ANDRÉ ROUX

Quelques remarques sur les théories cohomologiques orientables

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1975, tome 12, fascicule 3
, p. 11-49

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1975__12_3_11_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1975 t. 12-3

QUELQUES REMARQUES SUR LES THEORIES COHOMOLOGIQUES ORIENTABLES

par André ROUX

INTRODUCTION.

Le but de ce travail est d'examiner la structure d'une théorie cohomologique G-orientable au sens de Dold [7], pour G = O, SO, U, SU, Sp.

Tout d'abord, dans le premier paragraphe, on étudie, pour une théorie cohomologique, l'obstruction à sa G-orientabilité (G = O, U, Sp), en utilisant le principe de scindage. En particulier, on montre que l'existence de suffisament de zéros bien placés dans l'anneau gradué des coefficients d'une théorie cohomologique (multiplicative), entraîne sa G-orientabilité (G = U, Sp).

Dans le paragraphe 2, on calcule, en basses dimensions, l'obstruction à la O-orientabilité d'une théorie cohomologique.

Dans le paragraphe 3, on donne un théorème de structure pour une théorie cohomologique O-orientable, généralisant l'isomorphisme de Boardman pour le cobordisme non-orienté.

Dans le paragraphe 4, on montre comment associer canoniquement à une théorie cohomologique SO-orientable, une théorie cohomologique O-orientable.

Dans le paragraphe 5, on étudie, suivant une méthode due à Adams [1], les théories cohomologiques U-orientables ; et on en donne, sous certaines conditions, la structure.

Enfin, dans le paragraphe 6, on associe à une théorie cohomologique SU-orientable, une théorie cohomologique U-orientable. Ces deux théories sont reliées par un couple exact qui permet de donner quelques informations sur la théorie SU-orientable en fonction de la théorie U-orientable associée qui est, en général, plus "simple".

SOMMAIRE.

I. GENERALITES.

(1.1) Soient $S^n = \{(x_1,\dots,x_{n+1}) \in R^{n+1} \mid \Sigma\, x_i^2 = 1\}$ la sphère unité de R^{n+1}, RP^n noté simplement P^n l'espace projectif réel de dimension n (i.e. l'espace des droites de R^{n+1}), et $\eta_n : S^n \longrightarrow P^n$ le fibré naturel en 0-sphères qui, à un point de S^n, associe la droite de R^{n+1} passant par ce point.

On a le carré cocartésien (et cartésien) ci-dessous :

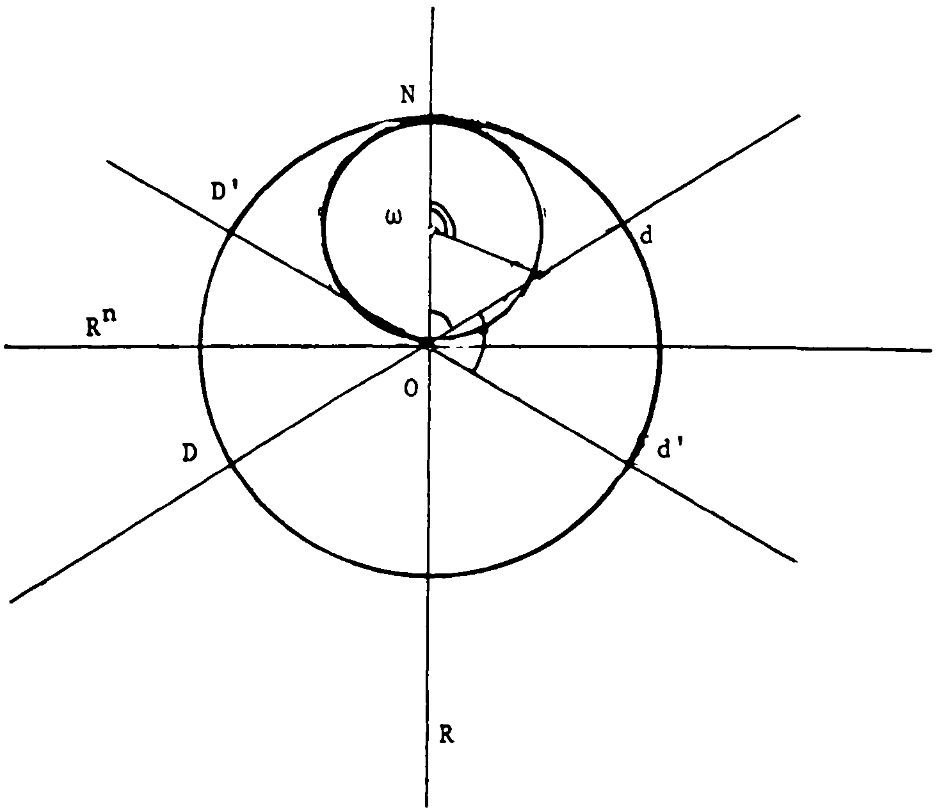
$$\begin{tikzcd}
S^{n-1} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\eta_{n-1}"'] & S^n_+ \arrow[d, "\eta_n^+"] \\
P^{n-1} \arrow[r, hook, "i_{n-1}"] & P^n
\end{tikzcd}$$

dans lequel les flèches horizontales sont les inclusions naturelles induite par celle de $R^n = R^n \times 0$ dans R^{n+1} et dans lequel η_n^+ est la restriction de η_n à la calotte supérieure $S^n_+ = \{(x_1,\dots,x_{n+1}) \in S^n / x_{n+1} \geq 0\}$ de S^n.

Le couple (η_n^+ , η_{n-1}) définit un homéomorphisme de S^n_+/S^{n-1} sur P^n/P^{n-1} et, à l'aide de l'homéomorphisme naturel entre S^n_+/S^{n-1} et S^n, on définit la projection

$$\Pi_n : P^n \longrightarrow P^n/P^{n-1} \approx S^n_+/S^{n-1} \approx S^n.$$

Géométriquement, on a le dessin ci-dessous :



π_n est l'application qui, à la droite D de R^{n+1}, associe le point d' de S^n qui vérifie $(\overrightarrow{ON},\overrightarrow{Od'}) = 2(ON,D)$. Par suite, $\pi_n\eta_n : S^n \longrightarrow S^n$ envoie d sur d' et $\eta_n\pi_n : P^n \longrightarrow P^n$ envoie D sur D'. En termes de coordonnées, on a $\pi_n\eta_n : (x_1,\dots,x_{n+1}) \longmapsto (2x_1x_{n+1},\dots,2x_nx_{n+1},2x_{n+1}^2 - 1)$ de S^n dans S^n et $\eta_n\pi_n : [x_1,\dots,x_{n+1}] \longmapsto [2x_1x_{n+1},\dots,2x_nx_{n+1},2x_{n+1}^2 - 1]$ de P^n dans P^n.

Soit $j_n = i_{n-1}\dots i_1$ l'inclusion de P^1 dans P^n qui, à la droite $[x_1,x_2]$ de R^2, associe la droite $[x_1,x_2,0,\dots,0]$ de R^{n+1}. L'application "cône de l' inclusion de S^0 dans S^{n-1}", notée h_n et considérée de S^1_+ dans S^n_+ (c'est-à-dire $h_n : (x_1,x_2) \in S^1_+ \longmapsto (x_1,0,\dots,0,x_2) \in S^n_+$), induit une injection $k_n : P^1 \longrightarrow P^n$ qui associe à la droite $[x_1,x_2]$ de R^2 la droite $[x_1,0,\dots,0,x_2]$ de R^{n+1}. Avec ces notations, on a le diagramme commutatif ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
 & S^{n-1} \arrow[rr] \arrow[dd, "\eta_{n-1}"] & & S^n_+ \arrow[dd, "\eta_n^+"] \\
S^0 \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd, "\eta_0"'] & & S^1_+ \arrow[ur, "h_n"] \arrow[dd, "\eta_1^+"] & \\
 & P^{n-1} \arrow[rr] & & P^n \\
P^0 \arrow[ur] \arrow[rr] & & P^1 \arrow[ur, "k_n"'] &
\end{tikzcd}$$
.

Il est évident que la transposition : $(x_1,\ldots,x_{n+1}) \longmapsto (x_1,x_{n+1},x_3,\ldots,x_n,x_2)$ de R^{n+1} induit un homéomorphisme t_n de P^n sur lui-même pour lequel on a $t_n k_n = j_n$.

REMARQUE. - On a des sorites analogues que nous n'explicitons pas pour les espaces projectifs complexes CP^n et les espaces projectifs quaternioniques HP^n.

(1.2) Sur la catégorie des CW-complexes finis, soit h^* une théorie cohomologique munie d'une multiplication associative et unitaire.

Pour $G = 0$ -resp. U, Sp - , on dit que h^* est G-orientable si tout K-fibré vectoriel avec $K = R$ -resp. C, H - est h^*-orientable au sens de Dold [7]. D'après le principe de scindage, il est bien connu ([7] p. 44-52) que h^* est G-orientable si et seulement si, pour tout $n \in N$, le fibré en K-droites associé au $G(1)$-fibré principal $\eta_n : S^n \longrightarrow P^n$ -resp. $\nu_n : S^{2n+1} \longrightarrow CP^n$, $\mu_n : S^{4n+3} \longrightarrow HP^n$ - est h^*-orientable.

Soit $\sigma : \tilde{h}^{*} \longrightarrow \tilde{h}^{*+1}S$ l'isomorphisme de suspension. Alors, $h^{*}(S^n)$ est la $h^{*}(pt)$ - algèbre extérieure sur $\sigma^n(1) \in h^n(S^n)$ où $1 \in h^0(pt) = \tilde{h}^0(S^0)$ est l'unité de h^{*}.
Pour $n = 0$, on a $KP^0 = pt$; pour $n = 1$, $\eta_1 : P^1 \longrightarrow S^1$ - resp. $\nu_1 : CP^1 \longrightarrow S^2$, $\mu_1 : HP^1 \longrightarrow S^4$ - est un homéomorphisme et on note $u_1 = \pi_1^{*}(\sigma(1)) \in \tilde{h}^1(P^1)$ - resp. $v_1 = \pi_1^{*}(\sigma^2(1)) \in \tilde{h}^2(CP^1)$, $w_1 = \pi_1^{*}(\sigma^4(1)) \in \tilde{h}^4(HP^1)$ -.

D'après (1.1), l'homomorphisme de connexion de la suite exacte (pour h^{*}) définie par la suite de Puppe de η_{n-1} est $\pi_n^{*}\sigma : \tilde{h}^{*}(S^{n-1}) \rightarrow \tilde{h}^{*+1}(S^n) \longrightarrow \tilde{h}^{*+1}(P^n)$; donc, cette suite exacte s'écrit :

$$(1) \quad \ldots \approx \tilde{h}^i(S^n) \xrightarrow{\pi_n^{*}} \tilde{h}^i(P^n) \xrightarrow{i_{n-1}^{*}} \tilde{h}^i(P^{n-1}) \xrightarrow{\eta_{n-1}^{*}} \tilde{h}^i(S^{n-1}) \approx \tilde{h}^{i+1}(S^n) \longrightarrow \ldots$$

(1.2.1) PROPOSITION. - *Pour que* h^{*} *soit 0-orientable, il faut et il suffit que, pour tout* $n \in N$, $\eta_n^{*} : h^1(P^n) \longrightarrow \tilde{h}^1(S^{n-1})$ *soit nul (ceci est évident pour* $n=0$*).*

La partie directe est classique : si η_n est h^{*}-orientable, **dans** la suite exacte (1) , i_{n-1}^{*} est surjectif, donc $\eta_{n-1}^{*} : \tilde{h}^{*}(P^{n-1}) \longrightarrow \tilde{h}^{*}(S^{n-1})$ est nul. Réciproquement, la nullité de $\eta_{n-1}^{*} : \tilde{h}^1(P^{n-1}) \longrightarrow \tilde{h}^1(S^{n-1})$ **entraîne** d'après (1), la surjectivité de $i_{n-1}^{*} : \tilde{h}^1(P^n) \longrightarrow \tilde{h}^1(P^{n-1}$; si ceci a lieu pour $n = 1, \ldots, m$, alors $j_m^{*} : \tilde{h}^1(P^m) \longrightarrow \tilde{h}^1(P^1)$ est surjectif ; **donc**, il existe $u_m \in \tilde{h}^1(P^m)$ qui vérifie $j^{*}(u_m) = u_1$. D'où, d'après (1.2), on a $k_m^{*}(t_m^{*}(u_m)) = j_m^{*}(u_m) = u_1$. Or, par construction, P^m est l'espace de Thom de η_{m-1} et la relation ci-dessus montre que, d'après le diagramme commutatif de (1.2) dans la restriction de η_{m-1} au-dessus du point base P^0 de P^m , $t_m^{*}(u_m)$ se restreint à u_1 qui est une base du $h^{*}(pt)$-module $h^{*}(P^1)$. Ceci signifie exactement que $t_m^{*}(u_m)$ est une classe de Thom de η_{m-1} (pour h^{*}). Donc, η_{m-1} est h^{*}-orientable.

