PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

A. HUDRY

Épimorphismes plats à buts locaux, quasi-locaux et semi-locaux

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1975, tome 12, fascicule 2
, p. 31-41

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1975__12_2_31_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1975 t. 12-2

EPIMORPHISMES PLATS A BUTS LOCAUX,

QUASI-LOCAUX ET SEMI-LOCAUX

par A. HUDRY

INTRODUCTION. Un épimorphisme d'un anneau R dans un anneau R' est dit *plat à droite* si R', considéré comme R-module à gauche, est plat. Les épimorphismes plats d'anneaux ont été étudiés par L. Silver dans [15] sous le nom de "localisations non commutatives". Cette terminologie est justifiée, car N. Popescu a montré dans [11] que ces "localisations non commutatives" de L. Silver sont un cas particulier de la théorie générale des localisations développée par P. Gabriel dans [2] et qu'à tout épimorphisme plat à droite ρ d'anneaux peut être associé une localisation $\mathcal{L}_\rho$ (au sens habituel) dite plate dans [3] .

Il est naturel de chercher à quelles conditions nécessaires et suffisantes ces "localisations non commutatives" de L. Silver permettent l'obtention d'anneaux locaux, quasi-locaux et semi-locaux. Dans cette direction, nous avons donné une réponse pour le cas local, sans démonstrations, dans [4] . Ici il va être donné des réponses pour les autres cas. Ces questions sont liées à la notion de localisation associée à un idéal premier ou semi-premier qui a été développée, dans le cas noethérien, par J. Lambek et G. Michler dans [8] et [9] et par A.V. Jategaonkar dans [6] (pour une généralisation voir encore G. Findlay [1]). La différence avec les articles précités est qu'ici on ne fait pas d'hypothèses noethériennes sur les anneaux ; la technique des articles précités intervient surtout pour l'obtention de conditions suffisantes et, lorsque les démonstrations sont les mêmes que celles données dans ces articles, elles sont omises.

TERMINOLOGIE. Dans tout ce qui suit, R désigne un anneau unitaire mais non nécessairement commutatif, RadR son radical de Jacobson et, Mod-R la catégorie des R-modules à droite. Par localisation $\mathcal{L}$ de Mod-R, on entend localisation au sens de P. Gabriel. A une telle localisation $\mathcal{L}$ de Mod-R, il est associé bijectivement :

- une topologie à droite $\mathcal{F}$ de R, c'est-à-dire un ensemble topologisant et idempotent d'idéaux à droite de R (voir [2]) ;

- une sous-catégorie localisante $\mathcal{C}$ de Mod-R, c'est-à-dire une sous-catégorie pleine, épaisse et stable par limites inductives;

- une sous-catégorie locale $\mathcal{L}$, c'est-à-dire une sous-catégorie pleine de Mod-R telle que le foncteur inclusion i admette une adjoint à gauche ℓ commutant aux limites projectives finies (voir [3]).

Le foncteur localisation L de P. Gabriel est alors $L = i \circ \ell$.

Si M est un R-module à droite, E(M) désigne l'une de ses enveloppes injectives ; il est bien connu que le noyau $\mathcal{C}_M$ du foncteur $\mathrm{Hom}_R(\cdot, E(M))$ est une sous-catégorie localisante de Mod-R définissant une localisation notée $\mathcal{L}_M$.

A tout épimorphisme plat à droite ρ d'anneaux, il est associé bijectivement une localisation $\mathcal{L}_\rho$ plate de Mod-R, c'est-à-dire telle que le foncteur localisation L_ρ associé commute aux limites inductives (voir [3]).

Si $\rho : R \to R'$ est un homomorphisme d'anneaux et $\mathcal{F}$ une topologie à droite de R, la topologie image $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$ par ρ est l'ensemble des idéaux à droite I' de R' tel que $\rho_*(R'/I') \in \mathcal{C}$, où $\mathcal{C}$ est une sous-catégorie localisante de Mod-R associée à $\mathcal{F}$ et où ρ_* est le foncteur restriction des scalaires.

A tout idéal bilatère B de R, sont associés la partie multiplicative $\mathscr{C}(B)$ des éléments de R réguliers modulo B et la topologie à droite $\mathscr{D}_B$ constituée par les idéaux à droite I de R tels que pour tout $a \in R$, l'idéal à droite $I \cdot {}^{\cdot}a$ coupe $\mathscr{C}(B)$.

