

MICHEL MIZONY

Contribution à l'analyse harmonique sphérique

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1975, tome 12, fascicule 1
, p. 61-108

http://www.numdam.org/item?id=PDML_1975__12_1_61_0

© Université de Lyon, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONTRIBUTION A L'ANALYSE HARMONIQUE SPHERIQUE

par Michel MIZONY

INTRODUCTION.

On sait que l'utilisation des représentations unitaires des groupes localement compacts et d'algèbres formées à l'aide de ces représentations constitue un puissant moyen d'investigation de ces groupes. Pour beaucoup d'entre eux, la description de ces représentations et algèbres fait intervenir des fonctions sphériques. L'étude qui suit concerne la généralisation de la transformation de Fourier classique pour les groupes commutatifs au cas de groupes non commutatifs, au moyen des fonctions sphériques.

Soient G un groupe localement compact, K un sous-groupe compact de G et χ un caractère (de dimension 1) de K , tels que l'algèbre $L^1(G)^\chi$ des fonctions intégrables sur G et de classe χ soit commutative. En désignant par $A(G)^\chi$ le sous-espace de l'algèbre de Fourier $A(G)$, formé des fonctions de classe χ , on montre que $A(G)^\chi = L^2(G)^\chi * L^2(G)^\chi$. Pour obtenir ce résultat, on étudie la transformation de Fourier sphérique : si l'on désigne par Z l'ensemble des fonctions sphériques de classe χ et de type positif et par $C^*(G)^\chi$ l'adhérence de $L^1(G)^\chi$ dans l'algèbre $C^*(G)$, on montre que la transformation de Fourier se prolonge en

un isomorphisme isométrique de $C^*(G)^\chi$ sur l'algèbre $\mathcal{K}^\infty(Z)$ des fonctions continues sur Z et nulles à l'infini. On voit, en même temps, que Z s'identifie au spectre de $C^*(G)^\chi$, donc à une partie du dual de G , et que la transformation de Fourier se prolonge en un isomorphisme isométrique de l'espace de Banach $B(G)^\chi$ formé des fonctions de classe χ de l'algèbre de Fourier-Stieltjès $B(G)$, sur l'espace $M^1(Z)$ des mesures bornées sur Z . En notant μ la mesure de Plancherel-Godement sur Z , on montre que $A(G)^\chi$ s'identifie à $L^1(Z, \mu)$ par transformation de Fourier ; c'est ainsi que l'on obtient une formule d'inversion de Fourier, étendant celle que l'on connaît dans le cas où G est commutatif ; ceci généralise un résultat connu selon lequel, pour un groupe de Lie G semi-simple, connexe et dont le centre est fini, la formule d'inversion de Fourier est définie sur un espace partout dense de $L^2(G)^\chi$.

En particulier, lorsque $\chi = 1$, les espaces de Fourier que l'on vient d'introduire et que l'on note dans ce cas $A(G)^h$ et $B(G)^h$, sont des algèbres pour le produit ordinaire des fonctions. Par transport de structure, l'espace $M^1(Z)$ est ainsi une algèbre pour un produit, noté $*$ et appelé produit de convolution, et $L^1(Z, d\mu)$ est un idéal de $M^1(Z)$. En introduisant la notion de translations généralisées, on obtient des propriétés de ces algèbres, similaires à celles des algèbres de convolution d'un groupe commutatif. Puis, en introduisant la notion de caractère de Z , dont la définition est inspirée de celle déjà donnée dans le cas d'un hypergroupe (Dunkl [3]), on obtient un théorème de dualité permettant d'identifier l'espace des doubles classes $K \backslash G / K$ à l'espace \hat{Z} des caractères de Z .

A la fin de la première partie de ce travail, on étudie le support de la mesure de Plancherel-Godement, dont les propriétés sont liées à la notion d'amenabilité. Ainsi, on montre que, pour que le support de la mesure de Plancherel-Godement soit Z tout entier, il faut et il suffit que le groupe G soit amenable ; on obtient ainsi de nouveaux critères d'amenabilité. Certains résultats restent valables lorsque χ est un caractère quelconque de dimension 1 de K ; en fait ce paragraphe est rédigé dans ce cadre plus large.

Dans la deuxième partie, en appliquant les résultats présentés dans la première, on complète les résultats connus sur la transformation de Fourier centrale sur les groupes G tels que le sous-groupe $I(G)$ des automorphismes intérieurs soit relativement compact dans le groupe $\text{Aut}(G)$ de tous les automorphismes de G . Pour cela, on montre d'abord, en reprenant une idée de Mosak [15], que l'analyse harmonique centrale sur de tels groupes est un cas particulier de l'analyse harmonique sphérique. Puis on étend les résultats ainsi obtenus à une classe plus large de groupes, ceux dont toutes les classes d'éléments conjugués sont relativement compactes dans G , et on donne une nouvelle démonstration du fait, établi par Leptin [12] que ces groupes sont amenables.

Enfin, on a tenté d'explicitier les résultats précédents dans le cas du groupe des déplacements du plan. On montre en particulier, dans ce cas, que le produit de convolution de deux mesures de Dirac est en général une fonction intégrable.

1. ANALYSE HARMONIQUE SPHERIQUE

(1.1) *Rappels et propriétés élémentaires.*

Dans ce qui suit, on désigne par G un groupe localement compact unimodulaire, par K un sous-groupe compact de G et par χ un homomorphisme continu de K dans U (c'est-à-dire un caractère de dimension 1 de K) ; le groupe $K \times K$ opère à gauche dans G par $((k, k'), x) \mapsto kxk'^{-1}$.

(1.1.1) On désigne par dx une mesure de Haar sur G , par dk la mesure de Haar normalisée de K et par ϵ_χ la mesure sur G , image de la mesure $\chi(k) dk$ sur K par l'injection canonique. Le support de ϵ_χ est K et on a $\epsilon_\chi * \epsilon_\chi = \epsilon_\chi$ et $\tilde{\epsilon}_\chi = \epsilon_{\bar{\chi}}$.

(1.1.2) Soit $M(G)$ l'espace des mesures complexes sur G . Si $\mu \in M(G)$; on note μ^χ la mesure $\varepsilon_\chi * \mu * \varepsilon_\chi$. Soit f une fonction localement intégrable dans G (pour la mesure de Haar), identifiée à la mesure $f dx$; alors f^χ est la fonction $\varepsilon_\chi * f * \varepsilon_\chi$ et on a

$$f^\chi(x) = \int_{K \times K} \overline{\chi(k)} f(kxk') \overline{\chi(k')} dk dk', \text{ pour presque tout } x \in G.$$

Lorsque χ est le caractère trivial $\chi = 1$ on notera μ^1 la mesure μ et f^1 la fonction f .

(1.1.3) D'après (1.1.1), $\mu \mapsto \mu^\chi$ est un projecteur de $M(G)$ et on a $\widetilde{\mu^\chi} = \widetilde{\mu}$.

(1.1.4) Soit E l'un des espaces complexes $\mathcal{H}(G)$ (espace des fonctions complexes continues et à support compact définies sur G), $\mathcal{H}^\infty(G)$ (espace des fonctions complexes continues et nulles à l'infini dans G), $\mathcal{C}(G)$ (espace des fonctions complexes continues) ou $L^p(G)$ ($1 \leq p < \infty$); alors $E^\chi \subset E$ et $f \mapsto f^\chi$ est ainsi un projecteur de E .

E^χ est l'ensemble des $f \in E$ telles que $f(kxk') = \chi(k)f(x)\chi(k')$ pour tout $k, k' \in K$ et presque tout $x \in G$. (i.e. les $f \in E$ multiplicatives pour l'action de $K \times K$ dans G , avec $(k, k') \mapsto \chi(kk'^{-1})$ pour multiplicateur).

(1.1.5) Soit E l'un des espaces de Banach $\mathcal{H}^\infty(G)$ ou $L^p(G)$; pour les normes usuelles $f \mapsto f^\chi$ est un projecteur de norme 1 s'il n'est pas nul.

De plus, $f \mapsto f^\chi$ est un projecteur orthogonal de $L^2(G)$.

(1.1.6) Soient p, q des exposants conjugués, $f \in L^p(G)$ (resp. $f \in L^\infty(G)$) et $g \in L^q(G)$ (resp. $g \in L^1(G)$) ; on a alors $f^\chi * g^\chi = (f^\chi * g)^\chi = (f * g^\chi)^\chi$. En particulier $\mathcal{K}(G)^\chi$ et $L^1(G)^\chi$ sont des algèbres de convolution (involutives pour $f \mapsto \tilde{f}$). De même, on a $L^2(G)^\chi * L^2(G)^\chi \subset \mathcal{K}(G)^\chi$.

(1.1.7) Soient $C^*(G)$ l'algèbre stellaire enveloppante de $L^1(G)$ et $C^*(G)^\chi$ l'adhérence dans $C^*(G)$ de $L^1(G)^\chi$; c'est une algèbre stellaire pour la norme induite par $C^*(G)$.

(1.1.8) Soit π une représentation de G dans un espace hilbertien H , soient $\xi, \eta \in H$ et u la fonction : $x \mapsto \langle \pi(x)\xi | \eta \rangle$. Pour tout $x \in G$ on a

$$u^\chi(x) = \int_{K * K} \overline{\chi(k)} \langle \pi(kxk')\xi | \eta \rangle \overline{\chi(k')} dk dk' = \langle \pi(x)\pi(\varepsilon_{\overline{\chi}})\xi | \pi(\varepsilon_{\overline{\chi}})\eta \rangle.$$

(1.1.9) Soit $P(G)$ l'ensemble des fonctions continues de type positif sur G . Pour $f \in \mathcal{K}(G)$ on a $(f * \tilde{f})^\chi = \varepsilon_\chi * f * \tilde{f} * \varepsilon_\chi = (\varepsilon_\chi * f) * (\varepsilon_\chi * \tilde{f})$ ce qui montre que $P(G)^\chi \subset P(G)$ (inclusion que l'on obtient directement par (1.1.8)).

Soit $B(G)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(G)$ engendré par $P(G)$; on a donc $B(G)^\chi \subset B(G)$.

$B(G)$ est aussi l'ensemble des fonctions u définies dans (1.1.8).

Soit $u \in B(G)$; il existe une représentation unitaire π de G dans un espace hilbertien H_π et $h, h' \in H_\pi$ tels que $u(x) = (\pi(x).h|h')$; on pose $\|u\| = \inf(|h||h'|)$, où \inf est étendu à l'ensemble des π telles que $u(x) = (\pi(x)h|h')$. $u \mapsto \|u\|$ est une norme sur $B(G)$; et il existe une représentation π et $h, h' \in H_\pi$ vérifiant la condition ci-dessus et telle que $\|u\| = |h||h'|$. Pour cette norme et pour le produit ordinaire des fonctions, $B(G)$ est une algèbre de Banach commutative et unifère. De plus, $B(G)$ s'identifie, en tant qu'espace de Banach, au dual de $C^*(G)$.

D'après (1.1.2), on a $\|u^\chi\| \leq \|u\|$. Donc $u \mapsto u^\chi$ est un projecteur continu de $B(G)$; $B(G)^\chi$ est un sous-espace vectoriel fermé de $B(G)$.

(1.1.10). PROPOSITION. - (i) Le dual de l'espace de Banach $C^*(G)^\chi$ est l'espace de Banach $B(G)^\chi$.

(ii) Le dual de l'espace de Banach $L^1(G)^\chi$ (muni de la norme induite par $L^1(G)$) est l'espace de Banach $L^\infty(G)^\chi$ (muni de la norme induite par $L^\infty(G)$).

La démonstration repose sur le lemme suivant.

LEMME. - Soit E un espace normé et P un projecteur non nul de E tel que $\|P\| \leq 1$. Alors le transposé tP de P est un projecteur de l'espace de Banach E' dual de E , et ${}^tP(E')$ s'identifie isométriquement à l'espace de Banach $P(E)'$ dual de $P(E)$.