REMARQUES. - 1) Dans la partie directe de la proposition, on montre ([7] p. 44) que, si η_n est h^*-orientable, la structure (additive et multiplicative de $h^*(P^n)$ est donnée par $h^*(P^n) = h^*(pt)[u_n]/(u_n^{n+1})$ où u_n est une classe d'Euler de η_n.

En fait, on donnera plus loin une formule analogue pour la structure de $h^*(P^{n+1})$.

2) La partie directe de la proposition montre que la h^*-orientabilité de η_m entraine la nullité de $\eta_n^* : \tilde{h}^*(P^n) \longrightarrow \tilde{h}^*(S^n)$ pour $0 \leqslant n < m$. La partie réciproque montre que la nullité de $\eta_n^* : \tilde{h}^1(P^n) \longrightarrow \tilde{h}^1(S^n)$ pour $0 \leqslant n \leqslant m$ entraine la h^*-orientabilité de η_m.

On a évidemment des résultats analogues pour les espaces projectifs complexes et quaternioniques :

(1.2.2) PROPOSITION. - *Pour que* h^* *soit* U *-resp.* Sp*-orientable, il faut et il suffit que, pour tout* $n \in N$, $\nu_n^* : \tilde{h}^2(CP^n) \longrightarrow \tilde{h}^2(S^{2n+1})$ *- resp.* $\mu_n^* : \tilde{h}^4(HP^n) \longrightarrow \tilde{h}^4(S^{4n+3})$ *- soit nul.*

En particulier, on en déduit le résultat simple suivant :

(1.2.3) COROLLAIRE. - *Si pour tout* $n \geqslant 1$, $h^{-2n+1}(pt)$ - resp. $h^{-4n+1}(pt)$ - *est nul, alors* h^* *est* U *- resp.* Sp *- orientable.*

EXEMPLES. 1) On retrouve ainsi que la cohomologie ordinaire, la KU-théorie, le cobordisme complexe sont U-orientables et que la KO-théorie est Sp-orientable, uniquement sur la vue de leurs anneaux de coefficients.

2) Pour un entier p premier et impair, la KO-théorie à coefficients dans Z_p est une théorie cohomologique multiplicative

([3] p.114) et, d'après le théorème des coefficients universels, on a $KO^n(pt;Z_p) = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq 0 \bmod 4, \\ Z_p \text{ si } n = 0 \bmod 4 \end{cases}$; donc, d'après le corollaire ci-dessus, cette théorie est U-orientable.

Pour la O-orientabilité, on a le résultat partiel suivant :

(1.2.4) PROPOSITION. - *Pour que* $\eta_1^* : \tilde{h}^1(P^1) \longrightarrow \tilde{h}^1(S^1)$ *soit nul, il faut et il suffit que l'unité de* h^* *soit d'ordre 2. Pour tout CW-complexe* X, $h^*(X)$ *est alors un* Z_2*-module.*

En effet, dans le groupe d'homotopie stable $\{S^1,S^1\} \approx Z$ de générateur 1_{S^1}, on a $\pi_1\eta_1 = 2.1_{S^1}$ (voir le schéma de (1.1)) ; donc, $2\sigma(1) = \eta_1^*(\pi_1^*(\sigma(1))) = \eta_1^*(u_1)$ et, u_1 étant un générateur de $\tilde{h}^1(P^1)$, on a $\eta_1^* = 0$ si et seulement si $0 = 2\sigma(1) = \sigma(2.1)$, c'est-à-dire $2.1. = 0$. Alors, du fait de la multiplication, $h^*(X)$ est un Z_2-module.

En particulier, on a :

Une théorie cohomologique h^* munie d'une multiplication avec unité telle que $2.1 = 0$ et telle que $h^{-n}(pt)$ soit nul pour tout $n > 0$ est O-orientable. On retrouve ainsi que la cohomologie ordinaire à coefficients dans Z_2 est O-orientable. En fait, on verra que η_2 est stablement nul ; donc, il suffit de supposer que $h^{-n}(pt) = 0$ pour $n > 1$.

(1.3) Pour des CW-complexes finis X et Y, soit $\{X,Y\} = \lim\limits_{\to n} \{S^nX,S^nY\}$ le groupe des classes d'homotopie stable de X dans Y.

(1.3.1) LEMME. - *Le groupe de cohomotopie stable* $\{P^n,S^n\}$ *est engendré par* π_n *qui est d'ordre 2 si* n *est pair et d'ordre infini si* n *est impair. Stablement, on a :*

$$\pi_n\eta_n = \begin{cases} 2.1_{S^n} & \textit{si} \quad \textit{est impair,} \\ 0 & \textit{si} \quad \textit{est pair.} \end{cases}$$

En effet, on a la suite exacte :

$$\ldots \to \{P^{n-1},S^{n-1}\} \xrightarrow{\eta^*_{n-1}} \{S^n,S^n\} \xrightarrow{\pi^*_n} \{P^n,S^n\} \xrightarrow{i^*_{n-1}} \{P^{n-1},S^n\} \to \ldots .$$

Or, $\{P^{n-1},S^n\} = 0$ (car $\dim(P^{n-1}) = n-1$ et S^n est $(n-1)$-connexe) et $\{S^n,S^n\} = Z\,1_{S^n}$; donc $\pi_n = \pi^*_n(1_{S^n})$ est un générateur de $\{P^n,S^n\}$. De même, π_{n-1} est un générateur de $\{P^{n-1},S^{n-1}\}$ et, l'ordre de π_n dans $\{P^n,S^n\}$ est k où k est défini par $\pi_{n-1}\,\eta_{n-1} = k.1_{S^{n-1}}$ dans $\{S^{n-1},S^{n-1}\}$.

Or, d'après l'expression analytique de $\pi_{n-1}\,\eta_{n-1}$ donnée dans (1.1) ou en calculant $\eta^*_{n-1}\,\pi^*_{n-1}$ en cohomologie ordinaire (à coefficients dans Z), on montre facilement que le degré de $\pi_{n-1}\,\eta_{n-1}$ est $\begin{cases} 2 \text{ pour n pair,} \\ 0 \text{ pour n impair.} \end{cases}$

(1.3.2) COROLLAIRE. *Dans* $\{P^n,P^n\wedge\ldots\wedge P^n\}$ (n fois), *la diagonale* $\Delta : x \mapsto x\wedge\ldots\wedge x$ *est égale à* $k.(j_n\pi_1\wedge\ldots\wedge j_n\pi_1)\pi_n$, *où* k *est un entier impair.*

En effet, Δ est homotope à une application cellulaire et le n-squelette de $P^n\wedge\ldots\wedge P^n$ (n fois) est $P^1\wedge\ldots\wedge P^1$ (n fois) inclus dans $P^n\wedge\ldots\wedge P^n$ par $j_n\wedge\ldots\wedge j_n$ et homéomorphe à $S^1\wedge\ldots\wedge S^1 = S^n$ par $\pi_1\wedge\ldots\wedge\pi_1$. Comme π_n est un générateur de $\{P^n,S^n\}$ il existe $k\in Z$ tel que, dans $\{P^n,P^n\wedge\ldots\wedge P^n\}$, on ait $\Delta = k.(j_n\pi_1\wedge\ldots\wedge j_n\pi_1)\pi_n$. Or, en cohomologie ordinaire à coefficients dans Z_2, si $u_n\in H^1(P^n;Z_2)$ est une classe d'Euler de η_n , on a $0 \neq u_n^n = \Delta^*(u_n\times\ldots\times u_n)$. Donc, k est impair.

(1.3.3) PROPOSITION. - *Soit* $u_n\in h^1(P^n)$ *vérifiant* $j^*_n(u_n) = u_1$. *Alors, la structure additive et multiplicative de* $h^*(P^n)$ *est donnée par* $h^*(P^n) = h^*(pt)[u_n]/(u_n^{n+1})$.

La proposition est évidente pour $n = 1$. Supposons la vraie pour $n-1 \geq 1$. Soit $u_{n-1} = i^*_{n-1}(u_n)$; on a $j^*_{n-1}(u_{n-1}) = u_1$, d'où $h^*(P^{n-1}) = h^*(pt)[u_{n-1}] / (u^n_{n-1})$. D'autre part, la suite exacte (1) se scinde en :

$$0 \longrightarrow \tilde{h}^*(S^n) \xrightarrow{\pi^*_n} h^*(P^n) \xrightarrow{i^*_{n-1}} h^*(P^{n-1}) \longrightarrow 0.$$

Pour démontrer la proposition à l'ordre n, il suffit donc de montrer que $u^{n+1}_n = 0$ et $u^n_n = \pi^*_n(\sigma^n(1))$. La relation $u^{n+1}_n = 0$ est évidente (u_n provient du 1-squelette de P^n qui est de dimension n) ; d'autre part, d'après le corollaire ci-dessus, on a $u^n_n = \Delta^*(u_n \times \ldots \times u_n) = k.\pi^*_n(\sigma^n(1))$; comme $n > 1$ et $j^*_n(u_n) = u_1$, on a nécessairement $\eta^*_1 = 0$, donc $h^*(P^n)$ est un Z_2-module ; par suite, k étant impair, on a $u^n_n = \pi^*_n(\sigma^n(1))$. Ceci démontre la proposition par induction.

(1.3.4) COROLLAIRE. - *Si* $\eta_{n-1} : S^{n-1} \longrightarrow P^{n-1}$ *est* h^**-orientable, il existe* $u_n \in \tilde{h}^1(P^n)$ *tel que la structure de* $h^*(P^n)$ *soit donnée par* $h^*(P^n) = h^*(pt)[u_n] / (u^{n+1}_n)$.

En effet, η_{n-1} étant h^*-orientable, soit $\tau_n \in \tilde{h}^1(P^n)$ une classe de Thom de η_{n-1}. D'après le schéma de (1.1), ceci signifie que $k^*(\tau_n)$ est un générateur de $\tilde{h}^*(P^1)$; or, $t_n k_n = j_n$, d'où en posant $u_n = t^*_n(\tau_n) \in h^1(P^n)$, on voit que $j^*_n(u_n)$ est un générateur de $h^*(P^1)$ et on peut supposer que $j^*_n(u_n) = u_1$. Le corollaire se déduit alors de la proposition précédente.

REMARQUE. - Par la méthode classique de Dold [7] , si η_{n-1} est h^*-orientable, on a la structure additive et multiplicative de $h^*(P^{n-1})$ et, par l'isomorphisme de Thom, on a la structure de $\tilde{h}^*(P^n)$ comme un $h^*(P^{n-1})$-module libre de base τ_n. Par contre, dans le corollaire ci-dessus, on obtient la structure additive et multiplicative de $h^*(P^n)$.

