PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

LUISA ITURRIOZ

Les algèbres de Heyting-Brouwer : point de rencontre de plusieurs structures

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1975, tome 12, fascicule 3
, p. 91-113

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1975__12_3_91_0>

© Université de Lyon, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1975 t. 12-3

LES ALGEBRES DE HEYTING-BROUWER : POINT DE RENCONTRE DE PLUSIEURS STRUCTURES

Luisa ITURRIOZ

I- INTRODUCTION. Ayant comme point de départ une critique à certains aspects de la logique classique, plusieurs systèmes logiques ont été introduits tout au long de ce siècle. Nous n'allons retenir ici que deux d'entre eux : les logiques multivalentes de Lukasiewicz et celles de Post. Elles sont le fruit de l'idée sur l'existence de propositions qui ne sont ni vraies ni fausses.

Les calculs propositionnels n-valents de Lukasiewicz et de Post ont été introduits indépendamment par ces auteurs, dans le cas n=3 par Lukasiewicz, en 1920, et en général quelques années plus tard, et en 1921 par Post.

Ces deux systèmes propositionnels n'ont pas été introduits comme des systèmes formalisés, avec axiomes et règles de déduction. Ils ont été construits au moyen de matrices dites aussi tableaux de vérité. La première axiomatique du calcul trivalent de Lukasiewicz est due à Wajsberg - disciple de Lukasiewicz- et date de l'année 1931. Dans le livre de Rosser et Turquette [23], on peut trouver des axiomatiques pour le cas général et Slupecki -un autre disciple de Lukasiewicz- en introduisant une nouvelle fonction, a axiomatisé un système qui est fonctionnellement complet,

Cet exposé a été réalisé pendant que l'auteur jouissait d'une bourse du "Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas de la República Argentina" et il fut l'objet d'une conférence tenue à l'Université de Lyon-1 le 19 novembre 1975.

c'est-à-dire que les $3^3=27$ fonctions possibles d'une variable peuvent être définies dans ce calcul à partir des axiomes ([10] et [20]) .

Comme les matrices considérées dans toutes ces recherches constituaient certaines structures algébriques, on commença à appliquer les méthodes algébriques dans l'étude de ces logiques. Ainsi en 1940, Gr. Moisil a introduit la notion d'algèbre de Lukasiewicz trivalente et, en 1942, P.C. Rosembloom celle d'algèbre de Post.

En 1941, Moisil a essayé de généraliser la notion d'algèbre de Lukasiewicz pour le cas général et il a été conduit à introduire la notion d'algèbre de Lukasiewicz n-valente. Mais ces structures ne sont plus fermées par rapport à l'implication de Lukasiewicz [2] (elles ne sont plus matrices pour le calcul n-valent de Lukasiewicz, si $n \geq 5$). Bien sûr, de ce point de vue elles sont inadéquates, mais leur étude est quand même intéressante car elles se sont avérées très importantes dans le domaine de la "computation".

C'est à partir de 1960 que ces deux notions ont été reprises par Epstein, Traczyk, Dwinger, etc. , dans le cas des algèbres de Post et par Moisil et ses disciples, A. Monteiro et ses disciples, etc. , dans le cas des algèbres de Lukasiewicz.

Nous n'allons pas considérer ici les définitions des algèbres de Lukasiewicz et de Post. Nous nous intéressons seulement à certaines propriétés communes à ces deux structures. Ainsi Moisil [13 - 1963] a montré que toute algèbre de Lukasiewicz trivalente est une algèbre de Heyting, c'est-à-dire un treillis (distributif) ayant 0 et 1 tel que, pour tous x, y, il existe un plus grand élément $z = x \Rightarrow y$ tel que $x \wedge z \leq y$. Ce fait a été utilisé par lui pour chercher une formalisation du calcul propositionnel trivalent de Lukasiewicz dans laquelle l'implication intuitionniste joue un rôle fondamental.

Dans le cas général, nous avons montré [9] un résultat similaire. Pour les algèbres de Post, Epstein avait montré qu'elles sont des treillis distributifs pseudo-complémentés, c'est-à-dire tels que, pour tout x, il existe un élément $\neg x$ tel que $x \wedge z = 0$ équivaut à $z \leqslant \neg x$, et Rousseau [24] en 1970 a montré que toute algèbre de Post est aussi une algèbre de Heyting. Ce fait lui a permis de donner une axiomatique du calcul n-valent de Post ayant $\Longrightarrow$ comme connecteur primitif.

D'après la dualité existante, soit dans les algèbres de Post, soit dans celles de Lukasiewicz, on peut aussi affirmer qu'elles sont des algèbres de Brouwer. On se pose naturellement la question suivante : quelles sont les propriétés des algèbres de Lukasiewicz ou des algèbres de Post qui dépendent du fait qu'elles sont des algèbres de Heyting (spéciales) et en même temps des algèbres de Brouwer. Cela nous amène à étudier les algèbres que nous appellerons de Heyting-Brouwer. Cette notion n'est pas nouvelle dans la littérature. Ainsi, en 1946, Mc Kinsey et Tarski [11] ont remarqué que, à cause de la dualité, il y avait des différences entre les notions d'algèbre de Boole et celle de Brouwer. Ainsi par exemple, dans une algèbre de Boole complète, les lois

(1) $a \wedge \bigvee_{i \in I} b_i = \bigvee_{i \in I} (a \wedge b_i)$; (2) $a \vee \bigwedge_{i \in I} b_i = \bigwedge_{i \in I} (a \vee b_i)$

sont toujours valables, tandis que, dans une algèbre de Brouwer, l'égalité (2) est valable, mais pas (1). Par exemple [1, p. 118], soit C le treillis distributif complet de tous les sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}^2$. Si c représente le cercle $x^2 + y^2 = 1$ et d_k le disque $x^2+y^2 \leqslant 1 - k^{-2}$, alors

$c \wedge \bigvee_{k=1}^{\infty} d_k = c$ tandis que $\bigvee_{k=1}^{\infty} (c \wedge d_k) = \emptyset$. L'égalité (2) est valable car $\vee$ et $\wedge$ coïncident avec les opérations d'ensembles $\cup$ et $\cap$.

