PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

ANDRÉ GOLDMAN

Sur les ensembles universellement mesurables dans les espaces localement convexes

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1975, tome 12, fascicule 2
, p. 1-29

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1975__12_2_1_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1975 t. 12-2

SUR LES ENSEMBLES UNIVERSELLEMENT MESURABLES DANS LES ESPACES LOCALEMENT CONVEXES

par André GOLDMAN

Ce travail se compose de deux parties assez distinctes. Dans la première on étudie les espaces localement convexes dits m-tonnelés, pour lesquels tout disque universellement mesurable absorbant est un voisinage de zéro. On montre que tout espace ultrabornologique possède cette propriété. On étudie ensuite les propriétés des sous-espaces universellement mesurables de codimension dénombrable dans un espace m-tonnelé. Cela conduit à introduire la classe des ensembles $\mathcal{U}$-sousliniens, suivant une terminologie très voisine de celle de G. Choquet [4]. Un ensemble est dit $\mathcal{U}$-souslinien s'il est le noyau déterminant (c'est ici que l'on généralise quelque peu la définition de [4], voir remarque 2) d'un système déterminant Δ dont les éléments sont choisis dans la tribu $\mathcal{U}$ des parties universellement mesurables. On montre que tout ensemble $\mathcal{U}$-souslinien est universellement mesurable. On en déduit ensuite qu'un sous-espace $\mathcal{F}$-souslinien (c'est-à-dire tel que les éléments de Δ soient fermés), de codimension dénombrable dans un espace m-tonnelé E, admet toujours un supplémentaire topologique (en fait chacun de ses supplémentaires algèbriques est un supplémentaire topologique). Cette propriété est d'ailleurs aussi vérifiée pour les sous-espaces de E, toujours de codimension dénombrable, tels que toute partie précompacte soit relativement compacte. Finalement, on donne une application de ces résultats à l'étude des espaces bornologiques tonnelés non ultrabornologiques construits par M. Valdivia dans [13]. On montre que la technique des ensembles universellement mesurables permet à la fois de généraliser les résultats de [13] et d'en simplifier les démonstrations.

Dans la seconde partie on étudie une classe de parties universellement mesurables dans un elc E, que nous nommons conoyaux de Haar, par analogie avec la notion de noyau de Haar donnée par J.P.R. Christensen [5]. On obtient différentes caractérisations de ces conoyaux de Haar ainsi que des résultats sur l'existence de conoyaux de Haar précompacts. Ainsi il n'existe aucun conoyau de Haar précompact dans les espaces tonnelés de dimension infinie ni dans les duals faibles de ces espaces. L'application aux espaces de fonctions continues $C_s(T)$, $C_c(T)$ et $C_b(T)$ (cf. [2] et [3]) donne des résultats intéressants si T est infini, il n'existe aucun conoyau de Haar précompact dans $C_c(T)$ et $C_b(T)$, mais il peut en exister dans $C_s(T)$ lorsque T est un espace compact et métrisable (condition nécessaire et suffisante). Par contre il n'existe aucun conoyau de Haar compact dans $C_s(T)$.

On étudie enfin certaines propriétés de stabilité de ces conoyaux de Haar et l'on introduit une notion plus restrictive, celle de conoyau de type fort, en montrant que tout conoyau de Haar fermé dans un espace de Baire est en réalité de type fort.

NOTATIONS. Tous les espaces localement convexes (en abrégé elc) sont supposés séparés. La définition d'une mesure est celle de [8] ; mais en fait, dans la plupart des cas les mesures utilisées seront σ-bornées. Une partie A d'un espace topologique séparé T est dite universellement mesurable si, pour tout compact K de T et toute mesure de Radon μ sur K, l'ensemble $A \cap K$ est μ-mesurable. Une application f de T dans un espace normé F est dite d-universellement mesurable lorsque l'image réciproque $f^{-1}(D)$ de toute boule ouverte de F centrée à l'origine D est un ensemble universellement mesurable ; cela revient à dire que la fonction $\|f(.)\|$ est universellement mesurable.

On note $A \setminus B$ la différence ensembliste $A \cap \complement B$; $\bar{A}$ l'adhérence de A, $\Gamma(A)$ l'enveloppe disquée de A dans un elc E et $\bar{\Gamma}(A)$ son enveloppe disquée fermée. Enfin, pour toute mesure μ et pour toute partie μ-mesurable A, on désigne par μ_A la mesure $B \mapsto \mu(A \cap B)$, définie pour toute partie B μ-mesurable.

---

1. ESPACES LOCALEMENT CONVEXES M-TONNELES

(1.1) DEFINITION. - *Un elc* E *est dit* m*-tonnelé lorsque tout disque absorbant et universellement mesurable de* E *est un voisinage de zéro.*

On a immédiatemment la caractérisation suivante :

(1.2) THEOREME. - *L'elc* E *est* m*-tonnelé si et seulement si pour tout espace normé* F, *toute application linéaire* $f : E \to F$ *d-universellement mesurable est continue.*

PREUVE. - La condition est évidemment nécessaire d'après la définition des applications d-universellement mesurables. Réciproquement soit D un disque absorbant universellement mesurable de E . Désignons par F_D l'espace normé associé à l'espace semi-normé E_D obtenu en munissant E de la jauge p_D de D. L'application canonique $j : E \to F_D$ est alors d-universellement mesurable comme on voit d'après la formule

$$\{x \in E \ ; \ p_D(x) < 1\} = \bigcup_{n \geqslant 1} \left(1 - \frac{1}{n}\right) D.$$

Ainsi j est continue, donc D est un voisinage de zéro.

Un espace m-tonnelé est évidemment tonnelé. En fait ces deux classes d'espaces ont des propriétés analogues.

(1.3) PROPOSITION. - *a) Soit* E *un elc dont la topologie est la topologie localement convexe finale associée à une famille quelconque d'applications linéaires* $f_i : E_i \to E$, *définies sur des espaces* E_i m*-tonnelés. Alors* E *est* m*-tonnelé.*

b) Tout quotient d'un espace m-tonnelé est m-tonnelé.

c) Toute limite inductive (localement convexe) d'espaces m-tonnelés est m-tonnelée.

Nous allons maintenant montrer, ce qui va nous sortir des généralités, que la classe des espaces m-tonnelés est suffisamment vaste pour contenir beaucoup d'espaces utiles pour les applications. Rappelons tout d'abord la définition d'un réseau $\mathfrak{M}$ sur un elc E, introduite par M. De Wilde [15].

(1.4) DEFINITION. - *Une famille* $\mathfrak{M} = (C_{n_1,n_2,\ldots,n_k})$ *de sous-ensembles d'un elc* E, *indexée par l'ensemble des suites finies d'entiers, est appelée un réseau lorsqu'elle vérifie les conditions suivantes :*

a) $E = \bigcup_{n_1 \geq 1} C_{n_1}$;

b) Pour toute suite finie $s = (n_1,n_2,\ldots,n_k)$, *on a*

$$C_{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \bigcup_{n_{k+1} \geq 1} C_{n_1,n_2,\ldots,n_{k+1}} .$$

On dit que $\mathfrak{M}$ *est un réseau de type* $\mathcal{C}$ *si, de plus, pour toute suite infinie d'entiers* $\sigma = (n_1,n_2,\ldots,n_k,\ldots\ldots)$, *il existe une suite* (a_k) *de scalaires strictement positifs telle que la famille* $(\lambda_k x_k)$ *soit sommable dans E chaque fois que l'on a* $0 \leq \lambda_k \leq a_k$ *et* $x_k \in \overline{C}_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ *pour tout entier* k.

Nous renvoyons bien entendu à [15] pour les propriétés des réseaux. Enonçons le résultat principal en rapport avec les espaces m-tonnelés.