(1.4) Pour u_n et u'_n de $h^1(P^n)$ vérifiant $j_n^*(u_n) = j_n^*(u'_n) = u_1$, on voit facilement qu'il existe a appartenant au groupe h^+ des éléments inversibles de $h^0(pt)$ tel que $u'_n = au_n$. Par suite, dans l'espace des orbites $\tilde{h}^1(S^n)/h^+$, $o_n = \eta_n^*(u_n)$ ne dépend pas de l'élément $u_n \in \tilde{h}^1(P^n)$ choisi tel que $j_n^*(u_n)$ soit un générateur de $\tilde{h}^*(P^1)$. Vu la structure multiplicative de $h^*(P^n)$, la "nullité" de o_n entraine celle de $\eta_n^* : \tilde{h}^1(P^n) \to \tilde{h}^1(S^n)$ et, par suite, la h^*-orientabilité de $\eta_n : S^n \to P^n$. On a donc :

(1.4.1) THEOREME. - *Si* $\eta_{n-1} : S^{n-1} \longrightarrow P^{n-1}$ *est* h^**-orientable, l'obstruction à la* h^**-orientabilité de* $\eta_n : S^n \to P^n$ *est la classe* o_n *dans* $h^{1-n}(pt)/h^+$, *où* o_n *est donné par* $o_n = \eta_n^*(j_n^*)^{-1}(u_1)$.

EXEMPLE. - La KU-théorie à coefficients dans Z_2 est une théorie cohomologique multiplicative, associative, unitaire et non-commutative ([3] p.88). Donc η_2 est $KU(.:Z_2)$-orientable et, par suite, on a $KU^*(P^3;Z_2) = KU^*(pt;Z_2)[u_3]/(u_3^4)$. Mais, il est facile de voir que l'on a $KU^0(P^4;Z_2) = KU^1(P^4;Z_2) = Z_2$, donc $KU^*(P^4;Z_2) \neq KU^*(pt;Z_2)[x]/(x^5)$ et, par suite, η_3 n'est pas $KU^*(.;Z_2)$-orientable. L'obstruction à l'orientabilité de η_3 pour cette théorie ne peut être que l'élément non nul de $KU^1(S^3;Z_2) = Z_2$. On déterminera plus précisément cette obstruction dans le paragraphe suivant.

II. CALCUL DE L'OBSTRUCTION A LA O-ORIENTABILITE EN BASSES DIMENSIONS.

(2.1) Le but de tout le paragraphe 2 est de calculer, en basses dimensions, la classe de η_n dans $\{S^n,P^n\}$. D'après [2] p. 96, on a le tableau suivant.

n	<0	0	1	2	3	4	5	6	7
π_n^S	0	$Z1$	$Z_2\nu$	$Z_2\nu^2$	$Z_{24}\nu$	0	0	$Z_2\mu^2$	$Z_{240}\zeta$
$\{S^{n+1},P^2\}$	0	$Z_2 i_1$	$Z_2 i_1\nu$	$Z_4\tilde{\nu}$	$Z_2 i_1\mu \oplus Z_2\tilde{\nu}\nu$	$Z_2\tilde{\nu}\nu^2$	0	$Z_2 i_1\mu^2$	$Z_2 i_1\zeta \oplus Z_2\tilde{\mu}$
$\{S^nP^2,S^2\}$	0	$Z_2\pi_2$	$Z_2\nu\pi_2$	$Z_4\bar{\nu}$	$Z_2\mu\pi_2 \oplus Z_2\nu\bar{\nu}$	$Z_2\nu^2\bar{\nu}$	0	$Z_2\mu^2\pi_2$	$Z_2\zeta\pi_2 \oplus Z_2\bar{\mu}$

De plus on a les relations :
$\pi_2\tilde{\nu} = \nu = \bar{\nu}i_1$, $2\bar{\nu} = \nu^2\pi_2$, $2\tilde{\nu} = i_1\nu^2$ et $\pi_2\tilde{\mu} = \mu^2 = \bar{\mu}i_1$.
En fait, les groupes d'homotopie et de cohomotopie stables de P^2 sont en dualité ; de façon précise, on a une S-dualité : $P^2 \wedge P^2 \longrightarrow S^3$, on a donc $\{S^n,P^2\} \approx \{P^2,S^{3-n}\}$. Ces groupes se calculent très simplement (dans la mesure où l'on connait π_n^S) à l'aide de la suite de Puppe :

$$S^1 \xrightarrow{\times 2} S^1 \xrightarrow{i_1} P^2 \xrightarrow{\pi_2} S^2 \longrightarrow \dots$$

. Les problèmes d'extension sont résolus par le résultat suivant :

$$\{P^2,P^2\} = Z_4\, 1_{P^2} \text{ et } i_1\nu\pi_2 = 2.1_{P^2} \quad \text{dans} \quad \{P^2,P^2\} \ ([2]\ \text{p. } 75).$$

(2.1.1) PROPOSITION. - *Dans* $\{S^2,P^2\}$, *la classe de* η_2 *est nulle* .

En effet, on a (stablement) $\eta_2 = \varepsilon i_1\nu$, avec $\varepsilon = 0$ ou 1. Donc, $\eta_2\pi_2 = \varepsilon i_1\nu\pi_2 = 2.1_{P^2}$. Or, en KO-théorie, on a la suite exacte :

$$0 = \widetilde{KO}^0(S^3) \xrightarrow{\pi_3^*} \widetilde{KO}^0(P^3) \xrightarrow{i_2^*} \widetilde{KO}^0(P^2) \xrightarrow{\eta_2^*} \widetilde{KO}^0(S^2),$$

et on sait que $\widetilde{KO}^0(P^3) \approx \widetilde{KO}^0(P^2) \approx Z_4$. Donc, i_2^* est bijectif et, par suite, η_2^* est nul. D'où $0 = (\eta_2\pi_2)^* = 2\varepsilon . 1^*_{P^2}$ ce qui entraine $\varepsilon = 0$.

Cette proposition montre que P^3 est stablement homotope en bouquet (somme directe pointée) de P^2 et S^3. On note $a_3 \in \{S^3,P^3\}$ et $b_3 \in \{P^3,P^2\}$des éléments tels que $\pi_3 a_3 = \mathcal{I}_{S^3}$ dans $\{S^3,S^3\}$ et $b_3 i_2 = \mathcal{I}_{P^2}$ dans $\{P^2,P^2\}$.

(2.1.2) PROPOSITION. - *Dans* $\{S^3,P^3\} = Za_3 \oplus Z_4 i_2$, *on a* $\eta_3 = 2a_3 + i_2\tilde{\nu}$.

En effet, on peut écrire $\eta_3 = ka_3 + l i_2\tilde{\nu}$ avec $k \in Z$ et $l \in Z_4$. Le lemme (1.3.1) donne $k = 2$.

D'autre part, on a la suite exacte :

$$0 = \widetilde{KU}^1(S^4;Z_2) \xrightarrow{\pi_4^*} \widetilde{KU}^1(P^4;Z_2) \xrightarrow{i_3^*} \widetilde{KU}^1(P^3;Z_2) \xrightarrow{\eta_3^*} \widetilde{KU}^1(S^3;Z_2) = Z_2.$$

et on a $\widetilde{KU}^1(P^{2n};Z_2) = Z_2$, $\widetilde{KU}^1(P^{2n+1};Z_2) = Z_2 \oplus Z_2$. Donc, η_3^* ne peut pas être nul et, comme $KU^*(S^3;Z_2)$ est un Z_2-module, il en résulte que l est impair. On a donc $\eta_3 = 2a_3 \pm i_2\tilde{\nu}$; on achève alors la détermination de $\tilde{\nu}$ en posant $\eta_3 = 2a_3 + i_2\tilde{\nu}$.

(2.2) On s'intéresse maintenant au calcul de η_4,η_5,η_6 et η_7. Tout d'abord, on a :

(2.2.1) LEMME. - *Dans* $\{S^4,P^4\} = Z_2 i_3 a_3 \oplus Z_2 i_3 i_2 i_1$, *on a*
$\eta_4 = i_3 a_3 \nu + \varepsilon i_3 i_2 i_1 \mu$ *avec* $\varepsilon = 0$ *ou* 1.

L'explicitation ci-dessus de $\{S^4,P^4\}$ est facile à vérifier.
D'autre part, on a la suite exacte :

$$0 = \widetilde{KO}^2(P^5) \xrightarrow{i_4^*} \widetilde{KO}^2(P^4) \xrightarrow{\eta_4^*} \widetilde{KO}^2(S^4) ,$$

et on a $\widetilde{KO}^2(P^4) \approx \widetilde{KO}^2(S^4) = Z_2$. Donc, η_4^* est bijectif et, μ^* étant nul en KO-théorie, on a nécessairement $\eta_4 = i_3 a_3 \nu + \varepsilon i_3 i_2 i_1 \mu$ avec $\varepsilon = 0$ ou 1.

REMARQUE. - On verra dans (2.4) que ε est en fait nul.

(2.2.2) PROPOSITION. - *On a* $\{S^5,P^4\} = Z_2 i_3 a_3 \nu^2$ *et* $\{S^5,P^5\} = Z\eta_5$.

Cette proposition se déduit facilement du lemme précédent et des suites d'homotopie stable apropriées.

De même, on a de façon élémentaire les résultats suivants :

(2.2.3) LEMME. - $\{S^6,P^4\} = Z_2 i_3 a_3 \mu$,

$\{S^6,P^5\} = Z_2 i_4 i_3 a_3 \mu$,

$\{S^3P^3,P^4\} = Z_2 i_3 a_3 \mu\pi_3 \oplus Z_2 i_3 i_2 a b_3 \oplus Z_4 i_3 a_3 \bar\nu b_3$, *où*

$a \in \{S^3P^2,P^2\} = Z_4 \tilde{\bar\nu}\bar\nu \oplus Z_2 a$ *vérifie* $a i_1 = i_1\mu$, $\pi_2 a = \mu\pi_2$ *et où on a la relation* $i_3 i_2 \tilde{\bar\nu}\bar\nu b_3 = 2 i_3 a_3 \bar\nu b_3$; *dans* $\{S^2P^3,P^4\}$, $i_3 a_3 \mu\pi_4$ *est non nul.*

(2.2.4) PROPOSITION. - *Dans* $\{S^6,P^5\}$, *on a* $\eta_5\nu = 0$.

En effet, on a $\pi_2 b_3 \eta_3 = \pi_2 \tilde\nu = \nu$; donc $\eta_5\nu = \eta_5\pi_2 b_3\eta_3$. Comme $\pi_5\eta_5\pi_2 b_3 = 2\pi_2 b_3 = 0$, dans la catégorie de l'homotopie stable, on a le diagramme commutatif ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
S^{-1}P^4 \arrow[r, "\pi_4"] \arrow[d, "0"'] & S^3 \arrow[r, "\pi_3"] \arrow[d, dashed] & P^3 \arrow[r, "i_3"] \arrow[d, "\eta_5\pi_2 b_3"] & P^4 \arrow[d, "0"] \\
S^{-1} \arrow[r, "\eta_4"] & S^{-3}P^4 \arrow[r, "i_4"] & S^{-3}P^5 \arrow[r, "\pi_5"] & S^2
\end{tikzcd}$$

Donc, il existe $x \in \{S^3,S^{-3}P^4\} = \{S^6,P^4\}$ complétant commutativement ce diagramme. De plus d'après le lemme ci-dessus, on a $x = \varepsilon i_3a_3\mu$ avec $\varepsilon = 0$ ou 1. D'où, $0 = x\pi_4 = \varepsilon i_3a_3\mu\pi_4$. Or, toujours d'après le lemme ci-dessus, $i_3a_3\mu\pi_4$ est non nul dans $\{S^2P^3,P^4\}$; d'où, on a $\varepsilon = 0$ et de même $x = 0$. Il en résulte que $0 = i_4x = \eta_5\pi_2b_3\eta_3 = \eta_5\nu$.

(2.2.5) PROPOSITION. - *Dans* $\{S^6,P^6\} = Z_2i_5i_4i_3a_3$, on a $\eta_6 = 0$.