D'autre part [1, p. 128], un treillis complet est une algèbre de Brouwer si et seulement si (2) est valable.

Mc Kinsey et Tarski [11, p. 129] ont aussi remarqué que, d'après la dualité, si $(B, \wedge, \vee, -, 0, 1)$ est une algèbre de Boole, les systèmes $(B, \wedge, \vee, \Longrightarrow, 0, 1)$ et $(B, \wedge, \vee, \dot{-}, 0, 1)$ où :

$$x \Longrightarrow y = -x \vee y \qquad \text{et} \qquad x \dot{-} y = x \wedge -y$$

sont respectivement une algèbre de Heyting et une algèbre de Brouwer. En tenant compte de ce fait ces auteurs ont donné la définition de "Double Brouwerian algebra" en remarquant que cette notion semble avoir été considérée pour la première fois par Skolem dans un article de 1919. Mais ces auteurs n'ont pas développé cette notion. C'est tout récemment que l'étude de cette structure a été reprise. Ainsi Rauszer [22] a introduit un calcul propositionnel, appelé de Heyting-Brouwer et a montré que ces structures (que cet auteur a appelé "Semi-Boolean algebras") sont l'outil algébrique adéquat pour l'étude d'un tel calcul propositionnel. C'est en vertu de ce résultat, et du fait que dans la littérature d'autres structures ont été étudiées sous le même nom, que nous préférons les appeler de Heyting-Brouwer. Rauszer a étudié ces structures, qui sont à la fois des algèbres de Heyting et des algèbres de Brouwer.

D'autre part, l'année dernière, Epstein et Horn [5] ont étudié en détail des algèbres de Heyting-Brouwer spéciales, qui sont à la base de la théorie des algèbres de Post sans dépendre de la chaîne de constantes uniquement déterminée qui existe dans une telle algèbre.

Le but de cet exposé est de donner un panorama de ces structures, en faisant un résumé des travaux cités et en y ajoutant nos propres résultats ([7] et [8]).

II. DEFINITIONS. Nous allons préciser les notions que nous utiliserons par la suite.

2.0. Une *algèbre de Heyting-Brouwer* est un système $(A, \wedge, \vee, \Rightarrow, \dot{-}, 0, 1)$ où $(A, \wedge, \vee, \Rightarrow, 0, 1)$ est une algèbre de Heyting et $\dot{-}$ est une opération binaire définie sur A satisfaisant à la condition suivante, pour tous $x, y, z \in A$:

$$x \dot{-} y \leqslant z \quad \text{équivaut à } x \leqslant y \vee z.$$

Du fait qu'une algèbre de Heyting est équationnellement définissable [15, p. 158], nous remarquons qu'on peut donner une définition équivalente d'une algèbre de Heyting-Brouwer en ne faisant intervenir que des égalités.

Pour abréger, nous parlerons de la H-B-algèbre A.

2.1. Tout treillis distributif fini est une H-B-algèbre.

2.2 L'exemple le plus simple de H-B-algèbre qui n'est pas une algèbre de Boole est donné par la chaîne T à trois éléments, $T = \{0, a, 1\}$, qui a comme sous-algèbre l'algèbre de Boole $B = \{0, 1\}$ à deux éléments.

2.3. Tout ensemble totalement ordonné ayant 0 et 1 est une H-B-algèbre. Il suffit de définir les opérations $\Rightarrow$ et $\dot{-}$ de la façon suivante :

si $x \leqslant y$ alors $x \Rightarrow y = 1$ et $x \dot{-} y = 0$,

si $x > y$ alors $x \Rightarrow y = y$ et $x \dot{-} y = x$.

Ces H-B-algèbres sont dites les *chaînes*. Signalons que les opérations $\Rightarrow$ et $\dot{-}$ définies dans les chaînes sont très spéciales car elles vérifient, parmi d'autres, les égalités suivantes :

(D) $\quad (x \Rightarrow y) \vee (y \Rightarrow x) = 1$,

(D') $\quad (x \dot{-} y) \wedge (y \dot{-} x) = 0$.

2.4. Une algèbre abstraite $(B,\cup,\cap,-,I,C)$ est dite une algèbre *booléenne bi-topologique* si $(B,\cup,\cap,-)$ est une algèbre de Boole et I et C sont respectivement un opérateur d'intérieur et de fermeture sur A, tels que

$Ia = CIa$, $Ca = ICa$, pour tout $a \in B$.

D'après ces propriétés les opérateurs I et C sont dits *opérateurs conjugués* sur B. Un élément est dit I-ouvert (C-fermé) si $Ia = a$ ($Ca = a$). Ainsi dans toute algèbre booléenne bi-topologique un élément a est I-ouvert si et seulement si a est C-fermé.

Soit $G_I(B)$ l'ensemble des éléments I-ouverts de B. Alors l'algèbre $(G_I(B),\cup,\cap,\Rightarrow,\dot{-},\emptyset,B)$ où $a \Rightarrow b = I(-a \vee b)$ et $a \dot{-} b = C(a \wedge -b)$ est une H-B-algèbre. Elle fournit l'exemple le plus général, car Rauszer [21,22] a montré que toute H-B-algèbre est isomorphe à une algèbre du type $G_I(B)$, où B est une algèbre booléenne bi-topologique.

Le calcul propositionnel de Heyting-Brouwer est une extension du calcul propositionnel intuitionniste qui s'obtient en ajoutant à son alphabet deux connecteurs, qui sont respectivement le dual de l'implication et de la négation intuitionnistes [22, p. 240-241]. Les algèbres de Heyting-Brouwer jouent, par rapport à ce calcul, le même rôle que les algèbres de Heyting par rapport au calcul propositionnel intuitionniste.