PREUVE. - Puisque P n'est pas nul, on a $\|P\| = 1$. L'application transposée de P est un projecteur car $({}^tP)^2 = {}^t(P^2) = {}^tP$. D'autre part, on a $\text{Ker } {}^tP = (P(E))^\perp$ (cf. N. Bourbaki, chap. IV, § 4, n°1). Et d'après le même ouvrage (chap. IV, § 5, prop. 10, N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques*), $E'/(P(E))^\perp$ s'identifie à $P(E)'$. Or $E'/P(E)^\perp = E'/\text{Ker } {}^tP$ s'identifie à ${}^tP(E')$ puisque tP est un projecteur de norme 1. En effet, soit Q la bijection de $E'/\text{Ker } {}^tP$ sur ${}^tP(E')$ déduite de tP par passage au quotient. On a $\|Q\| \leq \|{}^tP\|$, donc $\|Q(\dot{x})\| \leq \|\dot{x}\|$ pour tout $\dot{x} \in E'/\text{Ker } {}^tP$. D'autre part, si $\dot{x} = x + \text{Ker } {}^tP$, on sait que $\|\dot{x}\| = \inf_{{}^tP(z)=0} \|x+z\|$. En faisant $z = {}^tP(x) - x$, on trouve $\|\dot{x}\| \leq \|{}^tP(x)\|$, c'est-à-dire $\|\dot{x}\| \leq \|Q(\dot{x})\|$; ainsi Q est une isométrie.

Pour montrer la première partie de la proposition, considérons $L^1(G)$ muni de la norme induite par celle de $C^*(G)$. Appliquons le lemme en prenant pour projecteur $P : f \mapsto f^\chi$; alors le résultat est obtenu si l'on montre que tP est le projecteur $f \mapsto f^\chi$ dans $B(G)$, pour la dualité définie pour tout $f \in L^1(G)$ et tout $u \in B(G)$ par

$$\langle u, f \rangle = \int_G f(x^{-1})u(x)dx.$$

Or, pour $u \in B(G)$ et $f \in L^1(G)$, on a $\langle u^\chi, f \rangle = \langle u, f^\chi \rangle$. Ainsi (i) est démontré.

On démontre de même (ii) en utilisant la dualité entre $L^1(G)$ et $L^\infty(G)$ définie pour $u \in L^\infty(G)$ et $f \in L^1(G)$ par $\langle u, f \rangle = \int_G f(x^{-1})u(x)dx$ et en remarquant que, pour $u \in L^\infty(G)$ et $f \in L^1(G)$, on a $\langle u^\chi, f \rangle = \langle u, f^\chi \rangle$.

(1.1.11) Soit $A(G)$ l'algèbre de Fourier de G . $A(G)$ est l'adhérence du sous-espace engendré par $\mathcal{H}(G) * \mathcal{H}(G)$ dans l'algèbre normée $B(G)$. C'est un idéal de $B(G)$ et $A(G) \cap L^2(G)$ est partout dense dans $A(G)$ qui est égal à $L^2(G) * L^2(G)$. Il en résulte que $A(G)^\chi$ est un sous-espace vectoriel de $A(G)$ contenant $L^2(G)^\chi * L^2(G)^\chi$.

(1.1.12) PROPOSITION. - $L^2(G)^\chi * L^2(G)^\chi$ est partout dense dans $A(G)^\chi$.

$A(G) \cap L^2(G)$ est dense dans $A(G)$; par suite, $A(G)^\chi \cap L^2(G)$ est dense dans $A(G)^\chi$. Soit $f \in A(G)^\chi \cap L^2(G)$; on a $f = g * h$ où $g, h \in L^2(G)$. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une approximation de l'unité dans $\mathcal{H}(G)$. Dans $L^2(G)$, on a $\lim_I (u_i * g) = g$. Comme $\|u_i * g * h - g * h\| \leq \|u_i * g - g\| \|h\|$, on a $\lim_I (u_i * g * h) = f$ dans $A(G)$. Donc $f = f^\chi = \lim_I (u_i * g * h)^\chi = \lim_I u_i^\chi * (g * h)^\chi$. On a ainsi montré que f est adhérent à $\mathcal{H}(G)^\chi * L^2(G)^\chi$ donc à $L^2(G)^\chi * L^2(G)^\chi$. Donc $L^2(G)^\chi * L^2(G)^\chi$ est dense dans $A(G)^\chi \cap L^2(G)$ et, par suite, dans $A(G)^\chi$.

REMARQUE. - En fait, on montrera l'égalité $L^2(G)^\chi * L^2(G)^\chi = A(G)^\chi$. Lorsque l'algèbre de convolution $L^1(G)^\chi$ est commutative.

(1.2) Fonctions sphériques.

On conserve les hypothèses et notations de (1.1). On suppose en outre, que l'algèbre de convolution $\mathcal{H}(G)^\chi$ (ou, ce qui revient au même, $L^1(G)^\chi$) est commutative.

(1.2.1) On dit qu'une fonction non nulle $\phi \in \mathcal{C}(G)^\chi$ est sphérique (relativement à χ) si l'on a, pour tous $x, y \in G$,

$$(1) \quad \phi(x) \phi(y) = \int_K \phi(kx k^{-1}y) dk.$$

Tout caractère non nul de l'algèbre $L^1(G)^\chi$ est de la forme $f \mapsto \int_G f(x) \phi(x^{-1}) dx$, où ϕ est une fonction sphérique bornée.

(1.2.2) Soit $Z = Z(G, K, \chi)$ l'ensemble des fonctions sphériques (relativement à χ) de type positif. Z est l'ensemble des fonctions non nulles de $P(G)^\chi$ vérifiant l'équation (1) de (1.2.1). Z est encore l'ensemble des points extrémaux non nuls du cône des fonctions de type positif de la boule unité de $B(G)^\chi$.

Z est également l'ensemble des fonctions de type positif dont la représentation continue unitaire associée est irréductible et dont la restriction de cette représentation à K contient au moins une fois la représentation χ ; (en fait, cette représentation restreinte à K contient χ exactement une fois). De plus, la correspondance entre Z et ces classes de représentations est bijective.

(1.2.3) EXEMPLES. - a) Soit G un groupe localement compact, produit semi-direct d'un sous-groupe distingué et commutatif N de G par un sous-groupe compact K de G . Alors pour tout caractère χ de K , $\mathcal{H}(G)^\chi$ est commutative et $\neq \{0\}$ (cf. [26], t.1, 6.1.1.6 et 4.5.2.1).

b) Soit G un groupe de Lie connexe, semi-simple et dont le centre est fini, et soit K un sous-groupe compact maximal de G ; pour tout caractère χ de K , $\mathcal{H}(G)^\chi$ est commutative et $\neq \{0\}$ (cf. [26], t.1, 6.1.1.6 et 4.5.1.11).

c) Soit G un groupe localement compact tel que l'ensemble $I(G)$ des automorphismes intérieurs de G soit relativement compact dans le groupe $\text{Aut}(G)$ des automorphismes de G , muni de la topologie usuelle. Soit $I = \overline{I(G)}$, soit $G' = G \rtimes I$ le produit semi-direct de G par I défini par $(x, \alpha)(y, \beta) = (x\alpha(y), \alpha\beta)$, pour $(x, \alpha), (y, \beta) \in G$. I est un sous-groupe compact de G' et $L^1(G)^\chi$ est commutative. Nous reviendrons sur cet exemple.

d) Soit Ω un corps p -adique localement compact et tel que le corps résiduel soit de caractéristique impaire ; soit U l'anneau des entiers de Ω . Soit $G = \text{GL}(2, \Omega)$ et $K = \text{GL}(2, U)$; K est un sous-groupe compact maximal de G et pour tout caractère de K , $L^1(G)^\chi$ est commutative. ([19]). Pour d'autres exemples, voir [24] et [21] .

(1.2.4) Soit $f \in L^1(G)^\chi$ et $\phi \in Z$; soit $\hat{f}(\phi) = \int_G f(x)\phi(x^{-1})dx$. On obtient une fonction complexe \hat{f} définie sur Z , appelée la transformée de Fourier, de f et on a $\widehat{f * g} = \hat{f} \hat{g}$ pour $f, g \in L^1(G)^\chi$ et $\widetilde{\hat{f}} = \bar{\hat{f}}$ pour $f \in L^1(G)^\chi$.

(1.2.5) Munissons Z de la topologie de la convergence compacte sur G ; Z est un espace localement compact et cette topologie coïncide avec la topologie induite par $\sigma(L^\infty(G), L^1(G))$ sur $L^\infty(G)$.

Pour tout $f \in L^1(G)^X$ on a $\hat{f} \in \mathcal{H}^\infty(Z)$; et $L^1(G)^X$ est partout dense dans $\mathcal{H}^\infty(Z)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur Z . On a le théorème suivant (théorème de Plancherel) (voir [6] pour la démonstration).

(1.2.6) PROPOSITION.- Il existe une unique mesure μ sur Z telle que la transformation de Fourier de $\mathcal{H}(G)^X$ dans $\mathcal{H}^\infty(Z)$ se prolonge en un isomorphisme isométrique de $L^2(G)^X$ sur $L^2(Z, d\mu)$ tel que pour tout $f, g \in L^2(G)^X$

$$\int_G f(x) \overline{g(x)} dx = \int_Z \hat{f}(\phi) \overline{\hat{g}(\phi)} d\mu(\phi) .$$

De plus, pour toute fonction f combinaison linéaire de fonctions de $P(G)^X \cap L^1(G)$, on a $\hat{f} \in L^1(Z, d\mu)$ et $f(x) = \int_Z \hat{f}(\phi) \phi(x) d\mu(\phi)$ pour tout $x \in G$.

(1.2.7) Soit $M^1(Z)$ l'espace des mesures bornées sur Z , c'est-à-dire l'espace de Banach dual topologique de $\mathcal{H}^\infty(Z)$. $L^2(Z, d\mu)$ est un sous-espace fermé de $M^1(Z)$.

Soit $\theta : M^1(Z) \rightarrow \mathcal{C}(G)$ l'application $\nu \mapsto \theta(\nu)$, où $\theta(\nu)(x) = \int_Z \phi(x) d\nu(\phi)$

Pour tout $\nu \in M^1(Z)$; $\theta(\nu) \in \mathcal{C}(G)^X$. L'application θ est la transposée de la transformation de Fourier considérée comme application de $L^1(G)^X$ dans $\mathcal{H}^\infty(Z)$. En effet, pour tout $f \in L^1(G)^X$, on a $\int_G f(x) \theta(\nu)(x^{-1}) dx = \int_Z \hat{f}(\phi) d\nu(\phi)$.

Comme la transformation de Fourier est continue et à image dense, sa transposée θ est faiblement continue et injective.

Pour tout $\phi \in Z$, on a $\theta(\delta_\phi) = \phi$ où δ_ϕ est la mesure de Dirac au point ϕ .
Donc θ envoie bijectivement les points extrémaux du convexe formé des mesures positives de la boule unité de $M^1(Z)$ sur les points extrémaux du convexe des fonctions de type positif de la boule unité de $B(G)^\chi$, d'après (1.2.2). Comme ces deux convexes sont faiblement compacts, on déduit du théorème de Krein-Milman qu'ils sont homéomorphes par θ ; il en résulte que θ est surjective car $B(G)^\chi$ est engendré algébriquement par $P(G)^\chi$.

(1.2.8) PROPOSITION. - (i) *La transformation de Fourier se prolonge en un isomorphisme isométrique de l'algèbre stellaire $C^*(G)^\chi$ sur $\mathcal{K}^\infty(Z)$.*

(ii) *θ est un isomorphisme isométrique de l'espace de Banach $M^1(Z)$ sur l'espace de Banach $B(G)^\chi$.*

Soit $f \in L^1(G)^\chi$ et $\|f\|_1$ sa norme dans $C^*(G)$; on a
 $\|f\|_1 = \sup\{|\langle u, f \rangle| / u \in B(G)^\chi \text{ et } \|u\| \leq 1\} \geq \sup\{|\langle \phi, f \rangle| / \phi \in Z\} = \|\hat{f}\|$.

La transformation de Fourier se prolonge donc en un morphisme d'algèbres stellaires de $C^*(G)^\chi$ dans $\mathcal{K}^\infty(Z)$. Ce morphisme est à image dense donc surjectif et l'application transposée θ étant une bijection, il est injectif ; c'est donc une isométrie (Dixmier 1.8.3). Par suite θ est une isométrie.

