctions sur un ensemble* X, *stable par limites uniformes, et contenant les constantes. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) si f *est une fonction appartenant à* A, *strictement positive, alors* $\frac{1}{f}$ *appartient à* A *;*

b) une fonction f *appartient à* A *si et seulement si ses tronquées* $f^{(n)}$, $n \geqslant 1$, *appartiennent à* A.

<u>*Preuve*</u> *:*

a) => b). La condition nécessaire de b) est toujours vérifiée car A est un treillis contenant les constantes. Il suffit de montrer la condition suffisante pour les fonctions positives car $f = f^+ - f^-$; de plus f appartient à A si et seulement si f^+ et f^- y appartiennent, et $(f^{(n)})^+ = (f^+)^{(n)}$. Si f est positive la fonction $f^{(n)}+1$ appartient à $A^\infty = \mathcal{U}(X,\sigma_{A^\infty})$ (prop. 1.2.11) et elle est minorée par 1 ; son inverse $h_n = \frac{1}{f^{(n)}+1}$ appartient donc à A^∞. La suite $(h_n)_{n \geqslant 1}$ converge uniformément vers $\frac{1}{f+1}$ qui appartient à A ; comme $\frac{1}{f+1}$ est strictement positive, la condition a) montre que f+1, et donc f, appartient à A.

b) => a). Soit f une fonction strictement positive appartenant à A ; si m et n sont deux entiers non nuls, la fonction $\mathrm{Sup}(\mathrm{Inf}(f,n), \frac{1}{m})$ appartient à A^∞ et son inverse h_{nm} appartient également à A^∞ (1.2.11). La suite $(h_{nm})_{n \geq 1}$ converge uniformément sur X vers la fonction $h_m = \mathrm{Inf}(\frac{1}{f}, m)$ qui appartient donc à A^∞. Or $h_m = (\frac{1}{f})^{(m)}$, donc $\frac{1}{f}$ appartient à A.

Remarque. - Si dans la proposition précédente on remplace la condition de treillis par la condition plus faible "A^∞ est un anneau", on a seulement : a) implique la condition suffisante de b).

(2.1.2) <u>THEOREME</u>. - *Soit* (X,μ) *un espace uniforme ; les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) toute suite régulière de (X,μ) *est uniformément régulière (cf. 1.2.3) ;*

b) si f *appartient à* $\mathcal{U}(X,\mu)$ *et est strictement positive, la fonction* $\frac{1}{f}$ *est uniformément continue ;*

c) une fonction f *est uniformément continue si et seulement si ses tronquées* $f^{(n)}$ *le sont.*

On vient de montrer l'équivalence de b) et c) car $\mathcal{U}(X,\mu)$ possède toutes les propriétés requises.

a) $\Rightarrow$ c) : là encore il suffit de montrer la condition suffisante de c). On peut supposer f positive et de borne inférieure nulle. Pour tout réel $\alpha>0$, la suite $\omega_n = \{x \in X / f(x) \leq n\alpha\}$ est régulière ; en effet, si m est un entier supérieur à $(n+1)\alpha$, la fonction :

$$g_n(x) = \frac{1}{\alpha}\,[\mathrm{Min}\,\{\mathrm{Max}(f^{(m)}(x),\, n\alpha),\, (n+1)\alpha\} - n\alpha]$$

appartient à $\mathcal{U}(X,\mu)$, vaut 0 sur ω_n et 1 sur $X \setminus \omega_{n+1}$. La suite $(\omega_n)_{n \geq 1}$

est donc uniformément régulière et f appartient à $\mathcal{U}(X,\mu)$ d'après (1.2.6).

c) $\Rightarrow$ a) : soit f la fonction de pas 1 associée, par le lemme (1.2.4), à une suite régulière $(\omega_n)_{n \geqslant 0}$. De même, soit g la fonction de pas 1 associée à la suite $(\omega_{n+1})_{n \geqslant 0}$. La condition b) du lemme (1.2.4) montre que les tronquées $f^{(m)}$ et $g^{(m)}$ appartiennent à $\mathcal{U}(X,\mu)$, donc f et g appartiennent à $\mathcal{U}(X,\mu)$. L'écart $d = d_f \vee d_g$ appartient à μ et on a $d(\omega_n, X \setminus \omega_{n+1}) \geqslant 1$, donc $(\omega_n)_{n \geqslant 0}$ est uniformément régulière (1.2.5).

(2.1.3) <u>DEFINITION</u>. - *On dit qu'un espace uniforme* (X,μ) *est régulier s'il vérifie l'une des trois conditions équivalentes du théorème (2.1.2).*

Il est clair que les espaces uniformes ne sont pas en général réguliers. Les propriétés de (2.1.2) seront surtout intéressantes dans l'étude des espaces de type (A). Remarquons simplement que si l'espace topologique associé est connexe, la condition b) de (2.1.2) implique que toute fonction f uniformément continue telle que $Z(f) = \emptyset$ a son inverse dans $\mathcal{U}(X,\mu)$.

2.2 LES ESPACES UNIFORMES DE TYPE (Ab).

Rappelons que deux parties S et T d'un espace uniforme (X,μ) sont dites normalement séparées s'il existe une fonction f appartenant à $\mathcal{U}(X,\mu)$ telle que $f(S) = \{1\}$ et $f(T) = \{0\}$; on peut d'ailleurs supposer $0 \leqslant f \leqslant 1$. L'ensemble vide est normalement séparé de toute partie $S \subset X$.

(2.2.1) <u>LEMME</u>. - *Deux parties* S *et* T *de* (X,μ) *sont normalement séparées si et seulement si le recouvrement* $\mathcal{P} = \{X \setminus S, X \setminus T\}$ *est uniforme.*

Si S et T sont normalement séparées par $f \in \mathscr{U}(X,\mu)(0 \leqslant f \leqslant 1)$, le recouvrement $\{B(d_f,x,\frac{1}{2})\}_{x \in X}$ est uniforme et c'est un raffinement de $\mathscr{P}$. Réciproquement si $\mathscr{P}$ est un recouvrement uniforme, il existe un écart $d \in \mu$ tel que $\{B(d,x,1)\}_{x \in X}$ soit un raffinement de $\mathscr{P}$. Alors la fonction f définie par $f(x) = d(x,S) \wedge 1$ appartient à $\mathscr{U}(X,\mu)$ et sépare normalement S et T.

(2.2.2) <u>PROPOSITION</u>. - *Les recouvrements de* X *de la forme* $\mathscr{P} = \{X \setminus S, X \setminus T\}$ *où* S *et* T *sont deux parties normalement séparées définissent une sous-base* η *de la structure uniforme* $p\mu$.

Soit $\mathscr{P} = (\omega_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ un recouvrement uniforme de μ. Il existe un écart d appartenant à $p\mu$ tel que le recouvrement $\{B(d,x,1)\}_{x \in X}$ soit un raffinement de $\mathscr{P}$. Posons $W_k = \cup B(d,x,\frac{1}{2})$, pour les $x \in X$ tels que $B(d,x,1) \subset \omega_k$. On a $d(W_k, X \setminus \omega_k) \geqslant \frac{1}{2}$ et W_k et $X \setminus \omega_k$ sont normalement séparés ; alors $\mathscr{P}_k = \{\omega_k, X \setminus W_k\}$ est un recouvrement uniforme de $p\mu$ et $\bigwedge_{k=1}^{n} \mathscr{P}_k$ est un raffinement de $\mathscr{P}$.

Deux parties S et T sont normalement séparées par une fonction f appartenant à $\mathscr{U}(X,\mu)$ si et seulement si elles sont contenues dans deux noyaux disjoints, eux-mêmes normalement séparés. Ainsi les recouvrements appartenant à η extraits de $\mathrm{Coz}(X,\mu)$ forment eux aussi une sous-base de $p\mu$. Mais un recouvrement $\mathscr{P} = \{W_1, W_2\}$ extrait de $\mathrm{Coz}(X,\mu)$ n'appartient pas nécessairement à $p\mu$. Autrement dit l'espace $\mathscr{U}(X,\mu)$ ne sépare pas nécessairement les éléments disjoints de $Z(X,\mu)$. Un exemple est fourni dans $\mathbb{R}$ par $S = \{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}\}_{n \geqslant 1}$ et $T = \{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1}\}_{n \geqslant 1}$; les ensembles S et T

sont deux fermés, donc deux noyaux, disjoints, qui ne sont pas normalement séparés.

On dit que $\mathcal{U}(X,\mu)$ sépare $Z(X,\mu)$ si l'on peut séparer normalement deux noyaux disjoints quelconques. Cette propriété concerne essentiellement l'algèbre $\mathcal{U}^{\infty}(X,\mu)$, car comme on vient de le voir (2.2.2), c'est une propriété de $p\mu$.

(2.2.3) <u>LEMME</u>. - *Soit* (X,μ) *un espace uniforme tel que* $\mathcal{U}(X,\mu)$ *sépare* $Z(X,\mu)$. *Soit* $\mathcal{V} = (V_n)_{n \geqslant 1}$ *un recouvrement dénombrable de* X*, d'ordre fini ou* $*$*-fini, extrait de* $\mathrm{Coz}(X,\mu)$. *Il existe un recouvrement* $(Z_n)_{n \geqslant 1}$ *extrait de* $Z(X,\mu)$ *et un recouvrement* $(W_n)_{n \geqslant 1}$ *extrait de* $\mathrm{Coz}(X,\mu)$ *tels que* $W_n \subset Z_n \subset V_n$ *pour tout* $n \geqslant 1$.

On fait une démonstration par récurrence classique : soient $B_1 = X \setminus V_1$ et $A_1 = X \setminus (\bigcup_{n>1} V_n)$; ce sont deux noyaux disjoints et il existe $f \in \mathcal{U}(X,\mu)$ telle que $f(A_1) = \{0\}$ et $f(B_1) = \{1\}$. On pose $W_1 = \overset{-1}{f}([0,1/3[)$ et $Z_1 = \overset{-1}{f}([0,2/3])$, et on a $A_1 \subset W_1 \subset Z_1 \subset V_1$, donc W_1 et les V_n, $n > 1$, forment un recouvrement de X. Si W_{n-1} et Z_{n-1} sont construits, on pose de même $B_n = X \setminus V_n$ et $A_n = X \setminus (\bigcup_{k<n} W_k \cup \bigcup_{k>n} V_k)$ et on construit comme précédemment W_n et Z_n par une fonction f qui sépare normalement A_n et B_n. Si l'ensemble $\{V_n\}_{n \geqslant 1}$ est fini, il est évident que $(W_n)_{n \geqslant 1}$ est un recouvrement de X ; sinon, on peut toujours supposer que les V_n sont deux à deux distincts. Supposons alors que $x \in X$ n'appartienne pas à $\bigcup_{n \geqslant 1} W_n$. Pour tout $n \geqslant 1$ on a $x \in \bigcup_{k \leqslant n} W_k \cup \bigcup_{k>n} V_k$, donc $x \in \bigcup_{k>n} V_k$, et il existe un $k_n \geqslant n$ tel que $x \in V_{k_n}$; ainsi il existe une suite extraite

$(V_{k_n})_{n \geq 1}$ telle que $x \in \bigcap_{n \geq 1} V_{k_n}$, contredisant le fait que $(V_n)_{n \geq 1}$ est d'ordre fini (resp. $*$-fini).

(2.2.4) DEFINITION. - *Une fonction* f *sur un espace uniforme* (X,μ) *est dite dénombrablement localement uniformément continue (en abrégé, DLUC) s'il existe un recouvrement dénombrable* $(V_n)_{n \geq 1}$ *de* X, *extrait de* $\mathrm{Coz}(X,\mu)$ *tel que* $f|V_n$ *appartienne à* $\mathcal{U}(V_n,\mu|V_n)$ *pour tout* $n \geq 1$.

(2.2.5) DEFINITION. - *Soit* A *un ensemble de fonctions bornées sur un ensemble* X. *On dit que* A *est une algèbre bornée sur* X *si c'est une* $\mathbb{R}$*-algèbre telle que :*

a) A *contient les constantes ;*

b) A *est stable par limites uniformes ;*

c) quelles que soient les fonctions f *et* g *appartenant à* A, *telles que* $Z(g) = \emptyset$ *et* $\frac{f}{g}$ *soit bornée, alors* $\frac{f}{g}$ *appartient à* A.

Si nous utilisons cette définition pour un espace uniforme (X,μ) et son algèbre $\mathcal{U}^{\infty}(X,\mu)$ de fonctions bornées uniformément continues, nous obtenons un premier théorème fondamental :

(2.2.6) THEOREME. - *Soit* (X,μ) *un espace uniforme ; les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) $\mathcal{U}(X,\mu)$ *sépare* $Z(X,\mu)$ *;*

b) tout recouvrement fini de X *extrait de* $\mathrm{Coz}(X,\mu)$ *est un recouvrement de* $p\mu$ *;*

c) une fonction bornée f *sur* X *appartient à* $\mathcal{U}^{\infty}(X,\mu)$ *si et seulement si, pour tout ouvert* Ω *de* $\mathbb{R}$*, l'image réciproque* $\overset{-1}{f}(\Omega)$ *appartient à* $Coz(X,\mu)$ *;*

d) pour tout écart $d \in \mu$ *on a* $\mathcal{C}^{\infty}(X,\mu_d) \subset \mathcal{U}^{\infty}(X,\mu)$ *;*

e) les fonctions DLUC bornées sur (X,μ) *sont uniformément continues ;*

f) $\mathcal{U}^{\infty}(X,\mu)$ *est stable par composition avec l'ensemble* $\mathcal{Q}^{\infty}$ *des fonctions bornées de* $\mathcal{Q}$ *(cf. 1.2.2) ;*

g) $\mathcal{U}^{\infty}(X,\mu)$ *est une algèbre bornée sur* X.

Preuve :

a) $\Rightarrow$ b) : si $\mathcal{V} = (V_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est un recouvrement de X extrait de $Coz(X,\mu)$, il existe, d'après (2.2.3), un recouvrement $(Z_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ extrait de $Z(X,\mu)$ tel que $Z_k \subset V_k$. Le recouvrement $\mathcal{P}_k = \{V_k, X \setminus Z_k\}$ appartient à $p\mu$ puisque Z_k et $X \setminus V_k$ sont normalement séparés, et $\bigwedge_{k=1}^{n} \mathcal{P}_k$ est un raffinement de $\mathcal{V}$.

b) $\Rightarrow$ c) : il suffit de montrer la condition suffisante de c). Pour tout recouvrement uniforme $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}$, il existe un recouvrement uniforme ouvert $\mathcal{W}$ de $\mathbb{R}$, fini sur chaque partie bornée de $\mathbb{R}$; si f est une fonction bornée vérifiant la condition de c), $\{\overset{-1}{f}(W)\}_{W \in \mathcal{W}}$ est un recouvrement fini de X extrait de $Coz(X,\mu)$; il appartient donc à $p\mu$ et $f \in \mathcal{U}^{\infty}(X,\mu)$.

c) $\Rightarrow$ d) : dans un espace écartisable (X,μ_d), tout ouvert appartient à $Coz(X,\mu_d)$. Soit alors d un écart appartenant à μ et $f \in \mathcal{C}^{\infty}(X,\mu_d)$; pour tout ouvert Ω de $\mathbb{R}$ on a $\overset{-1}{f}(\Omega) \in Coz(X,\mu_d) \subset Coz(X,\mu)$, et f appartient à $\mathcal{U}^{\infty}(X,\mu)$ d'après c).

d) $\Rightarrow$ e) : soit f une fonction DLUC bornée sur (X,μ), relativement au recouvrement $\mathscr{V} = (V_n)_{n \geqslant 0}$; soit $(f_n)_{n \geqslant 0}$ une suite dans $\mathscr{U}(X,\mu)$ telle que $V_n = \mathrm{Coz}(f_n)$. Pour tout entier n, il existe un écart d_n de μ tel que $f|V_n \in \mathscr{U}^{\infty}(V_n,\mu_{d_n}|V_n)$. Soit alors d un écart de μ qui domine l'ensemble des écarts d_n et d_{f_n} ; la fonction f appartient clairement à $\mathscr{C}^{\infty}(X,\mu_d)$ qui est contenu dans $\mathscr{U}^{\infty}(X,\mu)$ d'après d).

e) ⟹ f) : soient $H = (f_1,\dots,f_n)$ une famille finie ordonnée dans $\mathscr{U}^{\infty}(X,\mu)$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant $\gamma_H(X)$ et $g \in \mathscr{C}^{\infty}(\Omega)$. Il existe un recouvrement ouvert dénombrable $\mathscr{W} = (W_n)_{n \geqslant 0}$ de Ω tel que $g|W_n$ appartienne à $\mathscr{U}^{\infty}(W_n)$. Alors $(\overset{-1}{\gamma_H}(W_n))_{n \geqslant 0}$ est un recouvrement extrait de $\mathrm{Coz}(X,\mu)$ et $g \circ \gamma_H$ est DLUC relativement à ce recouvrement.

f) ⟹ g) : il suffit de vérifier que $\frac{f}{g} \in \mathscr{U}^{\infty}(X,\mu)$ si $Z(g) = \emptyset$ et $h = \frac{f}{g}$ est bornée ; posons $\gamma_H = [f,g]$ et soit Ω un ouvert relativement compact de $\mathbb{R}$ tel que $h(X) \subset \Omega$; l'image réciproque de Ω par l'application continue $\psi : (x,y) \to \frac{x}{y}$ de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ est un ouvert Ω' de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ donc de $\mathbb{R}^2$ tel que $\gamma_H(X) \subset \Omega'$. En définitive, $\psi|\Omega' \in \mathscr{C}^{\infty}(\Omega')$ et $\psi \circ \gamma_H = h$ appartient à $\mathscr{U}^{\infty}(X,\mu)$.

g) ⟹ a) : soient $Z(f)$ et $Z(g)$ deux noyaux disjoints de X ; alors $h = \dfrac{|f|}{|f| + |g|}$ sépare normalement $Z(f)$ et $Z(g)$ et appartient à $\mathscr{U}^{\infty}(X,\mu)$ d'après la condition c) des algèbres bornées.

(2.2.7) <u>DEFINITION</u>. - *On appelle espace uniforme de type* (Ab) *tout espace uniforme* (X,μ) *vérifiant les conditions équivalentes du théorème (2.2.6).*

En appliquant le théorème (2.2.6) à une pseudo-dualité (X,A) où **A est** une algèbre bornée sur X on retrouve certains résultats d'**approximation** et particulièrement :

(2.2.8) <u>PROPOSITION</u> (MROWKA, [32], 2.2). - *Soit* A *un ensemble de fonctions bornées sur* X, *stable par limites uniformes, contenant les constantes. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) A *est une algèbre bornée sur* X ;

b) A *est stable par composition avec* $\mathcal{Q}^{\infty}$;

c) A *est stable par composition avec les fonctions bornées continues sur les ouverts de* $\mathbb{R}^2$.

L'une quelconque des trois conditions a), b) ou c) implique que (X,A) est une pseudo-dualité uniforme et on peut appliquer (2.2.6) à (X,σ_A).

(2.2.9) <u>PROPOSITION</u> (MROWKA, [32], 2.9). - *Soit* A *une algèbre bornée sur* X. *Alors pour toute fonction bornée* f *sur* X *les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) $f \in A$;

b) si $\alpha<\beta$ *sont deux nombres réels, il existe une fonction* $g \in A$ *telle que :*

$$\overline{g(f^{-1}(]-\infty,\alpha]))} \cap g(f^{-1}[\beta,+\infty[)) = g(f^{-1}(]-\infty,\alpha])) \cap \overline{g(f^{-1}([\beta,+\infty[))} = \emptyset \ ;$$

c) pour tout nombre réel α, *on a* $f^{-1}(]-\infty,\alpha]) \in Z(A)$ *et* $f^{-1}([\alpha,+\infty[) \in Z(A)$.

Preuve :

a) $\Rightarrow$ b) : L'espace uniforme (X,σ_A) est de type (Ab) et par conséquent $A = \mathcal{U}(X,\sigma_A)$ sépare normalement $Z(A)$, ce qui donne en particulier b).

b) $\Rightarrow$ c) : En tenant compte du fait que $Z(A)$ est stable par intersection dénombrable, on voit que b) implique $f^{-1}(]-\infty, \alpha]) \in Z(A)$ et $f^{-1}([\beta,+\infty[) \in Z(A)$.

c) $\Rightarrow$ a) : La condition c) implique $f^{-1}(I) \in Coz(A)$ pour tout intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et par suite $f^{-1}(\omega) \in Coz(A)$ pour tout ouvert de $\mathbb{R}$; alors f appartient à $A = \mathcal{U}(X,\sigma_A)$.

Remarque. - Dans l'article [32] MROWKA n'exige pas que A contienne les constantes.

(2.2.10) PROPOSITION. - *Soit* T *un espace de Lindelöf (complètement régulier) ; le seul élément* $A = A^\infty$ *de* $a(T)$ *pour lequel* σ_A *est compatible avec la topologie de* T *et tel que* A *sépare* $Z(T,\sigma_A)$ *est* $\mathscr{C}^\infty(T)$.

Preuve. - Soit W un conoyau de fonction continue sur T ; W est un F_σ et par conséquent, muni de la topologie induite, est un espace de Lindelöf ; l'espace W est alors réunion dénombrable de conoyaux appartenant à Coz(A), et comme A est une algèbre bornée sur T, toute fonction continue et bornée f appartient à A (2.2.6.c).

(2.2.11) COROLLAIRE. - *Soit* (M,d) *un espace métrique séparable ; il existe un seul élément* A *de* $a(M)$ *tel que* $A = A^\infty$, *et tel que* σ_A *soit* *compatible avec la topologie de* M *et* A *sépare normalement les fermés de* M *: c'est* $\mathscr{C}^\infty(M)$.

2.3 LES ESPACES UNIFORMES DE TYPE (A).

(2.3.1) <u>DEFINITION</u>. - *Soit* A *un ensemble de fonctions sur un ensemble* X *; on dit que* A *est une algèbre sur* X *si :*

a) A *contient les constantes ;*

b) A *est une* $\mathbb{R}$*-algèbre pour les opérations habituelles de* $\mathbb{R}^X$ *;*

c) A *est stable par limites uniformes ;*

d) A *est stable par inverse ; i.e. si* $f \in A$ *et* $Z(f) = \emptyset$*, alors* $\frac{1}{f} \in A$.

Comme pour les algèbres bornées on obtient un certain nombre de propriétés équivalentes au fait, pour $\mathscr{U}(X,\mu)$, d'être une algèbre sur X :

(2.3.2) <u>THEOREME</u>. - *Soit* (X,μ) *un espace uniforme ; les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) $\mathscr{U}(X,\mu)$ *est une algèbre sur* X *;*

b) (X,μ) *est un espace uniforme régulier de type* (Ab) *;*

b') (X,μ) *est un espace uniforme régulier tel que* $\mathscr{U}(X,\mu)$ *sépare* $Z(X,\mu)$ *;*

c) une fonction f *sur* X *appartient à* $\mathscr{U}(X,\mu)$ *si et seulement si, pour tout ouvert* Ω *de* $\mathbb{R}$*, on a* $\overset{-1}{f}(\Omega) \in \mathrm{Coz}(X,\mu)$ *;*

d) pour tout écart $d \in \mu$*, on a* $\mathscr{C}(X,\mu_d) \subset \mathscr{U}(X,\mu)$ *;*

e) si $(f_n)_{n \geqslant 0}$ *est une suite de* $\mathscr{U}(X,\mu)$ *et si* $g \in \mathscr{C}(\Omega)$*, où* Ω *est un ouvert de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *contenant* $\Pi f_n(X)$*, alors* $h : x \longmapsto g((f_n(x))$

est une fonction uniformément continue ;

f) $\mathcal{U}(X,\mu)$ *est stable par composition avec* $\mathcal{D}$ *;*

g) les fonctions DLUC sur (X,μ) *sont uniformément continues.*

Preuve :

a) $\Rightarrow$ b) : la stabilité par inverse implique la stabilité par inverse positif et (X,μ) est régulier (2.1.3) ; d'autre part si $g \in \mathcal{U}^{\infty}(X,\mu)$ et $Z(g) = \emptyset$, alors $\frac{1}{g} \in \mathcal{U}(X,\mu)$; si de plus $f \in \mathcal{U}^{\infty}(X,\mu)$ et $\frac{f}{g}$ est bornée alors $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g} \in \mathcal{U}^{\infty}(X,\mu)$.

b) $\Leftrightarrow$ b') : Evident.

b) $\Rightarrow$ c) : soit f une fonction telle que $f^{-1}(\Omega) \in \mathrm{Coz}(X,\mu)$ pour tout ouvert Ω de $\mathbb{R}$. L'examen des différentes positions relatives des intervalles $[-n,n]$, où n est un entier supérieur à 1, avec un ouvert Ω de $\mathbb{R}$, montre que dans tous les cas $f^{(n)-1}(\Omega)$ est un conoyau de (X,μ) et donc que $f^{(n)}$ appartient à $\mathcal{U}^{\infty}(X,\mu)$ pour tout $n \geq 1$ (2.2.6) ; d'après (2.1.2), $f \in \mathcal{U}(X,\mu)$.

c) $\Rightarrow$ d) : même démonstration que dans la preuve de (2.2.6).

d) $\Rightarrow$ e) : soit d un écart appartenant à μ dominant tous les d_{f_n} ; alors h appartient à $\mathscr{C}(X,\mu_d) \subset \mathcal{U}(X,\mu)$.

e) $\Rightarrow$ f) : si $H = (f_1,\ldots,f_n)$ est une famille finie ordonnée de $\mathcal{U}(X,\mu)$ on peut considérer la suite stationnaire $(g_k)_{k \geq 1}$ définie par $g_k = f_k$ si $1 \leq k \leq n$, et $g_k = f_n$ si $k > n$. Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant $\gamma_H(X)$, l'ouvert $\Omega' = \Omega \times \mathbb{R}^{\mathbb{N} \setminus \{0,1,\ldots,n\}}$ contient $\Pi g_k(X)$. Soit

$g \in \mathscr{C}(\Omega)$; on pose $g'((t_k)_{k \geqslant 1}) = g(t_1,\ldots,t_n)$ pour toute suite $(t_k)_{k \geqslant 1}$ de Ω' ; alors $g\circ\gamma_H(x) = g'((g_k(x))$ et $g\circ\gamma_H$ appartient à $\mathcal{U}(X,\mu)$.

L'implication f) => a) est triviale.

b) => g) : en effet les tronquées d'une fonction DLUC sont également DLUC donc appartiennent à $\mathcal{U}^\infty(X,\mu)$ (2.2.6).

g) => b) : l'espace (X,μ) est de type (Ab) (2.2.6) ; d'autre part si les tronquées $f^{(n)}$ de f appartiennent à $\mathcal{U}^\infty(X,\mu)$, f est évidemment DLUC, donc (X,μ) est régulier si g) est vérifiée.

(2.3.3) <u>DEFINITION</u>. - *On dit qu'un espace uniforme* (X,μ) *est de type (A) s'il vérifie les propriétés équivalentes de* (2.3.2).

La propriété b) de (2.3.2) souligne la parenté des espaces uniformes réguliers et des espaces de type (A). Il ne semble pas que la seule condition de régularité implique la propriété, pour un espace uniforme d'être de type (A), bien que nous n'ayons pu construire un contre-exemple.

Remarque. - La stabilité par composition avec les applications continues sur les ouverts de $\mathbb{R}^2$ est équivalente à la stabilité par composition avec $\mathscr{D}$. D'autre part un espace régulier tel que $\mathcal{U}(X,\mu)$ soit une $\mathbb{R}$-algèbre est de type (A).

(2.3.4) <u>PROPOSITION</u>. - *Soit* A *une algèbre sur un ensemble* X *; alors* $\mathcal{U}(X,\sigma_A) = A$ *et si* A *sépare les points, on a* $A \in \mathcal{a}(X)$.

C'est une conséquence immédiate de (1.2.10).

Comme dans le cas des algèbres bornées, le théorème (2.3.2) permet de retrouver certains résultats d'approximation de S. MROWKA :

(2.3.5) PROPOSITION (MROWKA, [32], 3.5). - *Soit* A *un ensemble de fonctions sur un ensemble* X, *contenant les constantes, stable par limites uniformes. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) A *est une algèbre sur* X ;

b) A *est stable par composition avec* $\mathcal{Q}$;

c) A *est stable par composition avec les fonctions continues sur les ouverts de* $\mathbb{R}^2$.

L'une quelconque des trois conditions a), b) ou c) implique l'égalité $\mathcal{U}(X,\sigma_A) = A$ (voir remarque ci-dessus) et les équivalences résultent encore de (2.3.2).

(2.3.6) PROPOSITION (MROWKA, [32], 3.3). - *Soit* A *une algèbre sur un ensemble* X. *Pour une fonction* f *sur* X *les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) $f \in A$;

b) si α *et* β *sont deux réels,* $\alpha<\beta$, *il existe une fonction* $g \in A$ *telle que :*

$$\overline{g(\overline{f}^1(]-\infty,\alpha]))} \cap g(\overline{f}^1([\beta,+\infty[)) = g(\overline{f}^1(]-\infty,\alpha])) \cap \overline{g(\overline{f}^1([\beta,+\infty[))} = \emptyset$$

c) pour tout nombre réel α, *on a* $\overline{f}^1(]-\infty,\alpha]) \in Z(A)$ *et* $\overline{f}^1([\alpha,+\infty[) \in Z(A)$.

2.4 ESPACES UNIFORMES DE TYPE (A) ET DE TYPE (Ab) ASSOCIES.

A tout espace uniforme (X,μ) on associe un espace uniforme $(X,a\mu)$ (resp. $(X,a^{\infty}\mu)$) de type (A) (resp. de type (Ab)). On définit ainsi une coréflection de la catégorie des espaces uniformes (séparés) dans celle des espaces de type (A) (resp. de type (Ab)).

(2.4.1) <u>LEMME</u>. - *Soit* (X,μ) *un espace uniforme. On considère* $\mathscr{W} = (W_n)_{n \geqslant 0}$ *un recouvrement dénombrable de* X *extrait de* $\mathrm{Coz}(X,\mu)$ *et* $\mathscr{V}$ *un recouvrement uniforme de* (X,μ) *; il existe un raffinement uniforme* $\mathscr{U} = (U_\lambda)_{\lambda \in L}$ *de* $\mathscr{V}$ *tel que pour toute partie* $K \subset \mathbb{N}\times L$ *on ait :*

$$\bigcup_{(n,\lambda) \in K} W_n \cap U_\lambda \in \mathrm{Coz}(X,\mu)$$

Preuve. - On prend pour $\mathscr{U}$ un raffinement de $\mathscr{V}$ de la forme $(B(d,x,1))_{x \in X}$, où d est un écart appartenant à μ ; soit K une partie de $\mathbb{N} \times X$: on note K' la projection de K sur $\mathbb{N}$, et K(n) la coupe de K suivant $n \in K'$. La réunion $W'_n = \bigcup_{x \in K(n)} B(d,x,1)$ est un ouvert de (X,μ_d) donc un élément de $\mathrm{Coz}(X,\mu)$. Alors $\bigcup_{(n,x) \in K} W_n \cap B(d,x,1) = \bigcup_{n \in K'} W_n \cap W'_n$ appartient à $\mathrm{Coz}(X,\mu)$.

(2.4.2) <u>THEOREME</u>. - *Soient* (X,μ) *un espace uniforme et* A *l'ensemble des fonctions* f *sur* X *pour lesquelles* $f^{-1}(\Omega) \in \mathrm{Coz}(X,\mu)$ *pour tout ouvert* Ω *de* $\mathbb{R}$. *Alors* $\mathscr{U}(X,\mu \vee \sigma_A) = A$ *et* $\mathscr{U}^{\infty}(X,\mu \vee \sigma_{A^{\infty}}) = A^{\infty}$.

Preuve. - A est évidemment contenu dans $\mathscr{U}(X,\mu \vee \sigma_A)$. Réciproquement, étant donnés une fonction $f \in \mathscr{U}(X,\mu \vee \sigma_A)$ et un ouvert Ω de $\mathbb{R}$, pour tout entier

$k \geq 1$ il existe un recouvrement uniforme $\mathcal{V} = (V_i)_{i \in I}$ extrait de $Coz(X,\mu)$ et un recouvrement $\mathcal{W} = (W_n)_{n \geq 0}$ extrait de $Coz(X,\mu)$ tels que f varie au plus de $\frac{1}{k}$ sur chaque élément de $\mathcal{V} \wedge \mathcal{W}$. Soit U_k la réunion des $V_i \cap W_n$ tels que $f(V_i \cap W_n) \subset \Omega$; c'est un conoyau de (X,μ) d'après le lemme et $\overline{f}^1(\Omega) = \bigcup_{k \geq 1} U_k$ appartient à $Coz(X,\mu)$ donc f appartient à A.

On montre de la même façon que $A^{\infty} = \mathcal{U}^{\infty}(X,\mu \vee \sigma_{A^{\infty}})$.

(2.4.3) <u>COROLLAIRE</u>. - *La structure* $\mu \vee \sigma_A$ *est la moins fine structure uniforme de type* (A) *plus fine que* μ.