En effet, l'explicitation de $\{S^6,P^6\}$ se déduit facilement de la proposisiton précédente. D'après [10] p. 540, $\{S^6,P^\infty\}$ est d'ordre 2 et il est facile de voir qu'il en est de même de $\{S^6,P^7\}$. Si η_6 était stablement non nul, on aurait $\{S^6,P^6\} = Z_2\,\eta_6$ et la suite exacte :

$$Z = \{S^6,S^6\}\xrightarrow{\eta_6}\{S^6,P^6\}\xrightarrow{i_6}\{S^6,P^7\}\xrightarrow{\pi_7}\{S^6,P^7\} = 0$$

donnerait $\{S^6,P^7\} = 0$ ce qui est contradictoire. Donc η_6 est stablement nul.

Cette proposition montre que P^7 est stablement homotope au bouquet de P^6 et S^7. On note $a_7 \in \{S^7,P^7\}$ et $b_7 \in \{P^7,P^6\}$ des éléments tels que $\pi_7a_7 = 1_{S^7}$ dans $\{S^7,S^7\}$ et $b_7i_6 = 1_{P^6}$ dans $\{P^6,P^6\}$. On a donc $\{S^7,P^7\} = Za_7 \oplus i_6(\{S^7,P^6\})$.

(2.2.6) COROLLAIRE. - *Dans* $\{S^7,P^7\} = Za_7 \oplus i_6(\{S^7,P^6\})$, *on a* $\eta_7 = 2a_7 + i_6z$ *où* $z \in \{S^7,P^6\}$ *n'est pas divisible par* 2.

En effet, d'après le lemme (1.3.1), on a $\eta_7 = 2a_7 + i_6z$. Or, $\eta_7^*:\widetilde{KU}^1(P^7;Z_2)\to\widetilde{KU}^1(S^7;Z_2)$ est non nul ; donc, η_7 n'est pas divisible par 2 et il en est, a fortiori, de même de z.

(2.3) On montre ici que, dans $\{S^4,P^4\}$, on a $\eta_4 = i_3a_3$.

Tout d'abord, à l'aide de suites de Puppe apropriées, on montre facilement le lemme suivant :

(2.3.1) LEMME. - *On a* $\{S^7,P^3\} = Z_2 i_2 i_1$. *On a la suite exacte :*

$$0 \longrightarrow Z_2 i_3 i_2 i_1 \mu^2 \hookrightarrow \{S^7,P^4\} \xrightarrow{\pi_4} Z_2 \nu^3 \longrightarrow 0.$$

En posant $\eta_4 = i_3 a_3 \nu + \varepsilon i_3 i_2 i_1 \mu$, $\{S^7,P^5\}$ *est d'ordre* 8 *si* $\varepsilon = 0$ *et d'ordre* 4 *si* $\varepsilon = 1$.

De même, $\{S^7,P^6\}$ *est d'ordre* 16 *si* $\varepsilon = 0$ *et d'ordre* 8 *si* $\varepsilon = 1$.

(2.3.2) PROPOSITION. - *Dans* $\{S^4,P^4\}$, *on a* $\eta_4 = i_3 a_3$.

En effet, d'après [10] p. 540, on a $\{S^7,P^\infty\} \approx Z_{16} \oplus Z_2$ et il est facile de voir qu'il en est de même de $\{S^7,P^8\}$. De l'égalité $\eta_7 = 2a_7 + i_6 z$, on déduit la suite exacte :

$$0 \to Z(2a_7 + i_6 z) \hookrightarrow Za_7 \oplus i_6\{S^7,P^6\} \xrightarrow{i_7} \{S^7,P^8\} \to 0.$$

Comme z n'est pas divisible par 2 dans $\{S^7,P^6\}$ qui est d'ordre 2^3 ou 2^4, le sous-groupe engendré par z admet un supplémentaire H dans $\{S^7,P^6\}$. En notant $2^n \neq 1$ l'ordre de z, on a $i_6(\{S^7,P^6\}) = Z_{2^n} i_6 z \oplus i_6(H)$. D'où la suite exacte :

$$0 \longrightarrow Z(2a_7 + i_6 z) \hookrightarrow Za_7 \oplus Z_{2^n} i_6 z \oplus i_6(H) \xrightarrow{i_7} Z_{16} \oplus Z_2 \longrightarrow 0.$$

Il est alors facile de voir que l'on a nécessairement n = 3 et $i_6(H)$ d'ordre 2. Par suite, $\{S^7,P^6\}$ est d'ordre 16 ; donc, d'après (2.3.1), $\varepsilon = 0$, c'est-à-dire $\eta_4 = i_3 a_3$.

REMARQUES. - 1) Les calculs précédents montrent que les premières obstructions à la O-orientabilité d'une théorie cohomologique à valeurs dans les Z_2-modules sont induites par η_3 (et en fait $\tilde{\nu}$), η_5 , η_7 (et en fait z).

2) On a $\eta_{2n} \pi_{2n} = 0$ dans $\{P^{2n},P^{2n}\}$ pour n = 0,1,2 et 3. De plus, on notera l'analogie entre η_n et η_{n+4} pour n = 1,2 et 3.

3) L'explicitation de $\{S^8,P^8\}$ et de η_8 dans ce groupe paraît beaucoup plus difficile. On peut conjecturer que l'on a $\eta_8 = i_7 a_7 \nu$ dans $\{S^8,P^8\}$.

III. THEORIES COHOMOLOGIQUES O-ORIENTABLES.

(3.1) Soit h^* une théorie cohomologique munie d'une multiplication avec unité, associative et commutative. On suppose que h^* est O-orientable. Alors, pour tout $n \in N$, l'inclusion $P^n \hookrightarrow P^{n+1}$ induit une surjection $h^*(P^{n+1}) \longrightarrow h^*(P^n)$ et par suite, d'après [7] p. 50, on a $h^*(P^\infty) = \varprojlim_n h^*(P^n)$. Plus précisément, d'après (1.2.1), on peut construire par récurrence une suite $(u_n \in h^1(P^n))_n$ telle que, pour tout $n \in N$, u_n soit une classe d'Euler pour le fibré en droites canonique sur P^n et telle que la restriction de u_{n+1} à P^n soit u_n. Cette suite $(u_n)_n$ définit donc un élément $u \in \tilde{h}^1(P^\infty)$ qui est une classe d'Euler du fibré universel η_∞ sur $P^\infty = BO(1)$, et on a $h^*(P^\infty) = \varprojlim_n h^*(pt)[u_n]/(u_n^{n+1}) = h^*(pt)[[u]]$.

D'après [12] , les classes de Thom de η_∞ sont en correspondance biunivoque (affine) avec les unités de $h^*(P^\infty)$. Dans la suite, on ne considère que les classes de Thom $t_1 \in \tilde{h}^1(P^\infty)$ qui, par restriction au-dessus de P^0, se réduisent à $\sigma(1) \in \tilde{h}^1(S^1)$ où $1 \in \tilde{h}^0(S^0)$ est l'unité et σ la suspension (S^1 étant identifié à P^1 par π_1). Une telle classe de Thom est dite homogène et unitaire.

D'après [7] p. 52, on peut construire pour tout $n \in N$, une classe de Thom $t_n \in \tilde{h}^n(MO(n))$ du fibré universel de rang n sur BO(n) de telle sorte que :

(i) t_1 soit unitaire (et homogène),

(ii) par l'application naturelle $MO(p) \wedge MO(q) \longrightarrow MO(p+q)$, la restriction de t_{p+q} soit $t_p \wedge t_q$.

Cette suite "multiplicative" $(t_n)_n$ définit alors une transformation naturelle $t : \Omega_0^* \longrightarrow h^*$, Ω_0^* étant le cobordisme non-orienté, qui est multiplicative d'après (ii) et unitaire d'après (i). De façon plus précise, à un élément $x \in \tilde{\Omega}_0^n(X)$ représenté par une application $f : S^k \wedge X \to MO(n+k)$, on fait correspondre $t(x) = f^*(t_{n+k}) \in \tilde{h}^n(X)$.

En fait, la donnée de t_1 permet de définir canoniquement les classes de Stiefel-Whitney pour h^* et, la suite $(t_n)_n$ est parfaitement définie par le fait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la n-ième classe de Stiefel-Whitney du fibré universel sur BO(n) coïncide avec sa classe d'Euler définie par t_n. En ce sens, la transformation naturelle multiplicative et unitaire $t : \Omega_O^* \longrightarrow h^*$ est parfaitement définie par la donnée de la classe de Thom homogène et unitaire $t_1 \in \tilde{h}^1(P^\infty)$.

REMARQUE. - On a des sorites analogues pour une théorie cohomologique C ou H-orientable.

Soit G = O, SO, U, SU ou Sp. On dit que h^* est "multiplicativement" G-orientable s'il existe une transformation naturelle, multiplicative et unitaire $t : \Omega_G^* \longrightarrow h^*$. Une telle transformation définit alors une G-orientation de h^*. Réciproquement, les remarques ci-dessus montrent que, dans le cas où G = O, U ou Sp, une théorie cohomologique G-orientable est multiplicativement G-orientable. Je ne sais pas si ceci reste vrai dans le cas où G = SO ou SU.

(3.2) On rappelle qu'il existe une transformation naturelle multiplicative et unitaire, appelée la transformation de Boardman :

$$\beta : \Omega_O^*(X) \longrightarrow H^*(X;Z_2) \otimes_{Z_2} \Omega_O^*(pt).$$

On sait que cette transformation est un isomorphisme (voir par exemple [9] p. 19-23).

Soit h^* une théorie cohomologique munie d'une multiplication avec unité, associative et commutative. On suppose h^* multiplicativement O-orientée par une transformation naturelle multiplicative et unitaire :

$$t : \Omega_O^* \longrightarrow h^*.$$

En particulier, $h^*(pt)$ est un $\Omega_O^*(pt)$-module ; donc par tensorisation, t définit une transformation naturelle :

$$\bar{t} : \Omega_O^*(X) \otimes_{\Omega_O^*(pt)} h^*(pt) \longrightarrow h^*(X).$$

Pour la multiplication naturelle sur $\Omega_0^* \otimes_{\Omega_0^*(pt)} h^*(pt)$, définie par tensorisation, il est évident que $\bar{t}$ est une transformation multiplicative et unitaire.

D'autre part, h^* étant 0-orientable, $h^*(pt)$ est un Z_2-module (nécessairement Z_2-plat !) et, par suite, $X \mapsto H^*(X;Z_2)\otimes_{Z_2} h^*(pt)$ est une théorie cohomologique multiplicative et unitaire. Alors, on définit une transformation naturelle de théories cohomologiques multiplicatives et unitaires :

$$\tilde{t} : H^*(X;Z_2)\otimes_{Z_2} h^*(pt) \longrightarrow h^*(X),$$

par $H^*(X;Z_2)\otimes_{Z_2} h^*(pt) = H^*(X;Z_2)\otimes_{Z_2} (\Omega_0^*(pt)\otimes_{\Omega_0^*(pt)} h^*(pt)) \approx$

$$(H^*(X;Z_2)\otimes_{Z_2} \Omega_0^*(pt))\otimes_{\Omega_0^*(pt)} h^*(pt) \xrightarrow{\beta^{-1}\otimes 1} \Omega_0^*(X)\otimes_{\Omega_0^*(pt)} h^*(pt) \xrightarrow{\bar{t}} h^*(X).$$

Or, il est évident que, sur le point pt, $\tilde{t} : H^*(pt;Z_2)\otimes_{Z_2} h^*(pt)$ $\tilde{t}: H^*(pt;Z_2)\otimes_{Z_2} h^*(pt) \longrightarrow h^*(pt)$ est un isomorphismes multiplicatif et unitaire ; donc, t est un isomorphisme multiplicatif et unitaire de théories cohomologiques. De plus, $\beta^{-1}\otimes 1$ étant lui-même un isomorphisme, il en est de même de $\bar{t} : \Omega_0^*\otimes_{\Omega_0^*(pt)} h^*(pt) \longrightarrow h^*$. En résumé, on a :

(3.2.1) THEOREME. - *Soit* $t : \Omega_0^* \longrightarrow h^*$ *une transformation naturelle multiplicative et unitaire de théories cohomologiques. Alors,*

$\tilde{t} : H^*(X;Z_2)\otimes_{Z_2} h^*(pt) \longrightarrow h^*(X)$ *et*

$\bar{t} : \Omega_0^*(X)\otimes_{\Omega_0^*(pt)} h^*(pt) \longrightarrow h^*(X)$

sont des isomorphismes multiplicatifs et unitaires.