On obtient ainsi :

(1.2.9) COROLLAIRE. - *L'espace topologique Z s'identifie au spectre de $C^*(G)^\chi$.*

Il suffit pour cela de remarquer que la transformation de Fourier entre $C^*(G)^X$ et $\mathcal{K}^\infty(Z)$ est la transformation de Gelfand, car le spectre de $C^*(G)^X$ s'identifie au spectre de $\mathcal{K}^\infty(Z)$, qui est l'ensemble des mesures de Dirac en chaque $\phi \in Z$.

REMARQUE. - Soit \hat{G} le dual de G , alors Z est une partie de \hat{G} et, d'après [2], 13.5.2, 2.7.5, et 3.4.11, la topologie sur Z est celle induite par celle de G .

(1.2.10) PROPOSITION. - (i) La transformation de Fourier de $\mathcal{K}(G)^X * \mathcal{K}(G)^X$ dans $\mathcal{K}^\infty(Z)$ se prolonge en un isomorphisme isométrique de $A(G)^X$ sur $L^1(Z, d\mu)$, qui coïncide avec θ^{-1} .

(ii) on a $A(G)^X = L^2(G)^X * L^2(G)^X$ et pour tout $f \in A(G)^X$ on a $\|f\| = \inf\{\|g\|_2 \|h\|_2 / f = g * h ; g, h \in L^2(G)^X\}$; de plus, la borne inférieure est atteinte.

LEMME. - Pour tout $g, h \in L^2(G)^X$, on a $\hat{g} \hat{h} \in L^1(Z, d\mu)$ et $g * h = \theta(\hat{g} \hat{h})$.

Soit g et $h \in L^2(G)^X$; d'après (1.2.6), \hat{g} et $\hat{h} \in L^2(Z, d\mu)$ donc $\hat{g} \hat{h} \in L^1(Z, d\mu)$
 Soit g_n (resp. h_n), $g_n \in \mathcal{K}(G)$ (resp. $h_n \in \mathcal{K}(G)$) telle que $\lim g_n = g$ dans $L^2(G)^X$ (resp. $\lim h_n = h$ dans $L^2(G)^X$). $g_n * h_n \in A(G)^X \cap L^1(G)$; donc
 $g_n * h_n(x) = \int_Z g_n * h_n(\phi) \phi(x) d\mu(\phi)$ d'après (1.2.6), $= \int_Z \hat{g}_n(\phi) \hat{h}_n(\phi) \phi(x) dx$
 d'après (1.2.4), pour tout $x \in G$.

Or $g_n * h_n$ converge uniformément vers $g * h$; donc

$$g * h(x) = \lim_n \int_Z \hat{g}_n(\phi) \hat{h}_n(\phi) \phi(x) d\mu(\phi) = \int_Z \hat{g}(\phi) \hat{h}(\phi) \phi(x) d\mu(\phi) \text{ car } \hat{g}_n \hat{h}_n$$

converge vers $\hat{g} \hat{h}$ dans $L^1(Z, d\mu)$, d'après l'inégalité de Hölder.

Ainsi $g * h = \theta(\hat{g} \hat{h})$ et le lemme est démontré.

(i) Soit g et $h \in \mathcal{M}(G)^X$, posons $f = g * h$; on a $\hat{f} = \hat{g} \hat{h}$ d'après (1.2.4), donc $\hat{f} \in L^1(Z, d\mu)$ et $f = \theta(\hat{f})$ d'après le lemme ; ainsi $\hat{f} = \theta^{-1}(f)$ et $\|\hat{f}\|_1 = \|f\|_1$.

Par suite, la transformation de Fourier se prolonge en une isométrie de

l'adhérence dans $B(G)^X$ de $\mathcal{M}(G)^X * \mathcal{M}(G)^X$ sur une partie de $L^1(Z, d\mu)$. Or d'après

(1.1.12) l'adhérence dans $B(G)^X$ de $\mathcal{M}(G)^X * \mathcal{M}(G)^X$ est $A(G)^X$. D'autre part, soit

$u \in L^1(Z, d\mu)$; soient v et $w \in L^2(Z, d\mu)$ tels $u = vw$ et soit $f = g * h \in L^2(G)^X * L^2(G)^X$

où $\hat{g} = v$ et $\hat{h} = w$. Alors d'après le lemme $f = \theta(u)$. Avec les notations du lemme,

l'image de f par le prolongement de la transformation de Fourier est égale à

$\lim_n g_n * h_n = \lim_n \hat{g}_n \hat{h}_n = \hat{g} \hat{h} = u$. Ainsi ce prolongement est surjectif et coïncide avec θ^{-1} .

Pour tout $u \in B(G)^X$, nous noterons \hat{u} la fonction $\theta^{-1}(u)$.

(ii) Nous avons vu dans (i) que pour tout $u \in L^1(Z, d\mu)$, $\theta(u) \in L^2(G)^X * L^2(G)^X$ donc $A(G)^X = L^2(G)^X * L^2(G)^X$. Comme, pour tout $f \in A(G)^X$, on a

$\|f\|_1 \leq \inf\{\|g\|_2 \|h\|_2 \mid f = g * h \text{ et } g, h \in L^2(G)^X\}$, il ne reste plus qu'à

montrer l'inégalité en sens inverse.

Soit $f \in A(G)^X$, $\hat{f} \in L^1(Z, d\mu)$; alors $\hat{f} = uv$, où $u(\phi) = \sqrt{|\hat{f}(\phi)|}$ et $v(\phi) = \frac{\hat{f}(\phi)}{\sqrt{|\hat{f}(\phi)|}}$ pour tout ϕ tel que $\hat{f}(\phi) \neq 0$ et $u(\phi) = v(\phi) = 0$ ailleurs.

Or $u, v \in L^2(Z, d\mu)$ et on a $\|u\|_2 = \|\hat{f}\|_1^{1/2}$ et $\|v\|_2 = \|\hat{h}\|_1^{1/2}$. Soient g et h tels que $\hat{g} = u$ et $\hat{h} = v$, on a $g \in L^2(G)^\chi$, $h \in L^2(G)^\chi$ et $f = g * h$. Alors $\|\hat{f}\|_1 = \|g\|_2 \|h\|_2 = \|f\|$; donc $\|f\| = \inf\{\|g\|_2 \|h\|_2 \mid gf = g * h \text{ et } g, h \in L^2(G)^\chi\}$ et la borne inférieure est atteinte.

(1.2.11) COROLLAIRE.) (formule d'inversion de Fourier). - Soit $I^\chi(G) = A(G)^\chi \cap L^1(G)$

i) $\widehat{I^\chi(G)}$ est partout dense dans $\mathcal{X}^\infty(Z)$.

ii) Pour tout $f \in I^\chi(G)$, on a $\hat{f}(\phi) = \int_G f(x) \overline{\phi(x)} dx$ pour tout $\phi \in Z$.
et $f(x) = \int_Z \xi(x) \hat{f}(\xi) d\mu(\xi)$ pour tout $x \in G$.

En effet, soit $v \in M^1(Z)$ telle que, pour tout $u \in I^\chi(G)$, on ait $\int_Z \hat{u}(\phi) dv(\phi) = 0$; c'est-à-dire $\langle \hat{u}, v \rangle = 0$, ou encore $\langle u, \theta(v) \rangle = 0$ d'après (1.2.8). Ainsi dans la dualité entre $L^1(G)^\chi$ et $L^\infty(G)^\chi$, nous avons $\langle u, \theta(v) \rangle = 0$ pour tout $u \in I^\chi(G)$; or $A(G)^\chi \cap L^1(G)$ est dense dans $L^1(G)^\chi$, car $A(G) \cap L^1(G)$ est dense dans $L^1(G)$ pour la norme $\|\cdot\|_1$; ainsi, $v = 0$; donc $\widehat{I^\chi(G)}$ est partout dense dans $\mathcal{X}^\infty(Z)$.

(ii) est une conséquence directe de (1.2.10). Ce corollaire complète le théorème de Plancherel (1.2.6).

REMARQUE . - Lorsque G est un groupe de Lie connexe semi-simple et de centre fini, Harish-Chandra puis Helgason [9] et Gangolli [5] ont montré la validité de cette formule d'inversion pour un sous-espace partout dense dans $L^2(G)^\chi$;

c'est le sous-espace noté $I_c(G)$ des fonctions indéfiniment dérivables de $\mathcal{K}(G)^h$. Or, d'après [4] 3.26, $I_c(G) \subset A(G)^h$; donc $I_c(G) \subset I^h(G)$. Ainsi, ce corollaire généralise ce résultat en donnant une réponse positive au problème posé par Harish-Chandra (existe-t-il un sous-espace partout dense dans $L^2(G)^h$ tel que l'on ait sur cet espace une formule d'inversion de Fourier ?) même lorsque G n'est pas un groupe de Lie connexe, semi-simple et dont le centre est fini.

(1.3) Les algèbres de convolution $M^1(Z)$ et $L^1(Z, du)$.

On conserve les notations et les hypothèses de (1.2).

(1.3.1) Soit $\sigma \in P(G)$ tel que $\|\sigma\| = \sigma(e) = 1$. Soit le produit défini dans $B(G)$ par $(f, g) \mapsto f \underset{\sigma}{*} g = fg\sigma$; on a $\|f \underset{\sigma}{*} g\| \leq \|f\| \|g\|$. Ainsi $B(G)$ est une algèbre de Banach pour ce produit que nous noterons $B_\sigma(G)$; cette algèbre $B_\sigma(G)$ est isomorphe à $B(G)$ si σ est inversible dans $B(G)$. $A(G)$ est un idéal fermé de $B_\sigma(G)$ que nous noterons $A_\sigma(G)$.

(1.3.2) Soit $\sigma \in P(G)^{\bar{X}}$ tel que $\sigma(e) = 1$. L'espace $B(G)^X$ est une sous-algèbre de $B_\sigma(G)$ et $A(G)^X$ un idéal de $B(G)^X$; nous noterons $B_\sigma(G)^X$ et $A_\sigma(G)^X$ ces algèbres de Banach. $B_\sigma(G)^X$ est unitaire et a pour unité $1/\sigma$ si σ est inversible dans $B(G)$.

EXEMPLE. - Soit χ un caractère de K qui se prolonge en un caractère χ_0 de G , nous prendrons $\sigma = \overline{\chi_0}$; en particulier, si $\chi = 1$, nous prendrons $\sigma = 1$ et nous noterons $B(G)^{\chi}$ et $A(G)^{\chi}$ les algèbres $B_{\sigma}(G)^{\chi}$ et $A_{\sigma}(G)^{\chi}$.

(1.3.3) DEFINITION. - On appellera produit de convolution sur $M^1(Z)$ l'image par la transformation de Fourier du produit de $B_{\sigma}(G)^{\chi}$.

Ce produit est parfaitement défini d'après (1.2.8).

REMARQUE. - Muni de ce produit, $M^1(Z)$ est une algèbre de Banach commutative isomorphe et isométrique à $B_{\sigma}(G)^{\chi}$ et $L^1(Z, d\mu)$ est un idéal fermé de $M^1(Z)$. $M^1(Z)$ est unitaire si σ est inversible dans $B(G)$ ce que nous supposerons toujours dans la suite.

NOTATIONS. - Soient $v, v' \in M^1(Z)$; nous noterons $v \underset{\sigma}{*} v'$ le produit de convolutions de v par v' . Par définition $v \underset{\sigma}{*} v' = \widehat{\theta(v)\theta(v')\sigma} = \theta^{-1}(\theta(v) \underset{\sigma}{*} \theta(v'))$.

(1.3.4) Soit $\phi \in Z$; soit $R_{\sigma}(\phi) : M^1(Z) \rightarrow M^1(Z)$ l'application $v \mapsto R_{\sigma}(\phi)[v] = \theta^{-1}(\theta(v)\overline{\phi})$ et soit $D_{\sigma}(\phi) : M^1(Z) \rightarrow M^1(Z)$ l'application $v \mapsto D_{\sigma}(\phi)[v] = \theta^{-1}(\theta(v)\sigma\phi) = \delta_{\phi} * v$ (par définition du produit de convolution).