Dans le treillis des localisations de Mod-R, la borne inférieure d'une famille $(\tilde{\mathscr{L}}_i)_{i \in I}$ de localisations est la localisation notée $\bigwedge_{i \in I} \tilde{\mathscr{L}}_i$ définie par la sous-catégorie localisante $\bigcap_{i \in I} \mathscr{C}_i$, où $\mathscr{C}_i$ est la sous-catégorie localisante associée à $\tilde{\mathscr{L}}_i$.

Un anneau R est dit *local* si R/RadR est un corps, *quasi-local* si R/RadR est simple artinien et *semi-local* si R/RadR est semi-simple artinien.

1. LEMME. - *Une localisation* $\tilde{\mathscr{L}}$ *de* Mod-R *est intersection réduite de localisations premières si et seulement si la sous-catégorie locale* $\mathscr{L}$ *admet un cogénérateur injectif de la forme* $E(\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} S_\alpha)$ *où les* S_α *sont des objets simples de type distincts de* $\mathscr{L}$. *Alors les seuls types d'objets simples de* $\mathscr{L}$ *sont ceux des* S_α .

PREUVE. D'après Jans [5] , il existe un R-module à droite injectif I tel que $\tilde{\mathscr{L}} = \tilde{\mathscr{L}}_I$. Le R-module à droite I est un objet de $\mathscr{L}$; donc si $\mathscr{L}$ admet un cogénérateur injectif de la forme $E(\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} S_\alpha)$ où les S_α sont des objets simples de types distincts de $\mathscr{L}$, il existe un ensemble K tel que I soit isomorphe à un sous-module de $(E(\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} S_\alpha))^K$. Il en résulte alors :

$$\bigwedge_{\alpha \in \Lambda} \tilde{\mathscr{L}}_{S_\alpha} \leqslant \tilde{\mathscr{L}}.$$

Comme les R-modules à droite S_α sont sans torsion pour la localisation $\tilde{\mathscr{L}}$, il vient pour tout $\alpha \in \Lambda$: $\tilde{\mathscr{L}} \leqslant \tilde{\mathscr{L}}_{S_\alpha}$, donc finalement $\tilde{\mathscr{L}} = \bigwedge_{\alpha \in \Lambda} \tilde{\mathscr{L}}_{S_\alpha}$. S'il existait $\alpha \in \Lambda$ tel que $\tilde{\mathscr{L}} = \bigwedge_{\substack{\beta \neq \alpha \\ \beta \in \Lambda}} \tilde{\mathscr{L}}_{S_\beta} \leqslant \tilde{\mathscr{L}}_{S_\alpha}$, il existerait un R-homomorphisme f non nul de S_α dans $E(\bigoplus_{\substack{\beta \neq \alpha \\ \beta \in \Lambda}} S_\beta)$, car S_α est sans torsion pour la localisation $\tilde{\mathscr{L}}$.

Compte tenu de ce que S_α est un objet simple de $\mathcal{L}$, il en résulterait que f serait un monomorphisme ce qui impliquerait l'existence d'un sous R-module à droite de S_α isomorphe à un sous-R-module à droite d'un des S_β pour $\beta \neq \alpha$. Il en résulterait finalement que S_α et S_β seraient isomorphes dans Mod-R et dans $\mathcal{L}$, ce qui est exclu car les S_α sont des objets simples de types distincts dans $\mathcal{L}$. Il en résulte que $\mathcal{L}$ est intersection réduite des localisations premières $\hat{\mathcal{L}}_{S_\alpha}$.

Réciproquement, il est supposé que $\check{\mathcal{L}}$ est intersection réduite des localisations premières $\mathcal{L}_\alpha$ avec $\alpha \in \Lambda$. D'après J. Raynaud [13], pour tout $\alpha \in \Lambda$ il existe un idéal à droite A_α maximal pour la propriété de non appartenance à la topologie à droite $\mathcal{F}_\alpha$ associée à $\mathcal{L}_\alpha$ et à la topologie à droite $\mathcal{F}$ associée à $\check{\mathcal{L}}$. Il en résulte que, si S_α désigne la coréflexion de R/A_α dans $\check{\mathcal{L}}$, il vient : $\mathcal{L}_\alpha = \mathcal{L}_{S_\alpha}$ et $\check{\mathcal{L}} = \bigwedge_{\alpha\in\Lambda} \mathcal{L}_\alpha = \mathcal{L}_{E(\oplus_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha)}$, où les S_α sont des objets simples de types distincts de $\check{\mathcal{L}}$.