REMARQUES. - 1) Le premier isomorphisme ci-dessus montre que la suite spectrale d'Atiyah-Hirsebruch-Dold pour h^* dégénère.

2) D'après (3.1), les isomorphismes ci-dessus sont déterminés par la donnée d'une classe de Thom homogène et unitaire $t_1 \in \tilde{h}^1(P^\infty)$.

IV. THEORIES COHOMOLOGIQUES MULTIPLICATIVEMENT SO-ORIENTABLES.

(4.1) On veut généraliser à une théorie cohomologique multiplicativement SO-orientable la méthode inaugurée par C.T.C. Wall [16] pour étudier le cobordisme orienté. Cette méthode consiste essentiellement à passer par l'intermédiaire du cobordisme orienté à coefficients dans Z_2. D'après la première partie de [13] , cette théorie est représentée par le spectre dont la n-ième composante est $MSO(n-1)\wedge P^2$. On va tout d'abord donner une interprétation géométrique de cette théorie.

$\widetilde{KO}(X)$ étant le groupe des fibrés vectoriels stables sur un CW-complexe X de dimension finie, soit det ou $w_1 : \widetilde{KO}(X) \longrightarrow H^1(X;Z_2)$ l'homomorphisme qui, à un élément de $\widetilde{KO}(X)$ associe sa première classe de Stiefel-Whitney. En identifiant $H^1(X;Z_2) = [X,P^\infty]$ au groupe des classes d'isomorphismes de fibrés vectoriels en droites sur X (la multiplication du groupe étant induite par le produit tensoriel), w_1 peut être vu comme le stabilisé de l'application qui, à un fibré vectoriel ξ de rang n sur X, associe le fibré en droites $\det(\xi) = \Lambda^n\xi$ (on rappelle que l'on a $\det(\xi \otimes \xi') = \det(\xi) \otimes \det(\xi')$ et $\det(X\times R) = X\times R$).

(4.1.1) DEFINITION. - *Soit* $j : S^1 = P^1 \longrightarrow P^\infty$ *l'inclusion naturelle. On note* $\widetilde{KO}_s(X)$ *le produit fibré de* $w_1 : \widetilde{KO}(X) \longrightarrow H^1(X;Z_2)$ *et de "la réduction modulo 2"* $j_* : H^1(X;Z) = [X,S^1] \rightarrow [X,P^\infty] = H^1(X;Z_2)$.

Un élément de $\widetilde{KO}_s(X)$ est donc représenté par la classe d'un fibré vectoriel "sphérique" sur X, c'est-à-dire par un couple (ξ,α) où ξ est un fibré vectoriel sur X et où $\alpha : X \longrightarrow S^1$ est une application telle que $\alpha^*(\eta_1) \approx \det(\xi)$, η_1 étant le fibré canonique sur $S^1 = P^1$.

Pour un tel couple (ξ,α) sur un compact X, ξ-det(ξ) étant orienté, il existe $f : X \longrightarrow BSO$ classifiant $\xi - \det(\xi)$ (i.e. $f^*(\bar{\gamma}) = \xi - \det(\xi)$ dans $\widetilde{KO}(X)$, où $\bar{\gamma}$ est le fibré universel sur BSO), et on a $(f,\alpha)^*(\bar{\gamma}\times\eta_1) = \xi - \det(\xi) + \det(\xi) = \xi$ dans $\widetilde{KO}(X)$. De plus, il est évident que la classe d'homotopie de (f,α) ne dépend que de la classe de (ξ,α) dans $\widetilde{KO}_s(X)$. Inversement, la classe d'homotopie d'une application $(f,\alpha) : X \longrightarrow BSO\times S^1$, où X est un CW-complexe de dimension finie, définit un élément de $\widetilde{KO}_s(X)$ admettant pour représentant le couple $((f,\alpha)^*(\bar{\gamma}\times\eta_1),\alpha)$. On en déduit facilement :

(4.1.2) PROPOSITION. - *Sur la catégorie des CW-complexes finis, le H-espace produit* $BSO\times S^1$, *muni du fibré* $\bar{\gamma}\times\eta_1$ *classifie le foncteur* $\widetilde{KO}_s : X \longmapsto \widetilde{KO}_s(X)$. *Ce foncteur est donc un foncteur homotopique à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens.*

En fait, $\widetilde{KO}_s$ est à valeurs dans $\underset{\sim}{Ab}$ sur la catégorie de tous les CW-complexes de dim. finie.

(4.2) Pour tout $n \in N$, soit γ_n -resp. $\bar{\gamma}_n$ - le fibré universel de rang n sur BO(n) - resp. BSO(n)-. On prend pour BSO(n) l'espace total du fibré en 0-sphères associé au fibré vectoriel $q_n : \det(\gamma_n) \longrightarrow BO(n)$, on a alors $\bar{\gamma}_n = q_n^*(\gamma_n)$. Soit $i_n : BO(n-1)\times S^1 \longrightarrow BO(a)$ classifiant $\gamma_{n-1}\times\eta_1$. Alors, on a le diagramme commutatif ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc}
BSO(n-1)\times S^1 & \xrightarrow{\bar{j}_{n-1}\times S^1} & BSO(n)\times S^1 \\
\Big\downarrow p_n & & \Big\downarrow p_{n+1} \\
BO(n) & \xrightarrow{j_n} & BO(n+1)
\end{array}$$

dans lequel $p_n = i_n(q_{n-1} \times S^1)$ classifie $\overline{\gamma}_{n-1} \times \eta_1$, j_n est l'application canonique de $BO(n)$ dans $BO(n+1)$ et $\overline{j}_{n-1}$ est induit par j_{n-1}.

Quitte à remplacer chaque p_n par sa fibration canoniquement associée, on a (suivant R. Stong [14] p. 14) une notion de $(BSO \times S^1, p)$-structure et, par suite, une théorie correspondante du cobordisme dont le n-ième espace de Thom est l'espace de Thom de $\overline{\gamma}_{n-1} \times \eta_1$, c'est-à-dire $MSO(n-1) \wedge P^2$.
Il en résulte :

(4.2.1) THEOREME. - ([14] p. 175); - *Le cobordisme orienté à coefficients dans* Z_2 *est le cobordisme associé à la* $(BSO \times S^1, p)$*-structure définie ci-dessus.*

Géométriquement, selon l'interprétation de Quillen ([11] ou [9]), si X est une variété, un élément de $\Omega^n_{SO}(X;Z_2)$ est représenté par un couple (f,y) où $f : Y \longrightarrow X$ est une application propre différentiable et où $y \in \widetilde{KO}_s(Y)$ a pour image dans $\widetilde{KO}(Y)$ le fibré normal ν_f de f. La relation de cobordisme entre de tels couples doit alors être compatible avec $\widetilde{KO}_s$, c'est-à-dire respecter la "sphéricité" des fibrés normaux.

De plus, $\widetilde{KO}_s$ étant à valeurs dans $\underset{\sim}{Ab}$, cette théorie du cobordisme est naturellement multiplicative ; plus précisément, si (f,y) et (f',y') représentent des éléments $x \in \Omega^n_{SO}(X;Z_2)$ et $x' \in \Omega^m_{SO}(X';Z_2^2)$, le couple $(f \times f', y+y')$ représente l'élément $x \ast x' \in \Omega^{n+m}_{SO}(X\ X';Z_2)$. Par suite, l'oubli de structure sphérique définit une transformation naturelle multiplicative et unitaire $F : \Omega^*_{SO}(X;Z_2) \longrightarrow \Omega^*_{O}(X)$.

D'après (4.2.1), pour le cobordisme orienté à coefficients dans Z_2, tous les fibrés vectoriels sphériques sont orientables, En fait, l'étude que nous allons faite (suivant les idées d'Atiyah [5]) va montrer que cette théorie est O-orientable.

(4.3) m étant un entier impair, soit k : $BSO \times P^{\infty} \longrightarrow BO$ classifiant $\bar{\gamma} \times m\eta_{\infty}$; inversement, m étant impair, $\gamma - m\det(\gamma)$ est orienté, et soit $l_1 : BO \longrightarrow BSO$ classifiant $\gamma - m\det(\gamma)$; alors, si $l_2 : BO \longrightarrow P^{\infty}$ classifie $\det(\gamma)$, on a $(l_1, l_2)^{*}(\bar{\gamma} \times m\eta_{\infty}) = \gamma - m\det(\gamma) + m\det(\gamma) = \gamma$. Par suite, k et $l = (l_1, l_2)$ sont homotopiquement inverses l'un de l'autre. Alors, par définition du cobordisme non-orienté, on a :

(4.3.0) PROPOSITION. - *Si* m *est un entier impair, le cobordisme non-orienté peut être représenté par le spectre dont la n-ième composante est l'espace de Thom de* $\bar{\gamma}_{n-m} \times m\eta_{\infty}$ *, c'est-à-dire* $MSO(n-m) \wedge (P^{\infty}/P^{m-1})$.

On sait que l'espace de Thom de $m\eta_{\infty}$ est homéomorphe à P^{∞}/P^{m-1} (voir [14] p. 173).
Alors, en appliquant ce résultat avec m = 1 et 3, la cofibration :

$$MSO(n-1) \wedge P^{2} \longrightarrow MSO(n-1) \wedge P^{\infty} \longrightarrow MSO(n-1) \wedge (P^{\infty}/P^{2}),$$

lue dans la catégorie des spectres, donne :

(4.3.1) PROPOSITION. - *On a la suite exacte (naturelle en* X*) :*

$$\cdots \longrightarrow \Omega^{n}_{SO}(X;Z_2) \xrightarrow{\ F\ } \Omega^{m}_{O}(X) \xrightarrow{\ d\ } \Omega^{n+2}_{O}(X) \longrightarrow \cdots ,$$

dans laquelle F *induit par l'inclusion* $P^{2} \longrightarrow P^{\infty}$ *est l'oubli de structure sphérique et* d*, de degré* 2*, est induit par la projection* $P^{\infty} \longrightarrow P^{\infty}/P^{2}$.

Lorsque X est une variété,on va interpréter géométriquement le morphisme d et montrer qu'il admet une section.

$f:Y\longrightarrow X$ étant une application différentiable et propre, représentant un élément x de $\Omega_0^n(X)$, soit $\alpha : Y \longrightarrow P^m$ (m suffisamment grand) une application différentiable qui classifie $\det(\nu_f)$ et que l'on peut prendre transverse à la sous variété P^{m-2} de P^m d'après [15] . Alors, on a le produit fibré :

$$\begin{array}{ccc} Y_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & P^{m-2} \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{\alpha} & P^m \end{array}$$

où Y_2 est une sous variété de Y de codimension 2 et où le fibré normal de l'inclusion i de Y_2 dans Y est $2\alpha_2^*(\eta_{m-2}) = 2i^*(\det(\nu_f))$. Par suite, si $(g,\alpha):Y\longrightarrow BSO(n-1)\times P^\infty$ est tel que $(g,\alpha)^*(\bar{\gamma}_{n-1}\times\eta_\infty) = \nu_f$, on a $((g,\alpha)i)^*(\bar{\gamma}_{n-1}\times 3\eta_\infty) = \nu_{fi}$. Il en résulte que l'application $fi:Y_2\longrightarrow X$ est un représentant de l'élément $d(x)\in\Omega_0^{n+2}(X)$. D'où :

(4.3.2) COROLLAIRE. - *Pour une variété* X, *le morphisme* $d:\Omega_0^n(X)\longrightarrow\Omega_0^{n+2}(X)$ *fait correspondre à la classe de cobordisme de* $f:Y\longrightarrow X$, *la classe de cobordisme de* $f_i:Y_2\longrightarrow X$ *où* Y_2 *est une sous variété de* Y *dont le fibré normal est induit par* $2\det(\nu_f)$. *Une telle sous variété peut être obtenue par le produit fibré ci-dessus.*

On construit maintenant une section de d. Pour ceci, on utilise la construction suivante due à Atiyah [5] . Soit r un entier pair et non nul. Dans P^r, on considère la sous-variété P^{r-2} formée des éléments de P^r dont les deux dernières composantes sont nulles et la sous variété P^1 formée des éléments de P^r dont les r-1 premières composantes sont nulles. Dans P^r, les sous variétés P^{r-2} et P^1 sont disjointes. Soit Q^r la sous variété de dimension r de $P^{r-2}\times P^r$ formée des couples (d,d') tels que d appartienne au sous espace projectif de dimension 2 engendré par d et P^1.