Remarquons d'abord que $Coz(X,\mu \vee \sigma_A) = Coz(X,\mu)$; par suite l'espace $(X,\mu \vee \sigma_A)$ est de type (A) d'après (2.3.2.c). Si ν est une structure de type (A) plus fine que μ, l'espace $\mathcal{U}(X,\nu)$ contient A et ν est plus fine que σ_A, ce qui suffit.

(2.4.4) <u>COROLLAIRE</u>. - *La structure* $\mu \vee \sigma_{\infty}$ *est la moins fine structure uniforme de type (Ab) plus fine que* μ.

C'est la même démonstration que ci-dessus en utilisant (2.2.6.c).

Il est évident qu'une intersection d'algèbres sur un ensemble X est une algèbre sur X. Si (X,μ) est un espace uniforme, $\mathcal{C}(X,\mu)$ est une algèbre sur X et l'intersection des algèbres sur X contenant $\mathcal{U}(X,\mu)$ est contenue dans $\mathcal{C}(X,\mu)$; c'est l'algèbre sur X engendrée par $\mathcal{U}(X,\mu)$ qu'on note $\widetilde{\mathcal{U}(X,\mu)}$. Le même raisonnement tient pour les algèbres bornées sur X et $\mathcal{C}^{\infty}(X,\mu)$.

(2.4.5) <u>COROLLAIRE</u>. - *L'algèbre* A *est l'algèbre sur* X *engendrée par* $\mathcal{U}(X,\mu)$ *et l'algèbre* A^{∞} *est l'algèbre bornée sur* X *engendrée par* $\mathcal{U}^{\infty}(X,\mu)$.

Si B est une algèbre sur X contenant $\mathcal{U}(X,\mu)$, la structure σ_B est plus fine que $\sigma\mu$ donc $\mathrm{Coz}(X,\mu) \subset \mathrm{Coz}(X,\sigma_B)$ et $A \subset B$.

En liaison avec la régularité, désignons par $\tilde{B}$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathbb{R}^X$ dont les tronquées $f^{(n)}$ appartiennent à un ensemble B. Alors :

(2.4.6) <u>PROPOSITION</u> (MROWKA). - *Soit* X *un ensemble. Alors :*

a) les algèbres sur X *sont les* $\tilde{B}$ *des algèbres bornées* B *sur* X ;

b) les algèbres bornées sur X *sont les* A^{∞} *des algèbres* A *sur* X.

La démonstration est immédiate en ayant recours aux différents théorèmes sur les espaces uniformes : (2.1.2), (2.3.6), et (2.4.5).

(2.4.7) <u>COROLLAIRE</u>. - *Soit* (X,μ) *un espace uniforme de type* (Ab). *Alors pour toute structure uniforme* ν *telle que* $\mathcal{U}^{\infty}(X,\nu) = \mathcal{U}^{\infty}(X,\mu)$, *on a*

$$\mathcal{U}(X,\nu) \subset \widetilde{\mathcal{U}(X,\mu)} = \mathcal{U}(X,\mu \vee \sigma_A)$$

On note désormais $a\mu$ (resp. $a^{\infty}\mu$) la structure uniforme $\mu \vee \sigma_A$ (resp. $\mu \vee \sigma_{A^{\infty}}$). Les espaces $(X,a\mu)$ et $(X,a^{\infty}\mu)$ en abrégé (aX et $a^{\infty}X$) sont respectivement les espaces de type (A) et de type (Ab) associés à l'espace uniforme (X,μ).

(2.4.8) THEOREME. - *Soit* f *une application uniformément continue de* (X,μ) *dans* (Y,ν). *Alors* f *est uniformément continue de* $(X,a\mu)$ *dans* $(Y,a\nu)$ *et de* $(X,a^{\infty}\mu)$ *dans* $(Y,a^{\infty}\nu)$.

Preuve. - Posons $A = \mathcal{U}(X,\mu)$ et $B = \mathcal{U}(Y,\nu)$. Soit $g \in B$: pour tout ouvert Ω de $\mathbb{R}$, on a $g^{-1}(\Omega) \in \mathrm{Coz}(Y,\nu)$, donc $f^{-1}(g^{-1}(\Omega)) \in \mathrm{Coz}(X,\mu)$. Ainsi $g \circ f$ appartient à A et comme σ_B est une structure initiale, f est uniformément continue de (X,σ_A) dans (Y,σ_B), et donc de $(X,a\mu)$ dans (Y,σ_B). Comme d'autre part elle est uniformément continue de $(X,a\mu)$ dans (Y,ν), le résultat est acquis. On fera la même démonstration pour $a^{\infty}X$ et $a^{\infty}Y$.

(2.4.9) COROLLAIRE. - *Le foncteur* $X \longmapsto aX$ *(resp.* $X \longmapsto a^{\infty}X$*) de la catégorie* $\mathcal{U}$ *des espaces uniformes séparés dans la catégorie* $\mathcal{U}\mathcal{A}$ *des espaces de type* (A) *(resp.* $\mathcal{U}\mathcal{A}b$ *des espaces de type* (Ab)*) est une coréflection ; i.e. pour tout espace uniforme* (X,μ) *de type* (A) *(resp.* (Ab)*), on a :*

$$\mathcal{U}(X,Y) = \mathcal{U}(X,aY) \quad (\text{resp. } \mathcal{U}(X,Y) = \mathcal{U}(X,a^{\infty}Y)).$$

Cela résulte immédiatement de (2.4.8) et du fait que, si (X,μ) est de type (A) (resp. (Ab)), on a $aX = X$ (resp. $a^{\infty}X = X$).

2.5 LES ESPACES UNIFORMES METRIQUEMENT FINS (M-FINS).

Les raisons de notre intérêt pour les espaces M-fins déjà bien étudiés dans les travaux de A. HAGER, Z. FROLIK et M.D. RICE sont triples : d'une part un résultat de M.D. RICE sur le δ-complété d'un espace uniforme et les espaces M-fins, avait été établi indépendamment par nous pour les espaces de type (A), plus généraux ; il convenait donc de préciser les liens qui unissent ces deux types d'espaces, liens qui ont déjà été esquissés par A. HAGER ([24] , § 6). D'autre part les espaces M-fins apparaissent dans la résolution du problème de Mackey pour les espaces uniformes (cf. Ch. 3). Enfin, une propriété des espaces de type (A) permet de les définir dans les mêmes termes que les espaces M-fins au moyen des espaces métriques. C'est ce que nous allons établir maintenant.

Rappelons que pour toute structure uniforme μ on désigne par $\theta\mu$ la structure uniforme universelle associée à la topologie de μ, et on pose $\upsilon\mu = \sigma\theta\mu$; la structure $\upsilon\mu$ est parfois appelée structure de replétion. De même $\beta\mu = p\theta\mu$ désigne la structure uniforme liée au compactifié de Stone-Čech.

(2.5.1) PROPOSITION. - *Soit* (X,μ) *un espace uniforme métrisable ; alors la structure* $a\mu$ *(resp.* $a^{\infty}\mu$*) est plus fine que* $\upsilon\mu$ *(resp.* $\beta\mu$*).*

En effet, tout ouvert de (X,μ) appartient à $Coz(X,\mu)$ donc $\mathscr{C}(X)$ est l'algèbre sur X associée à $\mathscr{U}(X,\mu)$.

(2.5.2) PROPOSITION. - *Un espace uniforme* (X,μ) *est de type* (A) *si et seulement si toute fonction uniformément continue de* (X,μ) *dans un espace métrisable* (M,d) *reste uniformément continue quand on munit* M *de la structure* $\upsilon\mu_d$.

Preuve. - Si (X,μ) est de type (A) et $f \in \mathscr{U}(X,M)$, alors $f \in \mathscr{U}(aX,aM)$ et comme $a\mu_d$ est plus fine que $\upsilon\mu_d$ la condition nécessaire est acquise.

Réciproquement, soit $H = \{f,g,h\} \in \mathcal{U}(X)$; on désigne par $(\dot{X},\dot{\mu}_H)$ l'espace métrisable associé à l'espace écartisable (X,μ_H). On sait que la surjection canonique $p : X \to \dot{X}$ établit une bijection entre $\mathcal{C}(\dot{X})$ et $\mathcal{C}(X)$ car toute fonction continue sur (X,μ_H) se factorise à travers p. Soit alors $j = p \circ id_X$ qui est uniformément continue de (X,μ) dans $(\dot{X},\dot{\mu}_H)$, donc de (X,μ) dans $(\dot{X},\upsilon\dot{\mu}_H)$. Comme $\dot{f}\times\dot{g} \in \mathcal{C}(\dot{X},\dot{\mu}_H) = \mathcal{U}(\dot{X},\upsilon\dot{\mu}_H)$, on a $f\times g = (\dot{f}\times\dot{g}) \circ j \in \mathcal{U}(X,\mu)$; de plus si $Z(h) = \emptyset$, alors $Z(\dot{h}) = \emptyset$ et $\frac{1}{\dot{h}} \in \mathcal{C}(\dot{X},\dot{\mu}_H) = \mathcal{U}(\dot{X},\upsilon\dot{\mu}_H)$ et $\frac{1}{h} = \frac{1}{\dot{h}} \circ j \in \mathcal{U}(X,\mu)$.

Ceci nous amène naturellement à la définition de A. HAGER [21]. Précisons au préalable qu'un espace uniforme est séparable si on a $e\mu = \mu$. Un espace écartisable est séparable si et seulement si l'espace topologique sous-jacent est séparable. Ainsi, si (X,μ_d) est séparable, il en est de même de (X,θ_d), autrement dit pour cet espace $e\theta_d = \theta_d$.

(2.5.3) <u>DEFINITION</u> (A. HAGER, [21]). - *On dit qu'un espace uniforme* (X,μ) *est métriquement fin (ou M-fin) (resp.* M_s*-fin) si toute fonction uniformément continue de* (X,μ) *dans un espace métrique (resp. métrique séparable)* (M,d) *reste uniformément continue quand on munit* M *de la structure uniforme universelle* θ_d.

Les auteurs déjà cités ont démontré que la sous-catégorie $\mathcal{UM}$ des espaces M-fins est coréflective dans $\mathcal{U}$; autrement dit il existe un foncteur m de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{UM}$ qui vérifie pour tout espace M-fin (X,μ) et tout espace (Y,ν) :

$$\mathcal{U}(X,Y) = \mathcal{U}(X,mY).$$

Ce foncteur m est obtenu au moyen de la moins fine structure uniforme M-fine $m\mu$ plus fine que μ. Nous aurons l'occasion de revenir sur cette construction.

On obtient le même résultat pour la catégorie $\mathcal{UM}s$ des espaces M_s-fins et on note m_s le foncteur correspondant ([24] , [38]).

Comme on rencontre naturellement des espaces écartisables non séparés, il convient, pour éviter des démonstrations analogues à celle de (2.5.2), de préciser une fois pour toute la construction et les propriétés de la structure uniforme universelle ou de la structure de "replétion" associées à un espace écartisable.

Soit (X,d) un espace écartisable ; l'espace séparé associé $(\dot{X},\dot{d})$ est obtenu par passage au quotient par la relation d'équivalence $x \sim y \Leftrightarrow d(x,y) = 0$. Désignons comme précédemment par p la surjection canonique de X dans $\dot{X}$. Soit δ un écart continu sur l'espace topologique (X,d) ; comme $x \longmapsto \delta(x,y)$ est continue pour tout $y \in X$, on a $\delta(x,y) = \delta(x',y)$ dès que $d(x,x') = 0$ et en choisissant $y = x$, on a $\delta(x,x') = 0$. Ainsi δ définit un écart continu $\dot{\delta}$ sur $(\dot{X},\dot{d})$. La structure uniforme universelle sur (X,d) étant définie par tous les écarts continus sur (X,d) on voit qu'elle se déduit de la structure uniforme universelle de $(\dot{X},\dot{d})$ de la façon suivante :

(2.5.4) <u>LEMME</u>. - *Soient* (X,d) *un espace uniforme écartisable,* θ_d *sa structure uniforme universelle,* $(\dot{X},\dot{d})$ *son espace séparé associé,* *et* $\theta_{\dot{d}}$ *la structure uniforme universelle de celui-ci ; alors* θ_d *est la structure initiale associée à* $p : X \to \dot{X}$ *et* $\theta_{\dot{d}}$.

En effet, si $f : (Y,\mu) \to X$ est une application telle que $p\circ f$ soit uniformément continue de (Y,μ) dans $(\dot{X},\theta_{\dot{d}})$, et si δ est un écart continu sur (X,d), il existe un écart $\dot{\delta}$ continu sur $(\dot{X},\dot{d})$ tel que $\delta = \dot{\delta}\circ(p\times p)$ et par suite $\delta\circ(f\times f) = \dot{\delta}\circ(p\times p)\circ f\times f = \dot{\delta}\circ(p\circ f\times p\circ f)$ est un écart appartenant à μ, ce qui suffit.

De la même façon :

(2.5.5) <u>LEMME</u>. - *Soient* (X,d) *un espace uniforme écartisable,* υ_d *sa structure uniforme de replétion,* $(\dot{X},\dot{d})$ *son espace séparé associé, et* $\upsilon_{\dot{d}}$ *la structure uniforme de replétion de celui-ci ; alors* υ_d *est la structure initiale associée à* $p : X \to \dot{X}$ *et* $\upsilon_{\dot{d}}$.

Ceci résulte immédiatement du fait que si $f \in \mathscr{C}(X,d)$ on a $\dot{d}_f = d_{\dot{f}}$ avec $\dot{f}\circ p = f$.

Compte tenu de ces lemmes, les caractérisations des espaces de type (A), des espaces M-fins et des espaces M_s-fins pourront se faire au moyen des espaces écartisables :

(2.5.6) <u>PROPOSITION</u>. - *Soit* (X,μ) *un espace uniforme.*

a) C'est un espace de type (A) si et seulement si toute fonction uniformément continue de (X,μ) *dans un espace écartisable* (M,d) *reste uniformément continue pour la structure* υ_d *sur* M.

b) C'est un espace M-fin (resp. M_s*-fin) si et seulement si toute* *fonction* f *uniformément continue de* (X,μ) *dans un espace écartisable (resp. et séparable)* (M,d) *reste uniformément continue pour la structure* θ_d *sur* M.

Ceci va nous permettre de construire les coréflections mX, m_sX et aX par des procédés analogues.

(2.5.7) LEMME. - *Soit* (M,d) *un espace écartisable. On a* $\bigcup_{\rho \in e\mu_d} \theta_\rho = e\theta_d$.

Soit δ un écart de $e\theta_d$. Alors δ est défini par une suite $\mathscr{V}^n$, $n \geq 0$, de recouvrements ouverts dénombrables de M. Il existe un écart ρ de $e\theta_d$ pour lequel chaque $\mathscr{V}^n$ est un recouvrement uniforme de (M,ρ) et δ appartient à $e\theta_\rho = \theta_\rho$. Alors $e\theta_d \subset \bigcup_{\rho \in e\mu_d} \theta_\rho$. L'inclusion inverse est évidente.

(2.5.8) PROPOSITION. - *Soit* (M,d) *un espace uniforme écartisable. On a :*

$$m_s\mu_d = \mu_d \vee e\theta_d.$$

Preuve. - En utilisant le lemme précédent il est facile de vérifier que $m_s\mu_d$ est plus fine que $\mu_d \vee e\theta_d$. Il suffit alors de montrer que $\mu_d \vee e\theta_d$ est une structure M_s-fine. Soit f une fonction uniformément continue de $(M,\mu_d \vee e\theta_d)$ dans un espace écartisable séparable (M',d'). On a vu que $\theta_{d'}$ est séparable, donc f est uniformément continue de M, muni de la structure $e\theta(\mu_d \vee e\theta_d) = e\theta_d$ dans M' muni de la structure $e\theta_{d'} = \theta_{d'}$, et tout est dit.

(2.5.9) PROPOSITION. - *Un espace uniforme* (X,μ) *est* M_s*-fin si et seulement si toute fonction uniformément continue* f *de* (X,μ) *dans un* *espace écartisable* (M,d) *est uniformément continue de* (X,μ) *dans* $(M,e\theta_d)$.

Preuve. - La condition suffisante est évidente. Par ailleurs, si (X,μ) est M_s-fin, toute fonction uniformément continue de (X,μ) dans (M,d) le reste de (X,μ) dans $(M,m_s\mu_d)$, donc a fortiori, d'après (2.5.8), dans $(M,e\theta_d)$.

(2.5.10) <u>PROPOSITION</u>. - *Soit* (X,μ) *un espace uniforme ; alors les trois ensembles d'écarts sur* X : $\bigcup_{d\in\mu}\theta_d$, $\bigcup_{d\in\mu}(\mu_d \vee e\theta_d)$ *et* $\bigcup_{d\in\mu}(\mu_d \vee \upsilon_d)$ *sont trois structures uniformes sur* X.

Preuve. - Montrons-le pour le second de ces ensembles : soit ρ un écart dominé par $\bigcup_{d\in\mu}(\mu_d \vee e\theta_d)$; pour tout $k \geqslant 1$ il existe un écart d_k de μ tel que l'entourage $B(\rho,\frac{1}{k})$ appartienne à la structure $\mu_{d_k} \vee e\theta_{d_k}$. Soit d un écart de μ dominant tous les d_k ; l'écart ρ appartient alors à $\mu_d \vee e\theta_d$, ce qui montre le résultat. La démonstration est identique dans les deux autres cas.

Remarque. - On vérifie aisément que $e(\bigcup_{d\in\mu}(\mu_d \vee e\theta_d)) = \bigcup_{d\in\mu} e\theta_d$.

(2.5.11) <u>THEOREME</u>. - *Pour tout espace uniforme* (X,μ) *on a :*

a) $m\mu = \bigcup_{d\in\mu}\theta_d$;

b) $m_s\mu = \bigcup_{d\in\mu}(\mu_d \vee e\theta_d)$;

c) $a\mu = \bigcup_{d\in\mu}(\mu_d \vee \upsilon_d)$.

Preuve. - Le raisonnement se fait simplement en utilisant les **foncteurs** θ, $e\theta$ et υ. Donnons un exemple : soit f une fonction uniformément **conti**nue de $(X, \bigcup_{d \in \mu} (\mu_d \vee \upsilon_d))$ dans un espace écartisable (M,d') ; **l'écart** $d' \circ (f \times f)$ appartient à $\bigcup_{d \in \mu} (\mu_d \vee \upsilon_d)$ et il existe $d \in \mu$ tel que $f : (X, \mu_d \vee \upsilon_d) \to (M,d')$ soit uniformément continue ; il en est **de même** pour les structures $\upsilon(\mu_d \vee \upsilon_d) = \upsilon_d$ sur X et $\upsilon_{d'}$ sur M, et a **fortiori,** $f : (X, \bigcup_{d \in \mu} (\mu_d \vee \upsilon_d)) \to (M, \upsilon_{d'})$ est uniformément continue. Ceci **montre** que les trois structures précédentes sont respectivement M-fine, **M_s**-fine et de type (A). Réciproquement considérons, par exemple, **l'appli**cation identique de $(X, m\mu)$ sur (X,μ). Par hypothèse elle est **uniformé**ment continue, pour tout écart $d \in \mu$, de $(X, m\mu)$ dans (X, μ_d), **donc dans** (X, μ_d). Par définition de la borne supérieure, $m\mu$ est plus fine **que** $\bigcup_{d \in \mu} \theta_d$.

(2.5.12) <u>COROLLAIRE 1</u>. - $a\mu \leqslant m_s\mu \leqslant m\mu$.

(2.5.13) <u>COROLLAIRE 2</u> :

$$a)\ \mathscr{H}(X, m\mu) = \bigcup_{d \in \mu} \mathscr{H}(X, \theta_d)\ ;$$

$$b)\ \mathscr{H}(X, m_s\mu) = \bigcup_{d \in \mu} \mathscr{H}(X, \mu_d \vee e\theta_d)\ ;$$

$$c)\ \mathscr{H}(X, a\mu) = \bigcup_{d \in \mu} \mathscr{H}(X, \mu_d \vee \upsilon_d).$$

(2.5.14) <u>COROLLAIRE 3</u>. - *Pour tout espace uniforme* (X,μ) *on a :*

$$\mathscr{U}(X, a\mu) = \mathscr{U}(X, m_s\mu) = \mathscr{U}(X, m\mu).$$

Preuve. - Si $f \in \mathscr{U}(X, m\mu)$, on a $d_f \in \bigcup_{d \in \mu} \theta_d$, et il existe $d \in \mu$ **tel que** $d_f \in \theta_d$; autrement dit $f \in \mathscr{U}(X, \theta_d) = \mathscr{C}(X, \mu_d) \subset \mathscr{U}(X, a\mu)$. **L'égalité** est alors conséquence de (2.5.12).

(2.5.15) COROLLAIRE 4. - *Soit* (X,μ) *un espace uniforme ; tout recouvrement dénombrable de* X *extrait de* $\mathrm{Coz}(X,\mu)$ *est un recouvrement de* $m_s\mu$ *et en particulier de* $m\mu$.

Preuve. - Soient $V_n = \mathrm{Coz}(f_n)$ les éléments d'un tel recouvrement ; on peut trouver un écart d appartenant à μ qui domine tous les d_{f_n} ; alors le recouvrement $(V_n)_{n \geq 0}$ est uniforme pour la structure $e\theta_d$, ce qui suffit.

Pour donner toute sa valeur au corollaire (2.5.14) qui exprime que les espaces M-fins ou M_s-fins sont des espaces de type (A), donnons l'exemple suivant :

(2.5.16) EXEMPLE. - Soit T un espace compact de dimension infinie, i.e. pour tout entier $k \geq 1$ il existe un recouvrement ouvert fini $\mathscr{V}_k = (V_i^k)_{1 \leq i \leq n_k}$ de T n'admettant aucun raffinement ouvert d'ordre inférieur à k. La normalité de T permet de supposer que les $\mathscr{V}_k$ sont extraits de Coz(T). Soit X la somme topologique de la suite $(T_k)_{k \geq 0}$ d'espaces compacts tous égaux à T ; on munit X de la structure uniforme de replétion. Alors l'espace uniforme X est un espace de type (A) ; mais le recouvrement $\mathscr{V}$ de X dont les traces sur les espaces T_k sont les recouvrements $\mathscr{V}_k$ n'a pas de raffinement d'ordre fini, et n'est pas uniforme sur X ; par contre il l'est sur m_sX d'après (2.5.15).

(2.5.17) EXEMPLE. - Soit (M,d) un espace métrique non séparable ; l'espace $(M, e\theta_d \vee \mu_d)$ est M_s-fin mais n'est pas M-fin.

2.6 LES ESPACES UNIFORMES DE TYPE (C).

Un espace uniforme de type (A) se caractérise par une propriété "dénombrablement locale" (th. 2.3.2.g) ; il convient donc de le comparer aux espaces définis par des propriétés "uniformément locales" déjà étudiés : les espaces localement fins de J. ISBELL ([I]), les espaces simplement fins ou δ-localement fins ([35]). Il se trouve que tous les espaces mentionnés ci-dessus vérifient la propriété (C) : $\mathcal{U}(X,\mu)$ est stable par composition avec $\mathcal{S}$. Or les sous-algèbres A de R^X séparant les points de X et stables par composition avec $\mathcal{S}$ sont considérées par J. ISBELL ([27]) ; l'étude de l'espace (X,σ_A) y est faite complètement. Il s'avère que l'espace $\mathcal{U}(X,\sigma_A) = \overline{A}^u$ n'est pas forcément stable par composition avec $\mathcal{S}$, et l'on perd ainsi tout renseignement sur les structures ν sur X telles que $\mathcal{U}(X,\nu) = \overline{A}^u$, autres que la structure faible. Nous appellerons donc espaces uniformes de type (C) tout espace uniforme (X,μ) tel que $\mathcal{U}(X,\mu)$ soit stable par composition avec $\mathcal{S}$.

On va voir que ces espaces se caractérisent par une propriété uniformément locale. Nous allons rappeler quelques définitions sur ce type de propriétés.

(2.6.1) <u>DEFINITION</u>. - *Soit (X,μ) un espace uniforme.*

a) Un recouvrement $\mathcal{V} = (V_i)_{i \in I}$ de X est dit uniformément localement uniforme (en abrégé ULU) s'il existe un recouvrement uniforme $\mathcal{W} = (W_\lambda)_{\lambda \in L}$ tel que la trace de $\mathcal{V}$ sur chaque W_λ soit uniforme pour la structure $\mu|W_\lambda$.

b) Une fonction f *est dite uniformément localement uniformément continue (resp. et bornée) s'il existe un recouvrement uniforme* $\mathscr{W} = (W_\lambda)_{\lambda \in L}$ *tel que* $f|W_\lambda \in \mathscr{U}(W_\lambda, \mu|W_\lambda)$ *(resp.* $f|W_\lambda \in \mathscr{U}^\infty(W_\lambda, \mu|W_\lambda)$*) pour tout* $\lambda \in L$. *On dira en abrégé que* f *est ULUC (resp. ULUCB).*

c) Une partie H *de* $\mathscr{U}(X,\mu)$ *est dite uniformément localement uniformément équicontinue (en abrégé ULUE) s'il existe un recouvrement uniforme* $\mathscr{W} = (W_\lambda)_{\lambda \in L}$ *tel que* $H|W_\lambda \in \mathscr{H}(W_\lambda, \mu|W_\lambda)$ *pour tout* $\lambda \in L$.

Si tous les recouvrements ULU sont uniformes l'espace (X,μ) est *localement fin* ([I]). Si les fonctions ULUC sont uniformément continues l'espace (X,μ) est *simplement fin* ; si les parties dénombrables ULUE sont uniformément équicontinues l'espace (X,μ) est δ-*localement fin* ([35]). Enfin si les fonctions ULUCB sont uniformément continues l'espace (X,μ) est dit S^∞-*fin*.

Nous donnons d'abord un résultat caractérisant les espaces de type (C) ; démontré par R. PUPIER il n'a pas été publié.

(2.6.2) PROPOSITION. - *Soit* (X,μ) *un espace uniforme ; les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) (X,μ) *est un espace de type (C) ;*

b) $(X,\sigma\mu)$ *est un espace* S^∞-*fin.*

Preuve. - Soit f une fonction ULUCB sur $(X,\sigma\mu)$. Il existe un recouvrement dénombrable $\sigma\mu$-uniforme $\mathcal{W} = (W_n)$ (d'ordre k) tel que $f|W_n \in \mathcal{U}^{\infty}(W_n, \sigma\mu|W_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $(h_n)_{n \geq 0}$ une partition uniformément équicontinue de l'unité subordonnée au recouvrement $\mathcal{W}$ ([I]) ; pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g_n = h_n.f$ appartient à $\mathcal{U}^{\infty}(X,\mu)$ et la suite $(g_n)_{n \geq 0}$ est $\sigma\mu$-uniformément localement finie. D'après [1], th. (1.3.5), la fonction $f = \sum_{n=o}^{\infty} h_n.f$ appartient à $\mathcal{U}(X,\mu)$.

Réciproquement, pour toute famille finie $H = (f_1,\ldots,f_n)$ dans $\mathcal{U}(X,\mu)$ et tout $g \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^n)$, la fonction $g\circ\gamma_H$ est ULUCB pour la structure $\sigma\mu$, ce qui suffit.

Les espaces simplement fins sont S^{∞}-fins ; d'autre part les espaces δ-localement fins sont simplement fins pour la structure affaiblie ((2.6.6) et (2.6.7)). On a ainsi facilement :

(2.6.3) <u>COROLLAIRE</u>. - *Les espaces simplement fins, δ-localement fins, localement fins sont de type (C).*

D'autre part la liaison entre les espaces de type (A) ou les espaces M-fins (resp. M_s-fins) et les espaces simplement fins est assurée par :

(2.6.4) <u>PROPOSITION</u>. - *Les espaces de type (A), et en particulier les espaces M-fins et M_s-fins sont simplement fins pour la structure de Shirota associée.*

Preuve. - En effet toute fonction ULUC sur un espace $(X, e\mu)$ est DLUC et le résultat provient de (2.3.2.g).

(2.6.5) REMARQUE 1. - Un espace uniforme simplement fin ou δ-localement fin n'est pas nécessairement de type (A). Il suffit de considérer un espace précompact non de type (A).

(2.6.6) REMARQUE 2. - Un espace uniforme simplement fin n'est pas nécessairement δ-localement fin. Exemple : reprenons l'espace construit dans l'exemple (2.5.16). L'espace X est un espace faible de type (A) et il est simplement fin. D'après (2.2.3) il existe, pour chaque entier k, un recouvrement $(Z_i^k)_{1 \leqslant i \leqslant n_k}$ extrait de $Z(T)$ tel que $Z_i^k \subset V_i^k$ pour tout i ; considérons des fonctions f_i^k, continues sur T, telles que $f_i^k(Z_i^k) = \{1\}$ et $f_i^k(T \setminus V_i^k) = \{0\}$, avec $0 \leqslant f_i^k \leqslant 1$. On définit alors les fonctions $h_i^k : X \to \mathbb{R}$ de la façon suivante : $h_i^k(x) = 0$ si $x \notin T_k$ et $h_i^k(x) = f_i^k(x) + 2k$ si $x \in T_k$, pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $i \in [1,n_k]$. On obtient ainsi une partie ULUE dénombrable sur X, car les restrictions à chaque T_k forment une suite stationnaire ; or cette partie n'est pas uniformément équicontinue sur X, car la condition $\operatorname*{Sup}_{i,k} |h_i^k(x) - h_i^k(y)| \leqslant \varepsilon$ implique que x et y appartiennent au même élément de $\mathscr{V}$, et alors $\mathscr{V}$ serait un recouvrement uniforme de X, ce qui n'est pas.

(2.6.7) REMARQUE 3. - Un espace δ-localement fin n'est pas nécessairement simplement fin. Exemple : soit (X,μ) un espace uniforme tel que μ soit stable par intersections dénombrables (P-espace) et tel que $\mathscr{U}(X,\mu)$ contienne une partie $H = (f_i)_{i \in I}$ simplement bornée et non uniformément équicontinue. On considère l'ensemble somme Z des X_i avec $X_i = X$ pour tout $i \in I$, et l'ensemble η des recouvrements $\mathscr{V} = \bigcup_{i \in I} \mathscr{V}_i$ de Z, où $\mathscr{V}_i = \{X_i\}$ sauf pour une partie dénombrable de I pour laquelle $\mathscr{V}_i$ est un recouvrement uniforme de X_i pour la structure μ. C'est une base d'une structure uniforme ν sur Z et l'espace (Z,ν) est un P-espace uniforme, donc toute suite $(f_n)_{n \geqslant 0}$ de $\mathscr{U}(Z,\nu)$ est uniformément équicontinue. Soit $f : Z \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = f_i(x)$ si $x \in X_i$; f est une fonction ULUC relativement au recouvrement $\mathscr{W} = (X_i)_{i \in I}$ et n'est pas uniformément continue ; sinon il existerait une partie dénombrable $J \subset I$ telle que f soit constante sur chaque X_i, $i \notin J$, et la famille H serait uniformément continue sur X puisque X est un P-espace.

(2.6.8) <u>REMARQUE 4</u>. - Un espace uniforme de type (A) n'est pas nécessairement simplement fin. L'espace Z précédent nous fournit un exemple puisque tout P-espace uniforme (X,μ) est de type (A) : en effet, si deux fonctions f et g appartiennent à $\mathscr{U}(X,\mu)$, les produits $f^{(n)}g^{(n)}$ des tronquées de f et g forment une suite uniformément équicontinue qui converge simplement vers f g, qui est donc uniformément continue. D'autre part la condition c) de (2.1.2) montre que (X,μ) est régulier, ce qui suffit.

2.7 $\mathscr{U}$-PLONGEMENT ET ESPACES UNIFORMES (UP).

(2.7.1) <u>DEFINITION</u>. - *Une partie* Y *d'un espace uniforme* (X,μ) *est dite* $\mathscr{U}$*-plongée si toute fonction* f *appartenant à* $\mathscr{U}(Y,\mu|Y)$ *est la restriction à* Y *d'une fonction* g *de* $\mathscr{U}(X,\mu)$. *Un espace uniforme* (X,μ) *est dit de type (UP) si toute partie* Y *de* X *est* $\mathscr{U}$*-plongée.*

Les espaces (UP) ont été étudiés par H.H. CORSON et J.R. ISBELL ([11]) sous le nom d'espaces uniformes (RE). Parmi les résultats qui nous intéressent dans cet article, figure :

(2.7.2) PROPOSITION. - *Soit* (X,μ) *un espace de type (UP) ; alors tout recouvrement dénombrable d'ordre fini de* μ *est un recouvrement de* $\sigma\mu$.

Ceci va nous permettre de trouver une nouvelle propriété caractéristique des espaces de type (A). Auparavant vérifions que ceux-ci sont des espaces (UP) :

(2.7.3) PROPOSITION. - *Tout espace uniforme de type (A) est un espace (UP).*

Soient Y une partie de X et $f \in \mathcal{U}(Y,\mu|Y)$; il existe un écart $d \in \mu$ tel que $f \in \mathcal{U}(Y,\mu_d|Y)$ et f est prolongeable en une fonction $g \in \mathcal{C}(X,\mu_d) \subset \mathcal{U}(X,\mu)$.