$D_\sigma(\phi)$ et $R_\sigma(\phi)$ sont des opérateurs linéaires. Ils sont bornés par 1 car $\|R_\sigma(\phi)[v]\| = \|\theta(v)\overline{\sigma\phi}\|_{B(G)^\chi} \leq \|\theta(v)\|_{B(G)^\chi} = \|v\|$ et de même $\|D_\sigma(\phi)[v]\| \leq \|v\|$. Ces opérateurs laissent stable $L^1(Z, d\mu)$.

Pour $f \in L^1(Z, d\mu)$, on pose $R_\sigma(\phi)[f] = R_\sigma(\phi)[f d\mu]$. Si $f = \hat{u}$ avec $u \in A(G)^\chi \cap L^1(G)$, on a :

$$R_\sigma(\phi)[f](\psi) = \int_G u(x)\sigma(x^{-1})\phi(x^{-1})\psi(x^{-1})dx = \widehat{u\sigma\phi}(\psi) = \delta_\phi * \delta_\sigma \psi(f).$$

On a de même $D_\sigma(\phi)[f](\psi) = \widehat{u\sigma\phi}(\psi) = \delta_\phi * f(\psi)$.

$L^\infty(Z)$ est le dual de $L^1(Z, d\mu)$; pour tout $\phi \in Z$, soient $u(\phi)$ le transposé de $D_\sigma(\phi)$ et $v(\phi)$ le transposé de $R_\sigma(\phi)$. Les opérateurs $u(\phi)$ et $v(\phi)$ sont bornés par 1 sur $L^\infty(Z)$.

LEMME 1. - Soit $f \in A(G)^\chi \cap L^1(G)$ et $g \in A(G)^\chi$. Alors $\theta^{-1}(f * g) = \theta^{-1}(f) * \theta^{-1}(g)$.

Ce lemme est immédiat par le calcul.

Montrons que sur $L^\infty(Z) \cap L^1(Z, d\mu)$ les opérateurs $u(\phi)$ et $R_\sigma(\phi)$ sont égaux. Soit $f \in L^\infty(Z) \cap L^1(Z, d\mu)$. On a $R_\sigma(\phi)[f] = \theta^{-1}(\theta(f)\sigma\phi)$, donc $\langle R_\sigma(\phi)[f], g \rangle = \int_Z \theta^{-1}(\theta(f)\overline{\sigma\phi})(\psi) g(\psi) d\mu(\psi) = A$ pour tout $g \in L^1(Z)$. D'autre part, on a

$\langle u(\phi)[f], g \rangle = \langle f, D_\sigma(\phi)[g] \rangle$ pour tout $g \in L^1(Z)$, donc $\langle u(\phi)[f], g \rangle =$

$$\int_Z f(\psi) \theta^{-1}(\theta(g)\sigma\phi)(\psi) d\mu(\psi) = B.$$

Pour montrer que $A = B$, il suffit de montrer l'égalité des intégrales pour tout $g \in \widehat{L^1(G)^\chi \cap A(G)^\chi}$, qui est partout dense dans $L^1(Z)$. Soit $g = \widehat{w} \in \widehat{L^1(G)^\chi \cap A(G)^\chi}$;

on a $D_\sigma(\phi)[g](\psi) = \widehat{w\sigma\phi}(\psi)$, donc $B = \int_Z f(\psi) \widehat{w\sigma\phi}(\psi) d\mu(\psi)$.

D'autre part $A = \int_Z \theta^{-1}(\theta(f)\overline{\sigma\phi})(\psi) g(\psi) d\mu(\psi) = \int_Z \theta^{-1}(\theta(f)\overline{\sigma\phi})(\psi) \widehat{w}(\psi) d\mu(\psi)$

donc d'après le lemme $A = \int_Z \theta^{-1}(\theta(f)\overline{\sigma\phi} * w)(\psi) d\mu(\psi)$. Ainsi par définition de

θ et en utilisant le fait que $\theta(f)\overline{\sigma\phi} * w \in A(G)^\chi * L^1(G)^\chi \subset A(G)^\chi$, on a

$A = (\theta(f)\overline{\sigma\phi} * w)(e) = (\theta(f) * w\sigma\phi)(e) = \int_Z \theta^{-1}(\theta(f) * w\sigma\phi)(\psi) d\mu(\psi)$; ainsi

$$A = \int_Z f(\psi) \widehat{w\sigma\phi}(\psi) = B.$$

Sur $L^1(Z) \cap L^\infty(Z)$, l'opérateur $u(\phi)$ coïncide donc avec $R_\sigma(\phi)$, de même $v(\phi)$ coïncide avec $D_\sigma(\phi)$. Nous noterons donc $u(\phi)$ par $R_\sigma(\phi)$ et $v(\phi)$ par $D_\sigma(\phi)$.

Nous avons ainsi la propriété suivante : pour tout $f \in L^1(Z, d\mu)$ et tout $g \in L^\infty(Z)$, on a $\langle R_\sigma(\phi)[g], f \rangle = \langle g, D_\sigma(\phi)[f] \rangle$ et $\langle D_\sigma(\phi)[g], f \rangle = \langle g, R_\sigma(\phi)[f] \rangle$.

REMARQUE 1. - Si $g \in \mathcal{H}^\infty(Z)$ alors $R_\sigma(\phi)[g](\psi) = \delta_\phi * \delta_\psi(g)$ et $D_\sigma(\phi)[g](\psi) = (\delta_\phi * g)(\psi)$, car $\widehat{A(G)^\chi \cap L^1(G)}$ est dense dans $\mathcal{H}^\infty(Z)$.

REMARQUE 2. - Si $\chi = 1$ et Z est un groupe pour la multiplication ordinaire des fonctions, alors $D(\phi)[f](\psi) = f(\phi^{-1}\psi)$ et $R(\phi)[f](\psi) = f(\phi\psi)$ pour tout $f \in \mathcal{K}^\infty(Z)$ et pour tout $\phi, \psi \in Z$.

LEMME 2. - Pour tout $g \in \mathcal{K}^\infty(Z)$, l'application $(\phi, \psi) \mapsto \delta_{\phi\sigma} * \delta_\psi(g)$ est continue sur $Z \times Z$.

Si $g \in \widehat{A(G) \times L^1(G)}$, alors $\delta_\phi * \delta_\psi(g) = \int_G u(x) \sigma(x^{-1}) \phi(x^{-1}) \psi(x^{-1}) dx$ où u est tel que $\hat{u} = g$. Si (ϕ, ψ) converge vers (ϕ_0, ψ_0) pour la topologie de la convergence compacte alors il en est de même pour $\phi\psi$ qui converge vers $\phi_0\psi_0$ car $\|\phi\|_\infty \leq 1$ et $\|\psi\|_\infty \leq 1$; donc $\delta_\phi * \delta_\psi(g)$ converge vers $\delta_{\phi_0} * \delta_{\psi_0}(g)$.

Si $g \in \mathcal{K}^\infty(Z)$, alors il existe une suite g_n dans $\widehat{A(C) \times L^1(G)}$, telle que $\lim_n \|g_n - g\|_\infty = 0$. On a $|\delta_\phi * \delta_\psi(g) - \delta_\phi * \delta_\psi(g_n)| \leq \|g - g_n\|_\infty$, donc la fonction $(\phi, \psi) \mapsto \delta_\phi * \delta_\psi(g)$ est limite uniforme de la suite de fonctions continues $(\phi, \psi) \mapsto \delta_\phi * \delta_\psi(g_n)$.

Ce lemme est ainsi établi et nous pouvons alors démontrer la proposition suivante.

(1.3.5) PROPOSITION. - (i) Pour tout $\nu, \nu' \in M^1(Z)$ et tout $f \in \mathcal{K}^\infty(Z)$, on a

$$\nu * \nu'(f) = \int_Z \int_Z R(\phi)[f](\psi) d\nu(\phi) d\nu'(\psi) = \int_Z \int_Z \delta_\phi * \delta_\psi(f) d\nu(\phi) d\nu'(\psi)$$

(ii) Pour tout $f, f' \in L^1(Z, d\mu)$ et presque tout $\phi \in Z$, on a

$$f \underset{\sigma}{*} f'(\phi) = \int_Z D_{\sigma}(\psi) [f](\phi) f'(\psi) d\mu(\psi) = \int_Z \delta_{\psi} \underset{\sigma}{*} f(\phi) f'(\psi) d\mu(\psi).$$

(i) Soient $v, v' \in M^1(Z)$ et soit $f = \hat{u}$, avec $u \in \mathcal{K}(G)^X$; d'après (1.2.8) on a

$$\begin{aligned} v \underset{\sigma}{*} v'(f) &= \int_Z f(\phi) dv \underset{\sigma}{*} dv'(\phi) = \int_G u(x) \theta(v)(x^{-1}) \theta(v')(x^{-1}) \sigma(x^{-1}) dx \\ &= \int_G \int_Z \int_Z u(x) \phi(x^{-1}) dv(\phi) \psi(x^{-1}) dv'(\psi) \sigma(x^{-1}) dx = \\ &= \int_Z \int_Z \int_G u(x) \overline{\sigma(x)} \overline{\phi(x)} \psi(x^{-1}) dx dv(\phi) dv'(\psi) = \int_Z \int_Z R_{\sigma}(\phi) [f](\psi) dv(\phi) dv'(\psi). \end{aligned}$$

Or, comme $|R_{\sigma}(\phi) [f](\psi)| \leq \|f\|_{\infty}$ d'après (1.3.4),

$f \mapsto \int_Z \int_Z R_{\sigma}(\phi) [f](\psi) dv(\phi) dv'(\psi)$ existe et est continue sur $\mathcal{K}^{\infty}(Z)$. Comme

$\widehat{\mathcal{K}(G)^X}$ est partout dense dans $\mathcal{K}^{\infty}(Z)$, (i) est démontré.

(ii) En particulier, soient $v \in M^1(Z)$ et $f \in L^1(Z, d\mu)$; alors $v \underset{\sigma}{*} f \in L^1(Z, d\mu)$, car $L^1(Z, d\mu)$ est un idéal de $M^1(Z)$ et donc, pour tout $g \in \mathcal{K}^{\infty}(Z)$, on a

$$\int_Z g(\psi) v \underset{\sigma}{*} f(\psi) d\mu(\psi) = v \underset{\sigma}{*} f(g) = \int_Z \int_Z R_{\sigma}(\phi) [g](\psi) f(\psi) d\mu(\psi) dv(\phi) \text{ d'après (i)}$$

Or, d'après (1.3.4), on a $\int_Z R_{\sigma}(\phi) [g](\psi) f(\psi) d\mu(\psi) = \int_Z g(\psi) D_{\sigma}(\phi) [f](\psi) d\mu(\psi)$.

On a ainsi :

$$\nu *_{\sigma} f(g) = \int_Z \int_Z g(\psi) D_{\sigma}(\phi) [f](\psi) d\mu(\psi) d\nu(\phi) = \int_Z g(\psi) \left(\int_Z D_{\sigma}(\phi) [f](\psi) d\nu(\phi) \right)$$

$d\mu(\psi)$; on a donc $\nu *_{\sigma} f(\psi) = \int_Z D_{\sigma}(\phi) [f](\psi) d\nu(\phi)$ pour presque tout $\psi \in Z$.

En particulier, pour $\nu = f \in L^1(Z, d\mu)$, on obtient (ii).

COROLLAIRE. 1. - Soit $\chi = 1$; supposons que Z soit un groupe pour la multiplication ordinaire des fonctions. Z est un groupe localement compact.

De plus :

(i) La mesure de Plancherel est une mesure de Haar ;

(ii) Le produit de convolution dans $M^1(Z)$ est le produit de convolution ordinaire.

(i) pour tout $\phi \in Z$ et pour tout $x \in G$ $|\phi(x)| = 1$ car $|\phi^{-1}(x)\phi(x)| = 1$ et $|\phi(x)| \leq 1$ et $|\phi^{-1}(x)| \leq 1$. Soit $u \in \mathcal{K}(Z)$, $u = \hat{f}$ avec $f \in A(G)^X$; donc, pour tout $\psi \in Z$, $\int_Z u(\psi\phi) d\mu(\phi) = f(e)\overline{\psi(e)} = f(e) = \int_Z u(\phi) d\mu(\phi)$. (ii) est évident.