(1.5) THEOREME. - *Tout elc de Baire* E, *qui possède un réseau* $\mathfrak{M}$ *de type* $\mathcal{C}$, *est m-tonnelé.*

PREUVE. On montre d'abord qu'il existe une suite infinie d'entiers $\sigma = (n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots\ldots)$ telle que les ensembles $\bar{C}_{n_1 n_2, \ldots, n_k}$ associés soient d'intérieur non vide dans E. Soit (a_k) la suite de scalaires qui vérifie les propriétés énoncées en (1.4), et soit D un disque universellement mesurable de E. Montrons qu'il existe un entier $k \geq 1$ vérifiant

$$2kD \supset a_k \, \bar{C}_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \quad ,$$

ce qui suffira puisqu'alors D possèdera un point intérieur. Pour le voir, raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe, pour tout $k \geq 1$, un point $x_k \in \bar{C}_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ tel que $a_k x_k \notin 2kD$. Utilisons maintenant un argument dû à J.P.R. Christensen [6], p. 113, en introduisant le groupe à deux éléments $G = \{0, 1\}$ et le groupe compact produit $K = G^{\mathbb{N}^*}$. Soit f l'application de K dans E définie par

$$f[(e_n)] = \sum_{n \geq 1} e_n a_n x_n \quad .$$

La sommabilité de toutes les suites $(e_n a_n x_n)$ quand $(e_n) \in K$ varie, implique aisément la continuité de f. Il en résulte que K est réunion des ensembles universellement mesurables $A_n = f^{-1}(nD)$, de sorte qu'il existe un ensemble A_m qui n'est pas négligeable pour la mesure de Haar sur K. Mais alors l'ensemble $A_m - A_m$ est un voisinage de l'élément neutre dans K, d'où suit l'existence d'un entier N tel que l'on ait $a_n x_n \in 2\,N\,D$ pour tout $n \geq N$, ce qui fournit la contradiction cherchée (pour une preuve plus détaillée, on peut voir [1], preuve du th. (3.2)).

On déduit de (1.5) l'important résultat suivant :

(1.6) THEOREME. - *Tout espace ultrabornologique* E *est* m*-tonnelé.*

PREUVE. On se ramène, avec (1.3), au cas où E est un espace de Banach. On sait alors que tout espace de Banach possède un réseau de type $\mathcal{E}$ [15].

(1.7) COROLLAIRE. - *Dans un elc* E *tout disque absorbant et universellement mesurable* D *absorbe les disques bornés complétants.*

Pour rejoindre les travaux de M. Valdivia, on se propose maintenant d'étudier de façon générale les sous-espaces universellement mesurables de codimension dénombrable dans les espaces m-tonnelés.

Soit E un elc quelconque. On fixe un sous-espace F_o de E, de codimension dénombrable, un supplémentaire algébrique G de F_o et une base $(e_1,e_2,\ldots,e_n,\ldots)$ de G. Désignons par G_n l'espace engendré par $(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ et par F_n la somme $F_n = F_o \oplus G_n$. Supposons enfin F_o universellement mesurable dans E. Alors le problème se pose de savoir si les espaces F_n sont aussi universellement mesurables dans E. C'est évidemment le cas lorsque F_o est souslinien, ou bien $\mathcal{K}$-souslinien au sens de G. Choquet [4]. Nous allons généraliser cette situation, sans toutefois aller jusqu'à donner une réponse au problème posé. Pour cela donnons, suivant [4], quelques rappels concernant l'opération (A) de Souslin.

Soit S l'ensemble des suites finies $s = (n_1,n_2,\ldots,n_p)$ d'entiers $n_k \geq 1$ et soit $\Sigma = (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}^*}$ l'ensemble des suites infinies $\sigma = (n_1,n_2,\ldots,n_k,\ldots)$ d'entiers $n_k \geq 1$, muni de sa topologie d'espace produit. On écrit $s \prec \sigma$ [resp. $s \prec s'$] lorsque $s \in S$ est section commençante de $\sigma \in \Sigma$ [resp. de $s' \in S$].

Soit T un espace topologique séparé quelconque. On désigne par $\mathcal{U} = \mathcal{U}_T$ la tribu des ensembles universellement mesurables de T. Etant donnée une partie $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(T)$, on appelle système déterminant sur $\mathcal{H}$ toute application $\Delta : s \to \Delta(s) = H_s$, de S dans $\mathcal{H}$, telle que $H_s \supset H_{s'}$ pour $s \prec s'$. Pour toute suite $\sigma \in \Sigma$ on pose $H_\sigma = \bigcap_{s \prec \sigma} H_s$, ce qui définit un prolongement de Δ à l'espace Σ, prolongement qui n'est plus alors nécessairement à valeurs dans $\mathcal{H}$.

Pour toute partie borélienne Σ' de Σ , on appelle $(\mathcal{H},\Sigma')$-noyau du système déterminant Δ l'ensemble

$$H_{\Sigma'}(\Delta) = \bigcup_{\sigma \in \Sigma'} H_\sigma$$

Les ensembles de la forme $H_{\Sigma'}(\Delta)$ sont appelés $(\mathcal{H},\Sigma')$-sousliniens. Nous dirons qu'un ensemble est $\mathcal{H}$ -souslinien lorsqu'il est $(\mathcal{H},\Sigma')$-souslinien pour une partie convenable (borélienne) Σ' de Σ . Les cas particuliers intéressants sont principalement ceux où l'on prend pour $\mathcal{H}$ la famille $\mathcal{K}$ des compacts, ou celle $\mathcal{F}$ des fermés, ou encore la tribu $\mathcal{A}$ des parties approchables au sens de Baire (c'est-à-dire égales à un ouvert à un ensemble maigre près), ou enfin la tribu $\mathcal{U}$ des parties universellement mesurables.

REMARQUE 2. Notre définition d'un noyau déterminant diffère de celle de G. Choquet par l'introduction des parties boréliennes Σ' de Σ. Nous en verrons plus loin les avantages et en quoi elle laisse plus de souplesse.

Nous avons déjà le théorème suivant :

(1.8) THEOREME. - *Soit* T *un espace topologique séparé. Alors tout ensemble* $\mathcal{U}$ *-souslinien [resp.* $\mathcal{A}$ *-souslinien] de* T *est universellement mesurable [resp. approchable].*

PREUVE. - Le théorème est classique lorsque $\Sigma' = \Sigma$. Mais justement il s'agit de l'établir pour Σ' borélien quelconque de Σ. Fixons provisoirement une tribu $\mathcal{C}$ sur T (destinée à être soit $\mathcal{C} = \mathcal{U}$, soit $\mathcal{C} = \mathcal{A}$), ainsi qu'un ensemble $\mathcal{C}$-souslinien $H_{\Sigma'}(\Delta)$.

Dans Σ' appelons îlot d'indice s l'ensemble Σ'_s des suites $\sigma \in \Sigma'$ telles que $s \prec \sigma$. Pour toute suite $s \in S$, on pose $G_s = \Sigma'_s \times H_s \subset \Sigma \times T$. Pour tout entier $p \geq 1$, on désigne par Γ_p la réunion des ensembles G_s correspondant aux suites s de longueur p. On pose enfin $\Gamma = \bigcap_{p \geq 1} \Gamma_p$. Il est clair que $H_{\Sigma'}(\Delta)$ est la projection de Γ sur l'espace T.

Désignons maintenant par $\mathcal{B} = \mathcal{B}_\Sigma$ la tribu borélienne de Σ. L'hypothèse $\Sigma' \in \mathcal{B}$ assure que chaque Σ'_s est aussi élément de $\mathcal{B}$, de sorte que G_s est, dans l'espace $\Sigma \times T$, un élément de la tribu produit $\mathcal{B} \otimes \mathcal{T}$. On a donc $\Gamma \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{T}$ et le théorème résulte alors du théorème suivant très voisin du th. 2 de M.F. Sainte-Beuve [11].