La projection $\pi : Q^r \longrightarrow P^{r-2}$ interprète Q^r comme le fibré en P^2-fibres associé au fibré vectoriel $\eta_{r-2}+1+1$ sur P^{r-2}, et la projection $\sigma : Q^r \longrightarrow P^r$ est une application différentiable orientée qui définit un difféomorphisme de $Q^r - \sigma^{-1}(P^1)$ sur $P^r - P^1$ (voir [5] , p. 207). De plus, $\Delta : d \mapsto (d,d)$ est une section de π telle que $\sigma\Delta$ soit l'inclusion de P^{r-2} dans P^r.

Alors, $g : Z \longrightarrow X$ étant une application propre et différentiable, représentant un élément $x' \in \Omega_0^{n+2}(X)$, soit $\beta : Z \longrightarrow P^{r-2}$ (r pair suffisamment grand) une application différentiable classifiant $\det(\nu_g)$. On a le diagramme commutatif de carrés cartésiens ;

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\Delta'"'] & P^{r-2} \arrow[r, equal] \arrow[d, "\Delta"] & P^{r-2} \arrow[d, hook] \\
Y \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "\pi'"'] & Q^r \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\pi"] & P^r \\
Z \arrow[r, "\beta"] & P^{r-2} &
\end{tikzcd}$$

dans lequel Y est l'espace total d'une fibration différentiable en P^2-fibres sur Z.

Il est facile de voir que la classe de cobordisme de $f = g\pi' : Y \longrightarrow X$ ne dépend que de celle de $g : Z \longrightarrow X$; par suite, $g \longmapsto f$ définit un homomorphisme $s : \Omega_0^{n+2}(X) \longrightarrow \Omega_0^n(X)$. Or, σ étant orienté, $\alpha = \sigma\beta' : Y \longrightarrow P^r$ classifie $\det(\nu_f)$; donc, le corollaire (4.3.2) et le diagramme ci-dessus montrent que s est une section de $d : \Omega_0^n(X) \longrightarrow \Omega_0^{n+2}(X)$.

Donc, d'après (4.3.1), on a :

(4.3.3) THEOREME [5] . - *Le morphisme* $d:\Omega_0^n(X)\longrightarrow\Omega_0^{n+2}(X)$ *admet une section (naturelle en* X*), et on a la suite exacte et scindée :*

$$0\to \Omega_{SO}^n(X;Z_2)\xrightarrow{F}\Omega_0^n(X)\xrightarrow{d}\Omega_0^{n+2}(X)\to 0.$$

REMARQUE. - Ce théorème reste vrai pour tout CW-complexe X de dimension finie, un tel espace ayant le type d'homotopie d'une variété. Par passage à la limite, ce théorème reste encore vrai pour $X = P^\infty$.

Pour tout $n\in N$ et $\eta_n:S^n\longrightarrow P^n$, $\eta_n^*:\tilde\Omega_0^*(P^n)\longrightarrow\tilde\Omega_0^*(S^n)$ est nul (car Ω_0^* est 0-orientable), et par suite, F étant injectif, il en est a fortiori de même de $\eta_n^*:\tilde\Omega_{SO}^*(P^n;Z_2)\longrightarrow\tilde\Omega_{SO}^*(S^n;Z_2)$. Donc, d'après (1.2.1), le cobordisme orienté à coefficients dans Z_2 est 0-orientable. Plus précisément, soit $t_1\in\tilde\Omega_0^1(P^\infty)$ la classe de Thom canonique de η_∞(pour Ω_0^*) ; alors, il existe un unique élément $t_1'\in\Omega_{SO}^1(P^\infty;Z_2)$ tel que $F(t_1') = t_1 - s(d(t_1))$. Or, $d(\sigma(1))=0$ (car $d(\sigma(1))\in\tilde\Omega_0^3(S^1) = \Omega_0^2(pt) = 0$). Donc, par restriction à $S^1=P^1$, on a : $F(t_1'|_{S^1}) = t_1|_{S^1}-s(d(t_1|_{S^1})) = \sigma(1) = F(\sigma(1))$ (car $t_1|_{S^1}=\sigma(1)$) ; par suite, F étant injectif, on a $t_1'|_{S^1} = \sigma(1)$, donc $t_1'\in\tilde\Omega_{SO}^1(P^\infty;Z_2)$ est une classe de Thom homogène et unitaire pour le cobordisme orienté à coefficients dans Z_2. Alors, d'après (3.1), t_1' définit une transformation naturelle multiplicative et unitaire t': $\Omega_0^*(X)\longrightarrow\Omega_{SO}^*(X;Z_2)$. D'où, d'après (3.2.1), on a :

(4.3.4) THEOREME. - *Le cobordisme orienté à coefficients dans* Z_2 *est naturellement multiplicativement 0-orienté par une transformation naturelle* t': $\Omega_0^*(X)\longrightarrow\Omega_{SO}^*(X;Z_2)$.

Donc, t' *définit des isomorphismes multiplicatifs et unitaires :*

$$\hat t' : H^*(X;Z_2)\otimes_{Z_2}\Omega_{SO}^*(pt;Z_2)\to\Omega_{SO}^*(X;Z_2)$$

et $\bar t' : \Omega_0^*(X)\otimes_{\Omega_0^*(pt)}\Omega_{SO}^*(pt;Z_2)\to\Omega_{SO}^*(X;Z_2)$.

REMARQUE. - t' n'est pas une trétraction de F. Dold [8] a généralisé la situation présente.

Enfin, le morphisme d n'est pas un morphisme de Ω_0^*-modules. Cependant, si $f:Y \longrightarrow X$ représente un élément $x \in \Omega_0^n(X)$ et $(f':Y' \longrightarrow X',y)$ représente un élément $x' \in \Omega_{SO}^m(X';Z_2)$, le fibré normal $\nu_{f'}$ étant sphérique, $2\det(\nu_{f'})$ est trivial (car induit par $2\eta_1$ qui est trivial) ; d'où, en reprenant les notations de (4.3.2), le fibré normal de $Y'\times Y_2$ dans $Y'\times Y$ est stablement isomorphe à $2Y'\times i^*(\det(\nu_f)) = 2\det(\nu_{f'})\oplus i^*(\det(\nu f)) = 2(Y'\times i)^*\det(\nu_{f'\times f})$. Donc, d'après (4.3.2), en oubliant la structure sphérique de x', on a : $x'\times d(x) = d(x'\times x)$.

Il en résulte :

(4.3.5) PROPOSITION. - Ω_0^* *étant muni de sa structure de* $\Omega_{SO}^*(.,Z_2)$*-module définie par l'oubli* F *de structure sphérique, l'homomorphisme* $d:\Omega_0^* \longrightarrow \Omega_0^{*+2}$ *est un homomorphisme de* $\Omega_{SO}^*(.;Z_2)$*-modules.*

(4.4) On passe maintenant à la généralisation promise au début de ce paragraphe.

Soit h^* une théorie cohomologique munie d'une multiplication avec unité, associative et commutative. On suppose que h^* est multiplicativement SO-orientée par une transformation naturelle (multiplicative et unitaire) $s: \Omega_{SO}^* \longrightarrow h^*$.

En particulier, h^* étant SO-orientée est U-orientée ; donc, ν étant le générateur de $\{S^3,S^2\}$, $\nu^*:\tilde{h}^*(S^2) \longrightarrow \tilde{h}^*(S^3)$ est nul et, par Kunneth, il en est de même de $\nu^*:\tilde{h}^* \longrightarrow \tilde{h}^{*-1}$. Alors, sur $h^*(.;Z_2)$, il existe au moins une multiplication admissible et associative (d'après [2] p. 115 et [3] p. 104).

Pour $h^* = \Omega^*_{SO}$, il est facile de voir que la multiplication naturelle **définie** en (4.2) sur $\Omega^*_{SO}(.;Z_2)$ est admissible (voir [14] p. 166) et, comme $\Omega^{-2}_{SO}(pt;Z_2) = 0$, cette multiplication est l'unique multiplication **admissible** sur $\Omega^*_{SO}(.;Z_2)$, d'après [2] p. 94 ou (2.6) de [13] . De plus, cette **multiplication** est évidemment associative et commutative.

Par tensorisation par P^2, $s : \Omega^*_{SO} \longrightarrow h^*$ définit une **transformation** naturelle : $s_2 : \Omega^*(X;Z_2) \longrightarrow h^*(X;Z_2)$ qui rend commutatif le **diagramme ci-dessous** :

$$\begin{array}{ccc}
\Omega^*_{SO}(X) & \xrightarrow{\quad s \quad} & h^*(X) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\Omega^*_{SO}(X;Z_2) & \xrightarrow{\quad s_2 \quad} & h^*(X;Z_2),
\end{array}$$

dans lequel les flèches verticales sont induites par la projection $P^2 \longrightarrow S^2$. En reprenant la construction d'une multiplication admissible faite **dans** [2] p. 112 (et qui est la même que celle faite dans la première **partie de** [13] . on voit que, si $\gamma_0 \in \tilde{\Omega}^2_{SO}(N_2)$ définit la multiplication admissible **de** $\Omega^*_{SO}(.;Z_2)$, on définit, avec $s(\gamma_0) \in \tilde{h}^2(N_2)$, une multiplication **admissible** associative et commutative sur $h^*(.;Z_2)$. De plus, pour cette **multiplication**, la transformation naturelle $s_2 : \Omega^*_{SO}(X;Z_2) \longrightarrow h^*(X;Z_2)$ est **multiplicative** et unitaire.

Le cobordisme orienté à coefficients dans Z_2 étant 0-orienté, il **en est de** même de $h^*(.;Z_2)$; et, plus précisément, $s_2 t' : \Omega^*_0(X) \longrightarrow h^*(X;Z_2)$ est **une** transformation naturelle multiplicative et unitaire. Donc, d'après **(3.2.1)**, on a :

(4.4.1) THEOREME. - *Si* $s:\Omega^*_{SO}\longrightarrow h^*$ *est une transformation naturelle multiplicative et unitaire, pour une structure multiplicative correcte sur* $h^*(.;Z_2)$ *rendant multiplicative et unitaire* $s_2:\Omega^*_{SO}(.;Z_2)\longrightarrow h^*(.;Z_2)$, *on a des isomorphismes multiplicatifs et unitaires :*

$$\widetilde{s_2 t'}:H^*(X;Z_2)\otimes_{Z_2} h^*(pt;Z_2)\longrightarrow h^*(X;Z_2)$$

$$\bar{s}_2:\Omega^*_{SO}(X;Z_2)\otimes_{\Omega^*_{SO}(pt;Z_2)} h^*(pt;Z_2)\longrightarrow h^*(X;Z_2).$$

La correspondance $h^*\rightsquigarrow h^*(.;Z_2)$ associe à une théorie cohomologique multiplicativement SO-orientable une cohomologie O-orientable. Ceci généralise le passage de la cohomologie ordinaire à coefficients dans Z à celle à coefficients dans Z_2. En fait, on peut aussi généraliser le passage de Ω^*_{SO} à Ω^*_0 de la façon suivante :

D'après (4.3.5), $\Omega^*_0(X)$ est un $\Omega^*_{SO}(pt;Z_2)$-module et il en est de même de $h^*(pt;Z_2)$ par s_2. Soit $h^*_2(X) = \Omega^*_0(X)\otimes_{\Omega^*_{SO}(pt;Z_2)} h^*(pt;Z_2)$.