Dans [35], R. PUPIER annonçait que tout espace uniforme (X,μ) tel que la structure $e\mu$ soit simplement fine, est un espace (UP) (th. 2.4). Ainsi la proposition précédente n'est qu'un cas particulier de ce résultat, d'après (2.6.3). Cependant la démonstration très simple qui précède montre l'intérêt d'une preuve indépendante. (Rappelons que la preuve du résultat général est une adaptation de celle de S. GINSBURG et J. ISBELL ([19], th. 4.12) qui montre en fait que toute fonction uniformément continue sur une partie Y d'un espace uniforme quelconque (X,μ) peut se prolonger à X en une fonction ULUC pour la structure $e\mu$).

On déduit de (2.7.3) la caractérisation cherchée des espaces de type (A) :

(2.7.4) THEOREME. - *Soit* (X,μ) *un espace uniforme. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) (X,μ) *est de type (A) ;*

b) tout recouvrement dénombrable d'ordre fini de X *extrait de* $Coz(X,\mu)$ *est uniforme.*

Preuve :

a) => b) : D'après (2.5.15), un recouvrement dénombrable de (X,μ) d'ordre fini, extrait de $Coz(X,\mu)$ appartient à $m_s\mu$ donc à $\sigma m_s\mu$. Si (X,μ) est de type (A), on a $\mathcal{U}(X,m_s\mu) = \mathcal{U}(X,\mu)$ et $\sigma m_s\mu = \sigma\mu$, ce qui suffit.

b) => a) : Sous l'hypothèse b), (X,μ) est un espace de type (Ab) d'après (2.2.6.b). D'autre part, soient $\mathcal{V}$ un recouvrement ouvert uniforme dénombrable, d'ordre fini de $\mathbb{R}$, dont tous les éléments sont bornés, et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction telle que les tronquées $f^{(n)}$ appartiennent à $\mathcal{U}(X,\mu)$. Pour tout $V \in \mathcal{V}$, il existe un entier $n \geq 1$ tel que $\overset{-1}{f}(V) = f^{(n)-1}(V)$ et $(\overset{-1}{f}(V))_{V \in \mathcal{V}}$ est un recouvrement de X, dénombrable, d'ordre fini, extrait de $Coz(X,\mu)$; il est donc uniforme et (X,μ) est régulier.

Pour en terminer avec les propriétés élémentaires des espaces (UP), citons :

(2.7.5) PROPOSITION. - *Tout sous-espace d'un espace (UP) est un espace (UP). De plus si* Y *est une partie de l'espace uniforme* (X,μ) *on a :* $\sigma\mu|Y = \sigma(\mu|Y)$.

2.8 LES ESPACES UNIFORMES (BP).

Les parties bornées (ou plus simplement les bornés), de l'espace uniforme (X,μ) sont les parties bornées relativement à $\mathcal{U}(X,\mu)$ (cf. 1.1, p. 6). On sait qu'une partie est bornée dans (X,μ) si et seulement si c'est une partie précompacte pour l'espace $(X,\sigma\mu)$. Ainsi les bornés coïncident avec les précompacts dans les espaces faibles. Il n'en est malheureusement pas toujours ainsi.

(2.8.1) DEFINITION. - *On appelle espace (BP) tout espace uniforme dans lequel les parties bornées sont précompactes pour la structure induite.*

L'exemple B, p. 155 de [19] donne un espace uniforme borné dans lui-même et non précompact.

Une partie D d'un espace uniforme (X,μ) est dite *discrète* si $\mu|D$ est la structure uniforme discrète sur D. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'il existe un écart $d \in \mu$ et un réel $\alpha>0$ tels que, pour tous x et y distincts de D, on ait $d(x,y) \geqslant \alpha$.

(2.8.2) PROPOSITION. - *Soit* (X,μ) *un espace uniforme. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) (X,μ) *est (BP) ;*

b) toute suite $S = (x_n)_{n \geqslant 0}$ *de points de* X, *bornée et discrète est finie.*

Si (X,μ) est un espace (BP) toute partie dénombrable bornée est précompacte ; si elle est discrète, elle est donc finie. Réciproquement, soit B une partie non précompacte ; elle contient une partie discrète infinie, donc B n'est pas bornée.

(2.8.3) PROPOSITION. - *Tout espace (UP) est un espace (BP).*

Soit B une partie infinie dénombrable et discrète d'un espace (UP) ; en écrivant $B = \{x_n\}_{n \geqslant 0}$, la fonction $f : X \to \mathbb{R}$ définie par $f(x_n) = n$ appartient à $\mathcal{U}(B)$ et est prolongeable en une fonction uniformément continue sur l'espace tout entier, qui n'est pas bornée sur B ; la partie B n'est pas bornée.

Dans cette démonstration la condition (UP) est bien trop forte, puisqu'il suffit que toute partie discrète dénombrable de l'espace soit $\mathcal{U}$-plongée. Nous obtenons les corollaires suivants :

(2.8.4) COROLLAIRE 1. - *Les espaces de type (A), les espaces localement fins, les espaces simplement fins sont des espaces (BP).*

(2.8.5) COROLLAIRE 2. - *Les espaces δ-localement fins et S^{∞}-fins sont des espaces (BP).*

Dans un espace δ-localement fin les parties dénombrables discrètes sont $\mathcal{U}$-plongées ([1], cor. 1.2.3). Considérons maintenant une partie $S = \{x_n\}_{n \geqslant o}$ infinie d'un espace S^{∞}-fin (X,μ) ; si S est discrète, soit d un écart de μ et soit α un réel strictement positif tels que $d(x_n,x_m) \geqslant \alpha$ si $m \neq n$. Considérons des fonctions h_n appartenant à $\mathcal{U}^{\infty}(X,\mu)$ telles que $Coz(h_n) \subset B(d,x_n,\alpha/4)$ et $h_n(x_n) = n$. La fonction $g = \sum_{k=1}^{\infty} h_n$ est ULUCB car chaque boule $B(d,x,\alpha/4)$ ne rencontre au plus qu'une boule $B(d,x_n,\alpha/4)$; par suite g est uniformément continue, ce qui montre que S n'est pas bornée.

Les espaces uniformes (BP) possèdent des propriétés de stabilité remarquables :

(2.8.6) PROPOSITION :

a) Un sous-espace d'un espace (BP) est un espace (BP).

b) Un produit d'espaces (BP) est un espace (BP).

c) Une somme directe uniforme d'espaces (BP) est un espace (BP).

Les deux premières assertions sont des propriétés catégoriques qui pourraient se déduire du fait que la sous-catégorie des espaces (BP) est réflective dans la catégorie des espaces uniformes. On construirait aisément l'espace (BP) associé à un espace uniforme donné, en remarquant que la borne supérieure des structures uniformes (BP) moins fines qu'une structure uniforme μ est encore une structure uniforme (BP) (n'oublions pas que $\sigma\mu$ est une structure (BP)). Mais les démonstrations directes sont assez élémentaires :

a) Soient Y une partie d'un espace uniforme (X,μ) de type (BP) et Z une partie de Y. Si Z est bornée dans $(Y,\mu|Y)$, elle est a fortiori bornée dans (X,μ) donc $\mu|Z$ est une structure précompacte ; mais, par transitivité, on a $\mu|Z = (\mu|Y)|Z$ et Z est précompacte dans $(Y,\mu|Y)$.

b) Soient $(X_i,\mu_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces (BP), et (X,μ) leur produit direct (uniforme) ; soit B un borné de (X,μ) : les projections $B_i = pr_i(B)$ sont des bornés dans les espaces X_i, car l'image directe d'un borné par une application uniformément continue est encore un borné. Ainsi les B_i sont des précompacts dans chacun des X_i et $B \subset \Pi B_i$ est un précompact dans (X,μ).

c) Soient $((X_i,\mu_i))_{i \in I}$ une famille d'espaces (BP) et (Y,ν) leur somme directe (uniforme). Une partie B de (Y,ν) est bornée si et seulement si $B \cap X_i = \emptyset$, sauf pour une partie finie J de I, pour laquelle $B \cap X_i$ est borné. Alors $B \cap X_i$ est précompact dans X_i et B est précompact dans (Y,ν).

(2.8.7) <u>REMARQUE 1</u>. - Un espace (BP) n'est pas nécessairement (UP) : les espaces (BP) sont stables par produit uniforme et les espaces (UP) ne le sont pas ([11]).

(2.8.8) <u>REMARQUE 2</u>. - Un espace uniforme de type (C) n'est pas (BP) et par conséquent n'est pas nécessairement (UP) : là encore on pourra prendre l'exemple des espaces uniformes bornés dans eux-mêmes (pseudo-précompacts) non précompacts.

2.9 STABILITE DES ESPACES DE TYPE (A).

(2.9.1) PROPOSITION. - *Soient* (X,μ) *un espace uniforme de type (A) et* Y *une partie de* X. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) Y *est de type (A) pour la structure uniforme induite ;*

b) Y *est normalement séparé par* $\mathcal{U}(X)$ *de tout noyau* Z *qui lui est disjoint.*

Supposons $(Y,\mu|Y)$ de type (A) et soit $Z = Z(f)$ un noyau de $Z(X,\mu)$ disjoint de Y ; la fonction $h = f|Y$ appartient à $\mathcal{U}(Y)$ et elle est inversible dans $\mathcal{U}(Y)$; son inverse $g = \frac{1}{h}$ admet un prolongement $k \in \mathcal{U}(X)$ et on a $k.f(Z) = \{0\}$ et $k.f(Y) = \{1\}$.

Comme Y est $\mathcal{U}$-plongée dans X, l'espace vectoriel $\mathcal{U}(Y,\mu|Y)$ est en fait une $\mathbb{R}$-algèbre. Il suffit donc de montrer que $(Y,\mu|Y)$ est un espace régulier. Soit f une fonction strictement positive appartenant à $\mathcal{U}(Y)$: on peut la prolonger en une fonction $g \in \mathcal{U}(X)$ et le noyau $Z(g)$ est disjoint de Y ; il existe donc une fonction $h \in \mathcal{U}(X)$ telle que $h(Y) = \{0\}$ et $h(Z(g)) = \{1\}$, $0 \leqslant h \leqslant 1$. Comme g peut être choisie positive, la fonction g+h est inversible dans $\mathcal{U}(X)$ et $\frac{1}{g+h} \mid Y = \frac{1}{f}$.

Ceci montre que les espaces de type (A) ne sont généralement pas stables par les sous-espaces. Cependant tout noyau d'un espace de type (A) est un espace de type (A) pour la structure induite.

(2.9.2) PROPOSITION. - *Un produit d'espaces de type (A) n'est généralement pas un espace de type (A).*

Soit X un espace de Lindelöf non pseudocompact ; muni de la structure universelle, c'est un espace de type (A) ; d'après [36], prop. (3.4.8), $(X\times X, \theta\times\theta)$ ne contient pas $\mathscr{C}^{\infty}(X\times X)$ et par conséquent n'est pas une algèbre sur $X\times X$.

Par contre la coréflection $X \longmapsto aX$ nous fournit :

(2.9.3) PROPOSITION. - *Toute somme directe uniforme d'espaces de type (A) est un espace de type (A).*

2.10 APPLICATION AU $\mathscr{C}$-PLONGEMENT.

(2.10.1) PROPOSITION. - *Soit* Y *un sous-espace topologique d'un espace complètement régulier* X. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) Y *est* $\mathscr{C}$*-plongé dans* X *;*

b) Y *est normalement séparé de tout noyau* Z *qui lui est disjoint et les noyaux de l'espace* Y *sont les traces sur* Y *des noyaux de* X.

Si Y est $\mathscr{C}$-plongé dans X, la structure de replétion de Y est la structure induite par la structure de replétion de X, donc Y est normalement séparé de tout noyau disjoint de X (2.9.1) ; par ailleurs on a évidemment la deuxième partie de l'assertion b). Réciproquement, si on munit X de la structure universelle θ, l'espace uniforme $(Y,\theta|Y)$ est de type (A) et comme les conoyaux de l'espace topologique Y sont des conoyaux pour la structure $\theta|Y$, on a $\mathscr{C}(Y) \subset \mathscr{U}(Y,\theta|Y)$ et Y est $\mathscr{C}$-plongé.

(2.10.2) <u>COROLLAIRE 1</u>. - *Soit* Y *un sous-espace de Lindelöf d'un espace complètement régulier* X. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) Y *est* $\mathscr{C}$ *-plongé dans* X ;

b) Y *est normalement séparé de tout noyau* Z *qui lui est disjoint.*

(2.10.3) <u>COROLLAIRE 2</u>. - *Tout noyau de Lindelöf d'un espace complètement régulier est* $\mathscr{C}$*-plongé.*

(2.10.4) <u>COROLLAIRE 3</u>. - *Tout fermé d'un espace métrique est* $\mathscr{C}$ *-plongé.*

CHAPITRE 3

PROBLEME DE MACKEY DANS LES ESPACES UNIFORMES

INTRODUCTION. - On considère une pseudo-dualité uniforme (X,A) qui peut être la pseudo-dualité $(X,\mathcal{U}(X))$ associée à un espace uniforme séparé (X,μ). Une structure uniforme μ sur X est dite compatible avec la pseudo-dualité (X,A) si $\mathcal{U}(X,\mu) = A$; lorsque $\mathcal{U}^{\infty}(X,\mu) = A^{\infty}$ on dit qu'elle est ∞-compatible avec (X,A). On désigne respectivement par $\mathcal{K}(X,A)$ et $\mathcal{K}^{\infty}(X,A)$ (en abrégé $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}^{\infty}$) les ensembles de structures uniformes sur X compatibles, ou ∞-compatibles, avec la pseudo-dualité (X,A). En d'autres termes $\mathcal{K}(X,A)$ (resp. $\mathcal{K}^{\infty}(X,A)$) est l'ensemble de structures uniformes sur X qui ont la même structure affaiblie σ_A (resp. la même structure précompacte associée $\sigma_{A^{\infty}} = p_A$). La relation de finesse " ν est plus fine que μ, $\mu \leq \nu$" sur l'ensemble des structures uniformes sur X induit une relation d'ordre sur $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}^{\infty}$. Les deux ensembles ordonnés $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}^{\infty}$ sont inductifs (3.1.9) et, en général, ne possèdent pas de plus grand élément (3.1.8). Toute structure uniforme μ sur X peut se définir, comme on sait, comme structure de $\mathcal{H}(X,\mu)$-convergence sur $\mathcal{U}(X,\mu)$, et aussi comme structure de $\mathcal{H}^{\infty}(X,\mu)$-convergence sur $\mathcal{U}^{\infty}(X,\mu)$ (cf. [7], [36]). Cela nous conduit à appeler compactologie compatible avec la pseudo-dualité (X,A) toute compactologie vectorielle

$\mathscr{K}$ sur A formée de disques simplement compacts, telle que la structure uniforme $\mu_{\mathscr{H}}$ sur X de la $\mathscr{H}$-convergence sur A appartienne à $\mathscr{K}$. L'ensemble des compactologies sur A compatibles avec la pseudo-dualité (X,A) sera désigné par $\Gamma(X,A)$ (en abrégé Γ). De la même façon on considèrera l'ensemble $\Gamma^{\infty}(X,A)$ des compactologies $\mathscr{H}$ sur A^{∞} formées de disques simplement compacts et uniformément bornés de A^{∞} telles que $\mu_{\mathscr{H}}$ appartienne à $\mathscr{K}^{\infty}$. La relation d'inclusion définit sur Γ et Γ^{∞} des relations d'ordre. Les deux ensembles ordonnés $\mathscr{K}$ et Γ sont liés par les applications :

$$h : \mathscr{K} \to \Gamma, \text{ telle que } h(\mu) = \mathscr{H}(X,\mu)$$
$$k : \Gamma \to \mathscr{K}, \text{ telle que } k(\mathscr{H}) = \mu_{\mathscr{H}}.$$

Il est clair que $k \circ h$ est l'identité de $\mathscr{K}$, mais que $h \circ k$ diffère de l'identité sur Γ : il suffit de considérer l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$, la compactologie vectorielle $\mathscr{H}$ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ engendrée par les parties finies et $\mathscr{H} \neq \mathscr{H}(\mathbb{N},\mu_{\mathscr{H}})$.

Les deux applications h et k sont croissantes et $h \circ k$ est l'identité sur les éléments maximaux de Γ. On a le même résultat pour les deux ensembles ordonnés $\mathscr{K}^{\infty}$ et Γ^{∞}.

Les m-espaces (resp. les m^{∞}-espaces) sont les espaces uniformes (X,μ) pour lesquels $\mathscr{K}$ (resp. $\mathscr{K}^{\infty}$) possède un plus grand élément, noté $\tau\mu$ (resp. $\tau^{\infty}\mu$). Les τ-espaces (resp. τ^{∞}-espaces) sont les m-espaces (resp. m^{∞}-espaces) où $\mu = \tau\mu$ (resp. $\mu = \tau^{\infty}\mu$).

La classification des espaces uniformes dans le chapitre précédent nous permet de dégager certaines classes de m-espaces (resp. m^{∞}-espaces).

Un espace uniforme (X,μ) est dit $p_{\mathbb{R}}$-espace si toute fonction f sur X est uniformément continue dès que ses restrictions $f|B$ aux précompacts B de (X,μ) sont uniformément continues ([37]). Un $p_{\mathbb{R}}$-espace de type (A) est un m-espace et aussi un m^{∞}-espace, tel que $\tau\mu = \tau^{\infty}\mu$ est la plus fine structure uniforme ν sur X compatible avec la précompactologie naturelle de (X,μ). De plus les bornés sont les mêmes (égalité uniforme) pour toutes les structures uniformes de $\mathcal{K}$: ce sont les précompacts de (X,μ).

Pour les divers foncteurs σ, p, e, ..., utilisés dans ce chapitre on pourra se reporter à l'introduction générale.

3.1 PROBLEME DE MACKEY DANS LES ESPACES UNIFORMES.

On donne tout d'abord une réponse négative au "problème de Mackey" : existe-t-il une plus fine structure uniforme compatible (resp. ∞-compatible) avec la pseudo-dualité uniforme (X,A) ?

(3.1.1) <u>PROPOSITION</u>. - *Soient μ et ν deux structures uniformes sur un ensemble X, où ν est une structure précompacte. On a alors* $p(\mu \vee \nu) = (p\mu) \vee \nu$.

Preuve. - Soit $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement fini de $p(\mu \vee \nu)$. Il existe un recouvrement $\mathcal{V} = (V_t)_{t \in T}$ appartenant à μ et un recouvrement fini $\mathcal{W} = (W_k)_{1 \leq k \leq m}$ appartenant à ν, tels que $\mathcal{V} \wedge \mathcal{W}$ soit un $*$-raffinement de $\mathcal{U}$. Pour tout couple (t,k) on note I(t,k) l'ensemble des indices

$i \in I$ tels que $V_t \cap W_k \subset U_i$ et $J(t,k)$ l'ensemble des i tels que $St(V_t \cap W_k, \mathscr{V} \wedge \mathscr{W}) \subset U_i$. L'ensemble $J(t,k)$ n'est pas vide et $J(t,k) \subset I(t,k)$. Pour toute famille finie s de la forme $\{(I_1,J_1), \ldots, (I_m,J_m)\}$, où I_k et J_k sont des parties de I telles que $I_k \supset J_k$, on pose $\Omega_s = \cup V_t$, où t est tel que $I(t,k) = I_k$ et $J(t,k) = J_k$ pour tout $k \in [1, m]$. Alors $\Omega = (\Omega_s)_s$ est un recouvrement fini appartenant à μ et $\Omega \wedge \mathscr{W}$ est un raffinement de $\mathcal{U}$, ce qui montre que $p(\mu \vee \nu)$ est moins fine que $(p\mu) \vee \nu$ et suffit pour établir la proposition.

On va maintenant considérer un ensemble déjà utilisé dans [18] comme contre-exemple (ex. B) : X est l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n \geqslant 0}$ de réels dont tous les termes sont nuls *sauf un au plus* qui appartient à $[0,1]$. On définit sur X la distance $d(x,y) = \Sigma |x_n - y_n|$. On désigne par e_k la suite $(\delta_{nk})_{n \geqslant 0}$ où δ_{nk} est le symbole de Kronecker, par X_0 l'ensemble formé des suites pour lesquelles $x_0 \in]0,1]$ et de la suite nulle, par X_k l'ensemble des suites pour lesquelles $x_k \in]0,1]$, $k \geqslant 1$. On considère la somme ensembliste de deux copies de X et dans cette somme on identifie chaque élément e_k appartenant à l'une des copies avec son homologue dans l'autre copie. On appelle X^1 et X^2 les deux images de X par les injections canoniques de X dans cet ensemble qu'on notera Y. Si A est une partie quelconque de X on notera A^1 son image dans X^1 et A^2 son image dans X^2. Ainsi, pour $x \in X$, on écrit $B(x,\alpha)$ pour la boule ouverte de centre x et de rayon α, $B^1(x,\alpha)$ pour son image dans X^1, $B^2(x,\alpha)$ pour son image dans X^2 ; on notera qu'il n'y a généralement pas d'ambiguité pour un élément x de Y sauf si $x = e_k$.

Soit $\mathscr{P}_r$ le recouvrement de Y défini par les boules $B^1(x,2^{-r})$, pour $x \neq e_k$, $x \in X^1$ et les ensembles $B^1(e_k,2^{-r}) \cup X_k^2$. De même on désigne par $\mathscr{P}'_r$ le recouvrement de Y "symétrique" du précédent.

(3.1.2) PROPRIETE 1. - *L'ensemble* $\pi = \{\mathscr{P}_r\}_{r \in \mathbb{N}}$ *(resp.* $\pi' = \{\mathscr{P}'_r\}_{r \in \mathbb{N}}$*) est une base de recouvrements pour une structure uniforme* μ_1 *(resp.* μ_2*) sur* Y.

$\mathscr{P}_{r+s}$ est un raffinement de $\mathscr{P}_r \wedge \mathscr{P}_s$ et $\mathscr{P}_{4r}$ est un $*$-raffinement de $\mathscr{P}_r$. Ceci se vérifie aisément en remarquant que lorsque x parcourt la boule $B(e_k,2^{-r})$ et y la boule $B(e_{k'},2^{-r})$, $k \neq k'$, on a $d(x,y) \geq 1$.

On note $\mu = \mu_1 \vee p\mu_2$ et $\nu = (p\mu_1) \vee \nu_2$. Les structures uniformes μ et ν sont séparées (ce qui n'était pas le cas de μ_1 et μ_2).

(3.1.3) PROPRIETE 2. - $\mathcal{U}^\infty(Y,\mu) = \mathcal{U}^\infty(Y,\nu)$.

On a d'une part, d'après (3.1.1), $p\mu = p\nu$, et d'autre part $\mathcal{U}^\infty(Y,\mu) = \mathcal{U}(Y,p\mu) = \mathcal{U}(Y,p\nu) = \mathcal{U}^\infty(Y,\nu)$.

(3.1.4) PROPRIETE 3. - *Tout recouvrement $*$-fini* $\mathscr{V} = (V_i)_{i \in I}$ *appartenant à* μ *est fini.*

Commençons par rappeler le résultat général suivant :

(3.1.5) LEMME. - *Soit* $\mathscr{V} = (V_i)_{i \in I}$ *un recouvrement $*$-fini d'un ensemble* E. *S'il existe un sous-recouvrement fini* $\mathscr{V}' = (V_{i_k})_{1 \leq k \leq m}$ *de* $\mathscr{V}$, *alors* $\mathscr{V}$ *est un recouvrement fini.*

Preuve. - Chaque V_i rencontre au moins un V_{i_k}. Posons alors

$$\varphi(i) = \mathrm{Min}(k \,/\, V_i \cap V_{i_k} \neq \emptyset) \ ;$$

comme $\mathscr{V}$ est $*$-fini l'ensemble des indices i tels que $V_i \cap V_{i_k} \neq \emptyset$ est un ensemble fini de cardinal n_k ; a fortiori $\mathrm{Card}(\varphi^{-1}(k)) \leqslant n_k$ et $\mathrm{Card}(I) \leqslant \sum_{k=1}^{m} n_k$.

Preuve de (3.1.4). - Soit $r \in \mathbb{N}$ et $\mathscr{W} = (W_k)_{1 \leqslant k \leqslant m}$ un recouvrement appartenant à $p\mu_2$, tels que $\mathscr{P}_r \wedge \mathscr{W}$ soit un raffinement de $\mathscr{V}$. Il existe un raffinement $\mathscr{P}'_s$ de $\mathscr{W}$ et on peut supposer s=r. Désignons par Q_r^k l'ensemble des éléments de $\mathscr{P}'_r$ contenus dans W_k, qui ne sont pas contenus dans W_i, pour $i < k$. $\{Q_r^k\}_{1 \leqslant k \leqslant m}$ est une partition de $\mathscr{P}'_r$. Posons $U_k = \cup\{\omega \ ; \ \omega \in Q_r^k\}$; l'ensemble U_k est de la forme :

$$U_k = \bigcup_{x \in F_k} B^2(x, 2^{-r}) \cup \bigcup_{p \in \mathbb{N}_k} (B^2(e_p, 2^{-r}) \cup X_p^1)$$

où $(F_k)_{1 \leqslant k \leqslant m}$ est une partition de $Y \setminus X^1$ et $(\mathbb{N}_k)_{1 \leqslant k \leqslant m}$ est une partition de $\mathbb{N}$ (notons que certains F_k ou $\mathbb{N}_k$ peuvent être vides). On peut obtenir un raffinement fini $\Omega = (\Omega_\ell)_{1 \leqslant \ell \leqslant L}$ en réindexant les F_k non vides par les entiers ℓ, $1 \leqslant \ell \leqslant \ell_1$ et les $\mathbb{N}_k$ non vides par les entiers ℓ, $\ell_1 + 1 \leqslant \ell \leqslant L$, avec $\ell_1 \leqslant m$ et $L \leqslant 2m$:

$$\Omega_\ell = \bigcup_{x \in F_\ell} B^2(x, 2^{-r}) \qquad , \qquad 1 \leqslant \ell \leqslant \ell_1$$

$$\Omega_\ell = \bigcup_{p \in \mathbb{N}_\ell} B^2(e_p, 2^{-r}) \cup X_p^1, \qquad \ell_1 + 1 \leqslant \ell \leqslant L.$$

Le recouvrement $\mathscr{P}_r \wedge \Omega$ est un raffinement de $\mathscr{V}$. Soit ℓ fixe,

$\ell \in]\ell_1, L]$; il existe un indice i_ℓ de I tel que U_{i_ℓ} contienne $B^1(0,2^{-r}) \cap \Omega_\ell = B^1(0,2^{-r}) \cap \bigcup_{k \in \mathbb{N}_\ell} X_k^1$. Par ailleurs, on peut recouvrir chaque X_k^1, $k \in \mathbb{N}_\ell$ avec le même nombre t fini de boules B_j^1, de rayon 2^{-r}, telles que $B_1^1 \cap B^1(0,2^{-r})$ soit non vide, que $B_j^1 \cap B_{j+1}^1 \neq \emptyset$ et $e_k \in B_t^1$; chaque $B_j^1 \cap \bigcup_{k \in \mathbb{N}_\ell} X_k^1$ est contenu dans un V_i, et $\mathscr{V}$ étant $*$-fini, on peut montrer par récurrence sur t, que $\bigcup_{k \in \mathbb{N}_\ell} X_k^1$ peut être recouvert par un nombre fini de V_i. Par suite on peut également recouvrir X^1 par un nombre fini de parties V_i. En ce qui concerne la partie X^2, les éléments de $\mathscr{P}_r \wedge \Omega$ qui nous intéressent sont de la forme $\bigcup_{x \in F_\ell} B^2(x,2^{-r}) \cap X_k^2$; un raisonnement analogue montre que X^2 peut être recouvert par un nombre fini d'éléments de $\mathscr{V}$; la propriété 3 résulte alors du lemme (3.1.5).

(3.1.6) PROPRIETE 4. - $\mathscr{U}(Y,\mu) = \mathscr{U}(Y,\nu) = \mathscr{U}^\infty(Y,\mu)$.

On a déjà montré l'égalité $\mathscr{U}^\infty(Y,\mu) = \mathscr{U}^\infty(Y,\nu)$. Le résultat précédent montre que toute fonction réelle uniformément continue sur (Y,μ) est bornée.

(3.1.7) PROPRIETE 5. - $\mathscr{U}(Y,\mu \vee \nu) \neq \mathscr{U}^\infty(Y,\mu \vee \nu)$.

Il est aisé de voir que le recouvrement $\mathscr{P}_r \wedge \mathscr{P}'_r$ qui appartient à $\mu \vee \nu$ est un raffinement de la partition $(X_k^1 \cup X_k^2)_{k \in \mathbb{N}}$ de Y ; par suite la fonction $f(x) = k$ si $x \in X_k^1 \cup X_k^2$ est uniformément continue et non bornée.

On considère maintenant l'ensemble X des points $x = (s,t)$ de $\mathbb{R}^2$ où $0 < s \leqslant 1$, $0 < t \leqslant 1$. On définit sur X les deux distances e et δ par les formules :

$$e(x,x') = |s-s'| + |\frac{1}{t} - \frac{1}{t'}| \; ; \; \delta(x,x') = |\frac{1}{s} - \frac{1}{s'}| + |t-t'|.$$

On note d la distance $e \vee \delta$, η la structure uniforme $p\mu_\delta \vee \mu_e$ et λ la structure uniforme $\mu_\delta \vee p\mu_e$.

(3.1.8) <u>PROPOSITION</u>. - $\mathcal{U}^\infty(X, \eta \vee \lambda) \neq \mathcal{U}^\infty(X,\eta) = \mathcal{U}^\infty(X,\lambda)$.

Preuve. - L'égalité $\mathcal{U}^\infty(X,\eta) = \mathcal{U}^\infty(X,\lambda)$ résulte de (3.1.1). Soient $(x_n)_{n \geqslant 1}$ la suite des points $x_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ de X et $\mathcal{V} = (S,T)$ le recouvrement de X où $S = \bigcup_{n \geqslant 1} B(d,x_n,4)$ et $T = X \setminus \bigcup_{n \geqslant 1} B(d,x_n,2)$. Le recouvrement $\mathcal{V}$ est dans $p\mu_d = p(\eta \vee \lambda)$ (évident). Le recouvrement $\mathcal{V}$ n'appartient pas à $p\lambda = p\eta$ car sinon il existerait $\mathcal{W} = (W_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ de $p\mu_\delta$ et $\mathcal{U} = (U_j)_{1 \leqslant j \leqslant q}$ de $p\mu_e$ où $\mathcal{W} \wedge \mathcal{U}$ est un raffinement de $\mathcal{V}$. Il existe $0 < \alpha < 1$, où $(B(\delta,x,\alpha))_{x \in X}$ est un raffinement de $\mathcal{W}$ et $(B(e,x,\alpha))_{x \in X}$ est un raffinement de $\mathcal{U}$. Il existe $i_\circ$ et $j_\circ$ où $W_{i_\circ} \cap U_{j_\circ}$ contient une sous-suite infinie $(x_{n_k})_{k \geqslant o}$ de $(x_n)_n$. Soit $k_\circ$ un entier tel que $\frac{1}{n_{k_\circ}} \leqslant \frac{\alpha}{2}$. Pour tout $k>k_\circ$, le point $y_k = (\frac{1}{n_{k+5}}, \frac{1}{n_k})$ est élément de $B(\delta,x_{n_k},\alpha) \cap B(e,x_{n_{k+5}},\alpha)$. La suite $(y_k)_{k>k_\circ}$ est donc une suite de S. Or pour tout entier m on a $d[(\frac{1}{m},\frac{1}{m}), (\frac{1}{n_{k+5}}, \frac{1}{n_k})] \geqslant 5$, ce qui fournit la contradiction. Autrement dit $(y_k)_{k>k_\circ}$ n'est pas contenue dans S et par conséquent $\mathcal{V}$ n'appartient pas à $p\lambda = p\eta = p\mu_e \vee p_\delta$. Alors $\mathcal{U}^\infty(X, \eta \vee \lambda) \neq \mathcal{U}^\infty(X,\eta) = \mathcal{U}^\infty(X,\lambda)$.

Conclusion. - Les deux structures uniformes séparées μ et ν sur Y sont compatibles avec la pseudo-dualité $(Y,\mathcal{U}(Y,\mu))$; leur borne supérieure $\mu \vee \nu$ n'est pas compatible. Les deux structures uniformes séparées η et λ sont ∞-compatibles avec la pseudo-dualité $(X, \mathcal{U}(X,\eta))$; leur borne supérieure $\mu\vee\lambda$ n'est pas ∞-compatible. Il n'existe donc pas en général de plus fine structure uniforme compatible [resp. ∞-compatible] avec une pseudo-dualité uniforme (X,A).