Dans une H-B-algèbre posons :

$$\neg x = x \Rightarrow 0 ,$$
$$\ulcorner x = 1 \dot{-} x ,$$
$$T_n x = \underbrace{\neg\ulcorner\,\neg\ulcorner \;\cdots\cdots\; \neg\ulcorner}_{2n} x .$$

Dans [22, p. 222], nous trouvons une liste de propriétés qui sont valables dans une H-B-algèbre, parmi lesquelles on va retenir quelques-unes.

Si $x \leq y$, alors $\neg y \leq \neg x$ et $\Gamma y \leq \Gamma x$,

$x \wedge \neg x = 0$, $x \vee \Gamma x = 1$,

$\neg 1 = 0$, $\neg 0 = 1$, $\Gamma 1 = 0$, $\Gamma 0 = 1$,

$\neg x \leq \Gamma x$,

$\neg\Gamma x \leq \Gamma\Gamma x \leq x \leq \neg\neg x \leq \Gamma\neg x$,

$\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$, $\Gamma(x \wedge y) = \Gamma x \vee \Gamma y$,

$\neg(x \wedge y) \geq \neg x \vee \neg y$, $\Gamma(x \vee y) \leq \Gamma x \wedge \Gamma y$,

$\neg\Gamma x \wedge \neg\Gamma y = \neg\Gamma(x \wedge y)$,

$\neg\Gamma x \vee \neg\Gamma y \leq \neg\Gamma(x \vee y)$,

$\neg\Gamma(x \Longrightarrow y) \leq \neg\Gamma x \Longrightarrow \neg\Gamma y$.

D'après ces propriétés, on voit que les opérateurs T_n (n entier naturel) sont des applications de A dans A vérifiant les conditions suivantes :

(T1) $T_n 1 = 1$,

(T2) $T_n x \leq x$,

(T3) $T_n(x \wedge y) = T_n x \wedge t_n y$,

(T4) $T_n T_n x \leq T_n x$.

Soit B(A) l'algèbre de Boole des éléments complémentés d'une H-B-algèbre A. Ainsi $B(A) = \{x \in A : \neg x = \Gamma x\} = \{x \in A : T_1 x = x\}$.

La notion d'homomorphisme d'une H-B-algèbre A dans une autre B se définit de la manière habituelle.

Pour déterminer les images homomorphes d'une H-B-algèbre, considérons la définition suivante [22, p. 223].

2.5. Une partie F d'une H-B-algèbre A est dite un $\neg\Gamma$-*filtre* si elle vérifie

F1 - F est un filtre de A,

F2 - si $a \in F$ alors $T_1 a \in F$.

2.6. Un $\neg r$-filtre F est dit *propre* si $F \neq A$.

Dans une algèbre de Heyting, les filtres coïncident avec les parties de A qui vérifient les conditions

D1- $1 \in F$,

D2- si $a, a \Rightarrow b \in F$ alors $b \in F$. [14, p. 157].

Etant donné un $\neg r$-filtre F d'une H-B-algèbre A, posons $a \equiv b$ (mod F) pour indiquer que $(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a) \in F$. La relation ainsi définie est une congruence sur A et il existe une correspondance biunivoque entre les congruences d'une H-B-algèbre A et les $\neg r$-filtres [22, p. 225].

2.7. Si a est un élément pour lequel il existe un $n \in N$ tel que $T_n a = a$, le filtre principal F(a) engendré par a (c'est-à-dire l'ensemble des éléments x tels que $a \leq x$) est un $\neg r$-filtre et l'algèbre quotient A/F(a) est une image homomorphe de A.

2.8. Un $\neg r$-filtre propre M est dit *maximal* lorsque, pour tout $\neg r$-filtre F, si $M \subset F$, alors $F = A$.

La famille de tous les $\neg r$-filtres propres, ordonnée par inclusion est inductive supérieurement, donc chaque $\neg r$-filtre propre est contenu dans un $\neg r$-filtre maximal.

2.9. Un $\neg r$-filtre F est dit *lié à* a si F est un $\neg r$-filtre maximal parmi ceux qui ne contiennent pas l'élément a de A.

En vertu du lemme de Zorn, on peut montrer qu'étant donnés un $\neg r$-filtre F et $a \notin F$ il existe un $\neg r$-filtre M contenant F et lié à a.

Une caractérisation des $\neg r$-filtres liés à un élément a, au moyen des opérateurs T_n et de l'implication intuitionniste, est la suivante.

2.10. Pour qu'un $\neg\Gamma$-filtre F d'une H-B-algèbre A soit *lié à* <u>a</u> , il faut et il suffit que : (1) $a \notin F$
(2) pour tout $x \notin F$, il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $T_n x \Rightarrow a \in F$. Ceci est une version algébrique du théorème de la déduction.

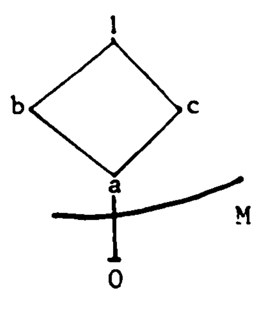
En particulier ,

2.11. Pour qu'un $\neg\Gamma$-filtre propre M soit maximal, il faut et il suffit que pour tout $x \notin M$, il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $\neg T_n x \in M$.

2.12. Si M est un $\neg\Gamma$-filtre maximal de A, le quotient $A' = A/M$ est une H-B-algèbre telle que si $x' \in A'$ et $x' \neq 1'$ il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $T_n x' = 0$.

En effet soient M un $\neg\Gamma$-filtre maximal de A et $A' = A/M$. Si $x' = |x| \in A'$ est tel que $x' \neq 1$ alors $x \notin M$. D'après le résultat 2.11, il existe un $n \in N$ tel que $\neg T_n x \in M$; autrement dit $|\neg T_n x| = \neg T_n |x| = 1$ et $\neg\neg T_n |x| = 0$; d'où $T_n x' \leqslant \neg\neg T_n x' = 0$.