(1.9) THEOREME. - *Soient* S *un espace souslinien,* T *un espace topologique séparé et* $\mathcal{B} = \mathcal{B}_S$ *la tribu borélienne de* S. *Alors, pour tout ensemble* $A \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{U}$ [*resp.* $A \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$], *la projection* $pr_T(A)$ *de* A *sur* T *est universellement mesurable* [*resp. approchable*].

PREUVE. - Comme précédemment supposons $A \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{T}$ pour une tribu $\mathcal{T}$ sur T. Il existe une suite $(P_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{T}$ telle que A appartienne à la tribu produit $\mathcal{B} \otimes \mathcal{T}_1$, où $\mathcal{T}_1$ est la tribu sur T engendrée par la suite (P_n). Introduisons sur T la relation d'équivalence $t \mathcal{R} t'$ si et seulement si $1_{P_n}(t) = 1_{P_n}(t')$ pour tout n, puis l'espace quotient $\hat{T} = T/\mathcal{R}$ et enfin l'application canonique $I : T \to \hat{T}$. On note $\hat{t} = I(t)$, $\hat{P}_n = I(P_n)$ et l'on désigne par $\hat{\mathcal{T}}_1$ la tribu engendrée par la suite $(\hat{P}_n)$.

Donnons un premier résultat sous forme de lemme.

(1.10) LEMME. *Soit* J *l'application* $S \times T \to S \times \hat{T}$ *définie par* $J(s,t) = (s,\hat{t})$. *On a alors*

$$J[\mathcal{B} \otimes \mathcal{T}_1] = \mathcal{B} \otimes \hat{\mathcal{T}}_1$$

et l'application J *est saturée au sens que* $A = J^{-1}[J(A)]$ *pour toute partie* $A \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{T}_1$.

PREUVE. L'application J étant surjective on a

(*) $$J[J^{-1}(\hat{A})] = \hat{A} \text{ pour toute partie } \hat{A} \subset S \times \hat{T}.$$

Par ailleurs on prouve aisément

$(**)\qquad B\times P_n = J^{-1}[B\times\hat{P}_n]$ pour tout n et tout $B\in\mathcal{B}$.

Il suit de là que la tribu $\mathcal{L} = J^{-1}[\mathcal{B}\otimes\hat{\mathcal{C}}_1]$ contient les éléments $B\times P_n$, donc $\mathcal{B}\otimes\mathcal{C}_1\subset\mathcal{L}$. Avec $(*)$ on voit aussi que $A\in\mathcal{L}$ implique $A = J^{-1}[J(A)]$, et que $J(\mathcal{L}) = \mathcal{B}\otimes\hat{\mathcal{C}}_1$; d'où l'inclusion $J(\mathcal{B}\otimes\mathcal{C}_1)\subset\mathcal{B}\otimes\hat{\mathcal{C}}_1$. Réciproquement introduisons la famille $\hat{\mathcal{L}}$ des parties $\hat{A}\subset S\times\hat{T}$ telles que $J^{-1}(\hat{A})\in\mathcal{B}\otimes\mathcal{C}_1$. C'est une tribu qui contient $B\times\hat{P}_n$ d'après $(**)$, donc $\mathcal{B}\otimes\hat{\mathcal{C}}_1\subset\hat{\mathcal{L}}$, ce qui prouve avec $(*)$, l'inclusion $\mathcal{B}\otimes\hat{\mathcal{C}}_1\subset J(\mathcal{B}\otimes\mathcal{C}_1)$.

Revenons à la preuve du théorème. On voit, avec le lemme, que l'élément A choisi initialement est tel que $J(A)\in\mathcal{B}\otimes\hat{\mathcal{C}}_1$. Considérons maintenant l'application $i : \hat{T}\to[0,1]$, définie par

$$i(\hat{t}) = \sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k}\, 1_{P_k}(t)$$

et posons $M = i(\hat{T})$. L'application i est injective et Borel-mesurable et il est facile de vérifier que les images $i(\hat{P}_n)$ sont des boréliens de M, d'où suit le fait que i permet d'identifier les espaces mesurables $(\hat{T},\hat{\mathcal{C}}_1)$ et $(M,\mathcal{B}_M)$, où $\mathcal{B}_M$ est la tribu borélienne de M. De même l'application $j : S\times\hat{T}\to S\times M$, définie par $j(s,\hat{t}) = (s,i(\hat{t}))$, permet d'identifier les espaces mesurables $(S\times\hat{T}, \mathcal{B}\otimes\hat{\mathcal{C}}_1)$ et $(S\times M, \mathcal{B}_S\otimes\mathcal{B}_M)$. Or la tribu $\mathcal{B}_S\otimes\mathcal{B}_M$ est contenue dans la tribu borélienne de $S\times M$, obtenue en prenant les traces sur $S\times M$ des boréliens de $S\times[0,1]$. Donc il existe un borélien $A'\subset S\times[0,1]$ tel que $J(A) = j^{-1}(A')$ d'où $A = J^{-1}[J(A)] = (j\circ J)^{-1}(A')$. Soit B' la projection de A' sur $[0,1]$. On vérifie facilement, comme conséquence de la formule $(j\circ J)(s,t) = (s,(i\circ I)(t)) =(s,i(\hat{t}))$, que l'on a $(i\circ I)^{-1}(B') = pr_T(A)$.

Prenons maintenant pour $\mathcal{C}$ la tribu $\mathcal{U}$ des ensembles universellement mesurables de T. Il est clair que l'application $i\circ I$ est Lusin-mesurable sur chaque compact de T. Or B' étant souslinien dans $[0,1]$, y est universellement mesurable, donc $pr_T(A)$ est bien élément de $\mathcal{U}$.

Lorsque $\mathcal{C}$ est égale à la tribu $\mathcal{A}$ des parties approchables de T, il faut procéder différemment. L'ensemble B' est $\mathcal{K}$-souslinien (au sens de G. Choquet [4]), donc $pr_T(A) = (i\circ I)^{-1}(B')$ est le noyau déterminant d'un système déterminant Δ dont les éléments sont des parties approchables de T. Or il est bien connu que la tribu $\mathcal{A}$ est stable par l'opération de Souslin (voir par exemple [6] ou [10]), ce qui termine la preuve du théorème.

Le cas des parties $\mathcal{F}$-sousliniennes de T (qui sont donc à la fois approchables et universellement mesurables) est particulièrement intéressant pour l'application aux elc.

(1.11) THEOREME. - *Soit* E *un elc et soit* F_0 *un sous-espace topologique (non nécessairement sous-espace vectoriel)* $\mathcal{F}$*-souslinien de* E. *Pour tout fermé* V *de* F_0 *et pour tout compact* K *de* E*, l'ensemble* $V + K$ *est* $\mathcal{F}$*-souslinien dans* E.

PREUVE. Il suffit de montrer que pour tout ensemble $\mathcal{F}$-souslinien $H_{\Sigma'}(\Delta)$ de E et pour tout compact K de E, l'ensemble $H_{\Sigma'}(\Delta)+K$ est $\mathcal{F}$-souslinien. Considérons, associée à Δ, l'application $\Delta_K : s \to \Delta_K(s) = H_s + K$. On obtient pour Δ_K un système déterminant formé de fermés de E, donc le noyau $H_{\Sigma'}(\Delta_K)$ est $\mathcal{F}$-souslinien. Pour conclure il suffit de montrer l'égalité $H_{\Sigma'}(\Delta_K) = H_{\Sigma'}(\Delta)+K$, dont la preuve se ramène aussitôt à celle de l'égalité

$$\bigcap_{s\prec\sigma}(H_s + K) = \Big(\bigcap_{s\prec\sigma} H_s\Big) + K \quad \text{pour chaque } \sigma\in\Sigma'.$$

Or supposons $x \in \bigcap_{s\prec\sigma}(H_s+K)$ et $x \notin \big(\bigcap_{s\prec\sigma} H_s\big)+K$.