Par suite, compte tenu de J. LAMBEK [7], $E(\oplus_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha)$ est un cogénérateur de $\check{\mathcal{L}}$.

Soit alors S un objet simple quelconque de $\check{\mathcal{L}}$. Si S est considéré en tant que R-module à droite, il existe $\alpha \in \Lambda$ tel que $\mathrm{Hom}_R(S,E(S_\alpha)) \neq 0$. Si f est un R-homomorphisme non nul de S dans $E(S_\alpha)$, il est facile de voir que f est nécessairement un monomorphisme. Il en résulte que dans Mod-R, il existe un sous-R-module non nul de S isomorphe à un sous R-module de S_α. Puisque S_α est un objet simple de $\check{\mathcal{L}}$, il en résulte que dans $\check{\mathcal{L}}$, S et S_α sont isomorphes.

2. COROLLAIRE. - *Soit* ρ *un épimorphisme plat à droite de l'anneau* R *dans l'anneau* R' *; pour qu'il n'existe qu'un nombre fini de types de modules simples dans* Mod-R', *il faut et il suffit que la localisation plate* $\check{\mathcal{L}}_\rho$ *associée à* ρ *soit intersection réduite d'un nombre fini de localisations premières.*

PREUVE. - Ce corollaire résulte du lemme 1 et du fait que $\mathrm{Mod}_{R'}$ est équivalente à la sous-catégorie locale $\mathcal{C}_\rho$.

Les résultats du lemme suivant sont dus à G. Michler et J. Lambek (il suffit d'adapter leurs démonstrations dans [9]).

3. LEMME (J. Lambek et G. Michler). - *Soit* N *un idéal bilatère semi-premier de* R *tel que l'anneau quotient* R/N *soit de Goldie à droite. Alors les propriétés suivantes sont réalisées :*

a) $\mathcal{C}(N) = \{c \in R \mid cx \in N \Rightarrow x \in N\}$.

b) $\mathcal{F}_{R/N} = \mathcal{F}_N$.

c) Si $\mathcal{L}_{R/N}$ *est une localisation plate alors* $\mathrm{Rad}R_N = \mathrm{Ann}_{R_N}(R_N/NR_N)$.

d) les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathcal{C}(N)$ *est une partie multiplicative calculable à droite ;*

(ii) l'anneau R_N *est semi-local et* $\mathrm{Rad}R_N = \Psi_N(N)R_N$.

4. COROLLAIRE. - *Etant donné un idéal bilatère semi-premier* N *d'un anneau quelconque* R*, pour que l'anneau* R_N *soit semi-local et de radical de Jacobson* $\Psi_N(N)R_N$ *, il faut et il suffit que l'anneau* R/N *soit de Goldie à droite et que la partie multiplicative* $\mathcal{C}(N)$ *soit calculable à droite.*

PREUVE. - Compte tenu du lemme 3, il suffit de prouver que si R_N est semi-local avec $\mathrm{Rad}R_N = \Psi_N(N)R_N$ l'anneau R/N est de Goldie à droite. Soit I' un idéal à droite de la topologie image de $\mathcal{F}_{R/N}$ par l'homomorphisme Ψ_N. Alors $I'+\mathrm{Rad}R_N/\mathrm{Rad}R_N$ est un idéal à droite essentiel de l'anneau semi-simple artinien $R_N/\mathrm{Rad}R_N$, ce qui implique $I'+\mathrm{Rad}R_N = R_N$ et par suite $I' = R_N$. Ceci prouve que la topologie image de $\mathcal{F}_{R/N}$ par Ψ_N n'a qu'un seul idéal à droite, à savoir R_N. La localisation $\mathcal{L}_{R/N}$ est donc plate et par suite le localisé de N (respectivement de R/N) est $\mathrm{Rad}R_N$ (respectivement $R_N/\mathrm{Rad}R_N$).