Dans la théorie des algèbres de Heyting, on connaît le résultat suivant [16, p. 53-54] : si H est une algèbre de Heyting, le radical R(H), c'est-à-dire l'intersection de tous les ultrafiltres de H, est constitué par l'ensemble des éléments denses, autrement dit les éléments x de H tels que $\neg x = 0$, et le quotient H/R(H) est une algèbre de Boole isomorphe à l'algèbre de Glivenko des éléments réguliers de H. Ainsi, par exemple si A est l'algèbre de Heyting donnée par le diagramme fini ci- contre, il existe un seul ultrafiltre $M = \{a,b,c,1\}$ et A/M est l'algèbre de Boole à deux éléments.



Dans le cas des H-B-algèbres, nous ne savons pas quels sont les éléments du radical. Nous sommes parvenus à montrer que pour certains cas particuliers -Stone, finies- le radical de A est réduit à l'élément unité, autrement dit que les algèbres sont semi-simples. Mais nous ne savons pas si dans le cas général les H-B-algèbres sont aussi semi-simples.

III. LES H-B-ALGEBRES DE STONE.

Parmi les H-B-algèbres, nous allons considérer, par la suite, une classe particulière, celle constituée par les H-B-algèbres dites de Stone. Ainsi :

3.1. Une H-B-algèbre est dite de *Stone* si elle satisfait à la condition suivante :

(S1) $\quad \neg x \vee \neg\neg x = 1$.

Dans ce cas il est bien connu que les égalités

$$\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y,$$

$$\neg\neg x = \Gamma\neg x$$

sont valables et on a aussi que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n(A) = B(A)$. L'opérateur T_1 vérifie alors la condition $T_1 T_1 x = T_1 x$, pour tout $x \in A$, c'est-à-dire T_1 est un opérateur d'intérieur sur A.

Si F est un $\neg\Gamma$-filtre d'une H-B-algèbre de Stone A et $x \in F$, il existe un élément $b = T_1 x \in F \cap B(A)$ tel que $b \leq x$. Les $\neg\Gamma$-filtres sont donc des filtres dits *stoniens* [14, p. 152].

Si F est un $\neg\Gamma$-filtre d'une H-B-algèbre de Stone A, alors $F^* = F \cap B(A)$ est un filtre de B(A) et $F = \{x \in A : b \leq x \text{ pour un } b \in F^*\}$.

Inversement, si F^* est un filtre de $B(A)$, alors le filtre F engendré par F^* est un $\neg\Gamma$-filtre tel que $F \cap B(A) = F^*$.

Soit $\mathfrak{A}$ la famille de tous les $\neg\Gamma$-filtres de A et $\mathfrak{B}$ celle de tous les filtres de $B(A)$, ordonnées par inclusion. L'application $\phi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ définie au moyen de l'égalité $\phi(F) = F \cap B(A)$ est un isomorphisme d'ordre entre $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$.

En particulier, les éléments maximaux de ces deux familles se correspondent par ϕ. Dès que l'intersection des ultrafiltres de $B(A)$ est égale à $\{1\}$ et $\{1\}$ est aussi un $\neg\Gamma$-filtre de A on conclut que $R(A) = \{1\}$. D'où l'assertion suivante.

3.2. Les H-algèbres de Stone sont *semi-simples*.

Si A est une algèbre *finie*, pour tout $x \in A$, il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $T_{n+1}x = T_n x$, c'est-à-dire tel que $T_n x \in B(A)$. Soit P un entier positif tel que $T_P(A) = B(A)$. L'opérateur T_P est donc un opérateur d'intérieur sur A. En suivant le même chemin, on peut montrer un résultat analogue au précédent pour les H-B-algèbres *finies*.

3.3. Nous dirons qu'une H-B-algèbre de Stone non triviale A est *simple* si les seules images homomorphes de A sont A elle-même et l'algèbre triviale.

3.4. Pour qu'une H-B-algèbre de Stone non triviale A soit *simple*, il faut et il suffit que $B(A) = \{0,1\}$.

En effet, supposons que $x \in A$, $x \neq 1$ et $T_1 x \neq 0$. Le filtre $F(T_1 x)$ engendré par l'élément $T_1 x \in B(A)$ est un $\neg\Gamma$-filtre propre et il est donc contenu dans un $\neg\Gamma$-filtre maximal M. Le quotient $A/M = A'$ est une image homomorphe de A contenant plus d'un élément. D'après le résultat 2.12, l'algèbre A' possède seulement deux éléments 0 et 1 tels que $T_1 x = x$, tandis que A a au moins trois éléments $0, T_1 x$ et 1 dans ces conditions.

En conséquence, A' ne peut pas être isomorphe à A et A n'est pas simple.

Inversement, A ne possède que deux $\neg\Gamma$-filtres à savoir $\{1\}$ et A. En effet, si F est un $\neg\Gamma$-filtre tel que $F \neq \{1\}$, soit $x \in F$, $x \neq 1$. Donc $T_1 x \in F$; mais, d'après la condition supposée, $T_1 x = 0$ et alors $0 \in F$ et $F = A$.

Remarquons que, si A est une chaîne et si $x \neq 1$, on a $\neg\Gamma x = 0$. D'après le résultat que nous venons de rappeler, on peut dire ceci.

3.5. Les chaînes non triviales sont donc des algèbres simples. En outre, d'après le résultat 2.12 :

3.6. Si M est un $\neg\Gamma$-filtre maximal d'une H-B-algèbre de Stone A, l'algèbre quotient $A' = A/M$ est une algèbre simple.