Cependant les ensembles ordonnés $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}^\infty$ possèdent des éléments maximaux (d'après ZORN) :

(3.1.9) PROPOSITION. - *L'ensemble ordonné $\mathcal{K}^\infty$ (resp. $\mathcal{K}$) est inductif.*

Preuve. - Soit $(\mu_i)_{i \in I}$ une famille totalement ordonnée de $\mathcal{K}^\infty$. Soit ν la borne supérieure des μ_i. Etant donnés une fonction positive f appartenant à $\mathcal{U}^\infty(X,\nu)$ et un réel $\alpha > o$, il existe des indices $i_1,\dots,i_n$ de I, des écarts $d_k \in \mu_{i_k}$ et un réel $\delta > o$, tels que $|f(x)-f(y)| < \alpha$ dès que $d(x,y) < \delta$, où $d = \text{Sup}\, d_k$. Soit μ_i une structure de la famille plus fine que les μ_{i_k} ; la suite $\omega_n = \{x \in X \ / \ f(x) \leq n\alpha\}$, est uniformément régulière dans (X,μ_i) car $d(\omega_n, X \setminus \omega_{n+1}) \geq \delta$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (1.2.5). Il existe une fonction g dans A, de pas 2α, vérifiant les conditions du lemme (1.2.4). Alors $\sup\limits_{x \in X} |f(x)-g(x)| < 4\alpha$, et α étant arbitraire, f appartient à A.

(3.1.10) COROLLAIRE. - *Soit* (X,μ) *un espace uniforme (séparé) ; il existe une structure uniforme maximale* ν *plus fine que* μ *et telle que* $\mathcal{U}(X,\nu) = \mathcal{U}(X,\mu)$. *Il existe également une structure uniforme* η *maximale plus fine que* μ *et telle que* $\mathcal{U}^{\infty}(X,\eta) = \mathcal{U}^{\infty}(X,\mu)$.

Les liaisons entre $\mathcal{K}$ et Γ d'une part, et $\mathcal{K}^{\infty}$ et Γ^{∞} d'autre part, montrent que Γ et Γ^{∞} ont également des éléments maximaux.

3.2 m-ESPACES ET m^{∞}-ESPACES.

On est amené à essayer de caractériser les espaces uniformes (X,μ) pour lesquels l'ensemble $\mathcal{K}$ (resp. $\mathcal{K}^{\infty}$) possède un élément maximum. On appellera m-espace (resp. m^{∞}-espace) un tel espace uniforme. Bien que nous n'ayons pas réussi à les caractériser, nous en décrivons certaines classes.

Etant donné un espace uniforme (X,μ) on désigne par $\gamma\mu$ (resp. $\gamma^{\infty}\mu$) la borne supérieure des structures uniformes appartenant à $\mathcal{K}(X,\mu)$ (resp. $\mathcal{K}^{\infty}(X,\mu)$). Soit $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{M}^{\infty}$) la réunion des éléments $\mathcal{H} \in \Gamma$ (resp. $\mathcal{H} \in \Gamma^{\infty}$).

(3.2.1) PROPOSITION. - *Soient* (X,A) *une pseudo-dualité uniforme et* H *une partie simplement bornée (resp. uniformément bornée) de* A *; les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) $H \in \mathcal{M}$ *(resp.* $\mathcal{M}^{\infty}$*) ;*

b) H *vérifie la propriété* (γ) *(resp.* (γ^{∞})*) :* $\mathcal{U}(X, \mu_H \vee \sigma_A) = A$ *(resp.* $\mathcal{U}^{\infty}(X,\mu_H \vee \sigma_{A^{\infty}}) = A^{\infty}$ *).*

Preuve. :

a) $\Rightarrow$ b) : il existe $\mathscr{H} \in \Gamma$ contenant H ; on a les relations de finesse : $\sigma_A \leqslant \sigma_A \vee \mu_H \leqslant \mu_{\mathscr{H}}$ donc $\mathcal{U}(X,\sigma_A) \subset \mathcal{U}(X, \mu_H \vee \sigma_A) \subset \mathcal{U}(X, \mu_{\mathscr{H}}) = A$ (même argument pour $\mathscr{M}^{\infty}$).

b) $\Rightarrow$ a) résulte clairement de $H \in \mathscr{H}(X, \mu_H \vee \sigma_A)$.

(3.2.2) PROPOSITION. - *Soit* (X,A) *une pseudo-dualité uniforme ; les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) $\mathscr{K}$ *possède un plus grand élément* $\tau\mu$ *;*

b) $\mathscr{M}$ *est stable par réunion finie.*

Preuve :

a) $\Rightarrow$ b) : Soit $H \in \mathscr{M}$; la structure uniforme $\mu_H \vee \sigma_A$ appartient à $\mathscr{K}$; elle est donc moins fine que $\tau\mu$ et $H \in \mathscr{H}(X,\tau\mu)$. Si maintenant $H \in \mathscr{H}(X,\tau\mu)$, on a $\mathcal{U}(X, \mu_H \vee \sigma_A) = A$ donc $H \in \mathscr{M}$. Ainsi la condition a) implique $\mathscr{M} = \mathscr{H}(X,\tau\mu)$, et cet ensemble est bien entendu stable par réunion finie.

b) $\Rightarrow$ a) : soient $f \in \mathcal{U}^+(X,\gamma\mu)$ et α un réel strictement positif ; il existe une famille finie $(H_1,\dots,H_n)$ d'éléments de $\mathscr{M}$, et un réel $\delta > o$, tels que $\operatorname{Sup}_k d_{H_k}(x,y) < \delta$ implique $|f(x)-f(y)| < \alpha$. Comme $\mathscr{M}$ est stable par réunion finie, posons $H = \bigcup_k H_k \in \mathscr{M}$; alors $d_H(x,y) < \delta$ implique $|f(x)-f(y)| < \alpha$; ainsi la suite $\omega_n = \{x \in X \ / \ f(x) \leqslant n\alpha\}$ est uniformément régulière dans $(X, \mu_H \vee \sigma_A)$. Soit $g \in \mathcal{U}(X, \mu_H \vee \sigma_A) = A$ une fonction satisfaisant aux conditions du lemme (1.2.4), de pas 2α. On a $\operatorname{Sup}_{x \in X} |f(x)-g(x)| < 4\alpha$ et $f \in A$, car α est arbitraire ; en définitive $\mathcal{U}(X,\gamma\mu) = A$. Comme $\gamma\mu$ est plus fine que toute structure appartenant à $\mathcal{K}$, le résultat est acquis.

On obtient évidemment le même résultat pour $\mathcal{K}^\infty$ et $\mathcal{M}^\infty$.

Remarque. - La structure uniforme $\gamma\mu$ (resp. $\gamma^\infty\mu$) sur X est définie par les écarts d_H, $H \in \mathcal{M}$ (resp. $H \in \mathcal{M}^\infty$).

(3.2.3) <u>COROLLAIRE</u>. - *Un espace uniforme* (X,μ) *est un* m*-espace si et seulement si* $\mathcal{M}$ *est une compactologie vectorielle sur* $\mathcal{U}(X,\mu)$.

Il est clair que $\mathcal{M}$ est stable par passage à l'enveloppe disquée simplement fermée. Le reste est garanti par (3.2.2).

(3.2.4) <u>COROLLAIRE</u>. - *Un espace uniforme* (X,μ) *est un* m^∞*-espace si et seulement si* $\mathcal{M}^\infty$ *est une compactologie vectorielle sur* $\mathcal{U}^\infty(X,\mu)$.

Il est généralement difficile de prouver qu'une partie H de A vérifie la propriété (γ) (resp. (γ^∞)), ce qui réduit l'intérêt de ces propriétés. Cependant elles paraissent plus maniables dans les espaces uniformes de type (A) ou de type (Ab).

(3.2.5) <u>LEMME</u>. - *Soit* (X,μ) *un espace uniforme ; on considère un écart* d *sur* X *tel que, pour toute partie* $F \subset X$*, la fonction* $h_F : x \to d(F,x)$ *appartienne à* $\mathcal{U}(X,\mu)$*, et une partition de l'unité* $(f_i)_{i \in I}$ *supposée* μ_d*-uniformément équicontinue ; soit enfin* $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une partition de l'unité* μ*-uniformément équicontinue ; alors pour toute partie* $K \subset I \times \mathbb{N}$*, on a :*

$$G = \bigcup_{(i,n) \in K} (\operatorname{coz}(f_i) \cap \operatorname{coz}(g_n)) \in \operatorname{Coz}(X,\mu).$$

Preuve. - On sait que $\operatorname{Coz}(X,\mu)$ est stable par réunion dénombrable et intersection finie. Soit $K_1 = pr_{\mathbb{N}}(K)$ et $K(n)$ la coupe de K pour $n \in K_1$. On peut écrire :

$$G = \bigcup_{n \in K_1} \left[\bigcup_{i \in K(n)} (\operatorname{coz}(f_i) \cap \operatorname{coz}(g_n))\right]$$

$$= \bigcup_{n \in K_1} (\operatorname{coz}(g_n) \cap \overset{\bullet}{\bigcup_{i \in K(n)}} \operatorname{coz}(f_i)).$$

Or $\bigcup_{i \in K(n)} \operatorname{coz}(f_i)$ est un ouvert de (X,μ_d) donc appartient à $\operatorname{Coz}(X,\mu_d)$ puisque μ_d est écartisable ; enfin $\operatorname{Coz}(X,\mu_d) \subset \operatorname{Coz}(X,\mu)$ d'après la condition sur l'acart d. L'ensemble G est donc réunion dénombrable de conoyaux de (X,μ), ce qui suffit.

(3.2.6) <u>PROPOSITION</u>. - *Soit* (X,μ) *un espace uniforme de type (A) (resp. de type (Ab)). Pour toute partie* H *simplement bornée (resp. uniformément bornée) de* $\mathcal{U}(X,\mu)$, *les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) H *vérifie* (γ) *(resp.* (γ^∞)*) ;*

b) $\mathcal{U}(X,\mu_H) \subset \mathcal{U}(X,\mu)$ [*(resp.* $\mathcal{U}^\infty(X,\mu_H) \subset \mathcal{U}^\infty(X,\mu)$*)*] ;

c) pour toute partie $F \subset X$, *la fonction* $h_F : x \to d_H(F,x)$ *appartient à* $\mathcal{U}(X,\mu)$ [*(resp.* $\mathcal{U}^\infty(X,\mu)$*)*].

Preuve. - Il est clair que a) => b) => c). Soit alors $f \in \mathcal{U}(X,\mu_H \vee \sigma_A)$, avec $A = \mathcal{U}(X,\mu)$, et soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$ il existe un recouvrement $\mathcal{V}^k = (V_i)_{i \in I} \in \mu_H$ et un recouvrement

ERRATUM

Il n'y a pas de page 85. Le texte page 84 se poursuit page 86.

$\mathscr{W}^k = (W_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \sigma_A$ tels que f varie au plus de $\frac{1}{k}$ sur chaque élément de $\mathscr{V}^k \wedge \mathscr{W}^k$. Il existe une partition de l'unité $(f_i)_{i \in I}$ qui est μ_H-uniformément équicontinue et subordonnée au recouvrement $\mathscr{V}^k$, et une partition de l'unité $(g_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$ qui est σ_A-uniformément équicontinue et subordonnée à $\mathscr{W}^k$. Considérons la réunion U_k des parties $coz(f_i) \cap coz(g_n)$ telles que $f[coz(f_i) \cap coz(g_n)] \subset \Omega$; alors U_k appartient à Coz(X,μ) d'après le lemme, et $\overset{-1}{f}(\Omega) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} U_k$, donc $\overset{-1}{f}(\Omega) \in Coz(X,\mu)$. D'après la proposition (2.3.2), $f \in \mathscr{U}(X,\mu)$.

On va donner un premier exemple, trivial, de m-espace. Pour cela nous dirons qu'un espace uniforme (séparé) est de type (U.C) si $\mathscr{U}(X,\mu) = \mathscr{C}(X)$. Ces espaces se rencontrent essentiellement dans les travaux portant sur la replétion d'un espace complètement régulier et sur la complétion topologique. Rappelons, que si X est un espace topologique complètement régulier la structure uniforme faible associée à toutes les fonctions réelles continues définies sur X, fournit, par complétion, un espace topologique appelé replété de X et noté υX. De même si l'on considère toutes les parties équicontinues de $\mathscr{C}(X)$, simplement bornées, elles définissent une compactologie sur $\mathscr{C}(X)$ et la structure uniforme associée à cette compactologie est la structure uniforme universelle pour la topologie de X (cf. [7], [36]).

Pour un espace (X,μ) de type (U.C) il est évident que l'ensemble $\mathscr{M}$ considéré plus haut n'est autre que l'ensemble de toutes les parties équicontinues et simplement bornées de $\mathscr{C}(X)$. La remarque précédente nous montre que l'espace uniforme $(X,\theta\mu)$ défini par $\mathscr{M}$ a pour espace

$\mathcal{U}(X)$ l'algèbre $\mathscr{C}(X)$ elle-même. Ainsi :

(3.2.7) PROPOSITION. - *Tout espace uniforme de type (U.C) est un m-espace. De plus la structure uniforme maximum de l'ensemble $\mathscr{X}$ est la structure universelle associée à la topologie de l'espace.*

Pour trouver d'autres exemples de m-espaces, il faut utiliser la propriété (γ) ; or celle-ci est une propriété "uniforme" et dans le cas général elle ne se laisse pas ramener à une propriété "topologique". Dans le cas des espaces de type (A) ou de type (Ab) la propriété (γ) ou (γ^{∞}) équivaut à une propriété topologique.

(3.2.8) PROPOSITION. - *Un espace uniforme* (X,μ) *de type (A) (resp. de type (Ab)) est un m-espace (resp. un m^{∞}-espace) si et seulement si, quels que soient les parties* H_1 *et* H_2 *appartenant à* $\mathscr{M}$ *(resp.* $\mathscr{M}^{\infty}$*), il existe* $H \in \mathscr{M}$ *(resp.* $\mathscr{M}^{\infty}$*) tel que la topologie de* (X,μ_H) *soit plus fine que les topologies de* (X,μ_{H_1}) *et* (X,μ_{H_2}).

Preuve. - Il suffit de montrer que la condition topologique implique que $\mathscr{M}$ est stable par réunion finie. Soient donc $H_1 \in \mathscr{M}$, $H_2 \in \mathscr{M}$ et $H \in \mathscr{M}$ vérifiant notre hypothèse ; on a $\mathcal{U}(X,\mu_H) \subset \mathcal{U}(X,\mu)$ d'après (3.2.6), et $\mathrm{Ouv}(X,\mu_H) = \mathrm{Coz}(X,\mu_H)$ est contenu dans $\mathrm{Coz}(X,\mu)$; d'après (2.3.2), $\mathscr{C}(X,\mu_H) \subsetneq \mathcal{U}(X,\mu)$. Par ailleurs H_1 et H_2 sont des parties équicontinues de $\mathscr{C}(X,\mu_H)$ et $T = H_1 \cup H_2$ également. En définitive, $\mathcal{U}(X,\mu_T) \subset \mathscr{C}(X,\mu_H) \subset \mathcal{U}(X,\mu)$ et $T \in \mathscr{M}$.

On peut remarquer que la condition "(X,μ) est de type (A)" est utilisée plusieurs fois par l'intermédiaire de (3.2.6) et (2.3.2). La démonstration est identique pour les espaces de type (Ab) au moyen de (2.2.6).

(3.2.9) <u>PROPOSITION</u>. - *Soit* (X,μ) *un espace uniforme de type (A) ; les éléments maximaux de* $\mathscr{K}(X,\mu)$ *sont des espaces* M-*fins.*

Preuve. - Soit ν une structure maximale dans $\mathscr{K}$; on a $\mathcal{U}(X, \nu) = \mathcal{U}(X, m\nu) = \mathcal{U}(X,\mu)$ et $m\nu$ appartient à $\mathscr{K}$; donc $m\nu \geqslant \nu$ implique $m\nu = \nu$.

(3.2.10) <u>PROPOSITION</u>. - *Soit* (X,μ) *un espace uniforme de type (Ab) ; les éléments maximaux de* $\mathscr{K}^{\infty}(X,\mu)$ *sont des espaces* M-*fins.*

Preuve. - D'après (2.4.6) l'algèbre sur X engendrée par $\mathcal{U}(X,\nu)$ est aussi celle engendrée par $\mathcal{U}(X,\mu)$ donc $a\nu$ appartient à $\mathscr{K}^{\infty}(X,\mu)$ et $a\nu = \nu$. Comme $\mathscr{K}(X,\nu) \subset \mathscr{K}^{\infty}(X,\nu) = \mathscr{K}^{\infty}(X,\mu)$, ν est maximal dans $\mathscr{K}(X,\nu)$ et comme il est de type (A), c'est un espace M-fin.

La structure uniforme $\overset{\infty}{\gamma}\mu$ est toujours plus fine que $\gamma\mu$ et elle est en général strictement plus fine ; il suffit de considérer un espace uniforme de type (Ab), non de type (A), et précompact. Par contre si l'espace (X,μ) est de type (A), la démonstration précédente montre que pour tout élément maximal ν de $\mathscr{K}^{\infty}(X,\mu)$, on a $\mathcal{U}(X,\nu) = \mathcal{U}(X,\mu)$ et par suite $\mathscr{K}(X,\mu)$ est cofinal dans $\mathscr{K}^{\infty}(X,\mu)$. On obtient ainsi :

(3.2.11) <u>PROPOSITION</u>. - *Si* (X,μ) *est un espace uniforme de type (A) on a* $\gamma\mu = \overset{\infty}{\gamma}\mu$.

(3.2.12) COROLLAIRE. - *Un espace* (X,μ) *de type (A) est un m-espace si et seulement si c'est un* m^∞*-espace. On a alors* $\tau\mu = \tau^\infty\mu$.

(3.2.13) THEOREME. - *Soit* (X,μ) *un espace uniforme de type (A) (resp. (Ab)) ; si quels que soient la structure uniforme* ν *appartenant à* $\mathcal{K}(X,\mu)$ *(resp.* $\mathcal{K}^\infty(X,\mu)$*) et le recouvrement uniforme* $\mathcal{V}$ *appartenant à* ν*, il existe un raffinement dénombrable de* $\mathcal{V}$*, non nécessairement uniforme, alors* (X,μ) *est un m-espace (resp. un* m^∞*-espace).*

Preuve. - Soit ν un élément maximal de $\mathcal{K}(X,\mu)$; ν est M-fin, donc séparable d'après (2.5.16). Alors, d'après A. HAGER [24] , th. 6.1, c'est le seul élément maximal de $\mathcal{K}(X,\mu)$.

On peut remarquer que la condition du théorème n'implique pas la séparabilité (uniforme) des structures ν appartenant à $\mathcal{K}(X,\mu)$. Par ailleurs on ne peut affaiblir cette condition, car si (X,μ) est un m-espace de type (A) et si $\tau\mu$ est séparable (c'est nécessairement un espace M-fin d'après (3.2.9), la condition du théorème est vérifiée.

(3.2.14) COROLLAIRE. - *Soit* (X,μ) *un espace uniforme de type (A) qui vérifie l'une des conditions suivantes :*

a) $e(\gamma\mu) = \gamma\mu$;

b) $e(\theta\mu) = \theta\mu$;

c) pour tout H *de* $\mathcal{M}$ *l'espace topologique* (X,μ_H) *est séparable.*

Alors (X,μ) *est un m-espace.*

Preuve. - Chacune des trois conditions a), b) ou c) implique la condition du théorème (3.2.13).

(3.2.15) PROPOSITION. - *Soit* (X,μ) *un espace uniforme précompact de type (A) ; alors* (X,μ) *est un m-espace et* m^{∞}*-espace. De plus* $\mathcal{K} = \mathcal{K}^{\infty} = \{\mu\}$.

Preuve. - En effet, si ν est une structure appartenant à $\mathcal{K}$, (X,ν) est borné dans lui-même et de type (A). Dans un tel espace tous les bornés sont précompacts, avec la structure des précompacts de $\sigma\nu$; ainsi $\nu = \sigma\nu = \mu$. On a donc $\mathcal{K} = \{\mu\}$. Le reste provient de (3.2.12).

Cette proposition généralise le fait bien connu des espaces topologiques pseudocompacts : $\beta T = \upsilon T = \theta T$.

(3.2.16) PROPOSITION. - *Soit* X *un espace topologique pseudocompact non presque-compact. Il existe des algèbres* A *sur* X *strictement contenues dans* $\mathscr{C}(X)$ *et définissant la topologie de* X. *L'espace uniforme* (X,σ_A) *est un m-espace non (U.C.).*

Preuve. - X n'est ni de Lindelöf ni presque compact ; il existe donc une algèbre A sur X définissant la topologie de X et strictement contenue dans $\mathscr{C}(X)$ (cf. [25]). L'espace (X,σ_A) est alors un précompact de type (A), et c'est un m-espace. Par ailleurs ce n'est pas un espace de type (U.C.).

(3.2.17) DEFINITION. - *On dit qu'un espace uniforme* (X,μ) *est un* $p_{\mathbb{R}}$-

espace, si toute fonction réelle f *sur* X *dont les restrictions aux précompacts de* (X,μ) *sont uniformément continues, est elle-même uniformément continue* ([37]).

On rappelle qu'une *précompactologie* ([37]) sur un ensemble X est une famille $\mathcal{P}$ de parties de X vérifiant les axiomes suivants :

(P_1) $\mathcal{P}$ est héréditaire à gauche pour l'inclusion.

(P_2) $\mathcal{P}$ est filtrant à droite.

(P_3) Chaque $P \in \mathcal{P}$ est muni d'une structure uniforme séparée précompacte μ_P, telle que si $P' \subset P$, on ait $\mu_{P'} = \mu_P | P'$.

L'ensemble $\pi\mu$ des parties précompactes d'un espace uniforme séparé (X,μ) est évidemment une précompactologie sur X ; on l'appelle la précompactologie canonique de (X,μ). On dit qu'une précompactologie est uniformisable s'il existe une structure uniforme séparée μ telle que pour tout $P \in \mathcal{P}$ on ait $\mu_P = \mu | P$. Pour toute précompactologie uniformisable il existe une structure uniforme universelle qui est la plus fine structure uniforme sur X possédant la propriété précédente ; si $\mathcal{E}\mathcal{P}(X ; \mathcal{P})$ désigne l'ensemble des fonctions réelles précompactologiques, cette structure uniforme universelle ξ vérifie l'égalité $\mathcal{U}(X,\xi) = \mathcal{E}\mathcal{P}(X,\mathcal{P})$. D'après la définition précédente un p_R-espace uniforme (X,μ) vérifie l'égalité $\mathcal{U}(X,\mu) = \mathcal{E}\mathcal{P}(X,\pi\mu)$.

(3.2.18) <u>PROPOSITION</u> (PUPIER, [37]). - *Si* (X,μ) *est un* $p_{\mathbb{R}}$*-espace, son complété* $\hat{X}$ *est (U.C.) et l'espace topologique* $\hat{X}$ *est un* $k_{\mathbb{R}}$*-espace.*

Preuve. - Soit f une fonction sur $\hat{X}$ dont les restrictions aux compacts de $\hat{X}$ sont continues ; soit P un précompact de $\hat{X}$, $\widehat{\overline{P}}$ est un compact de $\hat{X}$ et $f \mid \widehat{\overline{P}}$ est continue, donc $f|P$ est uniformément continue et $f|X \in \mathcal{U}(X,\mu)$. Ainsi $\hat{X}$ est un $k_{\mathbb{R}}$-espace et $\mathcal{C}(\hat{X}) = \mathcal{U}(\hat{X})$.

(3.2.19) THEOREME. - *Soit* (X,μ) *un* $p_{\mathbb{R}}$-*espace tel que toute structure* ν *appartenant à* $\mathcal{K}$ *ait les mêmes précompacts que* μ *(égalité uniforme). Alors* (X,μ) *est un* m-*espace ; de plus* $\tau\mu$ *est la structure uniforme universelle de la précompactologie canonique* $\pi\mu$.

Preuve. - Soit ξ la structure universelle de la précompactologie $\pi\mu$. On a $\mathcal{U}(X,\xi) = \mathcal{E}\mathcal{P}(X,\pi\mu) = \mathcal{U}(X,\mu)$, donc $\xi \in \mathcal{K}$; par ailleurs toute ν appartenant à $\mathcal{K}$ étant compatible avec $\pi\mu$ on a $\xi \geqslant \nu$.

(3.2.20) COROLLAIRE. - *Soit* (X,μ) *un* $p_{\mathbb{R}}$-*espace de type (A) ; alors* (X,μ) *est un* m-*espace et* $\tau\mu$ *est la structure uniforme universelle de la précompactologie canonique* $\pi\mu$.

Preuve. - Dans un espace uniforme de type (A) il y a équivalence entre partie bornée et partie précompacte. Ainsi les structures appartenant à $\mathcal{K}$ ont la même précompactologie canonique.

Toujours dans [37], R. PUPIER montre que la structure uniforme universelle associée à une précompactologie $\mathcal{P}$ s'obtient comme structure de $\mathcal{C}$-convergence sur $\mathcal{E}\mathcal{P}(X,\mathcal{P})$, où $\mathcal{C}$ est l'ensemble des parties $H \subset \mathcal{E}\mathcal{P}(X,\mathcal{P})$ telles que $H|P \in \mathcal{H}(P,\mu_P)$, pour tout $P \in \mathcal{P}$.

(3.2.21) COROLLAIRE. - *Sous les hypothèses de (3.2.19), on a* $\mathcal{M} = \mathcal{T}$.

(3.2.22) Autre exemple de m-espace qui n'est pas (U.C.). - Un premier exemple est donné par la proposition (3.2.16). Considérons un espace topologique X discret non dénombrable, et l'ensemble A des fonctions réelles sur X, constantes en dehors d'une partie dénombrable de X. L'ensemble A est une algèbre sur X, et (X,σ_A) est un espace uniforme de type (A). Soit H un élément de $\mathcal{M}$ et soit δ un nombre réel strictement positif. Il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de X telle que $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(d_H,x_n,\delta)$. Sinon il existerait une partie infinie non dénombrable Y telle que si x et y sont distincts dans Y, on a $B(d_H, x, \frac{\delta}{4}) \cap B(d_H, y, \frac{\delta}{4}) = \emptyset$: en effet, l'ensemble $\mathcal{Y}$ des parties Y de X vérifiant cette propriété n'est pas vide, et, ordonné par inclusion, il est inductif ; il possède donc un élément maximal Z. Si Z est fini ou dénombrable, $\bigcup_{y \in Z} B(d_H,y,\delta) \neq X$; soit $z \notin \bigcup_{y \in Z} B(d_H,y,\delta)$; on a évidemment $B(d_H,y, \frac{\delta}{4}) \cap B(d_H,z, \frac{\delta}{4}) = \emptyset$, pour tout $y \in Z$, et $Z \cup \{z\} \in \mathcal{Y}$, ce qui contredit la maximalité de Z. Soient alors Y un élément de $\mathcal{Y}$ de cardinal $\aleph_1$ et $f : Y \to R$ une injection. pour tout $y \in Y$ il existe une fonction $h_y \in \mathcal{U}(X,\mu_H)$ telle que $h_y(y) = 1$ et $coz(h_y) \subset B(d_H,y,\frac{\delta}{4})$. Alors la fonction $h = \sum_{y \in Y} f(y).h_y$ appartient à $\mathcal{C}(X,\mu_H)$ qui est contenu dans A d'après (2.3.2). Or h n'est pas constante sur le complémentaire d'une partie dénombrable, contrairement à la définition de A.

En définitive (X,σ_A) satisfait aux hypothèses de (3.2.13) et c'est à la fois un m-espace et un m^∞-espace ; de plus $A = \mathcal{U}(X ; \sigma_A) \neq \mathcal{C}(X,\sigma_A) = \mathbb{R}^X$.

3.3 τ-ESPACES ET τ^∞-ESPACES.

On dit que (X,μ) est un τ-espace (resp. τ^∞-espace) si c'est un m-espace (resp. un m^∞-espace) et si $\tau\mu = \mu$ (resp. $\tau^\infty\mu = \mu$).

(3.3.1) PROPOSITION. - *Soit* (X,μ) *un* m-*espace (resp.* m^∞-*espace) ; les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) (X,μ) *est un* τ-*espace (resp. un* τ^∞-*espace) ;*

b) On a $\mathcal{M} = \mathcal{H}(X,\mu)$ *(resp.* $\mathcal{M}^\infty = \mathcal{H}^\infty(X,\mu)$ *).*

Parmi les τ-espaces on peut signaler les espaces fins, les $p_{\mathbb{R}}$-espaces de type (A) pour lesquels $\mathcal{C}(X,\pi\mu) = \mathcal{H}(X,\mu)$ (espaces uniformes de Kelley au sens de [37]), et en particulier les espaces précompacts de type (A).

(3.3.2) PROPOSITION. - *Soit* (X,μ) *un espace uniforme ; il existe un* τ-*espace* $(X,\bar{\tau}\mu)$*, où* $\bar{\tau}\mu$ *est la moins fine des structures uniformes sur* X*, plus fines que* μ *et telles que* (X,ν) *soit un* τ-*espace.*

Preuve. - Si (X,μ) est un m-espace $\bar{\tau}\mu = \tau\mu$. Sinon, on pose $\gamma_1\mu = \gamma\mu$, $\gamma_{\lambda+1} = \gamma(\gamma_\lambda\mu)$, pour tout ordinal λ et si ξ est un ordinal limite, $\gamma_\xi\mu = \sup\limits_{\lambda<\xi} \gamma_\lambda\mu$; comme la topologie associée à $\gamma\mu$ est la même que celle de μ, on conserve la même topologie sur X pour toutes les structures uniformes $\gamma_\lambda \mu$; si l'on suppose les structures uniformes définies par des écarts, chaque ensemble $\gamma_\lambda \mu$ est contenu dans l'ensemble des écarts continus sur (X,μ). Ainsi il existe un plus petit ordinal α tel que $\gamma_{\alpha+1}\mu = \gamma_\alpha \mu$; alors $(X,\gamma_\alpha \mu)$ est évidemment un τ-espace : c'est le τ-espace associé à (X,μ) et on pose $\overline{\tau}\mu = \gamma_\alpha \mu$.

On obtiendrait bien entendu un résultat similaire pour les τ^∞-espaces.

Avant de conclure ce chapitre, considérons l'ensemble $\mathcal{K}e$ des structures uniformes appartenant à $\mathcal{K}$ et telles que $e\nu = \nu$ (structures séparables au sens de A.W. HAGER, [24]).

(3.3.3) PROPOSITION. - *Si* (X,μ) *est un espace uniforme de type (A), l'ensemble* $\mathcal{K}e$ *possède un plus grand élément, noté* $\tau_e\mu$ *: c'est la structure uniforme* M-*fine associée à* $\sigma\mu$.

Preuve. - D'abord, $\mathcal{U}(X,m\sigma\mu) = \mathcal{U}(X ; a\mu) = \mathcal{U}(X ;\mu)$ et $m\sigma\mu$ appartient à $\mathcal{K}$; comme $em\sigma\mu = m\sigma\mu$, on a $m\sigma\mu \in \mathcal{K}e$; de plus d'après A.W. HAGER, [24], tout recouvrement dénombrable de X dont les éléments appartiennent à $\mathrm{Coz}(X ;\mu)$ appartient à $m\sigma\mu$. Alors $m\sigma\mu$ est plus fine que toute structure ν appartenant à $\mathcal{K}e$.

3.4 CONCLUSION.

Etant donné un espace uniforme séparé (X,μ), l'ensemble des structures uniformes sur X qui possèdent le même espace de fonctions réelles uniformément continues que (X,μ) contient un plus petit élément pour la relation de finesse : c'est la structure affaiblie $\sigma\mu$. Par contre, il n'existe pas en général de plus grand élément, mais seulement des éléments maximaux.

Les bornés de tels espaces uniformes sont les mêmes puisque ce sont les parties précompactes de $(X,\sigma\mu)$; cependant les structures uniformes de ces bornés ne sont pas en général les mêmes : un exemple est donné par un espace uniforme non précompact tel que $\mathcal{U}(X) = \mathcal{U}^{\infty}(X)$. De plus les précompactologies canoniques de ces espaces uniformes sont en général distinctes. Cependant il existe une classe d'espaces uniformes, pour lesquels on a à la fois les deux résultats suivants :

- il existe une structure uniforme $\tau\mu$ avec $\mathcal{U}(X,\tau\mu) = \mathcal{U}(X,\mu)$ et $\tau\mu$ est la plus fine des structures uniformes ayant cette propriété ;

- les bornés de toutes les structures uniformes comprises entre $\sigma\mu$ et $\tau\mu$ sont les mêmes avec la même structure uniforme, d'ailleurs précompacte.

Cette classe contient les m-espaces de type (A), dont nous avons donné divers exemples.

CHAPITRE 4

ESPACES DE MESURES ASSOCIES A UN ESPACE UNIFORME

On définit plusieurs espaces de formes linéaires sur $\mathcal{U}^{\infty}(X)$ ou sur $\mathcal{U}(X)$, en s'intéressant principalement à l'espace $M_{\sigma}(X)$ des formes linéaires σ-régulières sur $\mathcal{U}^{\infty}(X)$ et aux duals compactologiques respectifs $M(X)$ et $M^{\infty}(X)$ des espaces $(\mathcal{U}(X),\mathcal{H})$ et $(\mathcal{U}^{\infty}(X),\mathcal{H}^{\infty})$.