L'anneau R/N admet donc pour anneau maximal des quotients à droite l'anneau semi-simple artinien $R_N/\mathrm{Rad}R_N$. Par suite R/N est non singulier, de dimension de Goldie à droite finie, et, étant semi-premier, il est de Goldie à droite et admet encore $R_N/\mathrm{Rad}R_N$ comme anneau classique des quotients à droite.

5. THEOREME. - *Etant donné un épimorphisme plat à droite* ρ *de l'anneau* R *dans l'anneau* R', *pour que l'anneau* R' *soit semi-local, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient réalisées :*

a) il existe un idéal bilatère semi-premier N *de l'anneau* R *tel que* R/N *soit de Goldie à droite avec* $\tilde{\mathcal{L}}_\rho = \tilde{\mathcal{L}}_{R/N}$;

b) l'une et l'une seulement des deux conditions suivantes est réalisée :

soit b1) la partie multiplicative $\mathcal{C}(N)$ *est calculable à droite.*

soit b2) l'intersection J *des idéaux à droite maximaux n'appartenant pas à* $\mathcal{F}_{R/N}$ *est incluse strictement dans* N *et peut-être réduite en une intersection finie.*

PREUVE. - Pour démontrer que les conditions a) et b) sont nécessaires, il est supposé que l'épimorphisme plat à droite ρ de source R a pour but un anneau R' semi-local. Alors Mod-R' n'a qu'un nombre fini de types de modules simples. Soit $\{S'_1, S'_2, \dots, S'_n\}$ un ensemble de représentants des types de R'-modules à droite simples. D'après le corollaire 2 et la démonstration du lemme 1, il vient :

$$\tilde{\mathcal{L}}_\rho = \bigwedge_{i=1}^{r} \tilde{\mathcal{L}}_{\rho_*(S'_i)} \quad , \text{ où } \rho_* \text{ désigne le foncteur}$$

restriction des scalaires.

D'autre part, la localisation $\tilde{\mathcal{L}}_\rho$ étant plate, le treillis des idéaux à droite de R clos pour la localisation $\tilde{\mathcal{L}}_\rho$ et contenant l'idéal bilatère $\rho^{-1}(\mathrm{Rad}R')$ est isomorphe au treillis des idéaux à droite de R' contenant RadR' et, par suite, il satisfait à la condition de chaîne ascendante et à la condition de chaîne descendante.

Il en résulte que pour tout $i \in [1,r]$, le R-module à droite $\rho_*(S'_i)$ admet un idéal premier associé P_i (unique) intersection réduite d'un nombre fini d'idéaux à droite de la forme $\mathrm{Ann}x_\alpha$ avec $x_\alpha \in \rho_*(S'_i)$ et avec $\alpha \in \Lambda_i$ (où Λ_i désigne un ensemble fini) : $P_i = \bigcap_{\alpha \in \Lambda_i} \mathrm{Ann}x_\alpha$. Puisque les idéaux à droite $\mathrm{Ann}x_\alpha$ pour $\alpha\in\Lambda_i$ sont inter-irréductibles, il existe (voir par exemple [14, p.50) un monomorphisme essentiel de R/P_i dans $\bigoplus_{\alpha \in \Lambda i} R/\mathrm{Ann}x_\alpha$. Ceci prouve que l'on a $\tilde{\mathcal{L}}_{R/P_i} = \tilde{\mathcal{L}}_{\rho*(S'_i)}$.

La localisation $\tilde{\mathcal{L}}_\rho$ étant plate est en particulier exacte et, par suite, le localisé (pour la localisation $\tilde{\mathcal{L}}_\rho$) de $R/\rho^{-1}(\mathrm{Rad}R')$ est isomorphe à $R'/\mathrm{Rad}R'$. Ceci prouve que l'anneau $R/\rho_{-1}(\mathrm{Rad}R')$ a un anneau maximal des quotients à droite semi-simple artinien (donc que c'est un J-anneau à droite avec la terminologie de L. Lesieur et R. Croisot, [10]). Il est facile de voir que les idéaux premiers associés à l'anneau $R/\rho_{-1}(\mathrm{Rad}R')$ sont les $P_i/\rho^{-1}(\mathrm{Rad}R')$ avec $i \in [1,r]$. Il est bien connu que les idéaux premiers associés à un J-anneau à droite sont minimaux. Il en résulte que l'intersection $N = P_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap P_r$ est réduite.