Alors le compact $x-K$ est disjoint de l'intersection $\bigcap_{s\prec\sigma} H_s$, qui est filtrante décroissante, donc il existe une suite finie s telle que $(x-K)\cap H_s = \emptyset$, ce qui fournit la contradiction.

Revenons maintenant aux espaces m-tonnelés et parallèlement (pour exploiter les deux formes données dans (1.8)) aux espaces limites inductives d'espaces de Baire.

(1.12) THEOREME. - *Soit* E *un espace m-tonnelé (resp. limite inductive d'espaces de Baire) et soit* F_0 *un sous-espace (vectoriel) de* E, *de codimension dénombrable. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) Tout supplémentaire algèbrique de F_0 *est supplémentaire topologique ;*

b) F_0 *possède un supplémentaire topologique ;*

c) F_0 *est fermé dans* E ;

d) F_0 *est* $\mathcal{S}$*-souslinien dans* E.

De plus lorsqu'elles sont satisfaites, l'espace F_0 *est m-tonnelé (resp. limite inductive d'espaces de Baire) et* E *induit sur chaque supplémentaire* G *de* F_0 *la topologie fine de* G.

PREUVE. Il suffit de montrer d) $\Longrightarrow$ a). Soit G un supplémentaire algébrique de F_0, muni d'une base $(e_1,e_2,\ldots,e_n,\ldots\ldots)$. Désignons comme plus haut par G_n l'espace engendré par $(e_1,e_2,\ldots,e_n)$, par F_n la somme $F_n = F_0 \oplus G_n$ et par A_n l'enveloppe disquée de $(e_1,e_2,\ldots,e_n)$.

Supposons E m-tonnelé. Il résulte de (1.11) que, pour tout voisinage de zéro V dans F_0 , supposé disqué fermé, l'ensemble

$$D = V + \bigcup_{k\geqslant 1} A_k = \bigcup_{k\geqslant 1} (V+A_k)$$

est un disque absorbant universellement mesurable de E, donc un voisinage de zéro dans E. On démontre du même coup que F_n, engendré par $V+A_n$, est universellement mesurable dans E et que $V+A_n = D\cap F_n$ est un voisinage de zéro dans F_n, ce qui prouve que F_0 est fermé dans chaque F_n. Donc F_n est fermé dans F_{n+1}. Or l'espace E est en particulier tonnelé, de sorte que, d'après Valdivia [12], E est la limite inductive stricte de la suite (F_n).

Rajoutons maintenant à la donnée de V celle d'un disque absorbant U de G. Alors V+U absorbe chaque disque $V+A_n$, donc le disque $(V+U) \cap F_n$ est un voisinage de zéro dans F_n, ce qui suffit pour voir que V+U est un voisinage de zéro dans E et que F_o et G sont supplémentaires topologiques. La dernière phrase du théorème provient de (1.3.b) et du choix de U, supposé seulement disque absorbant de G.

Lorsque E est limite inductive d'espaces de Baire, la démonstration est la même pour l'essentiel. On remplace évidemment "universellement mesurable" par "approchable" en remarquant que tout $\mathcal{S}$-souslinien est approchable d'après (1.8). Il y a toutefois une difficulté pour prouver que le disque $D = \bigcup(V+A_k)$ est voisinage de zéro dans E, le fait qu'il soit approchable ne suffisant pas, sauf si E lui-même est espace de Baire. Introduisons donc les espaces de Baire E_i et les applications linéaires $f_i : E_i \longrightarrow E$. Pour chaque i, les ensembles $f_i^{-1}(V+A_k)$ sont $\mathcal{S}$-sousliniens dans E_i, donc $f_i^{-1}(D)$ est un disque approchable dans E_i et par suite un voisinage de zéro dans dans E_i , ce qui suffit pour terminer la preuve du théorème.

REMARQUE 3. - On voit en particulier que dans un espace ultrabornologique E tout hyperplan $\mathcal{S}$-souslinien est fermé, ce qui fournit une réponse positive partielle au problème n° 20 que J.P.R. Christensen pose dans [6] p. 128.

Nous allons maintenant obtenir des résultats similaires pour une classe différente de sous-espace de E.

Rappelons auparavant qu'un elc E est dit p-semi-réflexif [7] lorsque tout précompact de E est relativement compact. Un tel espace est toujours semi-complet et tout espace quasi-complet est p-semi-réflexif. On sait toutefois qu'il existe des espaces p-semi-réflexifs qui ne sont pas quasi-complets.

On obtient alors, d'une façon un peu analogue à (1.11), mais plus particulière :

(1.13) PROPOSITION. - *Soit* E *un elc et soit* F_0 *un sous-espace de* E *supposé p-semi-réflexif et de codimension dénombrable. On fixe un supplémentaire algébrique* G *de* F_0, *une base* $(e_1,e_2,\ldots,e_n,\ldots)$ *de* G *et on désigne par* A_n *l'enveloppe disquée de* $(e_1,e_2,\ldots,e_n)$. *Alors pour tout fermé* V *de* F_0, *l'ensemble* $V+A_n$ *est universellement mesurable dans* E.

PREUVE. Fixons un compact K dans E et soit $K' = (V+A_n)\cap K$. On va montrer que K' est fermé, ce qui suffira. Montrons d'abord que la projection $K'_0 = pr_{F_0}(K')$ de K' sur F_0, parallèlement à G, est précompacte dans F_0. Sinon il existe une suite (x_m) dans K'_0 et un voisinage de zéro W dans E tels que $x_r - x_s \notin W$ pour tous r,s distincts. Or il existe une suite (y_m) dans A_n telle que $z_m = x_m + y_m \in K$. On peut alors extraire de la suite (y_m) une sous-suite convergente dans A_n (puisque A_n est un compact métrisable de E), donc on peut supposer $y_m \to y$ dans A_n. Mais alors si z est une valeur d'adhérence dans K de la suite (z_m), on voit que x = z-y est une valeur d'adhérence dans E de la suite (x_m), ce qui est absurde.

L'hypothèse de p-semi-réflexivité de F_0 assure donc que K'_0 est relativement compact dans F_0. Et V étant fermé on a $\overline{K'_0} \subset V$. A partir de là il est facile de vérifier que K' est fermé dans E.

On en déduit par un raisonnement analogue à celui de (1.12) :

(1.14) THEOREME. - *Soit* E *un elc m-tonnelé et soit* F *un sous-espace de* E *de codimension dénombrable. On suppose que* F *est p-semi-réflexif. Alors tout supplémentaire algébrique* G *de* F *dans* E *est un supplémentaire topologique. De plus* F, *qui est fermé dans* E, *est un espace m-tonnelé.*

APPLICATION AUX ESPACES DE M. VALDIVIA. Dans [13] M. Valdivia construit des espaces bornologiques tonnelés non ultrabornologiques. Nous allons montrer que la techniques des espaces $\mathcal{S}$-sousliniens permet d'améliorer ses résultats, tout en offrant plus de facilités dans les calculs.

Rappelons brièvement la construction de [13]. On fixe une suite $(P_n)_{n\geq 1}$ d'elc ultrabornologiques et soit $P = \prod P_n$ leur produit. Pour tout $x \in P$ on désigne par $x(n)$ la composante de x sur P_n, et par $f_x(n)$ le nombre d'éléments non nuls de la suite $(x(1), x(2), \ldots, x(n))$. Soit ϕ une fonction positive croissante sur $\mathbb{N}^*$ telle que $0<\phi(n)\leq n$ et $\lim_{n\to+\infty} \phi(n) = +\infty$.
On désigne par L_ϕ le sous-espace de P formé des éléments x vérifiant $\lim_{n\to\infty} f_x(n)/\phi(n) = 0$.