En particulier, $h^*_2(pt) = \Omega^*_0(pt)\otimes_{\Omega^*_{SO}(pt;Z_2)} h^*(pt;Z_2)$ est un Z_2-module (donc Z_2-plat) et on a :

$$h^*_2(X) = \Omega^*_0(X)\otimes_{\Omega^*_{SO}(pt;Z_2)} h^*(pt;Z_2) \approx (H^*(X;Z_2)\otimes_{Z_2} \Omega^*_0(pt))\otimes_{\Omega^*_{SO}(pt;Z_2)} h^*(pt;Z_2),$$

$$\approx H^*(X;Z_2)\otimes_{Z_2} (\Omega^*_0(pt)\otimes_{\Omega^*_{SO}(pt;Z_2)} h^*(pt;Z_2)) = H^*(X;Z_2)\otimes_{Z_2} h^*_2(pt).$$

Il en résulte que h^*_2 est une théorie cohomologique munie d'une multiplication unitaire associative et commutative. De plus, on a de façon évidente des transformations naturelles multiplicatives et unitaires $\Omega^*_0\longrightarrow h^*_2$ et $h^*\longrightarrow h^*_2$.

Pour $h^* = \Omega^*_{SO}$, on a $h^*_2 = \Omega^*_0$. Le fait de considérer le passage de h^* à h^*_2 comme une bonne généralisation du passage de Ω^*_{SO} à Ω^*_0 est justifié de la façon suivante :

La suite exacte et scindée :

$$0 \to \Omega^*_{SO}(pt;Z_2) \xrightarrow{F} \Omega^*_0(pt) \xrightarrow{d} \Omega^{*+2}_0(pt) \to 0$$

permet, connaissant la structure de $\Omega^*_0(pt)$ [15], de déduire celle de $\Omega^*_{SO}(pt;Z_2)$. De façon précise, on peut choisir des générateurs x_i de degré $-i$, $i \neq 2^t - 1$, de $\Omega^*_0(pt) = Z_2[x_i]$, tels que $\Omega^*_{SO}(pt;Z_2)$, considéré comme sous anneau de $\Omega^*_0(pt)$ par F, soit égal à $Z_2[x_i,(x_{2s})^2;\ i \neq 2^t - 1 \text{ et } 2^t]$ (voir [14] p. 166). En particulier, $\Omega^*_0(pt)$ est un $\Omega^*_{SO}(pt;Z_2)$-module libre et il en est de même de $\Omega^*_0(X) = H^*(X;Z_2)\otimes_{Z_2}\Omega^*_0(pt)$.

Or, d'après (4.3.5), la suite exacte :

$$0 \to \Omega^*_{SO}(X;Z_2) \xrightarrow{F} \Omega^*_0(X) \xrightarrow{d} \Omega^{*+2}_0(X) \to 0$$

se lit dans la catégorie des $\Omega^*_{SO}(pt;Z_2)$-modules et, comme $\Omega^{*+2}_0(X)$ est libre dans cette catégorie, cette suite est scindée (dans cette catégorie).

Donc, en tensorisant par le $\Omega^*_{SO}(pt;Z_2)$-module $h^*(pt;Z_2)$, on obtient, d'après (4.4.1), la suite exacte et scindée de $h^*(pt;Z_2)$-modules ;

$$0 \to h^*(X;Z_2) \xrightarrow{F} h^*_2(X) \xrightarrow{d} h^{*+2}_2(X) \to 0 .$$

EXEMPLE. Pour la cohomologie ordinaire à coefficients dans Z, les remarques ci-dessus montrent que $H^*_2(pt) = Z_2[x_{2s}]/((x_{2s})^2)$ et que $H^*(X;Z_2)\otimes_{Z_2} H^*_2(pt)$. Il serait intéressant de savoir si on a une bonne interprétation géométrique de cette théorie.

V. THEORIES COHOMOLOGIQUES U-ORIENTABLES.

(5.1) Soit h^* une théorie cohomologique munie d'une multiplication avec unité, associative et commutative. On suppose la théorie h^* U-orientable. Donc, d'après (3.1), il existe une transformation naturelle multiplicative et unitaire :

$$t: \Omega_U^* \longrightarrow h^* .$$

En particulier, $h^*(pt)$ est une $\Omega_U^*(pt)$-algèbre et, par tensorisation, t définit une transformation naturelle, multiplicative et unitaire :

$$\bar{t}: \Omega_U^* \otimes_{\Omega_U^*(pt)} h^*(pt) \longrightarrow h^* .$$

Dans [1] p. 1-45, Adams étudie de telles transformations, dans le cadre d'une généralisation du théorème des coefficients universels et du théorème de Kunneth. En particulier, les deux lemmes et la proposition qui suivent sont dûs à Adams.

(5.1.1) LEMME. - *Soit* X *un* CW-*complexe fini tel que* $H^*(X;Z)$ *soit un groupe abélien libre. Alors,* $\Omega_U^*(X)$ *est un* $\Omega_U^*(pt)$-*module projectif et* $\bar{t}:\Omega_U^*(X) \otimes_{\Omega_U^*(pt)} h^*(pt) \longrightarrow h^*(X)$ *est un isomorphisme.*

En effet, considérons les suites spectrales convergentes d'Atiyah-Hirzebruch-Dold : $E_r^{**}(0):H^*(X;\Omega_U^*(pt)) \Longrightarrow \Omega_U^*(X)$ et $E_r^{**}(1):H^*(X;h^*(pt)) \Longrightarrow h^*(X)$. $E^{**}(0)$ est une suite spectrale dégénérée (i.e. toutes ses différentielles sont nulles, car elles sont à valeurs dans la torsion de $H^*(X; \Omega_U^*(pt))$ qui est nulle). Donc, $E^{**}_\infty(0) = E_2^{**}(0) = H^*(X;Z) \otimes \Omega_U^*(pt)$ qui est le gradué associé à une filtration finie de $\Omega_U^*(X)$ (X est un CW-complexe fini) est $\Omega_U^*(pt)$-libre et, par suite, $\Omega_U^*(X)$ est $\Omega_U^*(pt)$-projectif.

Alors, $E_r^{**}(2) = E_r^{**}(0)\otimes_{\Omega_U^*(pt)} h^*(pt)$, muni de $d_r\otimes 1$, est une suite **spectrale** dégénérée ; de plus, $\bar{t}$ induit un morphisme de suites spectrales ($\bar{t}_r : E_r^{**}(2) \longrightarrow E_r^{**}(1)$) qui, pour $r = 2$, est un isomorphisme ; donc, il **en** est de même de $\bar{t}_\infty : E_\infty^{p,*}(0)\otimes_{\Omega_U^*(pt)} h^*(pt) \longrightarrow E_\infty^{p,*}(1)$.

Soit $F_p^*(0) = \ker(\Omega_U^*(X) \longrightarrow \Omega_U^*(X^{p-1}))$ et $F_p^*(1) = \ker(h^*(X) \longrightarrow h^*(X^{p-1}))$ **où** X^k est le k-ième squelette de X. De la naturalité de $\bar{t}$, on déduit que, pour tout p, $\bar{t}$ induit un homomorphisme encore noté $\bar{t} : F_p^*(0)\otimes_{\Omega_U^*(pt)} h^*(pt) \longrightarrow F_p^*(1)$, et on a le diagramme commutatif de **suites** exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \longrightarrow & F_{p+1}^*(0)\otimes_{\Omega_U^*(pt)} h^*(pt) & \longrightarrow & F_p^*(0)\otimes_{\Omega_U^*(pt)} h^*(pt) & \longrightarrow & E_\infty^{p,*}(0)\otimes_{\Omega_U^*(pt)} h^*(pt) & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow{\scriptstyle \bar{t}} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{t}} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{t}_\infty} & \\
0 \longrightarrow & F_{p+1}^*(1) & \longrightarrow & F_p^*(1) & \longrightarrow & E_\infty^{p,*}(1) & \longrightarrow 0 .
\end{array}$$

Pour $p > \dim(X)$, on a $F_p^*(0) = F_p^*(1) = 0$; donc, par récurrence **décroissante** sur p, on en déduit que $\bar{t} : \Omega_U^*(X)\otimes_{\Omega_U^*(pt)} h^*(pt) \longrightarrow h^*(X)$ est un **isomorphisme.**

(5.1.2) LEMME. - *Tout CW-complexe fini X admet une $\Omega_U^*(pt)$-résolution finie.*

En effet, l'existence de $\Omega_U^*(pt)$-résolutions de X se détuit, **par** dualité de Spanier, de la structure du spectre MU. La condition de **finitude** se déduit, par récurrence sur le squelette de X($\Omega_U^*(pt)$ est un anneau **cohérent** voir [1]).

Par la méthode classique de construction des suites spectrales ([1] p. 33-34), on déduit de ces deux lemmes :

(5.1.3) PROPOSITION. - *Pour tout* CW-*complexe fini, on a une suite spectrale convergente :* $\mathrm{Tor}^{\Omega_U^*(pt)}(\Omega_U^*(X),\ h^*(pt)) \longrightarrow h^*(X)$, *dont le "edge-homomorphisme" est :* $\bar{t}:\Omega_U^*(X)\otimes_{\Omega_U^*(pt)} h^*(pt) \longrightarrow h^*(X)$.

De cette proposition, on déduit facilement le résultat suivant de Conner et Smith :

(5.1.4) COROLLAIRE. - *Pour un* CW-*complexe fini, il y a équivalence entre :*
(i) $H^*(X;Z)$ *est libre,*
(ii) $\Omega_U^*(X)$ *est* $\Omega_U^*(pt)$*-projectif,*
(iii) $\Omega_U^*(X)$ *est* $\Omega_U^*(pt)$*-libre.*

(5.2) On cherche des conditions permettant d'affirmer que $\bar{t}:\Omega_U^*\otimes_{\Omega_U^*(pt)} h^*(pt) \to h^*$ est un isomorphisme. Dans cette voie, on a le lemme suivant dont le principe de démonstration est du à Conner et Smith [6].

(5.2.1) LEMME. - *Si* $\bar{t}:\Omega_U^*\otimes_{\Omega_U^*(pt)} h^*(pt) \longrightarrow h^*$ *est surjectif, alors* $\bar{t}$ *est un isomorphisme.*

En effet, d'après (5.1.2), pour tout CW-complexe fini, $\Omega_U^*(X)$ a une dimension homologique finie sur $\Omega_U^*(pt)$. On raisonne alors par récurrence sur cette dimension homologique notée simplement $\dim_U(X)$. Pour $\dim_U(X) = 0$, d'après (5.1.4), $H^*(X;Z)$ est libre, et, d'après (5.1.1), $\bar{t}_X$ est un isomorphisme. Supposons que, pour tout CW-complexe fini Y, vérifiant $\dim_U(Y) \leq n$, $\bar{t}_Y$ soit un isomorphisme ; soit X un CW-complexe fini vérifiant $\dim_U(X) = n+1$. D'après (5.1.2), il existe un CW-complexe fini A et $f:S^pX \to A$ tel que $\Omega_U^*(A)$ soit $\Omega_U^*(pt)$-projectif et $f:\Omega_U^*(A) \longrightarrow \Omega_U^*(S^pX)$ surjectif. Soit Y le cône de f.