4.0 NOTIONS DE BASE ET TERMINOLOGIE.

On fixe l'espace uniforme séparé (X,μ). On rappelle que dans l'espace $\mathcal{U}(X,\mu) = \mathcal{U}(X)$ des fonctions uniformément continues sur X, on désigne par $\mathcal{H}(X,\mu)$, ou $\mathcal{H}(X)$, (ou même seulement $\mathcal{H}$) la *compactologie uniformément équicontinue* formée des parties H qui sont simplement bornées et uniformément équicontinues. De même dans l'algèbre $\mathcal{U}^{\infty}(X,\mu) = \mathcal{U}^{\infty}(X)$, on désigne par $\mathcal{H}^{\infty}(X,\mu)$, ou $\mathcal{H}^{\infty}(X)$, ou $\mathcal{H}^{\infty}$ la famille des parties $H \in \mathcal{H}$ qui sont uniformément bornées.

Désignons par E(X) l'espace vectoriel libre engendré par X, que l'on peut considérer comme l'espace des mesures à support fini sur X (mesures moléculaires de [2]). Il est clair que l'on obtient canoniquement des dualités séparantes $(E(X), \mathcal{U}(X))$ et $(E(X), \mathcal{U}^{\infty}(X))$, permettant de placer sur E(X) les structures uniformes de la $\mathcal{H}$-convergence et de la $\mathscr{H}^{\infty}$-convergence. Les topologies localement convexes associées donnent des elc notés $E(X,\mathscr{H})$ et $E(X,\mathscr{H}^{\infty})$ ou plus simplement encore $E(X)$ et $E^{\infty}(X)$.

On introduit alors les complétés $M(X) = M(X,\mu)$ et $M^{\infty}(X) = M^{\infty}(X,\mu)$ des espaces respectifs $E(X)$ et $E^{\infty}(X)$. D'après le théorème de complétion de Grothendieck on reconnaît en $M(X)$ et $M^{\infty}(X)$ les duals compactologiques $(\mathscr{U}(X),\mathscr{H})^{*}$ et $(\mathscr{U}^{\infty}(X),\mathscr{H}^{\infty})^{*}$ des espaces compactologiques $(\mathscr{U}(X),\mathscr{H})$ et $(\mathscr{U}^{\infty}(X),\mathscr{H}^{\infty})$. Autrement dit $M(X)$ s'identifie à l'espace des formes linéaires sur $\mathscr{U}(X)$ qui sont simplement continues sur chaque $H \in \mathscr{H}$, muni de la topologie de la $\mathscr{H}$-convergence ; et de même pour $M^{\infty}(X)$. Avec [4] on obtient alors les formules

$$E(X)' = M(X)' = \mathscr{U}(X) \qquad \text{et} \qquad E^{\infty}(X)' = M^{\infty}(X)' = \mathscr{U}^{\infty}(X)$$

les compactologies équicontinues des duals $M(X)'$ et $M^{\infty}(X)'$ (au sens vectoriel) s'identifiant respectivement à $\mathscr{H}$ et $\mathscr{H}^{\infty}$.

On peut facilement identifier (algébriquement seulement et non topologiquement) l'espace $M(X)$ à un sous-espace vectoriel de $M^{\infty}(X)$. Il suffit d'associer à chaque $m \in M(X)$ sa restriction $\bar{m}$ à $\mathscr{U}^{\infty}(X)$; on a alors, pour toute $f \in \mathscr{U}(X)$

$$m(f) = \lim_{n \to \infty} \bar{m}[(-n) \vee (f \wedge n)]$$

Réciproquement un élément $\bar{m}$ de $M^{\infty}(X)$ provient d'un élément m de $M(X)$

(autrement dit $\overline{m} \in M(X)$) si la limite précédente existe pour toute $f \in \mathcal{U}(X)$. Ce résultat démontré tout d'abord par BERRUYER-IVOL [3] dans le cas topologique, a été étendu au cas uniforme par PACHL [34] (voir aussi [2]).

L'espace $M^{\infty}(X)$ s'identifie à un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathrm{Rad}(\widehat{pX})$ des mesures de Radon sur le compactifié de Samuel $\widehat{pX}$ de (X,μ). L'identification se fait en associant à chaque $m \in M^{\infty}(X)$ la mesure $\check{m}$ définie par $\check{m}(f^p) = m(f)$ pour toute $f \in \mathcal{U}^{\infty}(X)$, en désignant par f^p l'unique prolongement (uniformément) continu de f à $\widehat{pX}$. Le fait que $\check{m}$ appartienne à $\mathrm{Rad}(\widehat{pX})$ se vérifie en constatant qu'une suite (f_n) de $\mathcal{U}^{\infty}(X)$ tend uniformément vers zéro sur X si et seulement si la suite (f_n^p) tend uniformément vers zéro sur $\widehat{pX}$; et une telle suite (f_n) est un élément de $\mathcal{H}^{\infty}$.

On aura besoin d'introduire, en suivant [7], l'ensemble $\mathrm{Mod}(X,\mu) = \mathrm{Mod}(X)$ des formes linéaires *modulaires* compactologiques sur $\mathcal{U}^{\infty}(X)$; c'est-à-dire l'ensemble des $m \in M^{\infty}(X)$ telles que $m(1) = 1$ et $m(|f|) = |m(f)|$ pour toute $f \in \mathcal{U}^{\infty}(X)$. On sait avec [7] que Mod(X) s'identifie au complété $\hat{X}$ de X. A côté de Mod(X) il faut encore introduire le sous-ensemble $\mathrm{Mod}_{\delta}(X)$ (attention aux notations très peu différentes) des $m \in \mathrm{Mod}(X)$ telles que $m(f) \in f(X)$ pour toute $f \in \mathcal{U}^{\infty}(X)$. Pour les relations existant entre X, $\mathrm{Mod}_{\delta}(X)$ et Mod(X), nous renvoyons à 4.2.

En suivant les analogies avec le cas topologique, introduisons l'espace $M_\sigma(X)$ des formes linéaires m σ-*régulières* sur $\mathcal{U}^\infty(X)$, c'est-à-dire telles que

$$(f_n) \subset \mathcal{U}^\infty(X) \; ; \; f_n \downarrow 0 \implies m(f_n) \to 0.$$

Il n'est pas évident que l'on obtienne un sous-espace de l'espace $\mathrm{Rad}(\widehat{pX})$. C'est toutefois vrai comme on peut le voir en adaptant un raisonnement de BERRUYER-IVOL ([3], p. 19) : si m n'était pas bornée sur la boule unité $\Delta(1)$ de $\mathcal{U}^\infty(X)$ on construirait facilement une suite $(g_n) \subset \mathcal{U}^\infty(X)$ telle que $0 \leqslant g_n \leqslant 2^{-n}$ et $|m(g_n)| = 2^n - 1$; posons $h_n = \sum_{k=1}^{n} g_k$ et $h = \sum_{k=1}^{\infty} g_k$; alors $f_n = h - h_n$ est élément de $\mathcal{U}^\infty(X)$ et $f_n \downarrow 0$; on a donc $m(h_n) \to m(h)$; or on a aussi

$$|m(h_n)| \geqslant 2^n - 1 - \sum_{k=1}^{n-1} (2^k - 1) = n$$

d'où la contradiction.

En remplaçant la suite (f_n) par une suite généralisée (f_i) dans $\mathcal{U}^\infty(X)$, on obtient l'espace $M_\tau(X)$ des formes linéaires τ-*régulières* sur $\mathcal{U}^\infty(X)$

$$(f_i) \subset \mathcal{U}^\infty(X), \quad f_i \downarrow 0 \implies m(f_i) \to 0$$

Enfin on introduit encore l'espace $M_t(X)$ des formes linéaires sur $\mathcal{U}^\infty(X)$ dont la restriction à $\Delta(1)$ est continue pour la topologie de la convergence compacte sur X

$$\|f_i\| \leq 1, \qquad f_i \to 0 \qquad \text{compactement} \Rightarrow \quad m(f_i) \to 0$$

Il est clair (théorème de Dini) que l'on a

$$M_t(X) \subset M_\tau(X) \subset M_\sigma(X) \subset \mathrm{Rad}(\widehat{pX})$$

Tous ces espaces sont évidemment munis d'une structure d'ordre canonique définie de façon évidente par le cône positif de $\mathcal{U}^\infty(X)$.

4.1 LES ESPACES $M_\sigma(X)$, $M_\tau(X)$ et $M_t(X)$.

Introduisons l'algèbre de Baire $\overset{\infty}{\mathrm{Ba}}(X,\mu) = \overset{\infty}{\mathrm{Ba}}(X)$, dite algèbre de Baire sur X, et définie comme la plus petite classe de fonctions (bornées) sur X, contenant $\mathcal{U}^\infty(X)$, et stable par passage à la limite simple des suites. Elle permet l'introduction de la tribu $\Sigma(X)$ associée, définie par la condition $A \in \Sigma(X)$ si et seulement si la fonction caractéristique de A est élément de $\overset{\infty}{\mathrm{Ba}}(X)$. On désigne par $S(X,\mu) = S(X)$ le sous-treillis vectoriel de $\overset{\infty}{\mathrm{Ba}}(X)$ formé des fonctions étagées sur $\Sigma(X)$.

Toute $m \in M_\sigma(X)$ est une intégrale de Daniell sur $\mathcal{U}^\infty(X)$. On peut donc la prolonger de façon unique en une intégrale de Daniell sur $\overset{\infty}{\mathrm{Ba}}(X)$, notée encore m. D'après le théorème de représentation [Z], m est déterminée par sa restriction λ_m à $\Sigma(X)$, qui est une mesure bornée sur la tribu $\Sigma(X)$. Réciproquement toute mesure bornée sur $\Sigma(X)$ définit, par l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes associée, une intégrale de Daniell dont elle est la restriction.

L'application $m \to \lambda_m$ identifie donc $M_\sigma(X)$ à l'espace des mesures (signées bornées) sur la tribu $\Sigma(X)$. Il résulte de là que pour toute $m \in M_\sigma(X)$, les formes linéaires m^+ et m^- sont des éléments de $M_\sigma(X)$ (autrement dit $M_\sigma(X)$ est engendré par son cône positif) et le théorème de Hahn-Jordan garantit même l'existence d'une partie $A \in \Sigma(X)$ telle que l'on ait, pour toute $f \in \overset{\infty}{Ba}(X)$:

$$m^+(f) = m(f1_A) \quad \text{et} \quad m^-(f) = m(f1_{A^c}).$$

On en déduit aisément, avec ([3], p. 9) que les espaces $M_\tau(X)$ et $M_t(X)$ sont aussi engendrés par leur cône positif, c'est-à-dire contiennent m^+, m^- et $|m|$ dès qu'ils contiennent m.

Lorsque T est un espace topologique complètement régulier (que l'on peut identifier à un espace uniforme fin), l'espace $\mathcal{U}^\infty(X)$ est l'algèbre $\mathcal{C}^\infty(T)$ et l'on sait que l'espace $M_\sigma(T)$ est largement étudié ([42], [3], [20],...). On peut se demander si la considération des espaces uniformes apporte des points de vue et des résultats nouveaux. On va voir qu'il n'en est rien pour le cas des espaces $M_\tau(X)$ et $M_t(X)$.

(4.1.1) THEOREME. - *Soit* (X,μ) *un espace uniforme. Toute* $m \in M_\tau(X)$ *possède un prolongement unique* $\bar{m}$ *à l'espace* $\mathcal{C}^\infty(X)$ *qui est une forme linéaire* τ*-régulière. Si* $m \in M_t(X)$ *alors* $\bar{m}$ *est même* t*-régulière.*

Preuve. - On se ramène aussitôt à supposer $m \geq 0$. Soit f une fonction positive, élément de $\mathcal{C}^\infty(X)$. On sait que f est l'enveloppe supérieure $\operatorname{Sup} f_i$ d'une suite généralisée croissante (f_i) de fonctions positives, éléments de $\mathcal{U}^{\infty}(X)$. De plus $\lim_i m(f_i) = \operatorname{Sup}_i m(f_i)$ existe et ne dépend pas de la suite généralisée (f_i) pourvu que l'on ait $f_i \uparrow f$. La formule $\overline{m}(f) = \operatorname{Sup}_i m(f_i)$ définit donc une application m' sur $\mathscr{C}^{\infty}(X)^+$, que l'on prolonge aisément en une forme linéaire $\overline{m}$ sur $\mathscr{C}^{\infty}(X)$. La restriction de $\overline{m}$ à $\mathcal{U}^{\infty}(X)$ est évidemment m et l'on vérifie (raisonnement classique) que $\overline{m}$ est τ-régulière sur $\mathscr{C}^{\infty}(X)$. Si m est de plus supposée dans $M_t(X)$, alors $\overline{m}(f_i) \to 0$ pour toute suite généralisée (f_i) de $\mathscr{C}^{\infty}(X)$, telle que $\|f_i\| \leqslant 1$, et qui converge compactement vers 0 : en effet on peut supposer $f_i \geqslant 0$, et pour tout $\varepsilon > o$, construire une suite généralisée (g_i) dans $\mathcal{U}^{\infty}(X)$ telle que $0 \leqslant g_i \leqslant f_i$ et $\overline{m}(f_i - g_i) \leqslant \varepsilon$; il reste seulement à constater que $g_i \in \Delta(1)$ et que $g_i \to 0$ compactement.

Il peut être utile de remarquer que la boule unité $\Delta(1)$ de $\mathcal{U}^{\infty}(X)$ est partout dense dans la boule unité de $\mathscr{C}^{\infty}(X)$ pour la topologie de la convergence compacte sur X.

(4.1.2) <u>COROLLAIRE</u>. - *Les espaces $M_\tau(X)$ et $M_t(X)$ sont les mêmes pour toutes les structures uniformes sur X compatibles avec la topologie de X.*

Le théorème et son corollaire ramènent donc l'étude des espaces $M_\tau(X)$ et $M_t(X)$ au cas topologique [42].

Pour l'espace $M_\sigma(X)$ la situation est toute différente et plus digne d'intérêt. Elle ne se ramène pas au cas topologique. Donnons un exemple :

soit T un espace complètement régulier pseudocompact et non presque-compact ; il existe, (voir (3.2.16)), une algèbre A contenue strictement dans $\mathscr{C}(T) = \mathscr{C}^{\infty}(T)$, définissant la topologie de T et telle que $A = \mathcal{U}(T,\sigma_A)$; alors σ_A est une structure uniforme précompacte sur T, dont le complété $\widehat{\sigma_A T}$ est le compact obtenu en prenant le quotient de βT modulo la relation d'équivalence $u \sim v \iff f(u) = f(v)$ pour toute $f \in A$; alors T est G_δ-dense à la fois dans βT et dans $\widehat{\sigma_A T}$ et tout $u \in \beta T$ est une forme linéaire σ-régulière sur $\mathscr{C}^{\infty}(T)$, donc sur A ; fixons maintenant u et v dans βT, différents mais équivalents ; la forme linéaire $w = u-v$ appartient à $M_\sigma(T,\beta)$ et s'annule sur $A = \mathcal{U}(T,\sigma_A)$.

Un autre exemple montre que la tribu $\Sigma(X,\mu)$ est différente de la tribu $\Sigma(X, \theta\mu)$dans le cas général. Prenons pour X un ensemble infini non dénombrable et soit Σ la tribu sur X engendrée par les parties finies, et dont les éléments sont les parties M qui sont dénombrables ou de complémentaire dénombrable ; on prend pour A l'algèbre des fonctions Σ-mesurables, qui sont les fonctions f sur X constantes en dehors d'une partie dénombrable de X ; on a alors (voir (3.2.22)) : $\mathcal{U}(X,\sigma_A) = A$, $\Sigma(X,\sigma_A) = \Sigma$ et la tribu $\Sigma(X,\theta\sigma_A)$ est la tribu $\mathscr{P}(X)$ de toutes les parties de X.

Si l'espace $M_\sigma(X)$ n'est pas en général le même pour toutes les structures uniformes sur X compatibles avec sa topologie, il est au moins le même pour toutes les structures uniformes compatibles avec la pseudo-dualité $(X,\mathcal{U}(X))$ (par définition !). Mais on peut aller plus loin : soit $(X,a\mu)$, en abrégé aX, l'espace uniforme de type (A) associé à (X,μ) (voir (2.4)) ; alors $\mathcal{U}(aX)$ est l'algèbre engendrée par $\mathcal{U}(X,\mu)$ et $\mathrm{Coz}(X,\mu) = \mathrm{Coz}(X,a\mu)$; cela prouve, avec l'identification de $M_\sigma(X)$ comme espace de mesures sur la tribu de Baire $\Sigma(X,\mu)$, que $M_\sigma(X) = M_\sigma(aX)$. Par exemple si (X,μ) est un espace uniforme métrisable, alors $\mathcal{U}(aX) = \mathcal{C}(X)$ et par suite $M_\sigma(X) = M_\sigma(X,\theta\mu)$.

L'un des problèmes importants est de savoir si $M_\sigma(X)$ coïncide avec $M^\infty(X,\mu_1)$ pour une structure uniforme convenable μ_1 sur X ; car cela a l'avantage de permettre l'approximation des éléments m de $M_\sigma(X)$ par des mesures moléculaires (à support fini dans X) uniformément sur les parties $H \in \mathcal{H}^\infty(X,\mu_1)$. Une question analogue est développée par BERRUYER-IVOL [3], dans le cas topologique, lorsqu'ils construisent une compactologie $\mathcal{H}_\circ$ sur $\mathcal{C}^\infty(T)$ (compactologie engendrée par les suites équicontinues convergeant simplement vers zéro) donnant pour dual $(\mathcal{C}^\infty(T),\mathcal{H}_\circ)^*$ l'espace $M_\sigma(T)$; alors $M_\sigma(T)$, muni de la topologie de la $\mathcal{H}_\circ$-convergence, est un elc complet, dont le dual est précisément $\mathcal{C}^\infty(T)$, de sorte que T est total dans $M_\sigma(T)$; ce qui fournit la propriété d'approximation uniforme sur les $H \in \mathcal{H}_\circ$ de toute $m \in M_\sigma(T)$ par des mesures moléculaires.

On se propose donc maintenant, en revenant au cas général, d'associer à la structure uniforme μ une autre structure uniforme $\mu_\circ$ sur X telle que $M_\sigma(X,\mu) = M^\infty(X,\mu_\circ)$.

(4.1.3) PROPOSITION. - *Soit η la famille des recouvrements dénombrables* *de* X *construits avec des éléments de* $Coz(X,\mu)$. *Alors* η *est une base d'une structure uniforme* $\mu_\circ$ *sur* X.

Preuve. - Il est clair que η est stable par intersection finie des recouvrements. Soit $\mathscr{V} = (V_n)$ un recouvrement de η. Il existe une suite (f_n) de $\mathcal{U}(X)$ telle que $V_n = Coz(f_n)$, et un écart $d \in \mu$ tel que $f_n \in \mathcal{U}(X,\mu_d)$ pour tout n. Puisque $\mathscr{V}$ est un recouvrement ouvert de (X,μ_d), il existe un recouvrement ouvert dénombrable $\mathscr{W} = (W_n)$ de (X,μ_d) qui est un $*$-raffinement de $\mathscr{V}$. Or $\mathscr{W}$ est formé d'éléments de $Coz(X,\mu_d)$, donc d'éléments de $Coz(X,\mu)$, et ainsi $\mathscr{W}$ appartient à η. On voit donc que η est une base (au sens T de la définition de Isbell) d'une structure uniforme sur X.

(4.1.4) PROPOSITION (HAGER, [24]). - $\mu_\circ$ *est la structure uniforme* M-*fine associée à la structure uniforme* $\sigma\mu$ *(ou* $e\mu$*).*

Preuve. - Montrons d'abord que $\mu_\circ$ est M-fine. Soit g une fonction uniformément continue de $(X,\mu_\circ)$ dans un espace métrique (M,d). Déjà l'image g(X) est un sous-espace séparable de M, puisque, pour tout $\alpha>0$, il existe une suite (t_n) dans g(X) telle que $g(X) \subset \cup B_d(t_n,\alpha)$. Alors g est uniformément continue de $((X,\mu_\circ)$ dans $(M,\theta\mu_d)$, car tout recouvrement ouvert (ω_i) de M possède un sous-recouvrement dénombrable (ω'_n) de g(X) tel que $\mathscr{V} = (g^{-1}(\omega'_n))$ appartienne à η. Enfin $\mu_\circ$ est la structure uniforme M-fine associée à $\sigma\mu$, car d'une part elle est plus fine que $\sigma\mu$, et d'autre part elle est moins fine que toute structure uniforme M-fine ν plus fine que $\sigma\mu$, puisque tout recouvrement $\mathscr{V} = (V_n)$ élément de η est un recouvrement ouvert de (X,μ_d) pour un écart convenable $d \in \sigma\mu$.

(4.1.5) COROLLAIRE. - *On a les égalités :*

$$\mathcal{U}(X,\alpha\mu) = \mathcal{U}(X,m(\sigma\mu)) = \mathcal{U}(X,\mu_\circ)$$

$$\mathcal{H}(X,\mu_\circ) = \bigcup_{d \in \mu_\circ} \mathcal{H}(X,\theta\mu_d) = \bigcup_{d \in \sigma\mu} \mathcal{H}(X,\theta\mu_d)$$

Introduisons une définition qui généralise les fonctions DLUC.

(4.1.6) DEFINITION. - *Soit* (X,μ) *un espace uniforme et soit* η *la famille des recouvrements dénombrables de* X *formés d'éléments de* $\mathrm{Coz}(X,\mu)$. *On dit qu'une partie* $H \subset \mathcal{C}(X,\mu)$ *est (DLUE) (dénombrablement localement uniformément équicontinue), s'il existe* $\mathcal{V} = (V_n) \in \eta$ *tel que les parties* $H|V_n$ *soient éléments de* $\mathcal{H}(V_n,\mu|V_n)$ *pour tout* n.

L'application à la structure uniforme $\mu_\circ = m(\sigma\mu)$ est immédiate :

(4.1.7) PROPOSITION. - *Toute partie (DLUE)* H *de* $\mathcal{C}(X,\mu_\circ)$ *appartient à* $\mathcal{H}(X,\mu_\circ)$.

Preuve. - Il existe une suite d'écarts $d_n \in \mu_\circ$ telle que, pour tout n, $H|V_n$ soit élément de $\mathcal{H}(V_n,\mu_{d_n}|V_n)$. Notons $V_n = \mathrm{Coz}(f_n)$ et fixons un écart $d \in \mu_\circ$ équivalent à l'ensemble des écarts $(d_n+d_{f_n})$. Alors H est élément de $\mathcal{H}(X,\theta\mu_d)$, donc élément de $\mathcal{H}(X,\mu_\circ)$ d'après (4.1.5).

(4.1.8) COROLLAIRE. - *L'espace* $(X,\mu_\circ)$ *est un espace uniforme de type (A) suffisamment fin* [35].

(4.1.9) PROPOSITION. - *Soit* (f_n) *une suite de* $\mathcal{U}(X,\mu)$, *décroissante vers zéro. Alors la partie* $H = \{f_n\}_n$ *est élément de* $\mathcal{H}(X,\mu_\circ)$.

Preuve. - Donnons une preuve directe, indépendante de la caractérisation obtenue en (4.1.7). Fixons donc $\varepsilon>0$ et considérons les suites de conoyaux définies par

$$W_n = \{x \,/\, f_n(x) < \varepsilon\} \qquad ; \quad n \geqslant 0$$

$$U_m^k = \{x \,/\, (m-1)\tfrac{\varepsilon}{2} < f_k(x) < (m+1)\tfrac{\varepsilon}{2}\} \qquad ; \quad k,m \geqslant 0.$$

Soit $S = \sum_{n=o}^{\infty} \mathbb{N}^n$ l'ensemble dénombrable somme ensembliste (disjointe) des ensembles $\mathbb{N}^n$, $n \geqslant 0$. Pour tout élément $s = (m_1,m_2,\dots,m_n) \in S$, posons

$$V_s = U_{m_1}^1 \cap U_{m_2}^2 \cap \dots \cap U_{m_n}^n \cap W_{n+1}$$

On obtient là un recouvrement dénombrable de X formé de conoyaux, donc un élément $\mathcal{V} = (V_s)_{s \in S}$ qui appartient à la famille η ; et sur chacun des ensembles V_s chaque fonction f_k, $k \geqslant 0$, a une oscillation majorée par ε.

A titre de remarque signalons que (4.1.9) généralise le fait bien connu que toute suite $f_n \downarrow 0$ de fonctions continues sur un espace topologique est équicontinue.

En rassemblant tout ce qu'on vient de prouver depuis (4.1.3), on obtient le théorème qui justifie l'introduction de la structure uniforme $\mu_\circ$.

(4.1.10) THEOREME. - *Pour tout espace uniforme* (X,μ) *on a*

$$M_\sigma(X) = M^\infty(X,\mu_\circ).$$

Preuve. - On a déjà $M^\infty(X,\mu_\circ) \subset M_\sigma(X)$ comme conséquence immédiate de la proposition précédente. Réciproquement soit m un élément de $M_\sigma(X)$, qu'on peut supposer positif et tel que $m(1) = 1$. Fixons un disque $H \in \mathscr{H}^\infty(X,\mu_\circ)$ et une suite généralisée $\{f_i\} \subset H$, convergeant simplement vers zéro. Alors la suite généralisée $g_i = \operatorname{Sup}_{j \geqslant i} |f_j|$ est encore élément de $\mathscr{H}^\infty(X,\mu_\circ)$ et de plus $g_i \downarrow 0$; on peut d'ailleurs supposer $\|g_i\| \leqslant 1$ pour tout i. Pour tout $\varepsilon>0$ fixé, il existe un recouvrement $\mathscr{V} = (V_n) \in \eta$ tel que l'oscillation de chaque g_i sur chaque V_n soit majorée par ε. Posons $W_n = \bigcup_{k \leqslant n} V_k$; alors $W_n \uparrow X$, de sorte qu'il existe un entier N tel que $m(X \setminus W_N) \leqslant \varepsilon$. Il existe aussi un indice $i_\circ$ tel que $g_{i_\circ} \leqslant 2\varepsilon$ sur W_N, ce qui implique facilement $m(g_{i_\circ}) \leqslant 3\varepsilon$ et par suite $|m(f_i)| \leqslant 3\varepsilon$ pour tout $i \geqslant i_\circ$. On a donc $m \in M^\infty(X,\mu_\circ)$, ce qui termine tout.

4.2 LES ESPACES Mod(X) ET $\mathrm{Mod}_\delta(X)$.

On sait que la structure uniforme μ de (X,μ) est celle de la $\mathscr{H}^\infty$-convergence sur $\mathscr{U}^\infty(X,\mu)$ et que toute forme modulaire compactologique m sur $\mathscr{U}^\infty(X)$ est uniformément approchée, sur chaque $H \in \mathscr{H}^\infty$, par des points de X [7]. La conséquence immédiate est que Mod(X), muni de la structure uniforme de la $\mathscr{H}^\infty$-convergence est l'un des modèles du complété $\hat{X}$ de (X,μ) [7].

Il est donc bon d'expliciter le passage naturel entre Mod(X) et le modèle, noté $\hat{X}$, défini par les filtres de Cauchy minimaux $[B_1]$ sur (X,μ). Etablissons la correspondance en associant à tout $\mathscr{F} \in \hat{X}$ la forme linéaire $u_{\mathscr{F}}$ sur $\mathcal{U}^{\infty}(X)$ définie par $u_{\mathscr{F}}(f) = \lim\limits_{\mathscr{F}} f$; et à tout $u \in \mathrm{Mod}(X)$ le filtre $\mathscr{F}_u$ défini par la base de filtre $\mathscr{B}_u$ formée des parties

$$A_u(f,n) = \{x \in X \ / \ |u(f)-f(x)| < \frac{1}{n}\}$$

associées aux $f \in \mathcal{U}^{\infty}(X)$ et aux entiers $n \geqslant 1$.

(4.2.1) <u>THEOREME</u> ([14]). - *L'application* $U : \mathscr{F} \to u_{\mathscr{F}}$, *de* $\hat{X}$ *dans* $\mathrm{Mod}(X)$, *est une bijection bi-uniformément continue, dont la bijection réciproque est l'application* $\Phi : u \to \mathscr{F}_u$.

Preuve. - Il est clair que $u_{\mathscr{F}}$ est une forme modulaire sur $\mathcal{U}^{\infty}(X)$. Reste à voir qu'elle est compactologique. Fixons $H \in \mathscr{H}^{\infty}(X)$ et (f_i) une suite généralisée convergeant simplement vers zéro dans H (on peut d'ailleurs supposer H disquée). Il existe, pour tout $\varepsilon>0$, une partie $A \in \mathscr{F}$ de diamètre au plus égal à ε relativement à l'écart d_H ; en fixant un point $x_0 \in A$ on obtient aisément l'inégalité limite $|u_{\mathscr{F}}(f_i)-f_i(x_0)| \leqslant \varepsilon$ pour chaque i, ce qui suffit pour montrer que $u_{\mathscr{F}}(f_i) \to 0$.

Réciproquement montrons que $\mathscr{F}_u$ est filtre de Cauchy minimal. Fixons $H \in \mathscr{H}^{\infty}$ et $\varepsilon>0$ et définissons la fonction g par $g(x) = \sup\limits_{f \in H} |u(f)-f(x)|$. Alors $g \in \mathcal{U}^{\infty}(X)$ et $u(g) = 0$, de sorte qu'il existe un point $x_0 \in X$ tel que $g(x_0) < \varepsilon$ (sinon $\frac{1}{g} \in \mathcal{U}^{\infty}(X)$ et $u(g) > 0$).

On en déduit facilement que l'ensemble $A_u(g,n)$ est non vide et de diamètre au plus égal à ε pour l'écart d_H, dès que $n\varepsilon > 2$. Ainsi $\mathcal{B}_u$ est bien la base d'un filtre de Cauchy $\mathcal{F}_u$; et $\mathcal{F}_u$ est minimal car tout filtre de Cauchy sur X moins fin que $\mathcal{F}_u$ contient la base $\mathcal{B}_u$. On peut aussi remarquer que $\mathcal{F}_u$ est la trace sur X du filtre des voisinages du point u dans l'espace Mod(X).

On vérifie enfin sans difficulté que les applications $U : \mathcal{F} \to u_{\mathcal{F}}$ et $\Phi : u \to \mathcal{F}_u$ sont uniformément continues et réciproques l'une de l'autre [14].

Il est clair que cette démonstration reste valable lorsqu'on remplace $\mathcal{H}^{\infty}$ par $\mathcal{H}$ et $\mathcal{U}^{\infty}(X)$ par $\mathcal{U}(X)$; de telle sorte que Mod(X) est contenu dans l'espace M(X). Autrement dit tout u de Mod(X) est la restriction à $\mathcal{U}^{\infty}(X)$ d'un unique élément $u' \in M(X)$ défini d'ailleurs par $u'(f) = \lim_{n \to \infty} u\,[(f \wedge n) \vee (-n)]$.

Lorsqu'on fixe un élément $u \in \text{Mod}(X)$, on voit que l'on a $u(f) \in \overline{f(X)}$ pour toute $f \in \mathcal{U}^{\infty}(X)$. En remplaçant cette condition par la condition plus restrictive $u(f) \in f(X)$ pour toute $f \in \mathcal{U}^{\infty}(X)$, on définit une partie de Mod(X), notée $\text{Mod}_{\delta}(X)$, qui contient évidemment X. On va voir, avec le théorème qui suit, que l'on obtient ainsi le δ-complété de X, défini par MORITA [31] et repris dans [14].

(4.2.2) <u>THEOREME</u> ([14]). - *Soit* (X,μ) *un espace uniforme. Pour tout* $u \in \mathrm{Mod}(X)$ *les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) le filtre associé $\mathscr{F}_u$ *possède la propriété suivante :*

(ID) Pour toute suite (B_n) *de* $\mathscr{F}_u$ *on a* $\cap B_n \neq \emptyset$.

b) u *possède la propriété*

(D) Pour toute suite (f_n) *de* $\mathcal{U}(X)$ *et pour tout* $\varepsilon>0$, *il existe un point* $x \in X$ *tel que* $\sup_n |u(f_n)-f_n(x)| \leq \varepsilon$.

c) u *possède la propriété*

(D) Pour toute suite* (f_n) *de* $\mathcal{U}(X)$, *il existe un point* $x \in X$ *tel que* $u(f_n) = f_n(x)$ *pour tout* n.

d) on a $u(f) \in f(X)$ *pour toute* $f \in \mathcal{U}^{\infty}(X)$;

e) on a $u(f) \in f(X)$ *pour toute* $f \in \mathcal{U}(X)$.

<u>*Preuve*</u> :

a) $\Rightarrow$ c) : Les ensembles $B_{n,m} = A_u(f_n,m)$ appartiennent tous à la base $\mathscr{B}_u$. Donc tout point $x \in \bigcap_{n,m} B_{n,m}$ vérifie la condition (D^*).

c) $\Rightarrow$ b) : Evident.

b) $\Rightarrow$ a) : Si (B_n) est une suite de $\mathscr{F}_u$, il existe pour chaque n, une fonction $f_n \in \mathcal{U}^{\infty}(X)$ et un entier $m_n \geq 1$ tels que $B_n \supset A_u(f_n,m_n)$. En posant $g_n = f_n/m_n$ et en utilisant b), pour $\varepsilon=1$, on obtient un point $x \in X$ tel $x \in A_u(g_n,1) = A_u(f_n,m_n)$ pour tout n, d'où $x \in \cap B_n$.

c) $\Rightarrow$ e) $\Rightarrow$ d) : Evident.

d) $\Rightarrow$ c) : On se ramène à supposer $f_n \geq 0$ et $u(f_n) = 0$, en remplaçant chaque f_n par $|f_n-u(f_n)|$. Alors la fonction $f = \Sigma\, 2^{-n} f_n/(1+f_n)$ est élément de $\mathcal{U}^{\infty}(X)$ et vérifie $u(f) = 0$. Il existe donc $x \in X$ tel que $f(x) = 0$, d'où $f_n(x) = 0$ pour tout n.