M. Valdivia montre que L_ϕ est un espace ultrabornologique et construit un sous-espace M de P tel que L_ϕ soit de codimension dénombrable dans M et tel que M ne soit pas ultrabornologique.

Nous allons montrer qu'en fait tout sous-espace E de P, contenant L_ϕ comme sous-espace de codimension dénombrable, est nécessairement non ultrabornologique. Tout repose essentiellement sur le théorème suivant, dont la preuve détaillée figure déjà dans ([1] , Prop (8.1)), et que nous ne reprenons pas.

(1.15) THEOREME. - *L'espace* L_ϕ *est* $\mathcal{S}$*-souslinien dans* P.

D'où l'on tire, avec (1.12) :

(1.16) THEOREME. - *Soit* E *un sous-espace de* P *tel que* L_ϕ *soit de codimension dénombrable dans* E*. On a les propriétés suivantes :*

a) E *est bornologique tonnelé ;*

b) E *n'est pas* m*-tonnelé ;*

c) E *n'est pas limite inductive d'espaces de Baire.*

PREUVE. L'assertion a) provient de M. Valdivia [13] . Quant à b) et c) elles proviennent directement de (1.12) et (1.15) une fois vu que L_ϕ est dense dans P.

REMARQUE 4. A défaut de le voir dans [13] , M. Valdivia donne dans [14] un exemple d'espace bornologique tonnelé qui n'est pas limite inductive d'espaces de Baire. On pourrait voir, en analysant la construction proposée dans [14] que notre méthode s'applique aussi dans ce cas.

2. LES CONOYAUX DE HAAR

Rappelons que, suivant J.P.R. Christensen [5] , un ensemble universellement mesurable A dans un elc E est un noyau de Haar s'il existe une mesure non nulle μ sur E vérifiant $\mu(x+A) = 0$ pour tout $x \in E$.

Par analogie on introduit

(2.1) DEFINITION. - *Soit* E *un elc. On dit qu'un ensemble universellement mesurable* $A \subset E$ *est un conoyau de Haar* [*resp. un conoyau de Haar de type fort*] *s'il existe un voisinage de zéro ouvert* V *dans* E *et une mesure* μ *sur* E *vérifiant*

a) $\mu(x+A)>0$ *pour tout* $x \in V$ [*resp.* $\inf\limits_{x \in V} \mu(x+A)>0$]

b) $\mu(V+A)<+\infty$.

Il n'existe pas de relation simple entre les noyaux et les conoyaux de Haar. Un exemple en est donné lorsqu'on fait l'hypothèse qu'il existe sur E une mesure quasi-invariante μ_o, que l'on peut supposer bornée ; alors une application immédiate du théorème de Fubini montre facilement que tout μ-noyau de Haar (resp. μ-conoyau) est un μ_o-noyau de Haar (resp. μ_o-conoyau). Aussi dans ce cas particulier la famille des noyaux de Haar (resp. des conoyaux de Haar) coïncide avec celle des ensembles universellement mesurables A tels que $\mu_o(A) = 0$ (resp. tels que $\mu_o(A)>0$).

(2.2) THEOREME. - *Soit* A *un conoyau de Haar dans* E. *Alors il existe un voisinage de zéro ouvert* V *et une suite* $(y_n) \subset V$ *telle que* $V \subset \bigcup (y_n + A - A)$. *En particulier il existe un voisinage de zéro ouvert* $U = \frac{V}{2}$ *et une suite* $x_n = \frac{1}{2}\, y_n \in U$ *telle que* $U \subset \bigcup (x_n + \Gamma(A))$.

PREUVE. Fixons μ et V comme en (2.1) et soit $\mathfrak{M}$ l'ensemble des parties $M \subset V$ formées de points tels que $x \neq y$ implique $x - y \notin A - A$, ordonné par inclusion. Si M_o est un élément maximal de $\mathfrak{M}$ on a d'une part $V \subset \bigcup_{x \in M_o} (x + A - A)$ et d'autre part $\bigcup_{x \in M_o} (x + A) \subset V + A$; or cette dernière condition implique, avec (2.1), que M_o est dénombrable.

(2.3) THEOREME. - *Soit* D *un disque universellement mesurable de* E. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) D *est un conoyau de Haar ;*

b) D *est un conoyau de Haar pour une mesure atomique et bornée ;*

c) Il existe un voisinage de zéro ouvert U *et une suite* $(x_n) \subset U$ *telle que* $U \subset \bigcup (x_n + D)$.

PREUVE. a)$\Longrightarrow$c) résulte de (2.2). Pour voir c)$\Longrightarrow$b) prenons pour μ la mesure $\sum 2^{-n}\, \delta x_n$; alors pour tout $x \in U$, il existe un entier n tel que $x \in x_n + D$ et $\mu(x+D) \geq 2^{-n}$.

On en déduit :

(2.4) PROPOSITION. - *Soit* A *un conoyau de Haar dans* E. *Alors l'enveloppe disquée* $\Gamma(A)$ *est absorbante.*

PREUVE. Fixons U et la suite $(x_n) \subset U$ comme en (2.2). Pour tout $x \in E$ il existe un scalaire $\alpha > 0$ tel que $\lambda x \in U$ pour tout $\lambda \in [0,\alpha]$; à chaque tel λ on peut donc associer un entier n_λ tel que $\lambda x \in x_{n_\lambda} + \Gamma(A)$, d'où l'existence, pour des raisons de cardinalité, de deux scalaires $\lambda_1 \neq \lambda_2$ correspondant au même indice n_λ. On a alors $(\lambda_1 - \lambda_2)x \in 2\Gamma(A)$, ce qui suffit.

En rapprochant avec la définition (1.1) on obtient :

(2.5) THEOREME. - *Dans un espace m-tonnelé E (en particulier dans un espace ultrabornologique) tout conoyau de Haar disqué est un voisinage de zéro.*

Dans le cas général on voit donc que l'ensemble $\mathcal{H}$ des conoyaux de Haar disqués est intermédiaire entre l'ensemble des disques absorbants universellement mesurables et l'ensemble des voisinages de zéro disqués et universellement mesurables. Montrons que cet encadrement est strict, avec les exemples suivants :

EXEMPLE 1. Soit H un espace de Hilbert séparable, de dimension infinie et soit B sa boule unité fermée. Si (x_n) est une suite dense dans H, on a $H = \bigcup (x_n + B)$, donc la boule B est un conoyau de Haar dans l'espace faible H_σ et ce n'est pas un voisinage de zéro dans H_σ.

EXEMPLE 2. Soit $T = [0, \omega_1[$ l'espace localement compact des ordinaux inférieurs au premier ordinal non dénombrable ω_1. Soit $C_c(T)$ l'espace des fonctions continues sur T, muni de la topologie de la convergence compacte. Alors le disque $D = \{f \; ; \; \|f\|_T \leq 1\}$ est un tonneau de $C_c(T)$, [2] , qui n'est pas un conoyau de Haar.

PREUVE. Sinon il existe une suite $(f_n) \subset C_c(T)$, un compact $K \subset T$ et un scalaire $\alpha > 0$ vérifiant les propriétés suivantes : pour toute $f \in C_c(T)$ telle que $||f||_K \leq \alpha$, il existe un entier n tel que $||f-f_n||_T \leq 2$. On sait que K est inclus dans un intervalle $[0,\theta]$ pour $\theta < \omega_1$. Posons $S = [\theta+1, \omega_1[$; c'est un ensemble fermé dans T, disjoint de K. Les propriétés que nous venons de décrire impliquent que l'espace C(S) des fonctions continues sur X , muni de la norme de la convergence uniforme, est un espace de Banach séparable. L'espace S est donc compact métrisable (et séparable), ce qui est absurde.