En tenant compte du fait que les H-B-algèbres de Stone sont semi-simples et de ce que nous venons de dire, nous pouvons énoncer, d'après un théorème de Birkhoff [1, P. 140] d'algèbre universelle, le théorème de représentation suivant .

3.6. THEOREME DE REPRESENTATION. - Toute H-B-algèbre de Stone non triviale A est isomorphe à un sous-produit direct d'algèbres simples.

En suivant le même chemin on peut énoncer un résultat analogue pour les H-B-algèbres *finies*.

IV. LES H-B-ALGEBRES DOUBLEMENT DE STONE . Une classe particulière de H-B-algèbre est fournie par les H-B-algèbres dites *doublement de Stone*. Ainsi :

4.1. Les H-B-algèbres *doublement de Stone* sont les H-B-algèbres vérifiant les conditions

$$(S1) \quad \neg x \vee \neg\neg x = 1,$$

$$(S2) \quad \Gamma x \wedge \Gamma\Gamma x = 0 \quad .$$

Pour les H-B-algèbres doublement de Stone, nous avons encore les rapports suivants entre les $\neg\Gamma$-filtres maximaux et les filtres premiers.

4.2. Dans une H-B-algèbre doublement de Stone, si M est un $\neg\Gamma$-filtre lié à a, alors $\Gamma a \in M$.

En effet, si $\Gamma a \notin M$, on déduit, d'après le résultat 2.10 et des propriétés indiquées précédemment, que $T_1 \Gamma a \Rightarrow a \in M$. Mais $T_1 \Gamma a = \neg\Gamma\Gamma a = \Gamma\Gamma\Gamma a = \Gamma a$; alors (1) $\Gamma a \Rightarrow a \in M$. En tenant compte du fait que, dans une algèbre de Heyting, on a toujours $x \vee y \leq (x \Rightarrow y) \Rightarrow y$, il en résulte que $1 = \Gamma a \vee a \leq (\Gamma a \Rightarrow a) \Rightarrow a$, c'est-à-dire $(\Gamma a \Rightarrow a) \Rightarrow a = 1$ et $\Gamma a \Rightarrow a \leq a$. Or, l'autre inégalité étant toujours valable, on a donc (2) $\Gamma a \Rightarrow a = a$, et de (1) et (2) on tire $a \in M$, ce qui est impossible.

4.3. Dans une H-B-algèbre doublement de Stone A tout $\neg\Gamma$-filtre M lié à a est maximal.

En effet, s'il existait un $\neg\Gamma$-filtre F tel que $M \subset F$, on en déduirait, en raison de la maximalité de M par rapport à a, que $a \in F$ et $\Gamma a \in M$ (d'après 4.2). Donc $\neg\Gamma a \in F$ et $\Gamma a \in M \subset F$; d'où $\neg\Gamma a \wedge \Gamma a = 0 \in F$ et $F = A$.

4.4. Dans une H-B-algèbre doublement de Stone tout $\neg\Gamma$-filtre maximal M est un filtre premier.

En effet, supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Il existerait donc deux éléments $a, b \in A$ tels que $a \vee b \in M$, $a \notin M$, $b \notin M$. M étant en particulier un filtre propre d'un treillis distributif , il existe un filtre premier P contenant M et qui ne contient pas b. Remarquons que, d'après le résultat 4.2, $\Gamma a \in M \subsetneq P$ car M est un $\neg\Gamma$-filtre maximal ne contenant pas a.

En tenant compte de ce que M est un $\neg\Gamma$-filtre et $a \vee b \in M$, on déduit $\neg\Gamma(a \vee b) = \neg\Gamma a \vee \neg\Gamma b \in M \subset P$ et, du fait que P est premier, $\neg\Gamma a \in P$ ou $\neg\Gamma b \in P$. Dans les deux cas, on tire une contradiction, car si $\neg\Gamma a \in P$, comme $\Gamma a \in P$, on aurait $\neg\Gamma a \wedge \Gamma a = 0 \in P$ et, si $\neg\Gamma b \in P$, on aurait $\neg\Gamma b \leq b \in P$. La démonstration est ainsi achevée.

4.5. Dans une H-B-algèbre doublement de Stone tout $\neg\Gamma$-filtre maximal M est un filtre premier minimal.

En effet, le $\neg\Gamma$-filtre maximal M est un ultrafiltre stonien d'un treillis distributif qui, d'après le résultat précédent, est premier; donc, en vertu de [3, lemme 3.1, p. 136], il est minimal.

Passons maintenant au cas *fini*. Si A est une H-B-algèbre doublement de Stone finie tous les filtres de A sont principaux et tous les $\neg\Gamma$-filtres sont exactement les filtres principaux engendrés par les éléments de B(A). En particulier, les $\neg\Gamma$-filtres maximaux de A sont les filtres principaux F(b) engendrés par les atomes b de B(A).

On peut déterminer la structure de l'algèbre quotient A/F(b) en fonction de A et l'élément $b \in B(A)$. Ainsi, soit

$$A_b = \{x \in A : \text{tels que } x \leq b\} .$$

A_b est un idéal de A, donc un sous-treillis de A ayant 0 et b comme plus petit et plus grand élément. Pour tout $x \in A$, posons $h(x) = x \wedge b$. L'application h est un homomorphisme de A sur A_b qui laisse inchangés les éléments de A_b et dont le noyau est le filtre F(b). De plus, A_b est une H-B-algèbre doublement de Stone isomorphe à A/F(b).

En vertu d'une méthode standard, on montre ainsi que :

4.6. Toute H-B-algèbre doublement de Stone *finie* et non triviale est isomorphe au produit direct $A_{b_1} \times \ldots \times A_{b_n}$, où $b_1, \ldots, b_n$ sont les atomes de B(A).

La démonstration consiste à faire correspondre à chaque $x \in A$ l'élément $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, où $x_i = x \wedge b_i$.