Ce théorème signifie donc que $\mathrm{Mod}_{\delta}(X)$, muni de la structure uniforme de la $\mathcal{H}$-convergence, est l'un des modèles du δ-complété de (X,μ), défini dans [31] par l'ensemble des filtres de Cauchy minimaux vérifiant la condition d'intersection dénombrable. La caractérisation de ce δ-complété, noté δX, en termes de G_{δ}-densité [14], prouve encore que $\mathrm{Mod}_{\delta}(X)$ est exactement égal à l'ensemble des intégrales de Daniell sur $\mathcal{U}^{\infty}(X)$ parmi les éléments de $\hat{X} = \mathrm{Mod}(X)$. Plus précisément :

(4.2.3) <u>PROPOSITION</u>. - *Soit* $u \in \mathrm{Mod}(X)$. *Pour que* u *appartienne à* $\mathrm{Mod}_{\delta}(X)$, *il faut et il suffit que* $u(f_n) \to 0$ *pour toute suite* (f_n) *de* $\mathcal{U}^{\infty}(X)$ *telle que* $f_n \downarrow 0$.

Preuve. - La condition est nécessaire d'après (4.2.2.c). Supposons qu'elle soit vérifiée et prouvons alors la condition d) de (4.2.2). Si d) n'était pas vérifiée, il existerait une fonction $f \in \mathcal{U}^{\infty}(X)$, telle que $f(x) > 0$ pour tout x, et telle aussi que $u(f) = 0$. Alors la suite $g_n = n(f \wedge \frac{1}{n})$ est croissante et tend vers 1 ; de plus on a $u(g_n) = 0$, ce qui est absurde.

(4.2.4) <u>COROLLAIRE</u>. - *Pour tout espace uniforme* (X,μ) *désignons par* aX *l'espace uniforme de type (A) associé à* (X,μ) *et par* σX *l'affaibli* $(X,\sigma\mu)$ *de* (X,μ). *On a alors*

$$\mathrm{Mod}_{\delta}(\sigma X) = \mathrm{Mod}_{\delta}\,[\sigma(aX)] = \mathrm{Mod}\,[\sigma(aX)]$$

Preuve. - Pour tout X, $\mathrm{Mod}_\delta(\sigma X)$ est l'ensemble des formes modulaires (non nécessairement compactologiques) vérifiant les conditions (4.2.2) ; d'après (4.2.3) c'est aussi l'ensemble des intégrales de Daniell modulaires (ou multiplicatives et unitaires [7]) sur $\mathcal{U}^\infty(X) \subset \mathcal{U}^\infty(aX)$. Par ailleurs on sait que $\mathcal{U}(aX)$ est stable par inverse, d'où l'on tire facilement l'égalité $\mathrm{Mod}_\delta\,[\sigma(aX)] = \mathrm{Mod}\,[\sigma(aX)]$. Comparons maintenant $\mathcal{U}^\infty(X)$ et $\mathcal{U}^\infty(aX)$. On a immédiatement $\mathcal{U}^\infty(X) \subset \mathcal{U}^\infty(aX)$; réciproquement toute fonction $f \geqslant 0$, élément de $\mathcal{U}^\infty(aX)$, est limite simple d'une suite croissante (f_n) de $\mathcal{U}^\infty(X)$ d'après [21], puisque $\mathrm{Coz}(aX) = \mathrm{Coz}(X)$. Il suit de là que les intégrales de Daniell sur $\mathcal{U}^\infty(X)$ ou $\mathcal{U}^\infty(aX)$ sont les mêmes ; ce qui est donc vrai pour les intégrales de Daniell modulaires, d'où l'égalité $\mathrm{Mod}_\delta(\sigma X) = \mathrm{Mod}_\delta\,[\sigma(aX)]$.

Le théorème suivant fournit une caractérisation intéressante du δ-complété δX de X en terme de complété.

(4.2.5) <u>THEOREME</u>. - *Pour tout espace uniforme* (X,μ) *on a les égalités ensemblistes*

$$\delta X = \widehat{aX} = \widehat{mX}$$

où mX *est l'espace uniforme* M-*fin* $(X,m\mu)$ *associé à* (X,μ).

Preuve. - D'après (2.5.14) on a $\mathcal{U}(aX) = \mathcal{U}(mX) = A$, où A est l'algèbre [au sens de (2.3.1)] engendrée par $\mathcal{U}^\infty(X)$; et

$\mathcal{H}(X,m\mu) = \bigcup_{d \in \mu} \mathcal{H}(X,\theta\mu_d)$. Il en résulte déjà que mX est de type (A) ; la structure uniforme $m\mu$ est donc plus fine que $a\mu$ et $\widehat{mX} \subset \widehat{aX}$. Par ailleurs $\widehat{aX} = \delta(aX) \subset \delta X$, donc en résumé $\widehat{mX} \subset \widehat{aX} \subset \delta X$. Pour terminer, montrons l'inclusion $\delta X \subset \widehat{mX}$; pour cela il suffit de prouver que pour $u \in \mathrm{Mod}_\delta X$, le prolongé canonique $\overline{u}$ sur $A = \mathcal{U}(X,m\mu)$ est compactologique sur $\mathcal{U}(X,m\mu)$. Fixons donc $H \in \mathscr{H}(X,\theta\mu_d)$ pour un $d \in \mu$ quelconque. Si v est la restriction de u à $\mathcal{U}(X,\mu_d) \subset \mathcal{U}(X,\mu)$, alors le prolongement de l'intégrale de Daniell v à l'espace $\mathcal{U}(X,a\mu_d) = \mathscr{C}(X,\mu_d)$ coïncide avec la restriction $\overline{v}$ de $\overline{u}$ au sous-espace $\mathcal{U}(X,a\mu_d)$ de $\mathcal{U}(X,a\mu) = A$. Comme tout espace métrique est δ-complet, il existe un point $x \in X$ tel que $\overline{v} = x$, c'est-à-dire tel que $\overline{v}(f) = f(x)$ pour toute $f \in \mathcal{U}(X,a\mu_d)$. Il en résulte que u est continu sur H et par suite u appartient à $\mathrm{Mod}(mX) = \widehat{mX}$.

On en déduit plusieurs corollaires :

(4.2.6) <u>COROLLAIRE 1</u> ([38], th. 5.1). - *Pour tout espace uniforme* (X,μ) *les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) $(X,m\mu)$ *est complet ;*

b) (X,μ) *est δ-complet ;*

c) chaque filtre de Cauchy sur (X,μ) *vérifiant la condition (ID) d'intersection dénombrable est convergent.*

(4.2.7) <u>COROLLAIRE 2</u>. - *Pour tout espace uniforme* (X,μ) *de type (A), on a* $\widehat{\sigma X} = \widehat{eX}$*, où* $eX = (X,e\mu)$ *est l'espace uniforme de Shirota associé à* (X,μ).

Preuve. - On sait que $e\mu$ est moins fine que $\mu_o = m(\sigma\mu)$.

Alors $\widehat{\sigma X} = \widehat{eX} = \widehat{\mu_o X}$. Ce corollaire est comparable au théorème classique de SHIROTA ([I], p. 130).

(4.2.8) <u>COROLLAIRE 3</u>. - *Pour tout espace topologique complètement régulier* T *on a* $\upsilon T = \widehat{e\theta T}$.

Dans la suite on considèrera le replété υT comme étant le complété $\widehat{e\theta T}$ de $(T, e\theta)$, l'égalité étant prise au sens topologique. C'est d'ailleurs aussi ce qui arrive dans (4.2.5) où les égalités ensemblistes $\delta X = \widehat{aX} = \widehat{mX}$ sont en fait des égalités topologiques puisque $\mathrm{Coz}(X,\mu) = \mathrm{Coz}(aX) = \mathrm{Coz}(mX)$.

4.3 SUR CERTAINES LIMITES PROJECTIVES.

Les structures uniformes étant définies par des familles d'écarts, il est raisonnable de penser que les espaces métriques vont intervenir. C'est cette question un peu vague qu'il s'agit maintenant de préciser.

Fixons l'espace uniforme séparé (X,μ) et rappelons que sur l'ensemble des écarts $d \in \mu$ existe une relation de préordre, qui est la relation de domination :

$$e \preccurlyeq d \iff d \text{ domine } e \iff \mu_e \text{ est moins fine que } \mu_d$$

Cette relation de préordre est d'ailleurs dénombrablement filtrante croissante.

Désignons, pour tout $d \in \mu$, par X_d l'espace métrique associé à d et par h_d la surjection canonique $X \to X_d$. Pour $e,d \in \mu$ tels que $e \preccurlyeq d$, on définit la fonction $h_{ed} : X_d \to X_e$ par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h_e"] \arrow[d, "h_d"'] & X_e \\ X_d \arrow[ur, "h_{ed}"'] & \end{tikzcd}$$

On obtient ainsi des applications uniformément continues h_d et h_{ed}, de sorte que le système $(X_d, h_{ed})_{e \leqslant d}$ est un système projectif d'espaces métriques. Et il va nous falloir comparer (X,μ) à lim proj X_d, où la limite projective est prise dans la catégorie des espaces uniformes séparés.

Pour chaque $d \in \mu$, on a les égalités $\mathcal{U}(X,\mu_d) = \mathcal{U}(X_d)$ et $\mathcal{U}^\infty(X,\mu_d) = \mathcal{U}^\infty(X_d)$ qui traduisent des factorisations évidentes. Comme les applications h_{ed} sont des surjections, on en déduit, par transposition, des diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U}(X) & \mathcal{U}(X_e) \arrow[l] \arrow[dl] \\ \mathcal{U}(X_d) \arrow[u] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{U}^\infty(X) & \mathcal{U}^\infty(X_e) \arrow[l] \arrow[dl] \\ \mathcal{U}^\infty(X_d) \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

où le premier (avec $\mathcal{U}$) est formé d'injections linéaires et le second (avec $\mathcal{U}^\infty$) est formé de morphismes isométriques d'algèbres de Banach unitaires. De plus on a évidemment dans cette optique les formules

$$\mathcal{U}(X) = \bigcup_{d \in \mu} \mathcal{U}(X_d) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{U}^\infty(X) = \bigcup_{d \in \mu} \mathcal{U}^\infty(X_d)$$

Si l'on rappelle que l'espace de Banach $\mathrm{Rad}(\widehat{pX})$ des mesures de Radon sur le compactifié de Samuel $\widehat{pX}$ de X n'est autre que le dual $\mathcal{U}^\infty(X)'$ (avec sa norme), on voit qu'en transposant de nouveau on obtient un autre système projectif, mais cette fois dans la catégorie **Ban** des espaces de Banach (avec morphismes de contraction)

$$(\mathrm{Rad}(\widehat{pX_d}),\ g_{ed})_{e \preccurlyeq d}$$

où $g_{ed} : \mathrm{Rad}(\widehat{pX_d}) \to \mathrm{Rad}(\widehat{pX_e})$ est définie par $g_{ed}(m)(f) = m(f \circ h_{ed})$ pour toute $m \in \mathrm{Rad}(\widehat{pX_d})$ et toute $f \in \mathcal{U}^\infty(X_e)$. On remarquera que, modulo la transformation de Dirac qui permet de plonger ensemblistement chaque espace uniforme séparé X dans l'espace de Banach $\mathrm{Rad}(\widehat{pX})$, les morphismes g_{ed} prolongent les applications h_{ed}.

En faisant intervenir l'espace $\mathrm{Rad}(\widehat{pX})$, on obtient de même un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Rad}(\widehat{pX}) \arrow[r, "g_e"] \arrow[d, "g_d"] & \mathrm{Rad}(\widehat{pX_e}) \\
\mathrm{Rad}(\widehat{pX_d}) \arrow[ur, "g_{ed}"'] &
\end{tikzcd}$$

Il existe donc un morphisme $g : \mathrm{Rad}(\widehat{pX}) \to \lim\ \mathrm{proj}\ \mathrm{Rad}(\widehat{pX_d})$.

Rappelons encore que $\lim\ \mathrm{proj}\ \mathrm{Rad}(\widehat{pX_d})$, dans la catégorie **Ban**, est l'espace de Banach des sytèmes cohérents $\overline{m} = (m_d)$ tels que $\|\overline{m}\| = \sup_d \|m_d\| < +\infty$. On a alors :

(4.3.1) <u>THEOREME</u>. - *Pour tout espace uniforme séparé* (X,μ) *on a*

$$\mathrm{Rad}(\widehat{pX}) = \operatorname*{lim\,proj}_{\mathrm{Ban}} \mathrm{Rad}(\widehat{pX_d})$$

autrement dit g *est une isométrie surjective.*

Preuve. - Pour toute $m \in \mathrm{Rad}(\widehat{pX})$, l'image $g(m)$ est le système cohérent $(m_d) = \overline{m}$, où $m_d = g_d(m)$. Puisque g_d est transposée de l'isométrie $\mathcal{U}^\infty(X_d) \to \mathcal{U}^\infty(X)$, on voit aussitôt que $\|g_d\| \leqslant 1$ et $\|\overline{m}\| \leqslant \|m\|$; réciproquement pour toute $f \in \mathcal{U}^\infty(X)$, telle que $\|f\| \leqslant 1$, on a $m(f) = m_{d_f}(f)$, où d_f est l'écart associé à f, de sorte que $|m(f)| \leqslant \|\overline{m}\|$ et $\|m\| \leqslant \|\overline{m}\|$; ainsi $\|\overline{m}\| = \|m\|$ et g est une isométrie. Montrons que g est surjective ; pour cela soit $\overline{m} = (m_d)$; pour toute $f \in \mathcal{U}^\infty(X)$ la valeur $m_d(f)$ est la même, pour raison de cohérence, pour tous les $d \in \mu$ tels que $d_f \precsim d$; en posant ainsi $m(f) = m_{d_f}(f)$, on définit ainsi une forme linéaire m sur $\mathcal{U}^\infty(X)$ telle que $|m(f)| \leqslant \|\overline{m}\|\|f\|$, donc un élément $m \in \mathrm{Rad}(\widehat{pX})$.

On remarquera que la condition $\sup_d \|m_d\| < +\infty$ imposée aux éléments cohérents $\overline{m} = (m_d)$ est superflue. Cela tient en effet au caractère dénombrablement filtrant croissant de l'ensemble préordonné μ : car pour toute suite (d_n) de μ on a $\|m_{d_n}\| \leqslant \|m_d\|$ pour tout écart d tel que $d_n \precsim d$ pour tout n.

Donnons immédiatement quelques conséquences du théorème.

(4.3.2) <u>PROPOSITION</u>. - *Soit* $m = (m_d)$ *une mesure de Radon sur* $\widehat{pX}$. *On a alors :*

a) m *est modulaire si et seulement si toutes les* m_d *le sont.*

b) m *est élément de* $\mathrm{Mod}_\delta(X)$ *si et seulement si chaque* m_d *est élément de* $\mathrm{Mod}_\delta(X_d)$.

c) m *est compactologique sur* $\mathcal{U}^\infty(X)$ *[resp. sur* $\mathcal{U}(X)$*] si et seulement si chaque* m_d *est compactologique sur* $\mathcal{U}^\infty(X_d)$ *[resp. sur* $\mathcal{U}(X_d)$*].*

Preuve. - Elle découle directement des définitions sachant pour b) que $\mathrm{Mod}_\delta(X_d) = X_d$ puisque X_d est espace métrique.

(4.3.3) <u>PROPOSITION</u>. - *En désignant encore par* g_{ed} *les restrictions de* g_{ed} *aux espaces qui interviennent, on a les systèmes projectifs suivants :* $(\mathrm{Mod}(X_d), g_{ed})$; $(\mathrm{Mod}_\delta(X_d), g_{ed})$; $(M(X_d), g_{ed})$; $(M^\infty(X_d), g_{ed})$; $(M_\sigma(X_d), g_{ed})$; $(\widehat{pX}_d, g_{ed})$ *et* $(\widehat{\sigma X}_d, g_{ed})$. *Les limites projectives correspondantes sont respectivement* $\mathrm{Mod}\,X$, $\mathrm{Mod}_\delta X$, $M(X)$, $M^\infty(X)$, $M_\sigma(X)$, $\widehat{pX}$ *et* $\widehat{\sigma X}$.

Preuve. - On a $M_\sigma(X) = \lim\,\mathrm{proj}\, M_\sigma(X_d)$: si m appartient à $M_\sigma(X)$ alors chaque m_d appartient à $M_\sigma(X_d)$; la réciproque provient du caractère dénombrablement filtrant croissant de la famille d'écarts μ. Les deux dernières limites projectives s'obtiennent avec $\widehat{pX} = \mathrm{Mod}(X, p\mu)$ et $\widehat{\sigma X} = \mathrm{Mod}(X, \sigma\mu)$. Le reste est trivial.

(4.3.4) <u>COROLLAIRE</u>. - *On a* $\delta X = \lim\,\mathrm{proj}\, X_d$.

Preuve. - Car $\mathrm{Mod}_\delta(X_d) = X_d$. On retrouve ainsi la définition du δ-complété donnée par MORITA [31].

(4.3.5) PROPOSITION. - *Pour toute mesure de Radon* $m \in \mathrm{Rad}(\widehat{pX})$ *désignons par* K *le support de* m *et par* K_d *le support de chaque* m_d *dans* $\widehat{pX}_d$. *Alors* (K_d, g_{ed}) *est un système projectif de compacts dont la limite est* K.

4.4 LES ESPACES $M(X)$ ET $M^\infty(X)$.

On rappelle que $M(X)$ et $M^\infty(X)$ sont définis comme elc complets duals respectifs des espaces compactologiques $\mathcal{U}(X,\mu)$ et $\mathcal{U}^\infty(X,\mu)$. Ce sont donc les espaces de formes linéaires continues sur les éléments $H \in \mathcal{H}(X,\mu)$, ou $H \in \mathcal{H}^\infty(X,\mu)$, pour la topologie de la convergence simple sur X.

On peut alors essayer de modifier ces définitions et les rapprocher de celles des espaces $M_\sigma(X)$ et $M_\tau(X)$. Nous allons voir que c'est possible pour l'espace $M^\infty(X)$ mais non en général pour l'espace $M(X)$. Tout d'abord :

(4.4.1) PROPOSITION. - *Soit* m *une mesure de Radon sur* $\widehat{pX}$ *vérifiant la propriété suivante :*

$$(P) \quad \begin{cases} \textit{Pour toute suite généralisée } (f_i)_{i\in I} \textit{ élément} \\ \textit{de } \mathcal{H}^\infty \textit{ telle que } f_i \downarrow 0, \textit{ on a } m(f_i) \to 0. \end{cases}$$

Alors la mesure m^+ *vérifie aussi la propriété (P).*

Preuve. - Démontrons que m^+ vérifie la propriété (P). Fixons $\varepsilon>0$ et un indice $i_\circ \in I$, puis une fonction $g_\circ \in \mathcal{U}^\infty(X)$ telle que $0 \leqslant g_\circ \leqslant f_{i_\circ}$ et $m^+(f_{i_\circ}) \leqslant m(g_\circ) + \varepsilon$. Considérons la suite généralisée $(f_i \wedge g_\circ)$ pour $i \geqslant i_\circ$. Il est facile de vérifier l'inégalité $(f_i \wedge g_\circ) \leqslant f_{i_\circ} - f_i$, d'où l'on tire :

$$m(g_\circ - f_i \wedge g_\circ) \leqslant m^+(g_\circ - f_i \wedge g_\circ) \leqslant m^+(f_{i_\circ}) - m^+(f_i)$$

ce qui conduit aussitôt à

$$m^+(f_i) \leqslant \varepsilon + m(f_i \wedge g_\circ) \qquad ; \qquad i \geqslant i_\circ$$

On remarque enfin que $(f_i \wedge g_\circ)_{i \geqslant i_\circ}$ est élément de $\mathcal{H}^\infty$ et que $f_i \wedge g_\circ \downarrow 0$. Donc $m(f_i \wedge g_\circ) \to 0$ et par conséquent $\limsup m^+(f_i) \leqslant \varepsilon$, ce qui suffit.

Remarque. - En remplaçant la propriété (P) par la propriété τ qui définit $M_\tau(X)$, ou la propriété t qui définit $M_t(X)$, on retrouve le fait, vu en (4.1), que $M_\tau(X)$ et $M_t(X)$ sont engendrés par leur cône positif.

L'application à l'espace $M^\infty(X)$ est immédiate.

(4.4.2) <u>THEOREME</u>. - *Pour qu'une mesure de Radon* m *sur* $\widehat{pX}$ *soit élément de l'espace* $M^\infty(X)$ *il faut et il suffit qu'elle vérifie la propriété (P). En particulier* $M^\infty(X)$ *est engendré par son cône positif.*

Preuve. - Il suffit de vérifier que toute mesure de Radon positive m vérifiant (P) est élément de $M^{\infty}(X)$. Or si (g_i) est une suite généralisée élément de $\mathcal{H}^{\infty}$ telle que $g_i \to 0$, la suite généralisée $f_i = \sup_{j \geqslant i} |g_j|$ est décroissante vers zéro et élément aussi de $\mathcal{H}^{\infty}$. On a donc $m(f_i) \to 0$, et tout est dit puisque $|m(g_i)| \leqslant m(f_i)$.

On remarquera que dire que $M^{\infty}(X)$ est engendré par son cône positif équivaut à dire que $m \in M^{\infty}(X) \Longrightarrow |m| \in M^{\infty}(X)$; car si $m = m_1 - m_2$, avec $m_i \geqslant 0$ et $m_i \in M^{\infty}(X)$, alors $|m| \leqslant m_1 + m_2$, donc $|m| \in M^{\infty}(X)$.

Le théorème (4.4.2) ne possède pas d'analogue concernant l'espace M(X) car précisément M(X) n'est pas engendré, en général, par son cône positif, comme l'a montré tout récemment PACHL dans [34], même pour le cas $X = \mathbb{R}$. Pour caractériser l'espace $M(X)^+ - M(X)^+$ engendré par le cône positif de M(X), il faut introduire le dual de Riesz $M_\rho(X)$ de $\mathcal{U}(X)$, c'est-à-dire l'espace des formes linéaires sur $\mathcal{U}(X)$ qui sont bornées sur les parties $\Delta(f)$, $f \in \mathcal{U}(X)$.

(4.4.3) PROPOSITION. - *On a l'égalité* $M(X)^+ - M(X)^+ = M(X) \cap M_\rho(X)$.

Preuve. - Il suffit de montrer que, pour toute $m \in M(X) \cap M_\rho(X)$, l'élément m^+, a priori dans $M^{\infty}(X)$, est en réalité dans M(X). Or $m^+ \in M_\rho(X)$ et par suite m^+ intègre toutes les fonctions $f \in \mathcal{U}(X)$. On peut alors reprendre les preuves de (4.4.1) et (4.4.2), ce qui suffit.

On sait que l'espace X est total dans chacun des espaces M(X) et $M^{\infty}(X)$, ce qui provient du théorème de Hahn-Banach et de la connaissance des duals $M(X)' = \mathcal{U}(X)$ et $M^{\infty}(X)' = \mathcal{U}^{\infty}(X)$. Autrement dit l'espace E(X) des mesures moléculaires est dense dans M(X) et dans $M^{\infty}(X)$. Le théorème de Hahn-Banach fournit de même :

(4.4.4) PROPOSITION. - *Le cône positif* $E(X)^{+}$ *de* E(X) *est dense dans chacun des cônes positifs* $M(X)^{+}$ *et* $M^{\infty}(X)^{+}$.

A plus forte raison l'ensemble des mesures de Radon positives sur $\widehat{pX}$, à support (compact) contenu dans X, est dense dans chacun des cônes positifs $M(X)^{+}$ et $M^{\infty}(X)^{+}$. Et à ce sujet on a :

(4.4.5) LEMME. - *Soit* $(m_i)_{i \in I}$ *une suite généralisée de Cauchy dans l'espace* $M^{\infty}(X)^{+}$, *formée de mesures de Radon sur* $\widehat{pX}$, *à supports compacts* $K_i \subset X$. *Alors, pour tout* $\varepsilon > 0$, *tout* $\delta > 0$ *et tout écart* $d \in \mu$, *il existe un indice* i_o *tel que* $m_i[X \setminus B_d(K_{i_o},\delta)] \leqslant \varepsilon$ *pour tout* $i \geqslant i_o$.

Preuve. - En posant $f_i = \delta \wedge d(.,K_i)$ on obtient une suite généralisée $(f_i) = H$, élément de $\mathcal{H}^{\infty}$. Il existe donc $i_o \in I$ tel que $|(m_i - m_j)(f_k)| \leqslant \delta\varepsilon$ pour tous $i,j \geqslant i_o$ et tout indice k. Avec $j = k = i_o$, on obtient $m_j(f_k) = 0$, d'où $m_i(f_{i_o}) \leqslant \delta\varepsilon$. On termine en remarquant que $f_{i_o}(x) = \delta$ pour tout $x \notin B_d(K_{i_o},\delta)$.

(4.4.6) THEOREME. - *Soit* (X,μ) *un espace uniforme métrisable. Pour qu'une* *forme linéaire positive* m *sur* $\mathcal{U}^\infty(X)$ *soit élément de* $M^\infty(X)^+$ *il faut et il suffit qu'elle vérifie la condition suivante :*

$$\begin{cases} \textit{Pour tout } \varepsilon>0, \textit{ il existe une partie précompacte et} \\ \textit{fermée P de X telle que l'on ait } |m(f)| \leqslant \varepsilon\|f\| \textit{ pour} \\ \textit{toute } f \in \mathcal{U}^\infty(X) \textit{ qui s'annule sur P.} \end{cases}$$

Preuve. - La condition est suffisante : montrons d'abord qu'elle entraîne la condition suivante :

$$(*) \qquad |m(f)| \leqslant \varepsilon\|f\| + m(1)\,\|f\|_P \qquad \text{pour toute } f \in \mathcal{U}^\infty(X)$$

En effet soit $k = \|f\|_P$ et soit $g = k \vee |f|$. Alors $|f| \leqslant g \leqslant 1$ et $0 \leqslant g-k \leqslant g \leqslant 1$; et $g-k$ s'annule sur P de sorte que

$$|m(f)| \leqslant m(|f|) \leqslant m(g) \leqslant \varepsilon\|g-k\| + km(1) \leqslant \varepsilon\|f\| + m(1)\,\|f\|_P$$

Alors si $(f_i) = H \in \mathscr{H}^\infty$ et si $\|f_i\| \leqslant 1$ et $f_i \to 0$, on voit que la précompacité de P implique $\|f_i\|_P \to 0$, d'où $\lim\sup |m(f_i)| \leqslant \varepsilon$ et tout est dit.

La condition est nécessaire : c'est une question plus difficile à traiter. D'après (4.4.4) il existe une suite généralisée $(m_i)_{i \in I}$ de mesures positives à supports compacts $K_i \subset X$ (et même à supports finis) telle que $m_i \to m$ dans $M^\infty(X)^+$. Utilisons (4.4.5) après avoir placé sur X une distance d définissant μ. Pour $\varepsilon>0$ fixé, on peut trouver une suite strictement croissante d'indices $i_n \in I$ tels que

$$m_i\,[X \setminus B_d(K_{i_n}, \tfrac{1}{n})] \leqslant \varepsilon\, 2^{-n} \qquad \text{pour tout } i \geqslant i_n.$$

Posons successivement

$$K'_n = \bigcup_{k \leqslant n} K_{i_k}$$

$$T_n = \bigcap_{k \leqslant n} B_d(K'_k, \tfrac{1}{k})$$

$$S_n = \bigcap_{k \leqslant n} B_d(K'_k, \tfrac{2}{k})$$

$$P = \bigcap S_n$$

On vérifie aisément que P est précompact et fermé et que $B_d(T_n, \frac{1}{n}) \subset S_n$. Montrons que la suite $K'_n \cap S_{n-1}$ est croissante ; cela résulte de l'égalité $S_n = S_{n-1} \cap B_d(K'_n, \frac{2}{n})$ qui implique $K'_n \cap S_{n-1} \subset S_n$, et de la monotonie de la suite K'_n. On en déduit $K'_n \cap S_{n-1} \subset \bigcap_{k \geqslant n} S_k = P$.

Montrons encore l'inclusion $T_n \subset B_d(P, \frac{1}{n})$: pour cela fixons $x \in T_n$; alors $x \in B_d(K'_n, \frac{1}{n})$ donc il existe $y \in K'_n$ tel que $d(x,y) < \frac{1}{n}$; d'où $y \in B_d(T_n, \frac{1}{n}) \subset S_{n-1}$ et x est élément de $B_d(K'_n \cap S_{n-1}, \frac{1}{n})$, donc a fortiori de $B_d(P, \frac{1}{n})$. De plus on a

$$m_i(X \setminus T_n) \leqslant \sum_{k=1}^{n} m_i\,[X \setminus B_d(K_{i_k}, \tfrac{1}{k})] \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tout } i \geqslant i_n.$$

Il reste à prouver que $P = P_\varepsilon$ est le précompact cherché. Fixons donc $f \in \mathcal{U}^\infty(X)$ telle que $f=0$ sur P. Pour tout $\alpha>0$, l'ensemble $U_\alpha = \{x \,;\, |f(x)| < \alpha\}$ est un voisinage ouvert de P qui contient une boule $B_d(P, \frac{1}{n})$ pour un entier convenable n, comme on peut voir en prolongeant f au complété $\hat{X}$ de X. On a donc $U_\alpha \supset T_n$ et par suite, pour tout $i \geqslant i_n$:

$$|m_i(f)| \leqslant \|f\| \; m_i(X \setminus T_n) + \alpha m_i(T_n)$$
$$\leqslant \varepsilon\|f\| + \alpha m_i(1)$$

ce qui fournit à la limite l'inégalité $|m(f)| \leqslant \varepsilon\|f\| + \alpha m(1)$, et donne la condition puisque α est arbitraire.

(4.4.7) <u>COROLLAIRE 1</u>. - *Soit* (X,μ) *un espace uniforme métrisable. Alors* $M^\infty(X)$ *coïncide avec l'espace* $M_p^\infty(X)$ *des formes linéaires sur* $\mathcal{U}^\infty(X)$ *continues sur la boule unité* $\Delta(1)$ *pour la topologie de la convergence précompacte sur* X.

Preuve. - Si m est élément de $M^\infty(X)$, on peut écrire $m = m^+ - m^-$, avec m^+, $m^- \in M^\infty(X)^+$; et si $(f_i) \subset \Delta(1)$ et $f_i \to 0$ uniformément sur les précompacts de X alors $m^+(f_i) \to 0$ et $m^-(f_i) \to 0$ d'après le théorème. Réciproquement $M_p^\infty(X)$ est contenu dans $M^\infty(X)$ quel que soit l'espace uniforme (X,μ).

(4.4.8) <u>COROLLAIRE 2</u>. - *Soit* (X,μ) *un espace uniforme métrisable. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) (X,μ) *est complet ;*

b) $M_t(X) = M_\tau(X) = M^\infty(X)$

c) $M^\infty(X) \subset M_\sigma(X)$.

Preuve. - Dans le cas général on a $M_t(X) \subset M_\tau(X) \subset M^\infty(X)$ d'après (4.4.2). D'où a) => b) avec (4.4.7). Enfin c) => a), car pour un espace uniforme métrisable les points de $\hat{X} \setminus X$ n'appartiennent pas à $M_\sigma(X)$.

(4.4.9) COROLLAIRE 3. - *Pour tout espace uniforme* (X,μ) *on a*

$$M^\infty(X) = \lim_{\substack{\longleftarrow \\ d \in \mu}} \text{proj}\; M_t(\widehat{X_d})$$

Preuve. - Il suffit de voir que $M^\infty(X_d) = M^\infty(\widehat{X_d}) = M_t(\widehat{X_d})$ et d'appliquer (4.3.3).

Les résultats qui suivent sont maintenant relatifs aux espaces métrisables et complets. Ils permettent de dégager une notion de support dans X pour toute $m \in M^\infty(X)^+$.

(4.4.10) PROPOSITION. - *Soit* (X,μ) *un espace uniforme métrisable et complet. Pour toute* $m \in M^\infty(X)^+$ *il existe un fermé* $S(m)$ *de* X *tel que l'on ait pour toute* $f \in \mathcal{U}^\infty(X)^+$

$$m(f) = 0 \iff f=0 \quad \text{sur } S(m)$$

Preuve. - On remarque que $M^\infty(X)^+ = M_\tau(X)^+ = M_\tau(X,\theta\mu)^+$, ce qui permet d'appliquer les résultats de VARADARAJAN [42]. On peut aussi démontrer que m appartient à $M_\tau(X)^+$ si et seulement si la mesure associée λ_m sur la tribu de Baire $\Sigma(X)$ (voir début de (4.1)) est τ-régulière et retrouver ainsi le résultat cité de Varadarajan.