Donnons maintenant des résultats concernant l'existence de conoyaux de Haar bornés dans les elc.

(2.6) PROPOSITION. - *Soit* E *un espace tonnelé. Pour qu'il existe dans* E *un conoyau de Haar borné il faut et il suffit que* E *soit normable.*

PREUVE. Il est clair que la boule ouverte d'un espace normé E (non nécessairement tonnelé) est un conoyau de Haar. Réciproquement si A est conoyau de Haar borné, alors $\overline{\Gamma(A)}$ est un tonneau borné de E, donc un voisinage de zéro borné et E est normable.

(2.7) COROLLAIRE 1. - *Soit* E *un espace tonnelé. Pour qu'il existe dans* E *un conoyau de Haar précompact, il faut et il suffit que* E *soit de dimension finie.*

(2.8) COROLLAIRE 2. - *Soit* E *un espace tonnelé. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) Il existe dans l'espace faible E_σ *un conoyau de Haar borné* A;

b) Il existe une suite (x_n) *dans* E *et un disque borné* B *tel que* $E = \bigcup (x_n+B)$;

c) E *est normable et séparable.*

PREUVE. On a de façon évidente c)$\Longrightarrow$b)$\Longrightarrow$a). Montrons a)$\Longrightarrow$c) : il résulte de (2.6) que E est normable. Pour voir qu'il est séparable soit (x_n) une suite de E et soit U un voisinage de zéro faible tel que $U \subset \bigcup (x_n+B)$, avec $B = \overline{\Gamma(A)}$. Quitte à réduire U, on peut supposer $U = P°$, où P est une partie finie de E'. Soit F l'espace vectoriel engendré par P, alors $F° = N_U = \bigcap_{\lambda>o} \lambda U$. L'ensemble D des points rx_n , $r \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}$, est dénombrable et invariant par les homothéties rationnelles, d'où $N_U \subset D + \varepsilon B$ pour tout $\varepsilon > 0$. Cela signifie que N_U est séparable dans E. Mais N_U admet un supplémentaire topologique M de dimension finie dans E, donc $E = N_U \oplus M$ est bien séparable.

Ce résultat permet de caractériser les espaces E_σ affaiblis d'espaces tonnelés E dans lesquels il existe des conoyaux de Haar compacts et disqués.

(2.9) THEOREME. - *Soit* E *un espace tonnelé. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) Il existe dans l'espace faible E_σ *un conoyau de Haar disqué compact* K;

b) il existe une suite (x_n) *dans* E *et un disque* K *compact dans* E_σ *tels que l'on ait* $E = \bigcup (x_n+K)$.

c) E *est un espace de Banach réflexif et séparable.*

Si de plus E *est quasi-complet, ces conditions sont encore équivalentes à :*

d) il existe dans E_σ *un conoyau de Haar compact.*

PREUVE. On a déjà c)$\Longrightarrow$b)$\Longrightarrow$a). Montrons a)$\Longrightarrow$c) : il résulte de (2.8) que E est normable et séparable. Mais comme sa boule unité peut être choisie égale à $\overline{\Gamma(K)} = K$, on voit que E est réflexif. Enfin d)$\Longrightarrow$a), sous l'hypothèse que E est quasi-complet, car l'enveloppe disquée fermée d'un compact faible est encore faiblement compacte d'après le théorème de Krein.

Donnons des résultats relatifs à l'existence de conoyaux de Haar bornés dans un espace dual.

(2.10) THEOREME. - *Soit* E *un elc infratonnelé. Pour qu'il existe dans le dual fort* E'_β *un conoyau de Haar borné* A*, il faut et il suffit que* E *soit normable.*

PREUVE. En effet $H = \Gamma(A)$ est alors équicontinu et absorbant, donc E est normable. La réciproque est évidente.

(2.11) PROPOSITION. - *Soit* E *un espace tonnelé. Pour qu'il existe dans le dual faible* E'_σ *un conoyau de Haar borné* A*, il faut et il suffit que* E *soit normable et* E'_β *séparable.*

PREUVE. On voit comme en (2.10) que $H = \Gamma(A)$ est équicontinu et absorbant, donc E est normable et E'_β est espace de Banach. On procède comme en (2.8) pour montrer que E'_β est séparable.

En particulier on a :

(2.12) PROPOSITION. - *Soit* E *un elc tonnelé (resp. infratonnelé) de dimension infinie. Alors le dual faible* E'_σ *(resp. le dual fort* E'_β*) ne possède pas de conoyaux de Haar précompacts.*

Ce dernier résultat, relatif à E'_σ , semble assez spécial au cas des espaces tonnelés. Rappelons que E est dit espace de Mackey fort lorsque les parties compactes de E'_σ sont équicontinues ; c'est évidemment le cas d'un espace tonnelé. Or on va voir qu'il peut exister des conoyaux de Haar compacts dans E'_σ pour certains espaces de Mackey forts E. De façon précise on a :

(2.13) THEOREME. - *Soit* E *un espace de Mackey fort. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) il existe dans le dual faible E'_σ *un conoyau de Haar compact* K*;*

b) il existe une suite (x'_n) *dans* E' *et un disque faiblement compact* K *de* E' *tels que* $E' = \bigcup (x'_n+K)$ *;*

c) E *est normable et* E'_β *est séparable ;*

d) E *est normable et ses bornés sont métrisables pour la topologie faible* $\sigma(E,E')$.

PREUVE. On a c)$\Rightarrow$b)$\Rightarrow$a) et c)$\Rightarrow$d) trivialement. On prouve a)$\Rightarrow$c) comme en (2.11). Enfin d)$\Rightarrow$c) s'obtient en remarquant que la boule unité B de E est dense, pour la topologie $\sigma(E'',E')$, dans la boule unité fermée B'' du bidual E'' ; d'où résulte la métrisabilité de B'' pour cette topologie faible et par suite la séparabilité de E'_β comme il est bien connu.

APPLICATIONS AUX ESPACES DE FONCTIONS CONTINUES. - Considérons maintenant le cas des espaces de fonctions continues : pour T complètement régulier, on désigne, en suivant [2], [3] , par $C_s(T)$, $C_c(T)$ et $C_b(T)$ l'espace $\mathscr{C}(T)$ des fonctions continues sur T muni respectivement des topologies de la convergence simple, compacte ou bornée sur T.

(2.14) THEOREME. - *Si* T *est infini, il n'existe pas dans l'espace* $C_b(T)$ *de conoyaux de Haar précompacts.*

PREUVE. Pour tout conoyau de Haar précompact H dans $C_b(T)$, le disque $\Gamma(H)$ est précompact et absorbant. L'existence d'un tel H implique que T est pseudo-compact : sinon, il existe dans T une suite (U_n) d'ouverts disjoints non vides, qui est localement finie ; fixons $x_n \in U_n$ et posons $\alpha_n = \operatorname{Sup}_{f \in H} |f(x_n)|$

On a $|f(x_n)|\leq\alpha_n$ pour toute $f\in\Gamma(H)$ et bien entendu $\alpha_n>0$. Or on sait qu'il existe une fonction continue g sur T telle que $g(x_n) = n\alpha_n$ et g n'est pas absorbée par $\Gamma(H)$. L'espace $C_b(T)$ est donc un espace de Banach et on conclut avec (2.7).

Le cas des espaces $C_c(T)$ et $C_s(T)$ se traite différemment.