V. LES H-B-ALGEBRES DOUBLEMENT LINEAIRES.

Nous avons indiqué dans 2.3 que les chaînes sont des exemples de H-B-algèbres spéciales. Nous sommes ainsi amenés à considérer les H-B-algèbres qui vérifient les conditions (D) et (D'). Pour l'égalité (D), voir le travail de Dummet [4] . Les algèbres de Heyting vérifiant la condition (D) ont été étudiées, sous le nom d'algèbres linéaires ou de Ward, par A. Monteiro [17, 18] et, sous le nom de L-algèbre, par Horn [6] . Cette notion a été considérée par Moisil [12] et ces structures jouent un rôle fondamental dans l'étude du calcul propositionnel LC qui a été étudié par Dummet.

5.1. Ainsi une H-B-algèbre est dite *doublement linéaire* si elle satisfait aux conditions (D) et (D').

Rappelons que dans une algèbre de Heyting linéaire les conditions

a- $(x \Rightarrow y) \vee (y \Rightarrow x) = 1$,

b- $x \vee y = ((x \Rightarrow y) \Rightarrow y) \wedge ((y \Rightarrow x) \Rightarrow x)$,

c- $x \Rightarrow (y \vee z) = (x \Rightarrow y) \vee (x \Rightarrow z)$,

d- $(x \wedge y) \Rightarrow z = (x \Rightarrow z) \vee (y \Rightarrow z)$

sont équivalentes deux à deux [17, 18] et, de plus, les algèbres de Heyting linéaires sont en particulier des treillis de Stone.

Dans une H-B-algèbre doublement linéaire on a donc les égalités suivantes :

$$\neg x \vee \neg\neg x = 1, \qquad \ulcorner x \wedge \ulcorner\ulcorner x = 0,$$

$$\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y, \qquad \ulcorner(x \vee y) = \ulcorner x \wedge \ulcorner y,$$

$$\ulcorner\neg x = \neg\neg x, \qquad \neg\ulcorner x = \ulcorner\ulcorner x,$$

$$T_n x = T_1 x .$$

On voit ainsi que tous les résultats mentionnés jusqu'à présent restent valables pour les H-B-algèbres doublement de Stone. Mais on a davantage. Rappelons pour cela une caractérisation des algèbres de Heyting linéaires au moyen de la famille de ses filtres premiers. [17, 18, 6].

5.2. Pour qu'une algèbre de Heyting soit linéaire, il faut et il suffit que l'ensemble des filtres premiers qui contient un filtre premier soit totalement ordonné par inclusion.

Donc, en faisant intervenir la double linéarité et le résultat 5.2, on peut conclure comme il suit.

5.3. Pour qu'une H-B-algèbre A soit doublement linéaire, il faut et il suffit que l'ensemble des filtres premiers de A, ordonnée par inclusion, soit la somme cardinale des chaînes maximales (disjointes).

Si l'on observe la démonstration de près, en faisant intervenir un résultat de Varlet [25, p. 81] , on voit qu'on a besoin en réalité des conditions (D) et (S2). Ainsi les H-B-algèbres doublement linéaires coïncident aves les H-B-algèbres qui satisfont aux conditions (D) et (S2). Elles peuvent être donc définies comme systèmes $(A, \wedge, \vee, \Rightarrow, \ulcorner, 0, 1)$ satisfaisant à certaines conditons.

Epstein et Horn [5, P. 198] ont aussi remarqué que ces algèbres peuvent être caractérisées de la façon suivante. Elles sont des treillis distributifs ayant 0 et 1 dans lesquels, pour tous $x, y \in A$, il existe un plus grand élément *booléen* $z = x \longrightarrow y$ tel que $x \wedge z \leqslant y$ et la condition suivante est satisfaite :

$$(x \longrightarrow y) \vee (y \longrightarrow x) = 1 \cdot$$

L'implication intuitionniste $\Longrightarrow$ s'exprime au moyen de l'égalité :

$$x \Longrightarrow y = (x \longrightarrow y) \vee y \qquad \text{et}$$

$$\ulcorner x = \ulcorner(1 \longrightarrow x) = -(1 \longrightarrow x) \quad (\text{"-" est le complément}).$$

D'autre part :

5.4. Les algèbres quotients $A' = A/M$, où A est une H-B-algèbre doublement linéaire et M est un π-filtre maximal de A, sont des chaînes. En effet, du fait $(x \Rightarrow y) \vee (y \Rightarrow x) = 1 \in M$ et M filtre premier, on a $x \Rightarrow y \in M$ ou $y \Rightarrow x \in M$. Alors $|x| \leqslant |y|$ ou $|y| \leqslant |x|$.

Ce résultat nous permet de montrer ceci.

5.5. Pour qu'une H-B-algèbre doublement linéaire non triviale soit *simple*, il faut et il suffit qu'elle soit une chaîne.

En effet, toute chaîne, d'après le résultat 3.5 est simple. Supposons que A soit simple et non triviale. Comme A contient plus d'un élément, il existe, d'après 3.2, un π-filtre maximal M. En vertu du résultat précédent, A/M est une chaîne ayant plus d'un élément. L'algèbre A étant simple, on a $A \cong A/M$ et A est une chaîne.

Dans ce cas le théorème de représentation peut être amélioré ainsi.

5.6. Toute H-B-algèbre doublement linéaire non triviale est isomorphe à un sous-produit direct de chaînes.

En particulier, si A est *finie* :

5.7. Toute H-B-algèbre doublement linéaire *finie* et non triviale est isomorphe à un produit direct de chaînes.

5.8. Une algèbre est dite *sous-directement irréductible* si, pour toute famille non vide $\{A_i\}_{i \in I}$ d'algèbres telles que A soit isomorphe à un sous-produit direct A' des $\{A_i\}$, il existe un indice $i \in I$ tel que la projection $\pi_i : A' \to A_i$ soit un isomorphisme.