COROLLAIRE 2. - Soit $\chi = 1$ et supposons que G est compact : pour tout ϕ et

$$\psi \in Z, \text{ on a } \phi(x)\psi(x) = \sum_{\xi \in Z} \frac{n(\phi, \xi, \psi) d_{\xi}}{d_{\phi} d_{\psi}} \xi(x), \text{ où } d_{\xi} \text{ est la dimension}$$

de la représentation π_{ξ} associée à ξ et $n(\phi, \xi, \psi)$ est la multiplicité

de la représentation π_{ξ} dans $\pi_{\phi} \otimes \pi_{\psi}$; la somme est finie et

$$\sum_{\xi \in Z} \frac{n(\phi, \xi, \psi) d_{\xi}}{d_{\phi} d_{\psi}} = 1. \text{ Donc } \delta_{\phi} * \delta_{\psi} = \sum_{\xi \in Z} \frac{n(\phi, \xi, \psi) d_{\xi}}{d_{\phi} d_{\psi}} \delta_{\xi}.$$

Ce résultat est immédiat à partir des relations d'orthogonalité dans $L^2(G)^n$.

(1.3.7) PROPOSITION. - (i) Pour tout $\phi \in Z$ et pour tout $f \in L^1(Z, d\mu)$.

$$\int_Z R_\sigma(\phi) [f](\psi) d\mu(\psi) = \int_Z f(\psi) d\mu(\psi) = \int_Z D_\sigma(\phi) [f](\psi) d\mu(\psi).$$

(ii) Supposons que χ se prolonge en un caractère unitaire χ_\bullet de G alors $\phi \mapsto \phi^* = \chi_\bullet^2 \bar{\phi}$ est une involution sur Z telle que

$$\int_Z f(\phi^*) d\mu(\phi) = \int_Z f(\phi) d\mu(\phi) \text{ pour tout } f \in L^1(Z, d\mu).$$

(i) Soit $f = \hat{u} \in \widehat{\mathcal{H}(G)^X * \mathcal{H}(G)^X}$ alors

$$\int_Z R_\sigma(\phi) [\hat{u}](\psi) d\mu(\psi) = \int_Z \widehat{u\sigma\phi}(\psi) d\mu(\psi) = \overline{u\sigma\phi}(e) = u(e) = \int_Z f(\psi) d\mu(\psi) \text{ pour}$$

tout $\phi \in Z$. Comme $\widehat{\mathcal{H}(G)^X * \mathcal{H}(G)^X}$ est partout dense dans $L^1(Z, d\mu)$ et que $R_\sigma(\phi)$ est un opérateur continu de $L^1(Z, d\mu)$, on obtient ainsi (i).

(ii) Soit $f = \hat{u} \in \widehat{\mathcal{H}(G)^X * \mathcal{H}(G)^X}$; alors $f(\phi^*) = \hat{u}(\chi_\bullet^2 \bar{\phi})$

$$= \int_G \overline{u(x)} \chi_\bullet(x)^2 \bar{\phi}(x) ds = \widehat{\bar{u}\chi_\bullet^2}(\phi), \text{ car } \bar{u}\chi_\bullet^2 \in \mathcal{H}(G)^X * \mathcal{H}(G)^X. \text{ Donc}$$

$$\int_Z f(\phi^*) d\mu(\phi) = \int_Z \widehat{\bar{u}\chi_\bullet^2}(\phi) d\mu(\phi) = \int_Z \widehat{\bar{u}\chi_\bullet^2}(\phi) d\mu(\phi) = \bar{u}\chi_\bullet^2(e) = u(e)$$

$= \int_Z f(\phi) d\mu(\phi)$. Or l'application $f \mapsto \theta(f)\chi_\bullet^2$ est un opérateur continu de $L^1(Z, d\mu)$, donc (ii) est démontré.

REMARQUE (à propos des hypergroupes). - Nous avons montré que l'espace Z des fonctions sphériques est un espace localement compact tel que l'ensemble de ses mesures bornées possède une structure d'algèbre et tel qu'il existe une

mesure invariante par les translations généralisées $R_{\sigma}(\phi)$ et $D_{\sigma}(\phi)$. Ainsi nous obtenons un espace vérifiant des propriétés très proches de celles d'un \ast -hypergroupe au sens de [3], ou d'un hypergroupe commutatif au sens de [20]. Mais en général, Z n'est ni un \ast -hypergroupe ni un hypergroupe commutatif, par exemple lorsque le groupe G n'est pas amenable ; nous précisons ce point plus loin.

(1.3.8) Jusqu'au paragraphe (1.3.10) inclus, nous supposons Z dénombrable à l'infini.

Cette hypothèse est réalisée par exemple si G est séparable.

Soit $\mathcal{C}_B(Z)$ l'ensemble des fonctions complexes continues et bornées sur Z .

LEMME 1. - Pour tous, $\nu, \nu' \in M^1(Z)$ et tout $g \in \mathcal{C}_B(Z)$ on a

$$\nu \ast_{\sigma} \nu'(g) = \int_Z \int_Z \delta_{\phi} \ast_{\sigma} \delta_{\psi}(g) d\nu(\phi) d\nu'(\psi)$$

Soient $\nu, \nu' \in M^1(Z)$ et soit $g \in \mathcal{C}_B(Z)$. D'après les hypothèses sur Z , il existe une suite g_n de $\mathcal{K}^{\infty}(Z)$ telle que $g = \lim_n g_n$ pour la topologie de convergence compacte sur $\mathcal{C}_B(Z)$ et telle que $\|g_n\|_{\infty} \leq \|g\|_{\infty}$. On en déduit que

$$\nu \ast_{\sigma} \nu'(g) = \int_Z g(\xi) d(\nu \ast_{\sigma} \nu')(\xi) = \lim_n \int_Z g_n(\xi) d(\nu \ast_{\sigma} \nu')(\xi)$$

$$= \lim_n \int_Z \int_Z \delta_{\phi\sigma} * \delta_{\psi}(g_n) \, d\nu(\phi) d\nu'(\psi) .$$

Or $\lim_n \delta_{\phi\sigma} * \delta_{\psi}(g_n) = \delta_{\phi\sigma} * \delta_{\psi}(g)$ et $|\delta_{\phi\sigma} * \delta_{\psi}(g_n)| \leq \|g_n\|_{\infty} \leq \|g\|_{\infty}$.

Le théorème de Lebesgue permet donc d'affirmer le résultat.

LEMME 2. - Pour tout $g \in \mathcal{C}_B(Z)$, la fonction $(\phi, \psi) \mapsto \delta_{\phi\sigma} * \delta_{\psi}(g)$ est séparément continue sur $Z \times Z$.

Ce lemme, indépendant du fait que Z soit dénombrable à l'infini, est un cas particulier du théorème III. 5 1°) de [20].

PROPOSITION. - Pour tout $g \in \mathcal{C}_B(Z)$, et pour tout $\phi \in Z$, la fonction $R_{\sigma}(\phi)[g]$ est presque partout égale à la fonction continue et bornée $\psi \mapsto \delta_{\phi\sigma} * \delta_{\psi}(g)$.

Il nous suffit de montrer que les fonctions $R_{\sigma}(\phi)[g]$ et $\psi \mapsto \delta_{\phi\sigma} * \delta_{\psi}(g)$ définissent la même forme linéaire sur $L^1(Z, d\mu)$. Soit donc $f \in A(G)^{\times} L^1(G)$, alors $\langle R_{\sigma}(\phi)[g], f \rangle = \langle g, D_{\sigma}(\phi)[f] \rangle = \langle g, \delta_{\phi\sigma} * f \rangle$; donc en appliquant le lemme 1 on a $\langle R_{\sigma}(\phi)[g], f \rangle = \int_Z \int_Z \delta_{\eta\sigma} * \delta_{\psi}(g) f(\psi) \delta_{\phi}(\eta) \, d\mu(\psi) = \int_Z \delta_{\phi\sigma} * \delta_{\psi}(g) f(\psi) \, d\mu(\psi)$.

Ainsi $\langle R_{\sigma}(\phi)[g], f \rangle = \langle \psi \mapsto \delta_{\phi\sigma} * \delta_{\psi}(g), f \rangle$.

(1.3.9) DEFINITION. - On appelle caractère de Z toute fonction complexe ϕ continue et bornée dans Z et qui vérifie

$R_{\sigma}(\phi)[\phi](\psi) = \phi(\phi) \phi(\psi)$ pour tout $\phi, \psi \in Z$, où $R_{\sigma}(\phi)[\phi](\psi)$ est définie par $R_{\sigma}(\phi)[\phi](\psi) = \delta_{\phi\sigma} * \delta_{\psi}(\phi) = \int_Z \phi(\xi) d\delta_{\phi\sigma} * \delta_{\psi}(\xi)$ (d'après 1.3.8).

Cette définition est due à Dunkl [3], à qui nous renvoyons pour les propriétés élémentaires. En particulier si ϕ est un caractère de Z , alors $\|\phi\|_\infty \leq 1$ et $\bar{\phi}$ est un caractère de Z .

Soit \hat{Z} l'ensemble des caractères de Z ; munissons \hat{Z} de la topologie de la convergence compacte. Soit \tilde{Z} l'espace topologique quotient de \hat{Z} par la relation d'équivalence " ϕ_1 et ϕ_2 sont égales dans $L^\infty(Z, d\mu)$ ".

(1.3.10). On suppose que $\chi = 1$ et $\sigma = 1$, de sorte que l'involution sur Z est l'application $\phi \mapsto \bar{\phi}$.

PROPOSITION. - (i) Pour qu'une fonction ϕ continue et bornée sur Z , appartienne à \tilde{Z} , il faut et il suffit que l'application de $L^1(Z, d\mu)$ dans \mathbb{C} , définie par $f \mapsto \int_Z \phi(\bar{\phi}) f(\phi) d\mu(\phi)$, soit un caractère de l'algèbre $L^1(Z, d\mu)$.
(ii) Les espaces \tilde{Z} , $K \backslash G / K$, $\mathfrak{X}(A(G)^{\mathfrak{h}})$ et $\mathfrak{X}(L^1(Z, d\mu))$ sont homéomorphes et le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 K \backslash G / K & \xrightarrow{U} & \mathfrak{X}(A(G)^{\mathfrak{h}}) \\
 \downarrow V & & \downarrow U' \\
 Z & \xrightarrow{V'} & \mathfrak{X}(L^1(Z, d\mu))
 \end{array}$$

$U : K \backslash G / K \rightarrow \mathfrak{X}(A(G)^{\mathfrak{h}})$ est définie par $U(\dot{x})(v) = v(\dot{x})$ où $\dot{x} \in K \backslash G / K$ et $v \in A(G)^{\mathfrak{h}}$;

$V : K \backslash G / K \rightarrow \tilde{Z}$ est définie par $V(\dot{x})(\phi) = \phi(\dot{x})$ pour tout $\phi \in Z$.

$U' : \mathfrak{X}(A(G)^{\mathfrak{h}}) \rightarrow \mathfrak{X}(L^1(Z, d\mu))$ est définie par $u(\chi) = \chi \circ \theta$ pour tout $\chi \in \mathfrak{X}(A(G)^{\mathfrak{h}})$.

$V' : \tilde{Z} \rightarrow \mathfrak{X}(L^1(Z, d\mu))$ est définie par $V'(\phi)(f) = \int_Z \phi(\phi) f(\phi) d\mu(\phi)$, où $\phi \in \tilde{Z}$ et $f \in L^1(Z, d\mu)$.