(2.15) THEOREME : *a) Si* T *est infini, il n'y a pas de conoyaux de Haar précompacts dans* $C_c(T)$.
b) Pour qu'il existe dans $C_s(T)$ *des conoyaux de Haar précompacts il faut et il suffit que* T *soit compact métrisable.*

PREUVE. a) Si H est un conoyau de Haar précompact dans $C_c(T)$, son enveloppe disquée $\Gamma(H) = D$ est un disque absorbant borné de $C_s(T)$. Il en résulte, comme en (2.14), que T est pseudocompact. Mais D est aussi précompact dans $C_c(T)$ donc, avec le théorème d'Ascoli, est équicontinu sur chaque compact K de T. Puisque toute fonction continue sur K admet un prolongement continu à T, on voit que C(K) est réunion dénombrable de parties équicontinues. Il en résulte que K est un P-espace compact, donc est fini. Ainsi T est pseudocompact et ses compacts sont finis, de sorte que $C_c(T) = C_s(T)$ ce qui nous permet de poursuivre la preuve en passant à b).
b) Supposons H conoyau de Haar dans $C_s(T)$. On voit comme en a) que T est pseudocompact. De plus il existe une partie finie $P = \{x_1,x_2,\dots,x_p\}$ et une suite (f_n) telles que l'on ait, pour $\alpha>0$ convenable :

$$||f||_P<\alpha \Rightarrow f \in \bigcup_n (f_n+H)$$

On a donc a fortiori

$$||f||_P = 0 \Rightarrow f \in \bigcup_n (rf_n+rD) \text{ pour tout } r\in \mathbb{Q}_+.$$

En faisant intervenir une famille finie $(g_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ dans $C_s(T)$ telle que $g_k(x_j) = \delta_{jk}$, on voit assez facilement que l'espace $E = C_s(T)$ est séparable pour la norme p_D, jauge du disque D. Mais puisque D est borné dans $C_s(T)$, on en tire finalement que $C_s(T)$ est séparable. Il existe donc une distance continue sur T, autrement dit T est submétrisable. En rajoutant que T est pseudocompact on obtient que T est compact et par suite compact métrisable. En revenant maintenant à a), on obtient la finitude de T.

c) Réciproquement si T est métrisable et compact, alors l'espace de Banach C(T) est séparable. Ce qui prouve que la boule unité B de C(T) est un conoyau de Haar disqué et précompact dans l'espace $C_s(T)$.

On aperçoit donc une différence notable entre les comportements de $C_s(T)$ et $C_c(T)$. Mais cette différence va toutefois s'estomper, si l'on convient de ne considérer sur $C_s(T)$ que des conoyaux de Haar compacts.

Donnons d'abord un lemme général.

(2.16) LEMME. - *Pour tout compact* H *d'un elc* E, *l'enveloppe disquée* $\Gamma(H)$ *est un* K_σ *de* E.

PREUVE. Il est immédiat que l'ensemble H'_n des sommes $\sum_{1\leqslant k\leqslant n} \lambda_k x_k$, avec n fixé, $x_k \in H$ et $\sum |\lambda_k| \leqslant 1$, est un compact de E. Or $\Gamma(H) = \bigcup H'_n$.

On a alors

(2.17) THEOREME. *Si* T *est infini, il n'existe pas de conoyaux de Haar compacts dans l'espace* $C_s(T)$.

PREUVE. Admettons l'existence d'un conoyau de Haar compact H dans $C_s(T)$. Alors T est pseudocompact, donc $C_b(T) = C^{\infty}(T)$ est espace de Banach. Introduisons la suite croissante des compacts H'_n de (2.16) telle que $D = \Gamma(H) = \bigcup H'_n$.

Les ensembles H'_n sont fermés dans $C^{\infty}(T)$ et D étant absorbant, on a $C^{\infty}(T) = \bigcup nH'_n$. Il en résulte, avec le théorème de Baire, que la boule unité B de $C^{\infty}(T)$ est compacte dans $C_s(T)$ (puisqu'elle y est fermée). On en tire que T est discret et pseudocompact, donc fini.

QUELQUES PROPRIETES DE STABILITE DES CONOYAUX DE HAAR.

(2.18) PROPOSITION : *a) Tout ensemble universellement mesurable* A *contenant un conoyau de Haar* B *est lui-même un conoyau de Haar.*
b) L'adhérence $\bar{A}$ *d'un* μ*-conoyau de Haar est encore un* μ*-conoyau de Haar.*

PREUVE. a) est évident avec (2.1). Montrons b) : soit V un disque ouvert tel que $\mu(x+A)>0$ pour tout $x \in V$ et $\mu(V+A)<+\infty$. Posons $W = \frac{V}{2}$; alors $\bar{A}+W \subset A+V$ donc $\mu(W+\bar{A})<+\infty$.

Une intersection finie de conoyaux de Haar n'est pas en général un conoyau de Haar. De même un ensemble K, intersection dénombrable décroissante de disques ouverts, n'est pas en général un conoyau de Haar. Pour le voir il suffit de prendre pour K un disque compact dans un espace de Banach séparable et d'appliquer (2.7).

(2.19) PROPOSITION. - *Soit* $(E_i)_{i\in I}$ *une famille finie d'elc. Pour chaque* $i \in I$ *on fixe un ensemble universellement mesurable* $A_i \subset E_i$ *et une mesure* μ_i *sur* E_i*. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) A_i *est un* μ_i*-conoyau de Haar pour tout* $i \in I$;
b) l'ensemble $A = \prod A_i$ *est un conoyau de Haar pour la mesure produit* $\mu = \otimes \mu_i$ *sur* E.

PREUVE. Il suffit de faire correspondre aux ouverts convenables U_i dans les E_i l'ouvert $U = \prod U_i$ dans E.

Supposons maintenant que $E = \prod E_n$ est un produit d'une suite d'elc et fixons une suite (μ_n), chaque μ_n étant une probabilité sur E_n. On peut alors définir la probabilité produit $\mu = \otimes \mu_n$ sur E, et obtenir :

(2.20) PROPOSITION. - *Soit* (A_n) *une suite de disques universellement mesurables respectivement dans* E_n. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*
a) les A_n *sont des* μ_n*-conoyaux de Haar et on a* $A_n = E_n$ *sauf pour un ensemble fini d'indices* n.
b) L'ensemble $A = \prod A_n$ *est un conoyau de Haar pour la probabilité produit* $\mu = \otimes \mu_n$.

PREUVE. On a a)$\Longrightarrow$b) avec (2.19). Pour montrer b)$\Longrightarrow$a) il suffit de prouver qu'il n'existe pas de sous-suite n_m telle que $A_{n_m} \neq E_{n_m}$ et d'appliquer (2.19). Raisonnons par l'absurde en supposant même, pour simplifier l'écriture, $A_n \neq E_n$ pour tout n. Alors il est facile de vérifier, par une démonstration élémentaire, qu'on peut trouver dans chaque E_n une suite (y_k) telle que les y_k+A_n soient deux à deux disjoints. On en déduit qu'il existe, pour chaque n, un point $z_n \in E_n$ tel que $\mu_n(z_n+A_n) \leq \frac{1}{n}$. Fixons maintenant un disque ouvert U de E tel que $\mu(x+A)>0$ pour tout $x \in U$. Il existe un entier N et un point $x_0 \in U$ tels que la projection de x_0 sur E_n coïncide avec z_n pour tout $n \geq N$. Il en résulte que $\mu(x_0+A)$ est nul, ce qui absurde.

LES CONOYAUX DE HAAR DE TYPE FORT. Lorsque A est un conoyau de Haar de type fort (voir définition (2.1)), un raisonnement semblable à celui de la preuve de (2.2), assurant que l'ensemble maximal M_o de (2.2) est fini, permet de remplacer l'énoncé (2.4) par le résultat plus précis suivant :

(2.21) THEOREME. - *L'enveloppe disquée* $\Gamma(A)$ *d'un conoyau de Haar de type fort* A *dans* E *est un voisinage de zéro.*

Donnons des conditions pour qu'un conoyau de Haar A soit de type fort. Pour cela désignons pour toute mesure μ sur E, par μ_{x_o} la mesure translatée définie par $\mu_{x_o}(M) = \mu(x_o+M)$ pour toute partie μ-mesurable M.