La liaison avec le support $K = \mathrm{supp}(\check{m})$ de la mesure de Radon $\check{m}$ sur $\widehat{pX}$ associée à m est claire :

(4.4.11) PROPOSITION. - *Soit* (X,μ) *un espace uniforme métrisable et complet. Pour toute* $m \in M^{\infty}(X)^{+}$ *on a l'égalité*

$$K = \mathrm{supp}(\check{m}) = \overline{S(m)}^{p}$$

où $\overline{S(m)}^{p}$ *est l'adhérence de* $S(m)$ *dans l'espace* $\widehat{pX}$.

Preuve. - On a $K \subset \overline{S(m)}^{p}$ car pour toute $f \in \mathcal{U}^{\infty}(X)$ la condition $f=0$ sur $S(m)$ équivaut à la condition $\overline{f}=0$ sur $\overline{S(m)}^{p}$. Réciproquement supposons $u \in \overline{S(m)}^{p} \setminus K$; alors il existe $\overline{f} \in C(\widehat{pX})^{+}$ telle que $\overline{f}(u) = 1$ et $\overline{f}=0$ sur K ; la fonction $f = \overline{f}|_{X}$ est élément de $\mathcal{U}^{\infty}(X)^{+}$ et $\mathrm{Coz}(f) \cap S(m)$ est non vide, d'où $m(f) = \check{m}(\overline{f}) \neq 0$, ce qui est absurde.

Remarque. - La proposition (4.4.10) est manifestement fausse lorsque l'espace métrisable (X,μ) n'est pas complet. Il suffit de prendre pour m un point $u \in \hat{X} \setminus X$, pour lequel aucun fermé F de X ne peut jouer le rôle de $S(m)$.

Nous avons rencontré en (4.4.5) les éléments $m \in M^{\infty}(X)^{+}$ qui sont des mesures sur $\widehat{pX}$, à support $K = \mathrm{supp}\ \check{m}$ contenu dans X ; lorsque X est métrisable et complet on obtient donc des éléments m tels que $S(m)$ soit compact. Il importe d'en donner une caractérisation ; celle-ci peut se faire à l'aide des fonctions f qui sont (ULUC) sur (X,μ). On rappelle que f est dite (ULUC) sur un espace uniforme quelconque (X,μ)

s'il existe un écart $d \in \mu$ et un réel $\alpha>0$ tels que f soit uniformément continue, pour μ, sur toute boule $B_d(x,\alpha)$, $x \in X$. On a alors :

(4.4.12) THEOREME. - *Soit* (X,μ) *un espace uniforme métrisable et complet. Pour toute* $m \in M^\infty(X)^+$ *les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) $S(m)$ *est compact ;*

b) toute $f \in \mathscr{C}(X)$ *est* λ_m*-intégrable ;*

b') m admet un prolongement linéaire unique, positif et σ-régulier, sur $\mathscr{C}(X)$ *;*

c) toute fonction (ULUC) f est λ_m*-intégrable ;*

c') m admet un prolongement linéaire unique, positif et σ-régulier, sur l'espace des fonctions (ULUC) sur (X,μ).

d) toute fonction f qui est (ULUC) et uniformément localement bornée est λ_m*-intégrable.*

Preuve :

a) => b) : si $S(m) = K$ est compact dans X, alors $\mathscr{C}(X)\big|_K = \mathscr{U}^\infty(X)\big|_K$, ce qui permet le prolongement de m à $\mathscr{C}(X)$.

b) => c) => d), b) <=> b') et c) <=> c') : évident.

d) => a) : il suffit de montrer que $S(m)$ est précompact puisqu'il est fermé et que X est complet. Sinon il existe une suite (x_n) dans $S(m)$, et un nombre $\alpha>0$, tels que les boules $B_d(x_n,\alpha)$ (associées à une distance d sur X définissant μ) soient disjointes. Fixons une suite (h_n) dans $\mathscr{U}^\infty(X)$ telle que $0 \leq h_n \leq 1$, $m(h_n) > 0$ et $\mathrm{Coz}(h_n) \subset B_d(x_n, \frac{\alpha}{4})$, ce qui est possible. Alors la fonction $h = \Sigma\, h_n/m(h_n)$ vérifie les conditions de d) et

$$\int h \, d\lambda_m \geqslant \sum_{n=1}^{k} m\left[\frac{h_n}{m(h_n)}\right] = k$$

pour tout entier k, ce qui est absurde.

4.5 L'EGALITE $M(X) = \check{M}(X)$.

Pour le cas d'un espace topologique complètement régulier T, on sait, avec [26], que l'espace M(T) s'identifie à l'espace des mesures de Radon sur le compactifié de Stone-Čech βT dont le support est contenu dans le c-replété θT de T. Si l'on traite T comme un espace uniforme fin, alors θT n'est autre que le complété de T, de sorte qu'on peut poser le problème de savoir pour quels espaces uniformes X l'espace M(X) s'identifie à l'espace $\check{M}(X)$ des mesures de Radon m sur le compactifié de Samuel $\widehat{pX}$ dont le support supp(m) est contenu dans le complété $\hat{X}$. Il est clair que pour ces espaces uniformes X, l'espace M(X) est nécessairement engendré par son cône positif ; ainsi par exemple $M(R) \neq \check{M}(\mathbb{R})$ d'après [34]. Dans le même genre d'idées on a plus généralement :

(4.5.1) PROPOSITION. - *Soit* $S = (x_n)_{n \geqslant 1}$ *une suite bornée de l'espace uniforme* (X,μ).

a) La mesure $m = \Sigma\, 2^{-n}\, \delta_{x_n}$ *est élément de* M(X).

b) Si S *n'est pas précompacte dans* X*, le support de* m *n'est pas contenu dans* $\hat{X}$.

Preuve :

a) Puisque S est bornée, il est immédiat que m opère sur $\mathcal{U}(X)$. Fixons

$H \in \mathscr{H}$ et soit (f_i) une suite généralisée de H qui tend simplement vers zéro ; on peut supposer $|f_i(x_n)| \leqslant 1$ pour tout i et tout n. Alors $m(f_i) \to 0$, comme on voit par les majorations

$$|m(f_i)| \leqslant \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} |f_i(x_n)| + 2^{-N}$$

b) L'adhérence $\overline{S}^p$ de S dans $\widehat{pX}$ est exactement le support $\mathrm{supp}(\check{m})$. La condition $\mathrm{supp}\ \check{m} \subset \hat{X}$ signifie donc que S est relativement compact dans $\hat{X}$, donc que S est précompact dans X.

(4.5.2) <u>THEOREME</u>. - *Si* $M(X) = \check{M}(X)$ *alors les bornés de l'espace uniforme* (X,μ) *sont précompacts.*

Preuve. - Il suffit de remarquer que pour qu'une partie B de X soit bornée (resp. précompacte) il faut et il suffit que toute suite de B soit bornée (resp. précompacte, d'après le lemme classique de Weil). On applique ensuite (4.5.1).

Remarque. - La condition obtenue pour que $M(X) = \check{M}(X)$ est nécessaire mais non suffisante. L'espace uniforme $\mathbb{R}$, avec sa structure uniforme habituelle, est tel que tout borné (au sens actuel) est relativement compact et cependant on a $M(\mathbb{R}) \neq \check{M}(\mathbb{R})$.

(4.5.3) <u>COROLLAIRE</u>. - *Pour tout espace uniforme* (X,μ) *non précompact et tel que* $\mathcal{U}(X) = \mathcal{U}^{\infty}(X)$, *on a* $M(X) \neq \check{M}(X)$.

Introduisons maintenant la définition :

(4.5.4) DEFINITION. - *Un espace uniforme* (X,μ) *est dit de type (B), ou* B-*espace, lorsque* $M(X) = \check{M}(X)$.

Il est clair que si (X,μ) est de type (B), l'espace $M(X)$ est engendré par son cône positif.

Nous n'avons pu obtenir une caractérisation des espaces de type (B) et nous reportons en (4.5.10) pour en donner des exemples assez généraux (mis à part le cas trivial des espaces fins). Auparavant introduisons encore :

(4.5.5) DEFINITION. - *Soit* (X,μ) *un espace uniforme. On dit qu'une partie* H *de* $\mathcal{U}(X,\mu)$ *est discrète, lorsque la famille* $(\mathrm{Coz}(f))_{f \in H}$ *est discrète dans l'espace* (X,μ) *(ce qui signifie, rappelons le, qu'il existe un écart* $d \in \mu$ *et un réel* $\alpha>0$ *tels que la famille des boules* $B_d[\mathrm{Coz}(f),\alpha]$ *soit disjointe).*

On dit que H *est dominée par une fonction* $h \in \mathcal{U}(X)$ *(ou en abrégé que* H *est dominée) lorsque* $|f| \leqslant h$ *pour toute* $f \in H$.

Enfin on dit que (X,μ) *est de type (D) lorsque toute partie dénombrable discrète* H *de* $\mathcal{U}^{\infty}(X)$ *est dominée.*

L'intérêt des espaces de type (D) provient principalement de la proposition suivante :

(4.5.6) PROPOSITION. - *Soit* (X,μ) *un espace de type (D). Pour tout élément* $m \in M(X)^{+}$, *on a* $\mathrm{supp}(\check{m}) \subset \hat{X}$.

Preuve. - Raisonnons par l'absurde en supposant $K = \mathrm{supp}(m) \not\subset \hat{X}$. D'après (4.3.5) il existe donc un écart $d \in \mu$ tel que $K_d = \mathrm{supp}(\check{m}_d) \not\subset \hat{X}_d$. Cela revient à dire que $S(m_d)$ n'est pas précompact dans $\hat{X}_d$, de sorte qu'il existe une suite discrète (f_n) de $\mathcal{U}^\infty(\hat{X}_d)^+$ telle que $\mathrm{Coz}(f_n) \cap K_d \neq \emptyset$ et $m_d(f_n) = 1$ pour tout n. Suivant (4.3) désignons par $\widehat{h_d} : X \to \hat{X}_d$ l'application canonique ; alors la suite $(f_n \circ \widehat{h_d})$ est discrète dans (X,μ). On peut donc trouver une fonction $g \in \mathcal{U}(X)^+$ telle que $f_n \circ \hat{h}_d \leqslant g$ pour tout n. Fixons maintenant un écart $e \in \mu$ tel que $d \leqslant e$ et $d_g \leqslant e$; alors g se factorise à travers $\hat{X}_e$ selon $g = \hat{g}_e \circ \hat{h}_e$. La suite $(\mathrm{Coz}(f_n))$ étant discrète, on voit encore que pour tout entier k on a $\sum\limits_{n \leqslant k} f_n = \sup\limits_{n \leqslant k} f_n$, d'où l'on déduit :

$$m_e(\hat{g}_e) = m_d(\hat{g}_e \circ \hat{h}_{ed}) = m(g) \geqslant \sum_{k \geqslant n} m_d(f_n) = k$$

et par suite $m(g) = +\infty$, ce qui est absurde.

(4.5.7) <u>PROPOSITION</u>. - *Les espaces uniformes qui suivent sont tous de type (D) :*

a) les espaces de type (A) ;

b) les espaces faibles de type (C) ;

c) les espaces simplement fins ;

d) les espaces localement fins ;

e) les espaces δ-localement fins ;

f) les espaces de type (UP) de (2.7).

Preuve. - D'après les résultats du chapitre 2 les espaces vérifiant a), b), c) ou d) sont tous de type (UP). Il reste donc à prouver les assertions e) et f). L'assertion e) est alors conséquence du fait que, pour toute suite (f_n) discrète, la fonction Σf_n est élément de $\mathcal{U}(X)$. Prouvons f) : Soit (f_n) une suite discrète de $\mathcal{U}^\infty(X)$; posons $Y = \cup \, Coz(f_n)$ et définissons la fonction h sur Y par $h(x) = \|f_n\|$ pour $x \in Coz(f_n)$; alors h est élément de $\mathcal{U}(Y , \mu|Y)$ de sorte qu'il existe une fonction $g \in \mathcal{U}(X)$ telle que $h = g|Y$. Et g vérifie bien les conditions $|f_n| \leqslant g$ pour tout n, autrement dit elle domine la suite discrète (f_n).

Remarque. - On ne peut toutefois pas conclure que les espaces de type (D) mentionnés ci-dessus sont de type (B). Pour cela il faudrait savoir que M(X) est engendré par son cône positif $M(X)^+$, propriété liée d'après (4.4.3) à l'espace $M_\rho(X)$ et non satisfaite en général. L'espace $M_\rho(X)$ est étudié par CHOQUET [8] et BERRUYER-IVOL [3] dans le cas topologique (espaces uniformes fins) et par PUPIER [35] et AZZAM [1] dans le cas général.

Un autre espace de formes linéaires sur $\mathcal{U}(X)$ est assez bien lié à l'espace $M_\rho(X)$, à savoir l'espace $M_\cup(X)$ des formes linéaires σ-régulières m, i.e. telles que $m(f_n) \to 0$ pour toute suite (f_n) de $\mathcal{U}(X)$ telle que $f_n \downarrow 0$. Dans le cas topologique on sait que $M_\cup(X) = M_\rho(X)$ d'après [3]. Dans le cas uniforme le résultat le plus général concernant ces espaces nous paraît être celui de AZZAM et PUPIER ([1] et [35]) : on a $M_\cup(X) = M_\rho(X) = \check{M}(\sigma X)$ pour les espaces uniformes X suffisamment fins tels que $\delta(\sigma X) = \widehat{\sigma X}$. Comme conséquence immédiate on en déduit :

(4.5.8) PROPOSITION. - *Pour tout espace uniforme* (X,μ) *de type (A)* *on a* $M_{\cup}(X) = M_{\rho}(X) = \check{M}(\sigma X)$.

Preuve. - On peut bien entendu remplacer μ par n'importe quelle autre structure uniforme compatible avec la pseudo-dualité $(X, \mathcal{U}(X))$ sans changer le résultat. On choisit de prendre la structure uniforme $\mu_\circ$ de (4.1.3), qui est la structure m-fine associée à $\sigma\mu$. Or $(X,\mu_\circ)$ est suffisamment fin (4.1.8) et, X étant de type (A), $\delta(\sigma X) = \widehat{\sigma X}$, ce qui ramène au résultat mentionné ci-dessus.

On peut d'ailleurs donner une démonstration directe, toujours en utilisant la structure uniforme $\mu_\circ$.

(4.5.9) PROPOSITION. - *Pour tout espace uniforme* (X,μ) *de type (A)* *on a* $M_{\cup}(X) = M_{\rho}(X) = M(X,\mu_\circ)$.

Preuve. - On sait déjà que $\widehat{\sigma X} = \widehat{\mu_\circ X} = \widehat{m(\sigma X)}$, où les égalités sont ensemblistes, et que $M_{\rho}(X) = \check{M}(\sigma X) = \check{M}(\mu_\circ X) \subset M(\mu_\circ X) = M(X,\mu_\circ)$. Il suffit donc de prouver que $M(X,\mu_\circ)$ est engendré par son cône positif, autrement dit que chaque $m \in M(X,\mu_\circ)$ est borné sur les disques $\Delta(f)$ de $\mathcal{U}(X)$. Supposons le contraire : alors il existe $f \in \mathcal{U}(X)^+$ et une suite (f_n) dans $\mathcal{U}(X)$ telles que $|f_n| \leqslant f$ et $m(f_n) \geqslant n^4$ pour tout $n \geqslant 1$. La fonction $g = \Sigma f_n/n^4$ est élément de $\mathcal{U}(X)$, et c'est une fonction (DLUC) sur (X,μ). La suite (f_n/n^2) est (DLUE) sur $(X,\mu_\circ)$, donc d'après (4.1.7), l'ensemble $H = (f_n/n^2)$ est élément de $\mathcal{H}(X,\mu_\circ)$ et ainsi

$$m(g) = \lim_{k \to \infty} \sum_{n \leqslant k} \frac{m(f_n)}{n^4} = +\infty$$

ce qui fournit la contradiction. En résumé on a bien $M(X,\mu_\circ) = M_\rho(X)$ et $M(X,\mu_\circ)$ est engendré par son cône positif.

L'intérêt de la proposition réside dans l'approximation qu'elle donne des éléments de $M_\rho(X)$ par des mesures moléculaires, uniformément sur les parties H de $\mathscr{H}(X,\mu_\circ) = \bigcup_{d \in \mu_\circ} \mathscr{H}(X,\theta\mu_d)$. Elle est d'ailleurs comparables au théorème (3.2.2) de [3].

Remarque. - Si $e\mu$ est suffisamment fine [35] le même raisonnement montre que $M(X,\mu) \subset M_\rho(X)$. Ainsi tout espace localement fin est de type (B).

(4.5.10) <u>COROLLAIRE 1</u>. - *Soit* (X,μ) *un espace de type (A) tel que* μ *soit plus fine que* $\mu_\circ$. *Alors* $M(X)$ *est engendré par son cône positif et* (X,μ) *est de type* (B).

Preuve. - Déjà $M(X)$ est engendré par son cône positif et (X,μ) est de type (D), d'où la conclusion avec (4.5.6).

(4.5.11) <u>COROLLAIRE 2</u>. - *Tout espace uniforme* M*-fin est de type (B).*

(4.5.12) <u>COROLLAIRE 3</u>. - *Soit* (X,μ) *un espace uniforme (UC) (i.e. tel que* $\mathscr{U}(X) = \mathscr{C}(X)$*). Alors* $M_\rho(X) = M(X,e\theta\mu)$.

Illustrons maintenant ces questions par l'examen de quelques exemples.

Exemple 1. - Soit (X,Σ) un espace mesurable, où Σ est une tribu sur l'ensemble X. Désignons par $ca(\Sigma)$ l'espace des mesures signées sur Σ et par $A = \mathcal{L}(X,\Sigma)$ l'espace des fonctions réelles partout définies et Σ-mesurables. Introduisons le sous-espace $\lambda(\Sigma)$ de $ca(\Sigma)$ formé des mesures signées μ qui intègrent toutes les fonctions de A. On a alors :

(4.5.13) PROPOSITION :

a) L'espace uniforme (X,σ_A) *est ultra-uniforme* [13].

b) $\mathcal{U}(X,\sigma_A) = A$.

c) $M_\sigma(X,\sigma_A) = M^\infty(X,m(\sigma_A)) = ca(\Sigma)$.

d) $M_\rho(X,\sigma_A) = M_\upsilon(X,\sigma_A) = \check{M}(X,\sigma_A) = M(X,m(\sigma_A)) = \lambda(\Sigma)$.

Preuve :

a) Pour toute $f \in A^+$ et tout $\varepsilon>0$, posons pour $n \geqslant 0$:

$$B_n = \{x \in X \ ; \ n\varepsilon \leqslant f(x) < (n+1)\varepsilon\}$$

On obtient une partition (B_n) de X, formée d'éléments de Σ, telle que la fonction $g = \sum_{n \geqslant 0} n \, 1_{B_n}$ soit élément de A. On en déduit que (B_n) est un recouvrement uniforme pour σ_A, ce qui prouve que (X,σ_A) est ultra-uniforme.

b) C'est une conséquence du fait que A est une algèbre sur X (2.3.4).

c) L'égalité $\Sigma(X,\sigma_A) = \Sigma$ implique l'égalité $M_\sigma(X,\sigma_A) = ca(\Sigma)$; le reste est garanti par (4.1.10).

d) On a $\sigma_A = m(\sigma_A)$ puisque tout recouvrement dénombrable de X formé d'éléments de $Coz(X,\sigma_A) = \Sigma$, possède un raffinement dénombrable qui est une partition de X dans Σ. Les égalités sont donc conséquences de (4.5.8) et (4.5.9) et du fait que $M_\sigma(X,\sigma_A) = M^\infty(X,\sigma_A) = ca(\Sigma)$.

(4.5.14) COROLLAIRE. - *Toute mesure* $\mu \in ca(\Sigma)$ *est uniformément approchée sur les parties* $H \in \mathscr{H}^\infty(X,\mu_\circ)$ *par des mesures moléculaires. Pour que* μ *appartienne à* $\lambda(\Sigma)$, *il faut et il suffit qu'elle soit uniformément approchée par des mesures moléculaires sur les parties* $H \in \mathscr{H}(X,\mu_\circ)$. *Enfin* $\mu_\circ = m(\sigma_A) = \sigma_A$.

On remarquera qu'une mesure $\mu \in \lambda(\Sigma)$, même positive, peut ne pas être moléculaire. Prenons pour X un ensemble infini non dénombrable et pour Σ la tribu engendrée par les parties finies (voir l'exemple donné après (4.1.2)). Alors les fonctions $f \in A$ sont celles qui sont constantes en dehors d'une partie dénombrable de X ; en définissant $\mu(f)$ par la valeur de cette constante on obtient une mesure positive (et même un caractère sur l'algèbre A) qui n'est pas moléculaire.

Exemple 2. - Il est bien connu que les espaces complètement réguliers pseudocompacts jouent un rôle particulier, et important, dans l'étude "fonctionnelle" des espaces topologiques. Nous allons voir ici que pour les espaces uniformes le même rôle est joué par les espaces de type (A) précompacts. Plus précisément :

(4.5.15) PROPOSITION. - *Soit* (X,μ) *un espace uniforme. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) Toute forme linéaire positive m *sur* $\mathcal{U}^\infty(X)$ *est* σ*-régulière ;*

b) X *est* G_δ*-dense dans* $\widehat{pX}$ *;*

c) (X,μ) *est un espace de type (A) précompact ;*

d) de tout recouvrement dénombrable de X*, formé d'éléments de* $\mathrm{Coz}(X,\mu)$*, on peut extraire un sous-recouvrement fini.*

e) toute suite régulière de (X,μ) *est stationnaire ;*

f) le théorème de Dini est vérifié : autrement dit pour toute suite (f_n) *de* $\mathcal{U}(X)^+$ *la condition* $f_n \downarrow 0$ *implique la condition* $\|f_n\|_X \downarrow 0$ *;*

g) une partie H *de* $\mathcal{U}^\infty(X)$ *est relativement compacte (pour la topologie de la norme) si et seulement si elle est (DLUE) (théorème d'Ascoli).*

Preuve. - Elle peut se faire selon le diagramme logique

$$\begin{tikzcd}
& & g) \arrow[dd, Leftrightarrow] & \\
& a) \arrow[dd, Rightarrow] & & d) \arrow[dd, Rightarrow] \\
f) \arrow[ur, Rightarrow] & & c) \arrow[ul, Rightarrow] \arrow[ur, Rightarrow] & \\
& b) \arrow[ul, Rightarrow] \arrow[ur, Rightarrow] & & e) \arrow[ul, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

a) $\Rightarrow$ b) : Tout élément $u \in \widehat{pX}$ est une forme linéaire multiplicative unitaire sur $\mathcal{U}^\infty(X)$. Si c'est un élément de $M_\sigma(X)$, il appartient à $\mathrm{Mod}_\delta(X,p\mu)$ et ainsi $\widehat{pX} = \mathrm{Mod}_\delta(X,p\mu)$ d'où la G_δ-densité de X dans $\widehat{pX}$.

b) $\Rightarrow$ c) : D'après b) toute fonction $f \in \mathcal{U}^\infty(X)$ atteint ses bornes sur X ; donc $\mathcal{U}^\infty(X)$ est stable par inverse et c'est alors une algèbre sur X. Ainsi (X,μ) est de type (A) et borné dans lui-même, donc précompact d'après (2.8.4).

c) => a) : Soit m une forme linéaire positive sur $\mathcal{U}^{\infty}(X)$. Alors m est élément de $\mathrm{Rad}(\widehat{pX})$. Si (f_n) est une suite de $\mathcal{U}^{\infty}(X)$ telle que $f_n \downarrow 0$, alors $f_n^p \downarrow 0$ puisque X est G_δ-dense dans $\widehat{pX}$, donc $m(f_n) \downarrow 0$, ce qui fournit a).

b) => f) : C'est une conséquence du fait que d'après b) on a l'égalité $\mathrm{Mod}_\delta(X,p\mu) = \widehat{pX}$ et du fait que $f_n \downarrow 0$ sur X si et seulement si $f_n \downarrow 0$ sur $\mathrm{Mod}_\delta(X)$.

f) => a) : Evident.

c) => d) : Tout recouvrement dénombrable de (X,μ) formé d'éléments de $\mathrm{Coz}(X,\mu)$ appartient à $\mu_\circ$. Or $\mu_\circ$ est compatible avec la pseudo-dualité $(X,\mathcal{U}(X))$ et est précompacte d'après c), ce qui fournit d).

d) => e) : Evident.

e) => c) : Toute $f \in \mathcal{U}(X)$ est bornée sur X puisque la suite $U_n = \{x \in X \ ; \ |f(x)| < n\}$ est régulière, donc stationnaire d'après e). De plus si Z(f) est vide, alors la suite $V_n = \{x \in X \ ; \ |f(x)| > \frac{1}{n}\}$ est aussi régulière, donc stationnaire, ce qui montre que $|f|$ possède une borne inférieure strictement positive. Cela suffit pour conclure que toute $f \in \mathcal{U}^{\infty}(X)$ atteint ses bornes.

c) => g) : Toute partie H de $\mathcal{U}^{\infty}(X)$ qui est (DLUE) est (ULUE) sur l'espace $(X,\mu_\circ) = (X,p\mu)$. Ainsi H est élément de $\mathcal{H}(X,p\mu)$, de sorte que sur H la topologie de la convergence simple sur X coïncide avec celle de la convergence uniforme (X étant précompact). Donc H est relativement compact dans l'espace de Banach $\mathcal{U}^{\infty}(X)$. Réciproquement il est clair qu'une partie compacte de $\mathcal{U}^{\infty}(X)$ est (DLUE).

g) => c) : Toute $f \in \mathcal{U}(X)$ est (DLUC) et si $Z(f)$ est vide alors $1/f$ est aussi (DLUC). Donc $\mathcal{U}(X) = \mathcal{U}^{\infty}(X)$ est stable par inverse et ainsi (X,μ) est de type (A), et forcément précompact d'après (2.8.4).

Les espaces uniformes précompacts de type (A) constituent la "bonne" généralisation des espaces pseudocompacts. La proposition précédente contient d'ailleurs une généralisation d'un théorème de GLICKSBERG [20], ainsi qu'une caractérisation de la pseudocompacité (dans le cas topologique) fournie par d), comparable à celle de la semi-compacité.

4.6 UNE TOPOLOGIE LIMITE INDUCTIVE SUR M(X).

Ce paragraphe a pour but l'étude des relations entre $M^{\infty}(Y)$ et $M^{\infty}(X)$ d'une part, et M(Y) et M(X) d'autre part, lorsque Y est un sous-espace uniforme de X. On verra que $M^{\infty}(Y)$ s'identifie à un sous-espace topologique de $M^{\infty}(X)$ mais que, en général, M(Y) possède une topologie strictement plus fine que celle induite par M(X). Toutefois lorsque Y=K est un compact de X, l'espace M(K) est sous-espace topologique de M(X) et cette remarque conduit à placer sur M(X) la topologie limite inductive de M(K), particulièrement lorsque X est espace uniforme de type (B).

(4.6.1) THEOREME. - *Pour tout sous-espace* Y *de l'espace uniforme* (X,μ) *on a* $\mathscr{H}^{\infty}(Y) = \mathscr{H}^{\infty}(X)|Y$.

Preuve. - Il suffit de voir que toute partie $H \in \mathscr{H}^{\infty}(Y)$ est formée des restrictions à Y des fonctions éléments d'une partie $H' \in \mathscr{H}^{\infty}(X)$. L'écart d_H est une fonction bornée et uniformément continue sur l'espace Y^2, et l'espace Y^2 est sous-espace uniforme de X^2. Il suit de là, par le théorème de prolongement de Katětov, qu'il existe une fonction $g \in \mathscr{U}^{\infty}(X^2)$ prolongeant l'écart d_H. Pour tout $y \in Y$ et toute $f \in H$, désignons par $h_{y,f}$ la fonction $x \to f(y) - g(x,y)$. Alors la famille $(h_{y,f})$ obtenue est uniformément bornée. Fixons $f \in H$ et associons lui la fonction $f' = \operatorname{Sup}_{y \in Y} h_{y,f}$. Alors pour tout $x \in Y$ on a

$$f'(x) = \operatorname{Sup}_{y \in Y} [f(y) - d_H(x,y)] = f(x)$$

de sorte que f' prolonge f. Désignons enfin par H' l'ensemble des fonctions f', quand f décrit H et prouvons pour terminer que H' est uniformément équicontinue. Or pour $x \in X$ et $z \in X$ on a

$$|f'(x) - f'(z)| \leqslant \operatorname{Sup}_{y \in Y} |g(x,y) - g(z,y)|$$

et tout provient de la continuité uniforme de g.

En conséquence on a :

(4.6.2) THEOREME. - *Pour tout sous-espace* Y *de l'espace uniforme* (X,μ), *l'espace* $M^{\infty}(Y)$ *s'identifie topologiquement à un sous-espace de* $M^{\infty}(X)$.

Preuve. - L'injection canonique $Y \to X$ fournit par bitransposition une application linéaire continue $M^\infty(Y) \to M^\infty(X)$, qui associe à chaque $m \in M^\infty(Y)$, l'élément $m' \in M^\infty(X)$, défini par $m'(f') = m(f)$, où $f = f'|Y$. Comme l'application de restriction $f' \to f$ est une surjection de $\mathcal{U}^\infty(X)$ sur $\mathcal{U}^\infty(Y)$, on voit que l'application $m \to m'$ est injective. Enfin si $m_i' \to 0$ dans $M^\infty(X)$, alors $m_i'(f') \to 0$, uniformément sur les parties $H' \in \mathscr{H}^\infty(X)$, ce qui signifie, avec (4.6.1), que $m_i(f) \to 0$ uniformément sur les parties $H \in \mathscr{H}^\infty(Y)$, autrement dit que $m_i \to 0$ dans $M^\infty(Y)$. Ainsi l'application $m \to m'$ est un isomorphisme topologique de $M^\infty(Y)$ sur son image, ce qui permet d'identifier $M^\infty(Y)$ à un sous-espace topologique de $M^\infty(X)$.

Pour le cas des espaces $M(X)$ on a seulement :

(4.6.3) PROPOSITION. - *Pour tout sous-espace* Y *de l'espace uniforme* (X,μ), *l'application* $m \to m'$ *de* $M(Y)$ *dans* $M(X)$ *est une injection linéaire continue. Elle permet d'identifier (mais non topologiquement) l'espace* $M(Y)$ *à un sous-espace vectoriel de* $M(X)$.

Preuve. - Il suffit de voir que l'application $m \to m'$ est injective. Or si $m'=0$ dans $M(X)$, alors $m'=0$ aussi dans $M^\infty(X)$, donc $m=0$ dans $M^\infty(Y)$ d'après (6.4.2), et $m=0$ dans $M(Y)$.

Remarque. - Comme en général on a $\mathscr{H}(Y) \neq \mathscr{H}(X)|Y$, et même $\mathcal{U}(Y) \neq \mathcal{U}(X)|Y$, l'injection $m \to m'$ n'est pas un isomorphisme topologique. On a toutefois :

(4.6.4) THEOREME. - *Pour tout compact* K *de* X, *l'espace* $M(K) = M^{\infty}(K)$ *s'identifie topologiquement à un sous-espace de* M(X).

Preuve. - Cela résulte de (4.6.1) et de l'égalité $\mathscr{H}(K) = \mathscr{H}^{\infty}(K)$.

Le théorème donne donc un certain intérêt aux espaces uniformes de type (B) puisqu'alors tout élément $m \in M(X)$ est à support compact contenu dans $\hat{X}$. A ce sujet on a déjà :

(4.6.5) PROPOSITION. - *La classe des espaces de type (B) est stable par passage aux sous-espaces.*

Preuve. - Soit (X,μ) de type (B). Puisque $M(X) = M(\hat{X})$, on peut supposer X complet et ne s'intéresser qu'aux sous-espaces fermés Y de X. Sous ces conditions fixons donc un élément $m \in M(Y)$, lu m' dans M(X) d'après (4.6.3). L'espace $\widehat{pY}$ s'identifie à l'adhérence $\overline{Y}^{p}$ de Y dans l'espace $\widehat{pX}$, et alors $\check{m}$ s'identifie à la restriction à $\widehat{pY}$ de la mesure $(m')^{\vee}$. D'où $\operatorname{Supp} \check{m} = \operatorname{Supp}(m')^{\vee} \cap \widehat{pY}$. Mais $\operatorname{Supp}(m')^{\vee}$ est un compact de X, de sorte que $\operatorname{Supp} \check{m}$ est un compact de $X \cap \widehat{pY} = Y$ et tout est dit.