Soit $\Lambda = \bigcup_{i=1}^{r} \Lambda_i$. Alors l'intersection $N = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} \mathrm{Ann}x_\alpha$ est une intersection finie réduite d'idéaux à droite inter-irréductibles. En effet, s'il existait $\beta \in \Lambda_k$ tel que $N = \bigcap_{\alpha \in \Lambda-\{\beta\}} \mathrm{Ann}x_\alpha$, il viendrait

$$\Big(\bigcap_{\alpha\in\Lambda_k-\{\beta\}} \mathrm{Ann}x_\alpha\Big) P_1 P_2 \ldots P_{k-1}\, P_{k+1} \ldots P_r \subseteq N \subseteq P_k \quad \text{avec} \quad \bigcap_{\alpha\in\Lambda_k-\{\beta\}} \mathrm{Ann}x_\alpha \not\subseteq P_k \;;$$

il existerait donc $i \in [1,r]$ avec $i \neq k$ tel que $P_i \subseteq P_k$ d'où une contradiction. Il existe donc un monomorphisme essentiel de R/N dans $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} R/\mathrm{Ann}x_\alpha$ et par suite il vient : $\tilde{\mathcal{L}}_{R/N} = \bigwedge_{i=1}^{r} \tilde{\mathcal{L}}_{R/P_i} = \bigwedge_{i=1}^{r} \tilde{\mathcal{L}}_{\rho*(S'_i)} = \hat{\mathcal{L}}_\rho$ et de plus R/N est de Goldie à droite car de dimension de Goldie finie ($\dim R/N = \mathrm{Card}\Lambda$) et non singulier.

Soit alors J l'intersection des idéaux à droite de R maximaux pour la propriété de non appartenance à $\mathcal{F}_{R/N} = \mathcal{F}_{\rho}$. Puisque la localisation $\tilde{\mathcal{L}}_{\rho}$ est plate, il est clair que $J = \tilde{\rho}^{-1}(\mathrm{Rad}R')$. Le treillis des idéaux à droite de R clos pour la localisation $\tilde{\mathcal{L}}_{\rho}$ et contenant J satisfait à la condition de chaîne descendante donc J est intersection réduite d'un nombre fini d'idéaux à droite maximaux pour la propriété de non appartenance à $\mathcal{F}_{R/N} = \mathcal{F}_{\rho}$

D'autre part, d'après la définition de N, il est clair que l'inclusion $J \subset N$ est vérifiée. Donc, si J n'est pas inclus strictement dans N, il vient $J=N=\rho^{-1}(\mathrm{Rad}R')$ et $\mathrm{Rad}R' = \rho(N)R'$. Par suite, d'après le corollaire 4, la partie multiplicative $\mathcal{C}(N)$ est calculable à droite.

D'après le lemme 3, les conditions a) et b1) sont suffisantes; il reste à voir que les conditions a) et b2) sont suffisantes. Compte tenu de la condition a), il vient $J = \rho^{-1}(\mathrm{Rad}R')$. D'après la condition b2), J est intersection réduite d'un nombre fini d'idéaux à droite I_α maximaux pour la propriété de non appartenance à $\mathcal{F}_{R/N}$, c'est-à-dire à $\mathcal{F}_{\rho}$ (d'après la condition a)). Il existe alors un monomorphisme essentiel de R/J dans $\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} R/I_\alpha$ (avec Λ fini). Il en résulte qu'il existe une famille $(U_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ de sous-R-modules à droite de R/J telle que pour tout $\alpha \in \Lambda$, la coréflexion de U_α dans $\mathcal{L}_{\rho}$ soit un objet simple de $\mathcal{L}_{\rho}$ et telle que l'on ait $(R/J)/\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha \in \mathcal{C}_{\rho}$. Si $\tilde{L}_{\rho}$ désigne le foncteur localisation associé à la localisation plate $\tilde{\mathcal{L}}_{\rho}$, il vient $L_\rho(R/J) = \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} L_\rho(U_\alpha)$, où pour tout $\alpha \in \Lambda$, $L_\rho(U_\alpha)$ est un $L_\rho(R) = R'$-module simple. Puisque L_ρ est un foncteur exact, $L_\rho(R/J)$ est isomorphe à $L_\rho(R)/L_\rho(J)$ donc à $R'/\mathrm{Rad}R'$. Il en résulte que R' est semi-local.