5.9. Les H-B-algèbres doublement linéaires sous-directement **irréductibles** sont les chaînes.

5.10. Les H-B-algèbres doublement linéaires *libres* ont été **étudiées par** Epstein et Horn [5, p. 203] . Ces auteurs ont montré que les **H-B-algèbres** doublement linéaires finiment engendrées par un ensemble fini **de puissance** n sont finies, et ils ont donné une formule qui exprime, pour **chaque n**, le nombre d'éléments de l'algèbre. Ainsi, si n=1, l'algèbre libre **a** 12 éléments ; si n=2, l'algèbre libre possède 62.208 éléments. **Rappelons** au passage qu' au contraire, l'algèbre de Heyting engendrée **librement par** un élément est infinie.

VI. SOUS-PRODUIT DIRECT DE CHAINES T ET B.

Parmi les chaînes, on peut considérer celles données par **l'exemple** 2.2. Il est naturel de se demander quelles conditions doit vérifier **une** H-B-algèbre pour qu'elle soit isomorphe à une sous-algèbre d'un **produit** direct d'algèbres T. Dans le cas des algèbres de Heyting, on sait **qu'il** faut et il suffit que la condition

(T) $(\neg x \Longrightarrow y) \longrightarrow (((y \longrightarrow x) \longrightarrow y)) \Longrightarrow y) = 1$ ([10, p. 286] et [19])

soit satisfaite.

6.1. Nous allons considérer par la suite une classe particulière **de H-B-**algèbres, constituée par celles qui satisfont à l'égalité **suivante :**

(L) $(x \Longrightarrow y) \vee (y \Longrightarrow \neg\Gamma x) = 1$ [8],

laquelle peut aussi s'écrire :

(L') $(x \Longrightarrow y) \vee (\Gamma x \Longrightarrow \neg y) = 1$

car, dans une algèbre de Heyting, on a l'égalité $a \Longrightarrow \neg b = b \Longrightarrow \neg a$.

6.2. Si la condition (L) est vérifiée, les égalités (D) et (S2) le sont aussi.

En effet, de $\neg\ulcorner x \leq x$, on déduit $y \Rightarrow \neg\ulcorner x \leq y \Rightarrow x$ et $(x \rightarrow y) \vee (y \rightarrow \neg\ulcorner x) \leq (x \rightarrow y) \vee (y \rightarrow x)$.

En outre, en remplaçant y par $\ulcorner x$ dans la condition (L) on obtient :

(1) $(x \rightarrow \ulcorner x) \vee (\ulcorner x \Rightarrow \neg\ulcorner x) = 1$.

Observons que, dans toute algèbre de Heyting, on a $x \vee y \leq (x \Rightarrow y) \Rightarrow y$ et, du fait que $x \vee \ulcorner x = 1$ on a $1 = x \vee \ulcorner x \leq (x \Rightarrow \ulcorner x) \Rightarrow \ulcorner x$. On déduit de là que $x \Rightarrow \ulcorner x \leq \ulcorner x$. L'inégalité opposée étant toujours valable, on a bien l'égalité

(2) $x \Rightarrow \ulcorner x = \ulcorner x$.

D'autre part, dans toute algèbre de Heyting, $x \Rightarrow \neg x = \neg x$, d'où

(3) $\ulcorner x \Rightarrow \neg\ulcorner x = \neg\ulcorner x$.

De (1), en tenant compte de (2) et (3), on déduit :

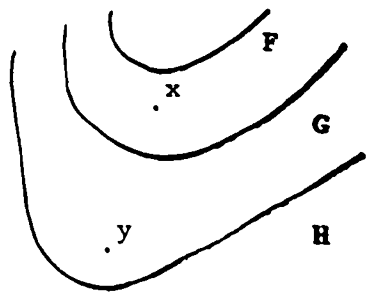
(4) $\ulcorner x \vee \neg\ulcorner x = 1$.

Il en résulte $\ulcorner\ulcorner x \leq \neg\ulcorner x$ et $\ulcorner x \wedge \ulcorner\ulcorner x \leq \neg\ulcorner x \wedge \ulcorner x = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Les résultats précédents restent vrais pour ces structures. Mais on peut encore montrer que :

6.3. Si A est une H-B-algèbre vérifiant la condition (L), et si F est un $\neg\ulcorner$-filtre maximal, le quotient A/F est une chaîne à trois ou deux éléments.

En effet, supposons qu'il existe un $\neg\ulcorner$-filtre maximal F tel que A/F qui, d'après 5.4, est une chaîne, possède au moins quatre éléments. Cela signifie qu'il existe deux filtres premiers G et H tels que $F \subset G \subset H$.



Soient (1) $x \in G-F$ et (2) $y \in H-G$. De $y \leq x \Rightarrow y$ et (2), il résulte (3) $x \Rightarrow y \in H$. De plus, (4) $x \Rightarrow y \notin G$ car si (5) $x \Rightarrow y \in G$, de (1) et (5), on déduit $y \in G$ ce qui contredit (2). Puisque $F \subset G \subset H$ et (4), on a (6) $x \Rightarrow y \notin F$. Du fait (7) $(x \Rightarrow y) \vee (y \Rightarrow \neg\ulcorner x) = 1 \in F$ et (6), F étant un filtre premier, on déduit (8) $y \Rightarrow \neg\ulcorner x \in F \subset H$. De (2) et **(8), d'après** le modus ponens on déduit (9) $\neg\ulcorner x \in H$. Or, d'après (1) et le **résultat 4.2**, on a (10) $\ulcorner x \in F$, et, de (9) et (10), on conclut $\neg\ulcorner x \wedge \ulcorner x = 0 \in H$ et H **= A , ce** qui contredit le fait pour H d'être premier, donc propre.

On peut donc conclure ceci.

6.4. Pour qu'une H-B-algèbre A non triviale vérifiant la condition **(L) soit** *simple*, il faut et il suffit qu'elle soit une chaîne à trois ou **deux éléments**.