Revenons au théorème (4.6.4). Lorsque (X,μ) est un espace quelconque, on voit que les espaces M(K), K compact de X, forment un système filtrant croissant de sous-espaces topologiques de M(X), dont la réunion n'est autre que l'espace des mesures à support compact contenu dans X. Lorsque X est complet on a donc $\check{M}(X) = \cup M(K)$, et lorsque X est à la fois complet et de type (B), on a $M(X) = \cup M(K)$. Cette situation est intéressante car elle permet de placer sur $M(X)$ la topologie, notée ℓ, limite inductive (localement convexe) du système filtrant croissant $M(K)$

$$(M(X),\ell) = \lim_{K} \operatorname{ind} M(K)$$

Cette topologie ℓ peut aisément se décrire :

(4.6.6) PROPOSITION. - *Soit* (X,μ) *un espace uniforme complet et de type (B). Désignons par* $L(X)$ *l'espace des fonctions réelles* f *sur* X *dont les restrictions aux compacts* K *de* X *sont continues, et par* $\mathcal{L}$ *la famille des parties* $H \subset L(X)$ *qui sont simplement bornées sur* X *et équicontinues sur chaque compact* K *de* X. *Alors* ℓ *est la topologie de la* $\mathcal{L}$*-convergence.*

Preuve. - Montrons d'abord que X est total dans l'espace $(M(X),\ell)$. Cela provient déjà du fait que chaque compact K est total dans $M(K)$ et que $M(X) = \cup M(K)$. Il en résulte que tout élément v du dual $(M(X),\ell)$ est complètement déterminé par sa restriction $v|X = f$. On obtient ainsi une fonction f sur X, dont les restrictions aux compacts K de X sont continues puisque $v|M(K)$ est élément de $M(K)' = C(K)$; autrement dit $f \in L(X)$ et ainsi $(M(X),\ell)' \subset L(X)$. Réciproquement pour toute $f \in L(X)$, la restriction $f|K$ est élément de $C(K) = M(K)'$; on peut ainsi définir v sur $M(X)$ selon $v(m) = m(f|K)$ pour tout compact K tel que $v \in M(K)$, et obtenir une forme linéaire continue sur $(M(X),\ell)$. Finalement on a bien $L(X) = (M(X),\ell)'$. Le même raisonnement montre que les parties équicontinues du dual $(M(X),\ell)'$, s'identifie aux parties de $L(X)$ dont les restrictions aux compacts K sont éléments de $\mathcal{H}(K)$. Le résultat est donc conséquence du fait que la topologie d'un elc E est celle de la convergence équicontinue sur son dual topologique.

Il importe maintenant de savoir dans quelle conditions la topologie limite inductive ℓ est la même que celle de $M(X)$. La réponse est donnée avec :

(4.6.7) THEOREME. - *Soit* (X,μ) *un espace uniforme. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) (X,μ) *est complet, de type (B) et* $M(X) = (M(X),\ell)$ *;*

b) (X,μ) *est complet et fin et l'espace topologique sous-jacent* X *est un* $k_{\mathbb{R}}$*-espace.*

Preuve :

a) $\Rightarrow$ b) : Si $M(X) = (M(X),\ell)$, alors $\mathcal{U}(X) = L(X)$ et $\mathcal{H}(X) = \mathcal{L}$. On en déduit que $\mathcal{U}(X) = L(X) = \mathcal{C}(X)$ et que $\mathcal{L} = \mathcal{H}(X) = \mathcal{H}$, où $\mathcal{H}$ est la compactologie équicontinue sur $\mathcal{C}(X)$. Ainsi (X,μ) est un espace fin et X est un $k_{\mathbb{R}}$-espace.

b) $\Rightarrow$ a) : Un espace fin est de type (B) d'après (4.5.10). Soit $\mu_{\mathcal{L}}$ la structure uniforme sur X de la $\mathcal{L}$-convergence sur l'espace $L(X) = \mathcal{C}(X) = \mathcal{U}(X,\mu)$. Alors $\mu_{\mathcal{L}}$ induit sur chaque compact K de X sa propre structure uniforme, d'où suit que $\mu_{\mathcal{L}}$ est compatible avec la topologie de X ; alors $\mathcal{L} = \mathcal{H}$, où $\mathcal{H}$ est toujours la compactologie équicontinue de $\mathscr{C}(X)$ et ainsi $(M(X),\ell) = M(X)$.

4.7 MESURE PRODUIT.

Le problème des mesures produits dans les espaces uniformes peut être formulé de plusieurs façons. Certaines difficultés sont à surmonter, dues au fait qu'en général le produit direct $f \otimes g : (x,y) \to f(x)g(y)$ de deux fonctions $f \in \mathcal{U}(X)$ et $g \in \mathcal{U}(Y)$ n'est pas uniformément continu pour la structure uniforme produit sur $X \times Y$. De plus même lorsque l'on a $\mathcal{U}(X) \otimes \mathcal{U}(Y) \subset \mathcal{U}(X\times Y)$, rien ne garantit une "densité" convenable de $\mathcal{U}(X) \otimes \mathcal{U}(Y)$ dans $\mathcal{U}(X\times Y)$. De sorte qu'il se pose à la fois un problème d'existence et un problème d'unicité. Nous adopterons donc la formulation suivante : étant donnés deux espaces uniformes (X,λ) et (Y,μ), et une structure uniforme ν sur le produit $X\times Y$, supposée plus fine que la structure uniforme produit $\lambda\times\mu$, sous quelles conditions existe-t-il, pour tout couple $(m_1,m_2) \in M(X) \times M(Y)$ un élément *unique* m de $M(X\times Y,\nu)$ tel que

$$\lim_{k \to \infty} m\,[f^{(k)} \otimes g^{(k)}] = m_1(f)m_2(g)$$

pour toutes $f \in \mathcal{U}(X)$ et $g \in \mathcal{U}(Y)$?

L'une des méthodes possibles pour étudier le problème ainsi formulé pourrait être le prolongement d'une forme linéaire compactologique en une forme linéaire compactologique, travail qui à notre connaissance n'a pas été fait jusqu'à maintenant et qui est vraisemblablement difficile.

Une autre méthode consiste à utiliser la représentation de M(X) en termes de mesures de Radon sur $\widehat{pX}$; c'est cette méthode que nous choisissons en nous limitant d'ailleurs uniquement aux espaces uniformes de type (B).

On convient donc ici que, sauf mention expresse du contraire, tous les espaces sont de type (B). Autrement dit on suppose (X,λ) et (Y,μ) de type (B), ainsi que $(X\times Y,\nu)$. On remarquera à ce sujet que la structure uniforme produit $\lambda\times\mu$ peut ne pas être de type (B).

Pour simplifier l'écriture on dit que le problème des mesures produits admet une solution unique lorsque les conditions d'existence et d'unicité définies plus haut sont satisfaites. On note alors $m = m_1 \otimes m_2$.

La notion de compact étant trop générale pour la question présente nous sommes amenés à introduire :

(4.7.1) <u>DEFINITION</u>. - *On dit qu'un compact* K *de* X *est un compact-support s'il existe une mesure de Radon* m *sur* K, *de support* K. *On désigne par* $\mathcal{K}_s(X)$ *la compactologie sur* X *engendrée par ces compacts supports.*

Avant d'anoncer le théorème reliant le problème des mesures produits à cette notion de compact-support, remarquons que l'application identique id sur X×Y possède un unique prolongement uniformément continu $\pi : (\widehat{X\times Y},\nu) \to \hat{X}\times\hat{Y}$, rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (X\times Y,\nu) & \xrightarrow{\text{id}} & (X\times Y,\ \lambda\times\mu) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\widehat{X\times Y},\nu) & \xrightarrow{\pi} & \hat{X}\times\hat{Y} = (\widehat{X\times Y},\ \lambda\times\mu). \end{array}$$

L'application π n'est en général ni injective, ni surjective.

Ainsi quand nous écrirons l'égalité $\mathcal{K}_s(\hat{X}\times\hat{Y}) = \mathcal{K}_s(\widehat{X\times Y},\ \nu)$ cela signifiera de façon précise que π est une bijection échangeant les familles $\mathcal{K}_s$ correspondantes, autrement dit que π est une bijection compactologique entre les compactologies $\mathcal{K}_s(\widehat{X\times Y},\ \nu)$ et $\mathcal{K}_s(\hat{X}\times\hat{Y})$.

Avec ces précautions de langage on a alors :

(4.7.2) THEOREME. - *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) Le problème des mesures produits admet une solution unique.

b) $\mathcal{K}_s(\hat{X}\times\hat{Y}) = \mathcal{K}_s(\widehat{X\times Y},\ \nu)$.

Preuve :

b) $\Rightarrow$ a) : Fixons $(m_1,m_2) \in M(X) \times M(Y)$ et soit $K = \mathrm{Supp}(\check{m}_1) \subset \hat{X}$ et $L = \mathrm{Supp}(\check{m}_2) \subset \hat{Y}$. Le compact $K\times L$ est donc, d'après b), un compact-support de $(X\times Y,\nu)$. La mesure produit, notée $m_1 \otimes m_2$, des mesures de Radon m_1 sur K et m_2 sur L, est un élément de $M(K\times L)$ et $M(K\times L)$ est inclus dans $M(X\times Y,\ \nu)$. Ainsi $m_1 \otimes m_2$ répond aux conditions. Montrons que la condition d'unicité est aussi satisfaite : soit $m \in M(X\times Y,\ \nu)$ un autre élément répondant aux conditions ; alors $D = \mathrm{Supp}(\check{m})$ est un compact-support de $\hat{X}\times\hat{Y}$ d'après b). De plus $m(f \otimes 1) = m_1(f)$ et $m(1 \otimes g) = m_2(g)$ pour $f \in \mathcal{U}(X)$ et $g \in \mathcal{U}(Y)$; et Supp $\check{m}_1$ est la projection de D sur $\hat{X}$ tandis que Supp $\check{m}_2$ est la projection de D sur $\hat{Y}$. Ainsi D est inclus dans $K\times L$ et m est élément de $M(K\times L)$. Or dans $M(K\times L)$, m et $m_1 \otimes m_2$ coïncident d'après l'unicité des mesures produits dans le cas des espaces compacts ; d'où $m = m_1 \otimes m_2$ dans $M(X\times Y,\nu)$.

a) $\Longrightarrow$ b) : Désignons par Φ l'application $(m_1,m_2) \to m_1 \otimes m_2$ de $M(X) \times M(Y)$ dans $M(X\times Y, \nu)$ et commençons par étudier Φ sur l'espace $\hat{X}\times\hat{Y}$. Déjà $\Phi|\hat{X}\times\hat{Y}$ est injective : car si $(u,v) \neq (u',v')$ dans $\hat{X}\times\hat{Y}$, alors par exemple $u\neq u'$, donc il existe $f \in \mathcal{U}(\hat{X})$ telle que $f(u) = 0$ et $f(u') = 1$, et alors $(u \otimes v)(f \otimes 1) = 0$ tandis que $(u' \otimes v')(f \otimes 1) = v'(1) = 1$. De plus l'image $\Phi(\hat{X}\times\hat{Y})$ contient $(\widehat{X\times Y}, \nu)$: en effet soit $w \in \widehat{X\times Y}$; alors l'élément w', restriction de w à l'espace $\mathcal{U}(X\times Y, \lambda\times\mu)$ est une forme modulaire compactologique, donc un élément de $\hat{X}\times\hat{Y} = (\widehat{X\times Y}, \lambda\times\mu)$, noté (u,v), et la condition d'unicité impose forcément l'égalité $w = u \otimes v$. En identifiant uniformément $\hat{X}\times\hat{Y}$ et $\Phi(\hat{X}\times\hat{Y})$, on fait apparaître $(\widehat{X\times Y}, \nu)$ comme partie de $\hat{X}\times\hat{Y}$ et sa structure uniforme ν est plus fine que la structure uniforme produit $\lambda\times\mu$. La topologie de $(\widehat{X\times Y}, \nu)$ est donc plus fine que celle induite par $\hat{X}\times\hat{Y}$, de sorte que, en particulier, les compacts de $(\widehat{X\times Y}, \nu)$ sont des compacts de $\hat{X}\times\hat{Y}$. Enfin soit D un compact de $\hat{X}\times\hat{Y}$, support d'une mesure m. On a alors $m \in M(\hat{X}\times\hat{Y}, \lambda\times\mu)$ et la mesure $m_1 = m|\mathcal{U}(X) \otimes 1$ appartient à $M(X)$ et son support est la projection de D sur $\hat{X}$; de même $m_2 = m|1 \otimes \mathcal{U}(Y)$ est un élément de $M(Y)$ dont le support est la projection de D sur $\hat{Y}$. Le produit des deux compacts-supports est un compact-support et par suite D est un compact de $(\widehat{X\times Y}, \nu)$, comme étant compact dans Supp $\check{m}_1 \times$ Supp $\check{m}_2$.

Remarque. - La condition d'unicité du théorème est ici fondamentale. Fixons par exemple deux espaces complètement réguliers S et T, supposés pseudocompacts mais tels que le produit $S\times T$ ne soit pas pseudocompact. Sur chacun des espaces S, T et $S\times T$ la structure uniforme β est celle définie par les fonctions continues et bornées ; et les espaces uniformes (S,β), (T,β) et $(S\times T,\beta)$ sont de type (B). Or on sait (théorème de GLICKSBERG [I]) que $\beta S \times \beta T \neq \beta(S\times T)$. Soit $(m_1,m_2) \in M(S) \times M(T)$; alors (m_1,m_2) est un élément de $M(\beta S) \times M(\beta T)$, donc de $M(\beta S \times \beta T)$. Ainsi $m_1 \otimes m_2$ est élément du dual de $C^\infty(S) \hat{\hat{\otimes}} C^\infty(T)$, donc admet, par le théorème de Hahn-Banach, un prolongement m dans le dual de $C^\infty(S\times T)$. Ainsi m est élément de $M[\beta(S\times T)]$, donc le problème des mesures produits admet une solution (non unique) bien que l'on ait $\beta(S\times T) \neq \beta S \times \beta T$. Dans le même genre d'idée on voit que les conditions équivalentes a) et b) du théorème impliquent l'égalité ensembliste $(\widehat{X\times Y}, \nu) = \hat{X}\times\hat{Y}$.

(4.7.3) <u>THEOREME</u>. - *On suppose que le problème des mesures produits admet une solution unique. Alors le sous-espace vectoriel de* $M(X\times Y, \nu)$ *engendré par l'ensemble* $m_1 \otimes m_2$, *quand* (m_1,m_2) *décrit* $M(X) \times M(Y)$ *est exactement le produit tensoriel algébrique* $M(X) \otimes M(Y)$ *; et dans ce cas* $M(X) \otimes M(Y)$ *est dense dans* $M(X\times Y, \nu)$. *Autrement dit* $M(X\times Y)$ *est le complété de* $M(X) \otimes M(Y)$ *pour la topologie localement convexe de* $\mathscr{H}(X\times Y, \nu)$*-convergence sur* $\mathscr{U}(X\times Y, \nu)$.

Preuve. - Il suffit de montrer que $M(X) \otimes M(Y)$ est dense dans $M(X\times Y, \nu)$.

Fixons $H \in \mathscr{H}(X\times Y, \nu)$, $m \in M(X\times Y,\nu)$ et $\varepsilon>0$. Le compact $K = \text{Supp}\,\check{m}$ est inclus dans $(\widehat{X\times Y}, \nu)$, et c'est un compact-support. Soient K_1 et K_2 les projections de K sur $\hat{X}$ et $\hat{Y}$ respectivement ; alors m est élément de $M(K_1\times K_2)$ et $K_1 \times K_2$ est un compact-support de $\hat{X}\times\hat{Y}$. Or $M(K_1\times K_2) = M(K_1) \hat{\otimes} M(K_2)$ d'après [5], et ainsi il existe un élément m_o dans le produit tensoriel algébrique $M(K_1) \otimes M(K_2)$ tel que $|(m-m_o)(f)| \leqslant \varepsilon$ pour toute $f \in H|K_1 \times K_2$. En lisant m_o dans l'espace $M(X\times Y)$ on obtient $|m-m_o|_H \leqslant \varepsilon$, ce qui exprime la densité de $M(X) \otimes M(Y)$ dans $M(X\times Y, \nu)$.

Une autre conséquence du problème des mesures produits, quand il a une solution unique, est relative au comportement des parties bornées de (X,λ) et (Y,μ). On obtient un résultat généralisant les propriétés (4.7.2.b) des compacts-supports.

(4.7.4) <u>THEOREME</u>. - *On suppose que le problème des mesures produits admet une solution unique. Alors le produit de deux bornés* B_1 *de* (X,λ) *et* B_2 *de* (Y,μ) *est un borné de* $(X\times Y, \nu)$. *De plus* ν *coïncide sur* $B_1\times B_2$ *avec la structure uniforme produit* $\lambda\times\mu$.

Preuve. - On sait déjà que l'égalité ensembliste $(\widehat{X\times Y}, \nu) = \hat{X}\times\hat{Y}$ a lieu, la topologie de ν étant plus fine que la topologie produit. Donc tout fermé de $\hat{X}\times\hat{Y}$ est fermé dans $(\widehat{X\times Y}, \nu)$. Désignons par $\hat{B}_1$ et $\hat{B}_2$ les complétés de B_1 et B_2, ou encore les adhérences de B_1 et B_2 dans $\hat{X}$ et $\hat{Y}$ respectivement. Alors $\hat{B}_1$ et $\hat{B}_2$ sont compacts, puisque les bornés sont précompacts dans les espaces de type (B), et $\hat{B}_1 \times \hat{B}_2$ est un fermé de $(\widehat{X\times Y}, \nu)$. Supposons maintenant $B_1 \times B_2$ non borné dans $(X\times Y, \nu)$, donc non précompact dans $(X\times Y, \nu)$ puisque ν est de type (B) ; il existe alors une suite $z_n = (x_n, y_n)$ non précompacte dans $B_1 \times B_2$. Posons

$$m_1 = \Sigma\, 2^{-n}\, \varepsilon_{x_n} \qquad \text{et} \qquad m_2 = \Sigma\, 2^{-n}\, \varepsilon_{y_n}$$

on obtient ainsi des éléments de $M(X)$ et $M(Y)$ et $K = \mathrm{Supp}(m_1 \otimes m_2)^{\vee}$ est un compact de $(\widehat{X\times Y}, \nu)$, contenant la suite (z_n), ce qui est absurde. Donc $B_1 \times B_2$ est bien borné dans $(\widehat{X\times Y}, \nu)$. Mais de plus $\hat{B}_1 \times \hat{B}_2$ est un fermé borné de $(\widehat{X\times Y}, \nu)$, donc un compact, d'où la coïncidence des deux structures uniformes ν et $\lambda\times\mu$ sur $B_1 \times B_2$.

(4.7.5) <u>COROLLAIRE</u>. - *On suppose que* X *et* Y *sont respectivement distingués dans* $\hat{X}$ *et* $\hat{Y}$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) Le problème des mesures produits admet une solution unique ;

b) Pour deux bornés B_1 *de* (X,λ) *et* B_2 *de* (Y,μ), *on a*
$\nu|B_1 \times B_2 = (\lambda|B_1) \times (\mu|B_2)$.

Preuve. - On a toujours a) $\Rightarrow$ b) d'après ce qu'on a vu. Montrons b) $\Rightarrow$ a) : Pour $(m_1, m_2) \in M(X) \times M(Y)$, il existe un borné B_1 de (X,λ) et un borné B_2 de (Y,μ) tels que $\mathrm{Supp}\ \check{m}_1 \subset \hat{B}_1$ et $\mathrm{Supp}\ \check{m}_2 \subset \hat{B}_2$ (ceci d'après l'hypothèse de distinction). Par suite $m_1 \otimes m_2$ appartient à $M(\hat{B}_1) \mathbin{\hat{\otimes}} M(\hat{B}_2)$ et d'après b) on a $M(\hat{B}_1) \mathbin{\hat{\otimes}} M(\hat{B}_2) = M(\widehat{B_1\times B_2}) \subset M(X\times Y, \nu)$, ce qui suffit.

Pour le cas où X et Y sont eux-mêmes bornés, on a :

(4.7.6) PROPOSITION. - *Soient* (X,λ) *et* (Y,μ) *deux espaces uniformes précompacts et* ν *une structure uniforme précompacte sur le produit* $X\times Y$. *Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) $\nu = \lambda\times\mu$;

b) $\hat{X}\times\hat{Y} = (\widehat{X\times Y}, \nu)$ *topologiquement ou uniformément ;*

c) $\mathcal{U}(X) \otimes \mathcal{U}(Y)$ *est uniformément dense dans* $\mathcal{U}(X\times Y, \nu)$.

Dans une autre voie on a

(4.7.7) PROPOSITION. - *Soient* (X,λ) *et* (Y,μ) *deux espaces uniformes faibles. Alors le problème des mesures produits pour les structures uniformes* $\lambda_\circ$, $\mu_\circ$ *et* $(\lambda\times\mu)_\circ$ *admet une solution unique. En particulier on a*

$$M(X,\lambda_\circ) \otimes M(Y,\mu_\circ) \subset M(X\times Y, (\lambda\times\mu)_\circ)$$

Preuve. - On sait que $(X,\lambda_\circ)$, $(Y,\mu_\circ)$ et $(X\times Y, (\lambda\times\mu)_\circ)$ sont des espaces de type (B). De plus on a les égalités topologiques $\widehat{\lambda_\circ X} = \delta X$, $\widehat{\mu_\circ Y} = \delta Y$ et $(\lambda\times\mu)_\circ(X\times Y)\hat{} = \delta(X\times Y)$ et l'égalité uniforme $\delta(X\times Y) = \delta X \times \delta Y$ d'après [14]. Alors $\mathscr{K}_s[\widehat{X\times Y}, (\lambda\times\mu)_\circ] = \mathscr{K}_s(\widehat{\lambda_\circ X} \times \widehat{\mu_\circ Y})$ et on peut appliquer (4.7.3).

(4.7.8) COROLLAIRE. - *Soient* (X,λ) *et* (Y,μ) *deux espaces uniformes faibles de type (A). On munit* $X\times Y$ *de la structure uniforme* $\nu = a(\lambda\times\mu)$ *de type (A) associée à* $\lambda\times\mu$. *Alors le problème des mesures produits pour* $\lambda_\circ,\mu_\circ,\nu_\circ$ *admet une solution unique. En particulier on a*

$$M_\rho(X) \otimes M_\rho(Y) \subset M_\rho(X\times Y)$$

Applications aux espaces topologiques. - Rappelons que pour un espace topologique complètement régulier T, on désigne par υ la structure uniforme sur T définie par l'algèbre $\mathscr{C}(T)$ et par θ la structure uniforme universelle de T, c'est-à-dire la plus fine structure uniforme compatible avec sa topologie. Le replété υT est le complété de (T,υ), tandis que le c-replété θT est le complété de (T,θ).

Comme conséquence de (4.7.2) et (4.7.3) on a

(4.7.9) PROPOSITION. - *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) $\mathscr{K}_s(\theta S \times \theta T) = \mathscr{K}_s[\theta(S\times T)]$;

b) Le problème des mesures produits relativement aux espaces fins (S,θ), (T,θ) *et* $(S\times T,\theta)$ *admet une solution unique. En particulier on a :*

$$M(S,\theta) \otimes M(T,\theta) \subset M(S\times T,\theta)$$

Et en appliquant les résultats précédents (4.7.7) sachant que $M_\rho(S) = M(S, \upsilon_\circ)$ et $\upsilon S = \widehat{(e\theta)S} = \widehat{\upsilon_\circ S}$, on obtient :

(4.7.10) PROPOSITION. - *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) $\mathscr{K}_s(\upsilon S \times \upsilon T) = \mathscr{K}_s[\upsilon(S\times T)]$;

b) Le problème des mesures produits relativement aux replétés υS, υT *et* $\upsilon(S\times T)$ *admet une solution unique. En particulier on a :*

$$M_\rho(S) \otimes M_\rho(T) \subset M_\rho(S\times T)$$

Les formules précédentes sont évidemment liées aux deux problèmes de commutation (où les égalités sont topologiques) $\upsilon(S\times T) = \upsilon S \times \upsilon T$ et $\theta(S\times T) = \theta S \times \theta T$. Rappelons que ces deux problèmes sont largement étudiés dans la littérature, encore qu'ils ne soient pas complètement résolus. Il n'est pas dans notre propos de dresser ici une bibliographie exhaustive concernant ces questions. Renvoyons simplement à [5], [31], [36], [37]. Quoi qu'il en soit la proposition (4.7.10) permet d'obtenir un énoncé simple et qui semble nouveau :

(4.7.11) PROPOSITION. - *Si* $\mathscr{C}(S\times T)$ *est l'algèbre sur* $S\times T$ *engendrée par* $\mathscr{C}(S) \otimes \mathscr{C}(T)$, *alors* $\upsilon(S\times T) = \upsilon S \times \upsilon T$.

Preuve. - L'espace $\upsilon S \times \upsilon T$ est le complété de $S\times T$ pour la structure uniforme produit $\upsilon_S \times \upsilon_T$. Mais c'est aussi le δ-complété de $(S\times T, \upsilon_S \times \upsilon_T)$, donc d'après [14], le produit des δ-complétés. Mais alors $\upsilon S \times \upsilon T$ est le complété (égalité topologique) de l'espace uniforme de type (A) associé à $(S\times T, \upsilon_S \times \upsilon_T)$, qui est exactement $(S\times T, \upsilon)$ d'après l'hypothèse faite sur $\mathscr{C}(S\times T)$. Ainsi $\upsilon(S\times T) = \upsilon S \times \upsilon T$.

INDEX

NOTATIONS.

Les notations suivantes sont précisées dans l'introduction.

$p\mu$; $e\mu$; $\theta\mu$; $\nu\mu$; $\beta\mu$; θ, $\tau\mu$, μ_o et $\widehat{pX}$.

$\mathcal{U}(X,\mu)$; $\mathcal{U}^\infty(X,\mu)$; $\mathcal{C}(X)$; $\mathcal{C}^\infty(X,\mu)$; $Z(X,\mu)$; $Coz(X,\mu)$.

$\mathcal{H}(X,\mu)$; $\mathcal{H}^\infty(X,\mu)$; $M(X,\mu)$; $M^\infty(X,\mu)$; $Mod(X)$; $Mod_\delta(X)$;

$M_\sigma(X)$; $M_\tau(X)$; $M_t(X)$; $Rad(\widehat{pX})$; $M_\nu(X)$.

d_H ; d_f ; $\mu_{\mathcal{H}}$; μ_H ; σ_A (page 7), $\mu|Y$ (page 8)

$a\mu$; $a^\infty\mu$; aX ; $a^\infty X$ (page 40), $m\mu$; $m_s\mu$ (page 44)

NOTIONS.

BIBLIOGRAPHIE

OUVRAGES GENERAUX

[B_1] N. BOURBAKI, *Topologie générale* Ch. 1-4, Hermann, Paris, 1971.

[B_2] N. BOURBAKI, *Topologie générale* Ch. 5-10, Hermann, Paris, 1974.

[I] J.R. ISBELL, *Uniform spaces*, Math. Surveys n° 12, A.M.S., 1964.

[Z] A. ZAANEN, *Integration*, 2nd edition, North Holland, Amsterdam, 1967.

ARTICLES ET THESES

[1] N. AZZAM, *Mesures sur les espaces uniformes*, Prépublications Université Saint-Etienne, 2, 1974, 53 p.

[2] I.A. BEREZANSKII, *Measures on uniform spaces*, Trans. Moscow Math. Soc., 19, 1968, p. 1-40.

[3] J. BERRUYER et B. IVOL, *Espaces de mesures et compactologies*, Publ. Dép. Math. Lyon, 9-1, 1972, p. 1-36.

[4] H. BUCHWALTER, *Topologies et compactologies*, Publ. Dép. Math. Lyon, 6-2, 1969, p. 1-74.

[5] H. BUCHWALTER, *Produit topologique, produit tensoriel et c-replétion*, Bull. Soc. Math. France, Suppl., Mém. 31-32, 1972, p. 51-71.

[6] H. BUCHWALTER, *Parties bornées d'un espace topologique complètement régulier*, Séminaire Choquet, 9$^{\text{ème}}$ année, 1969-70, n° 14 15 p.

[7] H. BUCHWALTER et R. PUPIER, *Complétion d'un espace uniforme et formes linéaires*, C.R. Acad. Sc. Paris, Série A, 273, 1971, p. 96-98.

[8] G. CHOQUET, *Cardinaux 2-mesurables et cônes faiblement complets*, Ann. Inst. Fourier, 17-1, 1967, p. 383-393.

[9] Á. CSÁSZÁR et J. CZIPSZER, *Sur des critères généraux d'approximation uniforme*, Ann. Univ. Sc. Budapest, Sect. Math., 6, 1963, p. 17-26.

[10] Á. CSÁSZÁR, *Gleichmäßige Approximation, gleichmäßige Stetigkeit*, Acta Math. Acad. Sc. Hung., 20, 1969, p. 253-261.

[11] H.H. CORSON et J.R. ISBELL, *Some properties of strong uniformity*, Quart J. Math. Oxford, 11, 1960, p. 17-33.

[12] A. DEAIBES, *Deux classes d'espaces uniformes satisfaisant à un "théorème de Mackey"*, C.R. Acad. Sc. Paris, Série A, 277, 1973, p. 421-423.

[13] A. DEAIBES, *Structures ultra-uniformes et espaces éparpillés*, Publ. Dép. Math. Lyon, 9-3, 1972, p. 13-53.

[14] A. DEAIBES et R. PUPIER, *δ-complétion et G_δ-densité*, Publ. Dép. Math. Lyon, 9-3, 1972, p. 1-12.

[15] V.P. FEDOROVA, *Linear functionals and the Daniell integral on spaces of uniformly continuous functions*, Usp. Math. Nauk., 133-1, 1967, p. 172-173 (Russian), M.R. 34 # 6507.

[16] Z. FROLIK, *Mesures uniformes*, C.R. Acad. Sc. Paris, Série A, 277, 1973, p. 105-108.

[29] M. KATETOV, *On real-valued functions in topological spaces,* Fund. Math., 38, 1951, p. 85-91.

[30] A. LOUVEAU et G. ROYER, *Ensembles bornés dans un espace uniforme,* Séminaire Choquet, 8ème année, 1968-69, n° 6, 14 p.

[31] K. MORITA, *Topological completions and* M-*spaces,* Sc. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, 10, 271, 1970, p. 271-288.

[32] S. MROWKA, *On some approximation theorems,* Nieuw. Arch. voor Wiskunde, 3, 16, 1968, p. 94-111.

[33] S. MROWKA, *Characterization of classes of functions by Lebesgue sets,* Czech. Math. J., 19, 1969, p. 738-744.

[34] J. PACHL, *Free uniform measures,* Comment. Math. Univ. Carolinae, 15-3, 1974, p. 541-553.

[35] R. PUPIER, *Sur quelques types d'espaces uniformes,* C.R. Acad. Sc. Paris, Série A, 277, 1973, p. 417-419.

[36] R. PUPIER, *Méthodes fonctorielles en topologie générale,* Thèse, Univ. Lyon I, 1971.

[37] R. PUPIER, *Précompactologies et structures uniformes,* Fund. Math., 83-3, 1974, p. 251-262.

[38] M.D. RICE, *Covering and function theoretic properties of uniform spaces,* Bull. A.M.S., 80-1, 1974, p. 159-163.

[39] M. ROME, *L'espace* $M^{\infty}(T)$, Publ. Dép. Math. Lyon, 9-1, 1972, p. 37-60.

[40] M.H. STONE, *A generalized Weierstrass approximation theorem,* Studies in modern analysis, Ed. R. BUCK, Math. Assoc. Am., Prentice-Hall, 1962.

[17] Z. FROLIK, *Représentations de Riesz des mesures uniformes*, C.R. Acad. Sc. Paris, Série A, 277, 1973, p. 163-166.

[18] Z. FROLIK, *A note on metric-fine spaces*, Proc. A.M.S., 46-1, 1974, p. 111-119.

[19] S. GINSBURG et J.R. ISBELL, *Some operators on uniform spaces*, Trans. A.M.S., 93, 1958, p. 145-168.

[20] J. GLICKSBERG, *The representation of functionals by integrals*, Duke Math. J., 19, 1952, p. 253-261.

[21] A. HAGER, *An approximation technique for real-valued functions*, Gen. Top. and its Appl. 1, 1971, p. 127-134.

[22] A. HAGER, *Measurable uniform spaces*, Fund. Math., 77, 1972, p. 51-73.

[23] A. HAGER, *Vector lattices of uniformly continuous functions and some categorical methods in uniform spaces*, Acta Math. Acad. Sc. Hung., 22, 1971, p. 172-186.

[24] A. HAGER, *Some nearly fine uniform spaces*, Proc. London Math. Soc., (3), 28, 1974, p. 517-546.

[25] A. HAGER et D. JOHNSON, *A note on certain subalgebras of* C(X), Canad. J. Math., 20, 1968, p. 389-393.

[26] R. HAYDON, *Sur les espaces* M(T) *et* M^{∞}(T), C.R. Acad. Sc. Paris, Série A, 275, 1972, p. 989-991.

[27] J.R. ISBELL, *Algebras of uniformly continuous functions*, Ann. of Math., 68, 1958, p. 96-125.

[28] J.R. ISBELL, *Euclidean and weak uniformities*, Pac. J. Math., 8, 1958, p. 67-86.

[41] J.W. TUCKEY, *Convergence and uniformity in topology*, Princeton, 1940.

[42] V.S. VARADARAJAN, *Measures on topological spaces*, A.M.S. Transl., 48, 1965, p. 161-228.

[43] A. WEIL, *Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale*, Act. Sc. et Ind., 511, Hermann Paris, 1937.

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE 4 : ESPACES DE MESURES ASSOCIES A UN ESPACE UNIFORME