(2.22) PROPOSITION. - *Soit* E *un elc de Baire. Soit* A *un* μ*-conoyau de Haar. On suppose que l'application* $h : x \to \mu(x+A)$ *est semi-continue supérieurement. Alors* A *est un conoyau de Haar de type fort pour une mesure translatée* μ_{x_o}.

PREUVE. Pour tout entier $n \geq 1$ les ensembles

$$F_n = \{x \in E \ ; \ h(x) \geq \frac{1}{n}\}$$

sont fermés dans E et recouvrent un disque ouvert V vérifiant les conditions de la définition (2.1). Il existe donc un entier m tel que l'ensemble $F_m \cap V$ soit d'intérieur non vide, de sorte que $F_m \cap V$ contient un ensemble de la forme x_o+W, où W est un disque ouvert de E. On a ainsi $\mu(x_o+x+A) \geq \frac{1}{m}$ pour tout $x \in W$ et $\mu(x_o+W+A) < +\infty$.

(2.23) COROLLAIRE. - *Dans un elc de Baire* E *tout* μ*-conoyau de Haar fermé* A *est un conoyau de Haar de type fort pour une mesure translatée* μ_{x_o}.

PREUVE. Soit V un disque ouvert tel que $\mu(V+A)<+\infty$ et $\mu(x+A)>0$ pour tout $x\in V$. L'ensemble $B = V+A$ est ouvert et la mesure $\nu = \mu_B$ est bornée. D'après le lemme ci-dessous la fonction $x \to \nu(x+A)$ est semi-continue supérieurement d'où l'on déduit, avec (2.22), l'existence d'un point $x_0\in E$ et d'un disque ouvert W tels que $x_0+W\subset V$ et $\nu(x_0+x+A)\geqslant\alpha>0$ pour tout $x\in W$. On termine en remarquant que $\nu(x_0+x+A) = \mu(x_0+x+A)$ pour tout $x\in W$, et $\nu(x_0+W+A) = \mu(x_0+W+A)$.

Le lemme utilisé est le suivant :

(2.24) LEMME. - *Soit* A *une partie fermée d'un elc quelconque* E. *Pour toute mesure bornée* μ *sur* E *l'application* $h : x \to \mu(x+A)$ *est semi-continue supérieurement sur* E.

PREUVE. Puisque x_0+A est fermé on peut se ramener à prouver la semi-continuité pour $x_0=0$. Puisque $\overline{A+V}$ est contenu dans $A+2V$ pour tout disque ouvert V de E, on voit que $A = \bigcap_V \overline{A+V}$. Alors pour tout $\varepsilon>0$, il existe un voisinage ouvert disqué de zéro V_ε tel que

$$\mu(A+V_\varepsilon) \leqslant \mu(A)+\varepsilon$$

ce qui suffit.

A la suite de (2.23) on obtient encore

(2.25) PROPOSITION. - *Soit* E *un elc de Baire et soit* μ *une mesure bornée sur* E. *Alors tout ensemble* A *universellement mesurable dans* E, *qui n'est pas de mesure nulle, et pour lequel l'application* $h : x \to \mu(x+A)$ *est continue à l'origine, est un conoyau de Haar de type fort.*

Pour terminer on énonce un résultat qui généralise le fait que tout voisinage ouvert de zéro est un conoyau de Haar de type fort pour la mesure de Dirac à l'origine δ_0.

(2.26) PROPOSITION. - *Soit* p *une semi-norme continue sur un elc* E *et soit* μ *une mesure sur* E *telle que, pour tout* $\alpha \in]0,1]$, *la* p-*boule* $B_p(\alpha)$ *de rayon* α *soit de mesure finie non nulle. Il existe alors* $\alpha > 0$ *tel que* $B_p(\alpha)$ *soit un* μ-*conoyau de Haar de type fort.*

PREUVE. Soit, pour $0 \leq \alpha \leq 1$, $F_\alpha = \{x ; p(x) = \alpha\}$. Alors $B_p(1) = \bigcup_{0 \leq \alpha \leq 1} F_\alpha$ et $\mu[B_p(1)] < +\infty$. Il existe donc α tel que $\mu(F_\alpha) = 0$, avec $0 < \alpha < 1$. On a alors, pour $0 < \varepsilon < \alpha$, et pour tout $x_0 \in B_p(\varepsilon)$

$$B_p(\alpha-\varepsilon) \subset x_0 + B_p(\alpha) \subset B_p(\alpha+\varepsilon) .$$

Considérons l'application $h : x \to \mu[x+B_p(\alpha)]$. L'inégalité :

$$|h(x_0)-h(0)| \leq \mu\{x ; \alpha-\varepsilon \leq p(x) \leq \alpha+\varepsilon\}.$$

valable pour tout $x_0 \in B_p(\varepsilon)$, montre que h est continue à l'origine, ce qui ramène à (2.25).

BIBLIOGRAPHIE. -

[1] D. BUCCHIONI et A. GOLDMAN, *Sur certains espaces de formes linéaires liés aux mesures vectorielles* ; à paraître.aux Ann. Inst. Fourier **XXVI,3**

[2] H. BUCHWALTER, *Sur le théorème de Nachbin-Shirota* ; J. Math. Pures et appl., 51 (1972), p. 399-418.

[3] H. BUCHWALTER et J. SCHMETS, *Sur quelques propriétés de l'espace* $C_s(T)$; J. Math. pures et appl., 52, (1973), p. 337-352.

[4] G. CHOQUET, *Ensembles $\mathcal{K}$-analytiques et $\mathcal{K}$-sousliniens, Cas général et cas métrique* ; Ann. Inst. Fourier, 9 , (1959), p. 75-81.

[5] J.P.R. CHRISTENSEN, *On sets of Haar measure zero in abelian Polish groups* ; Israel J. Math., 13, (1972), p. 255-260.

[6] J.P.R. CHRISTENSEN, *Topology and Borel structure* ; North Holland, (1974).

[7] J. DAZORD et M. JOURLIN, *Sur quelques classes d'espaces localement convexes* ; Publ. Dép. Math. Lyon, 9-1, (1972), p. 87-98.

[8] A. GOLDMAN, *Prémesures et mesures sur les espaces compactologiques* ; Publ. Dép. Math. Lyon, 9-1, (1972), p. 61-86.

[9] R. HAYDON, *Sur un problème de H. Buchwalter* ; Comptes rendus Acad. Sc. Paris, 275, série A, (1972), p. 1077.

[10] O. NIKODYM, *Sur une propriété de l'opération* (A) ; Fund. Math. 7, (1925), p. 149-154.

[11] M.F. SAINTE-BEUVE, *Sur la généralisation d'un théorème de section mesurable de von Neumann-Aumann et applications à un théorème de fonctions implicites mesurables et à un théorème de représentation intégrale* ; Comptes rendus Acad. Sc. Paris, 276, série A, (1973), p p. 1297.

[12] M. VALDIVIA, *Absolutely convex sets in barrelled spaces*; Ann. Inst. Fourier, 21-2, (1971), p. 3-13.

[13] M. VALDIVIA, *A class of bornological barrelled spaces which are not ultrabornological* ; Math. Ann. 194, (1971), p. 38-43.

[14] M. VALDIVIA, *Some examples on quasi-barrelled spaces*; Ann. Inst. Fourier 22-2 (1972), p. 21-26.

[15] M. de WILDE, *Réseaux dans les espaces linéaires à semi-normes* ; Mém. Soc. Roy. Sc. Liège, Coll. in 8°, 5 , 18-2, (1969).

A. GOLDMAN
Département de Mathématiques
Université Claude Benrard
43, bd du 11 novembre 1918
69621 VILLEURBANNE