Le résultat suivant donne une réponse à la question posée **plus** haut .

6.5. Pour qu'une H-B-algèbre A non triviale soit isomorphe à un **sous**-produit direct de sous-algèbres de T, il faut et il suffit qu'elle **vérifie** la condition (L).

En effet, la condition nécessaire se déduit du fait que **l'égalité** (L) est valable dans T et B, donc elle est valable dans tout produit **direct** d'algèbres T et B et dans toute sous-algèbre d'un tel produit.

Pour voir que la condition est aussi suffisante, observons **que si A** satisfait à la condition (L), elle est doublement linéaire. D'après **le** théorème de représentation 3.7, elle est isomorphe à un sous-produit **direct** d'algèbres simples. La démonstration s'achève en vertu du résultat **précédent**.

En combinant ce fait avec un résultat de Varlet [26 , p. 404], on peut conclure que les H-B-algèbres satisfaisant à la condition (L) sont des algèbres de Lukasiewicz trivalentes. On obtient ainsi une autre caractérisation de ces dernières algèbres.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] BIRKHOFF G., Lattice theory, *Amer. Math. Soc.* Coll. Publ. 25, 3e ed. 1967, MR 37#2638.

[2] CIGNOLI R., Moisil algebras, *Notas de Logica matemàtica* n° 27, Univ. Nac. del Sur, Bahìa Blanca, Argentina, 1970, MR 49 # 10614, Zbl 212,317.

[3] CIGNOLI R., Stone filters and ideals in distributive lattices, *Bull. Math.* 15 (1971), 131-137, MR 48#191, Zbl 259. 06005.

[4] DUMMET M., A propositional calculus with denumerable matrix, *Jour. Symb. Log.* 24 (1959) 97-106. MR 23#A801.

[5] EPSTEIN G. and HORN A., P-algebras, an abstraction from Post algebras, *Alg. Univ.* 4 (1974) 195-206. Zbl. 294. 06010.

[6] HORN A., Logic with truth values in a linearly ordered Heyting algebra, *Jour. Symb. Log.* 34 (1969) 395-408. MR 40#7089.

[7] ITURRIOZ L. Sur les algèbres de Heyting-Brouwer, *Bull. Acad. Pol. Sci.* (à paraître).

[8] ITURRIOZ L. , Les algèbres de Heyting-Brouwer et de Lukasiewicz trivalentes, *Notre Dame Jour. Formal Log.* 17 (1976) 119-126.

[9] ITURRIOZ L., Lukasiewicz and symmetrical Heyting algebras, (à paraître).

[10] LUKASIEWICZ J. , Selected works, ed. L. Borkowski, Studies in Logic, Notth-Holland, 1970. MR 45#3155. Zbl. 212. 9.

[11] MC KINSEY J.C.C. and TARSKI A. , On closed elements in closure algebra, *Annals of Math.* 47 (1946) 122-162. MR 7, 359.

[12] MOISIL GR., Recherches sur l'algèbre de la logique, *Annals Sci. Univ.* Jassy, 22 (1935) 1-117.

[13] MOISIL GR., Les logiques non-chrysipiennes et leurs applications, *Acta Phil. Fennica*, 16 (1963) 137-152. MR 28# 2969.

[14] MONTEIRO A., L'arithmétique des filtres et les espaces topologiques, *Segundo Symp. Latinoamericano de Mat.* Centro de Coop. Cientifica Unesco, Montevideo (1954) 129-162. Voir aussi *Notas de Lógica Mat.* n° 29-30, Univ. Nac. del Sur, Bahia Blanca, Argentina, 1974, MR 17, 649.

[15] MONTEIRO A., Axiomes indépendants pour les algèbres de Brouwer, *Rev. Unión Mat., Arg.* 17 (1955) 149-160. MR 18, 867.

[16] MONTEIRO A. y VARSAVSKY O., Algebras de Heyting monàdicas, *Actas X Jornadas Union Mat. Arg.* 1957, 52-62. Voir aussi *Notas de Lógica Mat.* n° 1 , Bahia Blanca, Argentina, 1974.

[17] MONTEIRO A., Linéarisation de la logique positive de Hilbert-Bernays *Rev. Unión Mat. Argentina*, 20 (1962) 308-309.

[18] MONTEIRO A., Linearización de la lógica positiva de Hilbert-Bernays cours donné à l'Univ. Nac. del Sur, Bahia Blanca, Argentina 1964.

[19] MONTEIRO L. , Algèbre du calcul propositionnel trivalent de Heyting Fund. Math. 74 (1972) 99-109. MR 45#4957. Zbl. 248, 02070.

[20] RASIOWA H., An algebraic approach to non-classical logics, Studies in Logic, Vol. 78, North-Holland, 1974.

[21] RAUSZER C. , Representation theorem for semi-Boolean algebras, I, II, *Bull. Acad. Pol. Sci.*, 19 (1971) 881-887 ; ibid. 19 (1972) 889-892. MR 46#1668. Zbl 227, 02036.

[22] RAUSZER C., Semi-Boolean algebras and their application to intuitionistic logic with dual operations, Fund. Math. 83 (1974) 219-249.

[23] ROSSER J.B. and TURQUETTE A.R., Many-valued logics, Studies in Logic, North-Holland, 1951, MR 14, 526.

[24] ROUSSEAU G., Post algebras and pseudo-Post algebras, Fund. Math. 67 (1970) 133-145.

[25] VARLET J., On the characterization of Stone lattices, *Acta Sci. Math.* (Szeged) 27 (1966) 81-84. MR 33#2580.

[26] VARLET J., Algèbres de Lukasiewicz trivalentes, *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège* 36 (1968) 399-408. MR 38#5676, Zbl. 175, 266.

Luisa ITURRIOZ
Instituto de Matematica
Universidad Nacional del Sur
BAHIA BLANCA - ARGENTINA.