On a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \widetilde{\Omega}_U^*(Y) \longrightarrow \Omega_U^*(A) \longrightarrow \Omega_U^*(S^pX) \longrightarrow 0.$$

Donc, $\dim_U(Y) \leq n$ et, par l'hypothèse de récurrence, $\bar{t}_Y$ est un isomorphisme.
Alors, on a le diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\Omega}_U^*(Y)\otimes_{\Omega_U^*(pt)}h^*(pt) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{t}_Y"', "\wr"] & \Omega_U^*(A)\otimes_{\Omega_U^*(pt)}h^*(pt) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{t}_A"', "\wr"] & \Omega_U^*(S^pX)\otimes_{\Omega_U^*(pt)}h^*(pt) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{t}_{S^pX}"'] & 0 \\
\widetilde{h}^*(Y) \arrow[r] & h^*(A) \arrow[r] & h^*(S^pX) \arrow[d] & \\
 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

Il résulte facilement de ce diagramme que $\bar{t}_{S^pX}$ est un isomorphisme et il en est donc de même de $\bar{t}_X$. Le lemme est donc démontré par récurrence.

(5.2.2) PROPOSITION. - *Il y a équivalence entre les deux assertions suivantes :*

(i) Pour tout CW*-complexe fini* X, $\bar{t}_X$ *est un isomorphisme,*

(ii) Pour tout CW*-complexe fini* X, *il existe un* CW*-complexe fini* A *et* $f:S^pX \longrightarrow A$ *tels que* $H^*(A;Z)$ *soit libre et* $f^*: h^*(A) \longrightarrow h^*(S^pX)$ *surjectif.*

En effet, (i) entraine (ii) d'après (5.2.1) et (5.1.2). D'autre part, d'après (5.1.1), $\bar{t}_A$ est surjectif, donc (ii) entraine que $(\bar{t}_{S^pX})f = f^*\bar{t}_A$ est surjectif et, par suite, il en est de même de $\bar{t}_{S^pX}$; donc, d'après (5.2.1), (ii) entraine (i).

On donne un cas simple où la condition (ii) est vérifiée :

(5.2.3) THEOREME. - *On suppose que, pour tout* CW-*complexe* X, $h^*(X)$ *soit de type fini et que* h^* *soit défini par un spectre* (B_n) *tel que, pour tout* n,

1) B_n *soit un* CW-*complexe fini,*

2) $H^*(B_n;Z)$ *soit libre.*

Alors , $\bar{t}:\Omega_U^*\otimes_{\Omega_U^*(pt)}h^*(pt)\longrightarrow h^*$ *est un isomorphisme.*

En effet, pour un CW-complexe fini X, soit $(x_i\in h^i(X))_{i\in I}$ (I fini) un système de générateurs de $h^*(X)$ et, pour tout $i\in I$, soit $f_i:S^{n_i}X\longrightarrow B_{i+n_i}$ un représentant de x_i. Pour $n = \max(n_i/i\in I)$, soit $f:S^nX\longrightarrow \bigvee_{i\in I} S^{n-n_i}B_{i+n_i} = A$ l'application dont la i-ième composante est $S^{n-n_i}f_i$. Alors, d'après 2), $H^*(A;Z)$ est libre et, par construction, l'application $f^*: h^*(A)\longrightarrow h^*(S^nX)$ est surjective. Donc, la condition (ii) de (5.2.2) est vérifiée et, par suite $\bar{t}$: $\Omega_U^*\otimes_{\Omega_U^*(pt)}h^*(pt)\longrightarrow h^*$ est un isomorphisme.

EXEMPLES. - Dans [4] p. 113-114, Atiyah vérifie les conditions du théorème ci-dessus pour $h^* = KU^*$ ce qui redonne une démonstration du théorème de Conner et Floyd. On a un résultat analogue pour $h^* = kU^*$(K-théorie connective complexe) [6] . On donnera un nouvel exemple dans le paragraphe VI.

VI. THEORIES COHOMOLOGIQUES MULTIPLICATIVEMENT SU-ORIENTABLES.

(6.1) On a défini dans [13] le cobordisme SU-orienté à coefficients dans ν, où ν est le générateur de $\{S^3,S^2\}$, et on a montré que la 2n-ième composante du spectre de cette théorie est $MSU(n-1)\wedge CP^2$.
Comme dans IV, on montre que, pour une variété X, un élément de $\Omega^*_{SU}(X;\nu)$ est représenté par un triplet (f,ε,y) où $f:Y\to X$ est une application propre différentiable, ε une structure complexe sur le fibré normal ν_f de f, et y la classe d'homotopie d'une application de Y dans $S^2 = CP^1$ telle que $j_*(y)\in[Y,CP^\infty] = H^2(Y;Z)$ soit la première classe de Chern de (ν_f,ε) ($j:S^2=CP^1\longrightarrow CP^\infty$ étant l'inclusion naturelle).

De même, comme dans IV, on montre que l'on a une suite exacte et scindée, naturelle en X :

$$0\longrightarrow \Omega^*_{SU}(X;\nu)\xrightarrow{\ F\ }\Omega^*_U(X)\xrightarrow{\ d\ }\Omega^{*+4}_U(X)\longrightarrow 0,$$

où F est l'oubli de la structure "sphérique", y, et où d et sa section se construisent formellement comme dans le cas du cobordisme orienté à coefficients dans Z_2 (dans le corollaire (4.3.2), on doit remplacer $2\det(\nu_f)$ par $\det(\nu_f)+\overline{\det(\nu_f)}$).

Par contre, comme S^2 n'est plus un H-espace, il n'y a pas de structure multiplicative naturelle sur le cobordisme SU-orienté à coefficients dans ν.

Cependant, d'après (2.6) de [13], comme $\Omega^{-4}_{SU}(S^0;\nu)\approx Z$, il existe Z multiplications admissibles et, d'après (5.3) de [13], toutes ces multiplications sont commutatives ; de plus, d'après (6.7) de [13], il existe des multiplications admissibles, commutatives et associatives.

REMARQUE. - Dans [14] p. 262, Stong montre que, si ψ est la rétraction de F correspondant à la section s de d, l'application : $(x,y) \longmapsto \psi(F(x) \wedge F(y))$ définit une structure multiplicative, unitaire, associative et commutative sur $\Omega^*_{SU}(\cdot;\nu)$. Il montre de plus que cette multiplication est admissible. Enfin, pour cette multiplication, on a $\Omega^*_{SU}(pt;\nu) \approx Z[x_i | i \neq 2]$, où $\deg(x_i) = -2i$. Dans la suite, on munit le cobordisme SU-orienté à coefficients dans ν de cette structure multiplicative (mais on pourrait en prendre une autre associative).

Pour tout $n \in N$ et $\nu_n : S^{2n+1} \longrightarrow CP^n$, $\nu_n^* : \tilde{\Omega}^*_U(CP^n) \longrightarrow \tilde{\Omega}^*_U(S^{2n+1})$ est nul (car Ω^*_U est U-orientable), par suite, F étant injectif, $\nu_n^* : \tilde{\Omega}^*_{SU}(CP^n;\nu) \longrightarrow \tilde{\Omega}^*_{SU}(S^{2n+1};\nu)$ est nul. Donc, d'après (1.2.2), le cobordisme SU-orienté à coefficients dans ν est U-orientable. Par le même procédé que celui utilisé en (4.3), on a une U-orientation canonique pour cette théorie d'où une transformation naturelle multiplicative et unitaire :

$$\bar{t} : \Omega^*_U(X) \otimes_{\Omega^*_U(pt)} \Omega^*_{SU}(pt;\nu) \longrightarrow \Omega_{SU}(X;\nu).$$

De plus, on a :

(6.1.1) THEOREME. - $\bar{t} : \Omega^*_U(X) \otimes_{\Omega^*_U(pt)} \Omega^*_{SU}(pt;\nu) \longrightarrow \Omega^*_{SU}(X;\nu)$ *est un isomorphisme.*

En effet, pour tout CW-complexe fini X, $\Omega^*_U(X)$ étant de type fini (d'après (5.1.2)), il en est de même de $\Omega^*_{SU}(X;\nu)$ (car F est injectif) ; d'autre part, $H^*(CP^2;Z)$ et $H^*(MSU(n);Z)$ étant libres, on peut appliquer le théorème (5.2.3) qui nous donne le résultat cherché.

(6.2) Soit h^* une théorie cohomologique multiplicativement SU-orientée par une transformation naturelle multiplicative et unitaire :

$$s : \Omega^*_{SU} \longrightarrow h^*.$$

Par tensorisation par CP^2, s définit une transformation naturelle :

$$s_2 : \Omega^*_{SU}(X;\nu) \longrightarrow h^*(X;\nu).$$

De plus, en reprenant la construction d'une multiplication admissible faite dans la première partie, on voit que si $j_1^!$ et c définissent la multiplication admissible sur $\Omega^*_{SU}(.;\nu)$ définie ci-dessus, la multiplication admissible sur $h^*(.;\nu)$ définie par $j_1^!$ et s(c) est associative (et nécessairement commutative) et que, s_2 est multiplicative et unitaire.
En particulier, le cobordisme SU-orienté à coefficients dans ν étant U-orienté on a :

(6.2.1) THEOREME. - *Si h^* est une théorie cohomologique multiplicativement SU-orientable, la théorie associée à coefficients dans ν est U-orientable pour une structure multiplicative correcte sur cette théorie.*

REMARQUES. - 1) Comme $\Omega^*_{SU}(.;\nu)$ n'est pas multiplicativement injecté dans Ω^*_U, on ne peut pas donner une généralisation du passage de Ω^*_{SU} à Ω^*_U .

2) Le théorème (6.2.1)mmontre que, la KU-théorie étant multiplicativement SU-orientée, la KU-théorie est U-orientable !.

3) Il serait sans doute d'intérêt d'étudier les théories $\Omega^*_{Sp}(.;\nu)$ et $\Omega^*_{Sp}(.;\nu^2)$.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] ADAMS J.F., Lectures on Generalized Cohomology, Category Theory, Homology Theory and their Applications III, Lecture Notes in Math. 99, Springer, (1969), p.1-45.

[2] ARAKI S. and TODA H.?, Multiplicative structures in mod q cohomology theories, I, *Osaka J. Math.* 2 (1965), p. 71-115.

[3] ARAKI S. and TODA H., Multiplicative structures in mod q cohomology theories, II, *Osaka J. Math.,* 3 (1966), p. 81-120.

[4] ATIYAH M., K-theory, New-York, Amsterdam, W.A. Benjamin (1967).

[5] ATIYAH M., Bordism and Cobordism, *Proc. Camb. Phil. Soc.* 57 (1961), p. 200-208.

[6] CONNER P.E. and Smith L. , On the Complex Bordism of Finite Complexes, *I.H.E.S. Journal de Math.* , 737 (1969).

[7] DOLD A. , On General Cohomology, ch. 1-9, Nordic Summer School in Mathematics, Aarhus Universitet, (1968).

[8] DOLD A. , The K-theory and Cobordism Theory associated with a General Cohomological Structure, Topology and its Applications, Beograd (1973), p. 74-78.

[9] KAROUBI M. , Cobordisme et Groupes Formels, Séminaire Bourbaki, 408 (1971/72), Paris.

[10] LIULEVICIUS A., A theorem in Homological Algebra and Stable Homotopy of Projective Spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* 109(1963), p. 540-552.

[11] QUILLEN D. , Elementary Proofs of Some Resuls of Cobordism Theory using Steenrod Operations, *Advances in Mathematics,* 7 (1971),p.29-56.

[12] PATTERSON R.R. and STONG R.E., Orientability of Bundles *(Preprint).*

[13] ROUX A., Structure multiplicative sur une théorie cohomologique à coefficients dans une classe d'homotopie stable de sphère, *Thèse* (1ère partie, 1975), Lyon

[14] STONG R.E., Notes in Cobordism Theory, Math. Notes, Princeton University Press, (1968).

[15] THOM R., Quelques Propriétés Globales des Variétés Différentiables, *Comm. Math. Helv.* 28 (1954), p. 17-86.

[16] WALL C.T.C. Determination of the Cobordism Ring, *Ann. Of Math.* 72 (1960), p. 292-311.

Manuscrit remis le 22 octobre 1975.

André ROUX
Département de Math. Univ. C. Bernard
43, bd du 11-11-1918 - VILLEURBANNE