Soit $v \in A(G)^h$; la fonction v prend une valeur constante sur toute double classe $KxK = \dot{x}$, ce qui justifie la définition de U , et nous noterons abusivement $v(\dot{x})$ cette valeur. Pour tout $\dot{x} \in K \backslash G / K$ l'application $U(\dot{x}) : A(G)^h \rightarrow \mathbb{C}$ définie dans l'énoncé est évidemment un caractère de $A(G)^h$ et, comme $A(G)^h$ sépare les points de $K \backslash G / K$, car $A(G)$ sépare les compacts de G , (cf. [4], 3.2), l'application U est injective. Par conséquent, d'après [17] (3.2.4), elle induit un homéomorphisme de $K \backslash G / K$ sur $U(K \backslash G / K)$ et $U(K \backslash G / K)$ est fermé dans $X(A(G)^h)$. Il ne reste plus qu'à montrer que U est surjectif. Soit $\chi \in X(A(G)^h)$ et soit $I = \text{Ker}(\chi)$; soit I^* l'ensemble des $f \in A(G)$ tels que pour tout $g \in A(G)$, on ait $(fg)^h \in I$, c'est un idéal fermé de $A(G)$. On a $I^* \cap A(G)^h = I$ car $I^* \cap A(G)^h$ est un idéal fermé de $A(G)^h$ dont on voit facilement qu'il contient I et n'est pas identique à $A(G)$; on en déduit que I^* est un idéal propre de $A(G)$, par conséquent (cf. [4], 3.38), il existe $a \in G$ tel que, pour tout $f \in I^*$, on ait $f(a) = 0$; donc $\text{Ker}(\chi) \subset \text{Ker}(\dot{a})$ et ainsi $\chi = U(\dot{a})$.

U' est un homéomorphisme de $X(A(G)^h)$ sur $X(L^1(Z, d\mu))$ car θ est un isomorphisme isométrique de l'algèbre $L^1(Z, d\mu)$ sur l'algèbre $A(G)^h$ d'après (1.2.10).

Montrer que V est une application continue de $K \backslash G / K$ dans \tilde{Z} , revient à montrer que l'application V_1 , définie par $V_1(\dot{x})(\phi) = \phi(\dot{x})$ pour tout $x \in K \backslash G / K$ et pour tout $\phi \in Z$, est continue de $K \backslash G / K$ dans \hat{Z} . Montrons d'abord que $V_1(\dot{x})$ est un élément de \hat{Z} : comme l'application $\phi \mapsto \phi(\dot{x})$ est continue sur Z et comme $|\phi(\dot{x})| \leq 1$ pour tout $\phi \in Z$, alors $V_1(\dot{x})$ est une fonction continue et bornée sur Z . D'autre part, on a $R(\phi)[V_1(\dot{x})](\psi) = \langle \delta_\phi * \delta_\psi, V_1(\dot{x}) \rangle = \int_Z V_1(\dot{x})(\xi) d(\delta_\phi * \delta_\psi)$
 $= \int_Z \xi(x) d(\delta_\phi * \delta_\psi)(\xi) = \phi(x)\psi(x)$ d'après (1.2.7); ainsi $R(\phi)[V_1(\dot{x})](\psi) = V_1(\dot{x})(\phi) V_1(\dot{x})(\psi)$; donc $V_1(\dot{x}) \in \hat{Z}$; ainsi $V(\dot{x}) \in \tilde{Z}$. Pour montrer que V_1 est continue, il suffit de montrer que si x tend vers x_0 dans G , alors $V_1(\dot{x})$ tend vers $V_1(\dot{x}_0)$ uniformément sur tout compact M de Z , c'est-à-dire que $\phi(x)$ tend

vers $\phi(x_0)$ uniformément par rapport à $\phi \in M$. Or les fonctions $x \mapsto \phi(x)$, où $\phi \in M$ sont équi continues d'après le théorème d'Ascoli. Ainsi V_1 est continue et par suite V .

Pour tout $\Phi \in \tilde{Z}$, $V'(\Phi)$ est par définition une forme linéaire sur $L^1(Z, d\mu)$. Montrons que $V'(\Phi)$ est multiplicative : soient $f, g \in L^1(Z, d\mu)$ alors $V'(\Phi)(f * g) = \langle f * g, \Phi \rangle$, ainsi, d'après (1.3.8), lemme 1, on a

$$V'(\Phi)(f * g) = \int_Z \int_Z \delta_\phi * \delta_\psi(\Phi) f(\phi) d\mu(\phi) g(\psi) d\mu(\psi) \text{ et, par définition de } \Phi,$$

$$\text{on a } V'(\Phi)(f * g) = \int_Z \int_Z \Phi(\phi) \Phi(\psi) f(\phi) d\mu(\phi) g(\psi) d\mu(\psi) = \langle f, \Phi \rangle \langle g, \Phi \rangle =$$

$V'(\Phi)(f) V'(\Phi)(g)$. V' est donc une application bien définie qui est injective car $\tilde{Z} \subset L^\infty(Z, d\mu)$. Le fait que V' est continue s'établit facilement.

Pour montrer que le diagramme est commutatif, il suffit de montrer que, pour tout $f \in L^1(Z, d\mu)$ et pour tout $\dot{x} \in K \backslash G / K$, on a $U' \circ U(\dot{x})(f) = V' \circ V(\dot{x})(f)$; or, $U' \circ U(\dot{x})(f) = U(\dot{x})(\theta(f)) = \theta(f)(x) = \int_Z f(\phi) \phi(x) d\mu(\phi)$ et d'autre part,

$$V' \circ V(\dot{x})(f) = \int_Z V(\dot{x})(\phi) f(\phi) d\mu(\phi) = \int_Z \phi(x) f(\phi) d\mu(\phi).$$

Le diagramme étant commutatif, $V' \circ V = U' \circ U$ est une bijection, donc V est injective et V' surjective. Ainsi V' est une bijection continue donc V'^{-1} est ouverte. Il en résulte que $V = V'^{-1} \circ U' \circ U$ est une bijection ouverte donc un homéomorphisme puisque V est continue.

La proposition est ainsi complètement établie.

(1.3.11) Sur le support de la mesure de Plancherel.

Soit ρ^χ la représentation de $C^*(G)^\chi$ obtenue en restreignant la représentation régulière ρ de $C^*(G)$ à $C^*(G)^\chi$, puis en prenant la sous-représentation définie par le sous-espace stable $L^2(G)^\chi$. On a :

$C^*(G)^\chi \xrightarrow{\rho^\chi} \mathfrak{L}(L^2(G)^\chi)$, soit $C^*_{\rho^\chi}(G) = \rho^\chi(C^*(G)^\chi)$; ainsi le spectre de $C^*_{\rho^\chi}(G)$ s'identifie à un fermé de $Z = \mathfrak{X}(C^*(G)^\chi)$. D'autre part, soit Z_μ le support de la mesure de Plancherel sur Z ; d'après le théorème de Plancherel-Godement (cf. [6]), Z_μ est l'ensemble des $\phi \in Z$ tels que $|\hat{f}(\phi)| \leq |||\rho^\chi(f)|||$ pour tout $f \in L^1(G)^\chi$; ainsi en munissant Z_μ de la topologie induite par celle de Z , on peut montrer la proposition suivante

PROPOSITION. - Z_μ s'identifie topologiquement à $\mathfrak{X}(C^*_{\rho^\chi}(G))$.

Soit $\phi \in \mathfrak{X}(C^*_{\rho^\chi}(G))$; pour $f \in L^1(G)^\chi$ on a $|\hat{f}(\phi)| \leq |||\rho^\chi(f)|||$ donc $\phi \in Z_\mu$. Inversement soit $\phi \in Z_\mu$ alors $|\hat{f}(\phi)| \leq |||\rho^\chi(f)|||$ pour tout $f \in L^1(G)^\chi$ donc ϕ définit un caractère de $L^1(G)^\chi$ donc un caractère de $\rho^\chi(L^1(G)^\chi)$ qui se prolonge en un caractère de $C^*_{\rho^\chi}(G)$.

REMARQUE. - Lorsque G est un groupe métrisable et séparable, ce résultat est une conséquence du théorème (15.9.2) des "Éléments d'analyse", tome 2, de J. Dieudonné. (théorème qui reste valable sans ces hypothèses sur G).

Soit $\rho_{K,\chi}$ la représentation induite sur G par la représentation χ (de dimension 1) de K . Soit $C^*_{\rho_{K,\chi}}(C^*(G)^\chi)$. Les algèbres stellaires $C^*_{\rho_{K,\chi}}(G)^\chi$ et $C^*_{\rho^\chi}(G)$ sont isométriques. En effet, l'espace de la représentation $\rho_{K,\chi}$ est $L^2(G) \otimes \epsilon_\chi$, ainsi, pour tout $f \in L^1(G)^\chi$, l'opérateur $\rho^\chi(f)$ se déduit de $\rho_{K,\chi}(f)$ par restriction et en utilisant le fait que si $f \in L^1(G)^\chi$ et $g \in L^2(G) \otimes \epsilon_\chi$,

alors $f * g = f * g^\chi$; ainsi, pour tout $f \in L^1(G)^\chi$ on a $|||\rho^\chi(f)||| = |||\rho_{K,\chi}(f)|||$.

Donc par prolongement, $C_{\rho_{K,\chi}}^*(G)^\chi$ est isométrique à $C_{\rho^\chi}^*(G)$.

Avec les notations de [4], soit $B_{\rho_{K,\chi}}$ le sous-espace de $B(G)$ dual de $\rho_{K,\chi}(C^*(G))$ et soit $B_{\rho_{K,\chi}}(G)^\chi$ celui formé des $u \in B_{\rho_{K,\chi}}(G)$ tels que $u^\chi = u$; alors d'après le lemme (1.1.10), $B_{\rho_{K,\chi}}(G)^\chi$ est le dual de $C_{\rho_{K,\chi}}^*(G)$. Ainsi, nous obtenons le corollaire suivant.

COROLLAIRE 1. - *La transformation de Fourier se prolonge d'une part en un isomorphisme de l'algèbre stellaire $C_{\rho_{K,\chi}}^*(G)^\chi$ sur l'algèbre $\mathfrak{X}^\infty(Z_\mu)$ et, d'autre part, en un isomorphisme isométrique d'espaces de Banach de $B_{\rho_{K,\chi}}(G)^\chi$ sur $M^1(Z_\mu)$.*

REMARQUE. - En conséquence, $M^1(Z_\mu)$ est une sous-algèbre de $M^1(Z)$ et $L^1(Z, d\mu)$ est un idéal de $M^1(Z_\mu)$ lorsque $\chi = 1$.

Soit ρ la représentation régulière gauche de G ; soit $C_\rho^*(G)^\chi$ la C^* -algèbre $\rho(C^*(G)^\chi)$ et soit $B_\rho(G)^\chi$ l'ensemble des éléments $u \in B_\rho(G)$ tels que $u^\chi = u$.

COROLLAIRE 2. - *Les espaces $B_{\rho_{K,\chi}}(G)^\chi$ et $B_\rho(G)^\chi$ sont égaux, les algèbres stellaires $C_{\rho_{K,\chi}}^*(G)^\chi$ et $C_\rho^*(G)^\chi$ sont isométriques et Z_μ s'identifie au spectre de $C_\rho^*(G)^\chi$.*

Montrons la première assertion ; les deux autres en découlent, $B_\rho(G)^\chi$ engendré algébriquement par $P_\rho(G)^\chi$, c'est-à-dire par les limites **uniformes** sur tout compact de G d'éléments appartenant à $P(G)^\chi \cap \mathcal{K}(G)$. Soit $u \in P(G)^\chi \cap \mathcal{K}(G)$, alors $u = f * g$ avec $f, g \in L^2(G)^\chi$ d'après (1.2.10), donc $u \in P_{\rho_{K,\chi}}(G)^\chi \cap \mathcal{K}(G)$.

Comme l'application $u \mapsto \varepsilon_\chi * u$ est continue dans $B(G)$ (muni de la topologie de la convergence compacte) puisque ε_χ est une mesure bornée à support **compact** on a $P_{\rho_{K,\chi}}(G)^\chi = P_\rho(G)^\chi$. Ainsi $B_{\rho_{K,\chi}}(G)^\chi = B_\rho(G)^\chi$.

Ainsi, lorsque $\phi \in Z_\mu$, la représentation unitaire irréductible π_ϕ **associée** à ϕ est dans le dual réduit de G . Précisons ce point lorsque $\chi = 1$.