6. REMARQUES. - 1 - Les conditions a) et b2) peuvent se produire (il suffit de considérer l'exemple 5.9 détaillé par J. Lambek et G. Michler dans [8] p.388)

2 - Sous les conditions du théorème 5, la démonstration donnée montre que la localisation plate $\tilde{\mathcal{L}}_\rho$ est intersection réduite d'un nombre fini de localisations premières de la forme $\tilde{\mathcal{L}}_{R/P_i}$ où les P_i sont des idéaux premiers de R tels que R/P_i soit de Goldie à droite.

7. COROLLAIRE. - *Etant donné un épimorphisme plat à droite* ρ *de l'anneau* R *dans l'anneau* R', *pour que l'anneau* R' *soit quasi-local, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient réalisées :*

a) il existe un idéal bilatère premier P *de* R *tel que* R/P *soit de Goldie à droite avec* $\tilde{\mathcal{L}}_\rho = \tilde{\mathcal{L}}_{R/P}$ *;*

b) l'une et l'une seulement des deux conditions suivantes est réalisée :

soit b1) la partie multiplicative $\mathcal{C}(P)$ *est calculable à droite;*

soit b2) l'intersection des idéaux à droite maximaux pour la propriété de non appartenance à $\mathcal{F}_{R/P}$ *peut être réduite en une intersection finie et de plus* $R'\rho(P)R' = R'$.

Nous avons donné le résultat suivant dans [4] indépendamment de J. Raynaud [12] .

8. COROLLAIRE. - *Etant donné un épimorphisme plat à droite* ρ *de l'anneau* R *dans l'anneau* R', *pour que* R' *soit un anneau local, il faut et il suffit que la localisation* $\tilde{\mathcal{L}}_\rho$ *associée à* ρ *coïncide avec la localisation* $\tilde{\mathcal{L}}_{R/P}$ *définie par un idéal complètement premier* P *de* R *pour lequel la partie multiplicative* $\mathcal{C}(P)$ *est calculable à droite.*

BIBLIOGRAPHIE. -

[1] G. FINDLAY, *A note on non-commutative localisation*, J. London Math. Soc. (2) 6 (1972), p. 39-42.

[2] P. GABRIEL, *Des catégories abéliennes*, Bull. Soc. Math. France, 90, (1962), p. 323-448.

[3] M. HACQUE, *Localisations exactes et localisations plates*, Publ. Dép. Math. Lyon, 6-2, (1969).

[4] A. HUDRY, *Sur les anneaux localement homogènes*, C.R. Acad. Sc. Paris, 271, (1970), p. 1214-1217.

[5] J.P. JANS, *Some aspects of torsion*, Pacific J. of Math. 15, (1969), p. P. 1249-1259.

[6] A.V. JATEGAONKAR, *Injective modules and localization in non commutative noetherian rings*, Trans. of the Amer. Math. Soc. 190 (1974), p. 109-123.

[7] J. LAMBEK, *Non commutative localisation*, Bull. of the Amer. Math. Soc. 79, (1973), p. 857-872.

[8] J. LAMBEK et G. MICHLER, *The torsion theory at a prime ideal of a right noetherian ring*, J. of Algebra, 25, (1973), p. 364-389.

[9] J. LAMBEK, et G. MICHLER, *Localization of right noetherian rings at semi-prime ideals*, Can. J. Mat. XXVI, (1974), p. 1069-1085.

[10] L. LESIEUR et R. CROISOT, *Coeur d'un module*, J. de Math., XLII, 4, (1963) p. 367-407.

[11] N. POPESCU, *Quelques observations sur les épimorphismes plats d'anneaux*, J. or Algebra, 116, (1970), p. 40-59.

[12] J. RAYNAUD, *Sur la théorie de la localisation*, Thèse 3e cycle, Université de Lyon, (1971).

[13] J. RAYNAUD, *Localisations stables à droite*, C.R. Acad. Sc. Paris, 275, (1972) p. 13-16.

[14] G. RENAULT, *Modules injectifs*, Sém. d'Algèbre, Université de Poitiers, (1966-1967).

[15] L. SILVER, *Non commutative localizations and applications*, J. of Algebra 7, (1967), p. 44-76.

A. HUDRY
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
UNIVERSITE CLAUDE BERNARD
43, bd du 11 novembre 1918
69621 VILLEURBANNE