(1.3.12) PROPOSITION. - Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) G est amenable ;
- (ii) $C^*_\rho(G)^\natural = C^*(G)^\natural$;
- (iii) $Z = Z_\mu$;
- (iv) $1 \in Z_\mu$ (où 1 désigne la fonction sphérique triviale) ;
- (v) il existe $\phi \in Z_\mu$ tel que $1 \in \text{Supp}(\delta_\phi * \delta_{\bar{\phi}}^-)$.

Par définition de l'amenabilité de G (par exemple $C^*(G) = C^*_\rho(G)$, ou encore $1 \in B_\rho(G)$ et d'après (1.3.11) les conditions (i), (ii) et (iii) sont équivalentes. D'autre part, on a (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (v). Montrons alors que (v) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (i).

(v) \Rightarrow (iv). Soit $\phi \in Z_\mu$ tel que $1 \in \text{Supp}(\delta_\phi * \delta_{\bar{\phi}}^-)$, ceci signifie que pour $f \in \mathcal{K}(Z)$ tel que $f \geq 0$ et $f(1) > 0$, $\int_Z f(\xi) d(\delta_\phi * \delta_{\bar{\phi}}^-)(\xi) = R(\bar{\phi})[f](\phi) > 0$; pour un tel f , on a $\int_Z R(\bar{\phi})[f](\xi) d\mu(\xi) > 0$ (car $\phi \in Z_\mu$) ou $\int_Z f(\xi) d\mu(\xi) > 0$, par invariance de la mesure de Plancherel ; mais ceci veut dire exactement que $1 \in Z_\mu$.

(iv) \Rightarrow (i) : si $1 \in Z_\mu$ alors $|\int_G f(x) dx| \leq \|\rho(f)\|$ pour tout $f \in L^1(G)^\natural$, ainsi $1 \in B_\rho(G)^\natural$ et donc $1 \in B_\rho(G)$ ce qui signifie que G est amenable.

REMARQUE 1. - Si Z est un $*$ -hypergroupe [3] ou si Z est un hypergroupe commutatif [20] (ce qui est réalisé par exemple si G est compact), on a la propriété suivante : pour tout $\phi \in Z$, on a $1 \in \text{Supp}(\delta_\phi * \delta_{\bar{\phi}})$, ce qui signifie, en particulier, que G est amenable.

REMARQUE 2. - Soit $\phi \in Z$. Dire que $1 \in \text{Supp}(\delta_\phi * \delta_{\bar{\phi}})$ équivaut à dire que la représentation triviale de G est faiblement contenue dans la représentation $\pi_{\bar{\phi}} \otimes \pi_\phi$ (ceci se montre à partir du théorème de Plancherel-Godement). Par suite, si π_ϕ est de dimension finie, on a $1 \in \text{Supp}(\delta_\phi * \delta_{\bar{\phi}})$ (cf. [2]) Si pour tout $\phi \in Z$, on a $\dim(\pi_\phi) < \infty$, alors G est amenable et les assertions de la proposition sont équivalentes à la suivante :

(vi) pour tout $\phi \in Z$, on a $1 \in \text{Supp}(\delta_\phi * \delta_{\bar{\phi}})$.

Les remarques 1 et 2 conduisent à la conjecture suivante :

Pour que G soit amenable, il faut et il suffit que, pour tout $\phi \in Z$, on ait $1 \in \text{Supp}(\delta_\phi * \delta_{\bar{\phi}})$.

2. ANALYSE HARMONIQUE CENTRALE.

(2.1) *Rappels et propriétés élémentaires.*

(2.2.1) Dans ce qui suit, on désigne par G un groupe localement compact. On a les définitions suivantes.

(i) $G \in [\text{IN}]$ si G possède un voisinage de l'unité compact et invariant par le groupe $I(G)$ des automorphismes intérieurs de G ,

(ii) $G \in [\text{SIN}]$ si G possède un système fondamental de voisinages de l'unité invariants par $I(G)$.

(iii) $G \in [\text{FC}]$ si toutes les classes d'éléments conjugués dans G sont relativement compactes.

(iv) $G \in [\text{FIA}]$ si $I(G)$ est relativement compact dans le groupe topologique $\text{Aut}(G)$. On note I l'adhérence de $I(G)$ dans $\text{Aut}(G)$.

(v) $G \in [\text{MOORE}]$ si toutes les représentations unitaires irréductibles de G sont de dimension finie.

On a les relations suivantes entre ces différentes classes de groupes (avec abus de notations) : $[\text{FIA}] = [\text{FC}] \cap [\text{SIN}] \subset [\text{FC}] \subset [\text{IN}]$ et $[\text{MOORE}] \subset [\text{SIN}] \subset [\text{IN}]$. De plus, si $G \in [\text{IN}]$, G est unimodulaire. (cf. [8] et [18]).

(2.1.2) Soit G un groupe localement compact *unimodulaire*. Désignons par F l'un des espaces $\mathcal{X}(G)$, $\mathcal{X}^\alpha(G)$, $\mathcal{C}(G)$, $L^p(G)$, $P(G)$, $B(G)$ ou $A(G)$. On note F^* l'ensemble des $f \in F$ tels que pour tout $\alpha \in I(G)$, on ait $f \circ \alpha = f$ presque partout. Donc F^* est l'ensemble des éléments centraux de F . On note $C^*(G)^{\#}$ l'adhérence de $L^1(G)^{\#}$ dans $C^*(G)$.

Soit $P_1(G)^*$ l'ensemble des $f \in P(G)^*$ tels que $f(e) \leq 1$ et soit $E(G)$ l'ensemble des points extrémaux non nuls de $P_1(G)^*$. On munit $E(G)$ de la topologie de la convergence compacte sur G . Soit \hat{G} l'ensemble des classes de représentations unitaires irréductibles de G . Pour $G \in [\text{MOORE}]$, soit $\mathcal{X}(G)$ l'ensemble des caractères normalisés de G ; alors $\mathcal{X}(G)$ est homéomorphe à $E(G)$ pour la topologie sur $\mathcal{X}(G)$ transportée par la bijection canonique entre $\mathcal{X}(G)$ et \hat{G} .

(2.1.3) Soit $G \in [\text{FIA}]$ et soit $d\alpha$ la mesure de Haar normalisée sur I . Pour toute fonction f continue sur G , soit $f^{\#}$ définie pour tout $x \in G$ par $f^{\#}(x) = \int f(\alpha(x)) d\alpha$. L'application $f \mapsto f^{\#}$ est définie par prolongement sur L^p , pour $1 \leq p < \infty$.

PROPOSITION. - (i) Soit G un groupe localement compact unimodulaire, alors $L^1(G)^{\#}$ (respectivement $\mathcal{X}(G)^{\#}$) est le centre de l'algèbre $L^1(G)$ (respectivement $\mathcal{X}(G)$).

(ii) Soit $G \in [\text{FIA}]$; alors $f \mapsto f^{\#}$ est un projecteur de $L^1(G)$ (resp. $\mathcal{X}(G), L^2(G)$) sur $L^1(G)^{\#}$ (resp. $\mathcal{X}(G)^{\#}, L^2(G)^{\#}$) tel que $(f^{\#})^{\#} = f^{\#}$ pour tout $f, g \in L^1(G)$. De plus, cette application se prolonge en un projecteur de $C^*(G)$ sur $C^*(G)^{\#}$ possédant les mêmes propriétés.

Ce sont les propositions (1.1) à (1.5) de [15] .

(2.1.4) Pour tout $\phi \in P(G)^{\#}$ tel que $\phi(e) = 1$, soit $\phi(f) = \int_G f(x)\overline{\phi(x)}dx$, défini pour tout $f \in L^1(G)$.

PROPOSITION. - Soit $G \in [FLA]$ les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\phi \in E(G)$;
- (ii) $\phi(x)\phi(y) = \int_I \phi(\alpha(x)y)d\alpha$ pour tout $x, y \in G$;
- (iii) $\phi(f * g) = \phi(f)\phi(g)$ pour tout $f, g \in L^1(G)^{\#}$.

C'est la proposition (4.4) de [15] .

(2.1.5) Soit $\mathfrak{X}(L^1(G)^{\#})$ (respectivement $\mathfrak{X}(C^*(G)^{\#})$) l'ensemble des idéaux maximaux réguliers de $L^1(G)^{\#}$ (respectivement $C^*(G)^{\#}$), muni de la topologie spectrale usuelle.

PROPOSITION . - Soit $G \in [FC]$. Alors $E(G)$ est homéomorphe à $\mathfrak{X}(L^1(G)^{\#})$.

(resp. $\mathfrak{X}(C^*(G)^{\#})$) par l'application $\phi \mapsto \text{Ker}(\phi) = \{f \in L^1(G)^{\#} \mid \phi(f) = 0\}$ (resp. $\phi \mapsto \overline{\text{Ker}(\phi)}$). Ainsi $E(G)$ est un espace localement compact.

C'est la proposition (4.8) de [15] (cf. aussi [10]).

(2.1.6) Soit G un groupe localement compact unimodulaire. Pour tout $f \in L^1(G)^{\#}$, soit \hat{f} définie sur $E(G)$ par $\hat{f}(\phi) = \int_G f(x)\overline{\phi(x)}dx$ ($\phi \in E(G)$) . On appelle \hat{f} la transformée de Fourier de f et pour tous $f, g \in L^1(G)^{\#}$, on a $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$ et on a $\widehat{\hat{f}} = \tilde{f}$. De plus, si $G \in [FC]$, on a $\hat{f} \in \mathfrak{K}^{\infty}(E(G))$ et $\widehat{L^1(G)^{\#}}$ est partout dense dans $\mathfrak{K}^{\infty}(E(G))$. D'autre part, si $G \in [SIN]$, $f \mapsto \hat{f}$ est injective.

PROPOSITION (théorème de Plancherel). - Soit $G \in [FC]$. Il existe une unique mesure positive $d\mu$ sur $E(G)$, appelée mesure de Plancherel, telle que pour tout $f \in L^1(G)^* \cap P(G)$, on ait $\hat{f} \in L^1(E(G), d\mu)$ et

$$f(x) = \int_{E(G)} \hat{f}(\phi) \phi(x) d\mu(\phi) \text{ pour tout } x \in G; \text{ De plus, pour tout}$$

$f, g \in L^1(G)^* \cap L^2(G)$, on a

$$\int_G f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{E(G)} \hat{f}(\phi) \overline{\hat{g}(\phi)} d\mu(\phi).$$

Ce sont les propositions 4 et 5 de [10].

(2.1.7) PROPOSITION. - Soit G un groupe localement compact unimodulaire. Alors $B(G)^*$ est une sous-algèbre fermée de $B(G)$. Si $G \in [FIA]$, l'application $f \mapsto f^*$ est un projecteur continu de $B(G)$ sur $B(G)^*$ et $B(G)^*$ est le dual de $C^*(G)^*$.

Pour montrer cette proposition, il suffit de prouver que, lorsque $G \in [FIA]$, et lorsque $f \in B(G)$, on a $f^* \in B(G)$. Ainsi (cf. [4], 2.1.iii), il suffit de montrer que, pour tout $g \in \mathcal{K}(G)$ tel que $\|g\|_x \leq 1$ (où $\|g\|$ désigne la norme de g dans $C^*(G)$), on a $|\int_G g(x) f^*(x) dx| \leq \|f\|_{B(G)}$. Or

$\int g(x) f^*(x) dx = \int g^*(x) f(x) dx$. Ainsi en utilisant le fait que $f \mapsto f^*$ est un projecteur de $C^*(G)$, on a le résultat. Le fait que $B(G)^*$ soit le dual de $C^*(G)$ est une conséquence du lemme (1.1.10).

(2.2) Où l'analyse harmonique centrale devient un cas particulier de l'analyse sphérique.

Sauf mention explicite du contraire, on suppose dans ce paragraphe que $G \in [FIA]$.

(2.2.1) Soit $G \in [\text{FIA}]$; soit $G' = G \times_S I$ le produit semi-direct de G par I ,

Ainsi défini pour tous $(x, \alpha), (y, \beta) \in G \times I$, $(x, \alpha)(y, \beta) = (x\alpha(y), \alpha\beta)$. G est un sous-groupe distingué de G' et I est un sous-groupe compact de G' . De plus, $dx d$ est une mesure de Haar sur G' .

Soit $h : \mathcal{C}(G) \rightarrow \mathcal{C}(G')$ l'application $f \mapsto h(f)$, où $h(f)$ est défini par $h(f)(x, \alpha) = f(x)$ pour tout $(x, \alpha) \in G'$.

Si $f \in \mathcal{X}(G)$, on a $h(f) \in \mathcal{X}(G')$; si $f \in \mathcal{C}(G)^{\#}$ alors $h(f)$ est bi-invariante par rapport à I ; si $f \in P(G)$, on a $h(f) \in P(G')$; h est une application linéaire multiplicative de $\mathcal{C}(G)$ dans $\mathcal{C}(G')$. Soit F un espace de fonctions définies sur G' , soit F^{\natural} l'ensemble des fonctions de F biinvariantes par rapport à I .

(2.2.2) PROPOSITION. - Soit $G \in [\text{FIA}]$. Alors (cf. (2.2.1)),

(i) h est une application linéaire bijective, multiplicative pour le produit de convolution et le produit ordinaire de $\mathcal{X}(G)^{\#}$ sur $\mathcal{X}(G')^{\natural}$.

(ii) h se prolonge en un isomorphisme isométrique (d'algèbres de Banach) de $L^1(G)^{\#}$ sur $L^1(G')^{\natural}$, et en un isomorphisme isométrique (d'espaces hilbertiens) de $L^2(G)^{\#}$ sur $L^2(G')^{\natural}$.

(iii) h se prolonge en un isomorphisme (d'algèbres stellaires) de $C^*(G)^{\#}$ sur $C^*(G')^{\natural}$ et h est un isomorphisme isométrique (d'algèbres de Banach) de $B(G)^{\#}$ sur $B(G')^{\natural}$.

(i) est évident. Comme pour tout $f \in \mathcal{X}(G)^{\#}$, on a $\|f\|_1 = \|h(f)\|_1$ et $\|f\|_2 = \|h(f)\|_2$, (ii) est démontré.

D'après (ii), h se prolonge en un morphisme bijectif de $C^*(G)^{\#}$ sur $C^*(G')^{\natural}$: c'est donc une isométrie. Et ainsi d'après (2.1.7) et (1.1.10), h est une isométrie de $B(G)^{\#}$ sur $B(G')^{\natural}$.

REMARQUE. - L'algèbre $L^1(G)^\#$ étant commutative, $L^1(G')^\#$ est une algèbre commutative. On peut donc appliquer les résultats du premier chapitre. Dans la suite on note Z l'ensemble des fonctions sphériques (zonales) de type positif de G' par rapport à I et $d\mu'$ la mesure de Plancherel sur Z .

(2.2.3) COROLLAIRE. - Soit $G \in [\text{FIA}]$. Alors avec les notations de (2.2.1),

(i) h est un isomorphisme isométrique de $A(G)^\#$ sur $A(G')^\#$ et

$$A(G)^\# = L^2(G)^\# * L^2(G)^\#.$$

(ii) h est un homéomorphisme de $E(G)$ sur Z et $L^1(E(G), d\mu)$ est isométriquement isomorphe à $L^1(Z, d\mu')$.

(iii) $L^2(E(G), d\mu)$ est isomorphe à $L^2(Z, d\mu')$.

(i) découle immédiatement de (2.2.2) ((ii) et (iii)) et de (1.2.10), (ii).

D'autre part, h est une bijection de $E(G)$ sur Z d'après (1.2.2) et (2.1.2). Et h est un homéomorphisme de $E(G)$ sur Z d'après (2.2.2) (iii). En remarquant que, pour tout $f \in P(G) \cap L^1(G)^\#$, on a $h(f) \in P(G') \cap L^1(G')^\#$ et $\widehat{f}(\phi) = \widehat{h(f)}(h(\phi))$ pour tout $\phi \in E(G)$, on voit que $L^1(E(G), d\mu)$ s'identifie à $L^1(Z, d\mu')$ d'après (2.1.6) et (1.2.6). On en déduit (iii) par ces mêmes propositions (2.1.6) et (1.2.6).

REMARQUE. - Les propositions (2.2.2) et (2.2.3) montrent que l'analyse harmonique centrale sur un groupe $G \in [\text{FIA}]$ est un cas particulier de l'analyse harmonique sphérique. On obtient ainsi les résultats suivants.

(2.2.4) Soit $G \in [\text{FIA}]$ et soit $M^1(E(G))$ l'espace des mesures bornées sur $E(G)$. Pour tout $\nu \in M^1(E(G))$, soit $\theta(\nu)$ la fonction définie par

$$\theta(\nu)(x) = \int_{E(G)} \phi(x) d\nu(\phi) \quad (x \in G).$$

PROPOSITION. - La transformation de Fourier de $L^1(G)^*$ dans $\mathcal{K}^\infty(E(G))$ se prolonge en un isomorphisme de $C^*(G)^*$ sur $\mathcal{K}^\infty(E(G))$; θ en est la transposée ; ainsi θ est une isométrie de $M^1(E(G))$ sur $B(G)^*$.

Cette proposition découle de (2.2.2), (2.1.7) et (1.2.8).

(2.2.5) D'après (2.2.4), $M^1(E(G))$ est une algèbre par transport de structure ; pour ν et $\nu' \in M^1(E(G))$, on notera $\nu * \nu'$ le produit appelé *produit de convolution*. Pour ce produit, $L^1(E(G), d\mu)$ est un idéal fermé de $M^1(E(G))$.

Pour $\phi \in E(G)$, soit $R(\phi) : M^1(E(G)) \rightarrow M^1(E(G))$ l'application $\nu \rightarrow R(\phi)[\nu] = \theta^{-1}(\theta(\nu)\bar{\phi})$.

$R(\phi)$ est un opérateur continu de norme ≤ 1 de $M^1(E(G))$, qui laisse stable $L^1(E(G), d\mu)$. Pour tout $\phi \in E(G)$, on note δ_ϕ la mesure de Dirac au point ϕ .

PROPOSITION. - (i) Pour tous $\nu, \nu' \in M^1(E(G))$ et tout $f \in \mathcal{K}^\infty(E(G))$, on a

$$\begin{aligned} \nu * \nu'(f) &= \int_{E(G)} \int_{E(G)} R(\phi)[f](\psi) d\nu(\phi) d\nu'(\psi) = \\ &= \int_{E(G)} \int_{E(G)} \delta_\phi * \delta_\psi (f) d\nu(\phi) d\nu'(\psi). \end{aligned}$$

(ii) Pour tous $f, f' \in L^1(E(G), d\mu)$ et presque tout $\phi \in E(G)$, on a

$$f * f'(\phi) = \int_{E(G)} R(\bar{\psi})[f](\phi) f'(\psi) d\mu(\psi) = \int_{E(G)} \delta_\psi * f(\phi) f'(\psi) d\mu(\psi).$$

Ceci est une conséquence de (1.3.5).

(2.2.6) Soit $\mathcal{C}_B(E(G))$ l'espace des fonctions complexes continues et bornées sur $E(G)$. On suppose que $E(G)$ est dénombrable à l'infini.

Pour tout $\phi \in E(G)$, soit $R(\phi)$ l'opérateur défini sur $L^\infty(E(G))$ par dualité avec l'opérateur $R(\bar{\phi})$ défini sur $L^1(E(G), d\mu)$. Comme en (1.3.8) on montre que, pour tout $g \in \mathcal{E}_B(E(G))$, $R(\phi)[g]$ est presque partout égale à la fonction continue et bornée $\psi \mapsto \delta_\phi * \delta_\psi(g)$. On identifie ces fonctions.

Soit $\widehat{E(G)}$ l'ensemble des fonctions $\Phi \in \mathcal{E}_B(E(G))$ telles que $R(\phi)R(\psi)\Phi = \Phi(\psi)\Phi(\phi)$ pour tout $\phi, \psi \in E(G)$. On munit $\widehat{E(G)}$ de la topologie de la convergence compacte. Soit G/I l'espace des classes d'éléments conjugués de G , muni de la topologie quotient. Soient $X(L^1(E(G), d\mu))$ et $X(A(G)^*)$ les spectres des algèbres $L^1(E(G), d\mu)$ et $A(G)^*$, munis de leur topologie spectrale. Comme conséquence de (1.3.10) on obtient le résultat suivant.

(2.2.7) PROPOSITION. - *Les espaces $\widehat{E(G)}$, G/I , $X(A(G)^*)$ et $X(L^1(E(G), d\mu))$ sont homéomorphes entre eux par les applications canoniques.*

D'après (1.3.10), il suffit de montrer que le support de μ est $E(G)$ tout entier, Or ceci résulte d'après (1.3.12) du lemme suivant, démontré, dans 12, dont nous allons donner une autre démonstration.

LEMME. - *Soit $G \in [FC]$. Alors G est amenable.*

D'après le théorème de structure de G ([18], th. 3 D); il existe un sous-groupe de G compact, distingué K et tel que $G/K = V \rtimes D$, où V est commutatif et D est un groupe discret tel que $D \in [FC]$. D'après [8] (prop. 3.13) il existe un sous-groupe D_1 , périodique et distingué dans E , tel que D/D_1 soit commutatif. Ainsi G est amenable si D_1 est amenable en utilisant le fait que les groupes compacts et les groupes commutatifs sont aménables et le fait que si un sous-groupe distingué d'un groupe localement compact et le groupe quotient correspondant sont aménables, alors le groupe est amenable.

Montrons qu'un groupe G discret, périodique et appartenant à $[FC]$ est aménable.

D'après [8] (prop. 3.15), chaque élément de G appartient à un sous-groupe distingué et fini de G . Soit L l'ensemble des sous-groupes distingués et finis de G . Si G_1 et $G_2 \in L$, alors $G_1 G_2 = \{x_1 x_2 / x_1 \in G_1 \text{ et } x_2 \in G_2\} \in L$; par suite G est la réunion directe (au sens de [7]) des éléments de L . Comme tout groupe fini est ménéable, G est aménable (cf. [7] prop (1.2.7)).

Le lemme est ainsi démontré.

(2.2.8) PROPOSITION. - Soit $G \in [FC]$. Il existe un sous-groupe G_s de G compact, distingué, tel que $G/G_s \in [FIA]$, que $B(G)^{\#}$ soit isomorphe et isométrique à $B(G/G_s)^{\#}$ et que $E(G)$ soit homéomorphe à $E(G/G_s)$.

(i) Soit G_s l'intersection de tous les voisinages de l'élément neutre, invariants par les automorphismes intérieurs de G . D'après [8] (th. 2.5), G_s est un sous-groupe compact et distingué de G tel que $G/G_s \in [SIN]$ si $G \in [IN]$. Comme $G \in [FC]$, $G/G_s \in [FIA]$. D'autre part, d'après [10], on a $G_s = \{x \in G / \phi(x) = 1 \text{ pour tout } \phi \in E(G)\}$.

(ii) Soit $M^1(G)^{\#}$ le centre de l'algèbre $M^1(G)$; soit $\phi \in P(G)^{\#}$ tel que $\phi(e) = 1$, alors d'après [10], on a l'équivalence suivante :
 $\phi \in E(G) \iff \forall \mu \in M^1(G)^{\#}, \forall x \in G, \int_G \phi(xy) d\mu(y) = \phi(x) \int_G \phi(y) d\mu(y)$. Dans la démonstration de [12], le fait que G soit aménable est utilisé.

(iii) Soit $p : B(G) \rightarrow B(G/G_s)$ l'application $f \mapsto f^s$, où $f^s(\dot{x}) = \int_{G_s} f(sx) ds$ et ds est la mesure de Haar normalisée sur G_s . D'après [4], 2.26, p est un isomorphisme isométrique de $B(G)^s$ sur $B(G/G_s)$ où $B(G)^s$ est l'ensemble des éléments de $B(G)$ invariants par rapport à G_s .

(iv) D'après (ii), on a $E(G) \subset B(G)^S$ car $ds \in M^1(G)^*$; par suite, on a $P(G)^* \subset P(G)^S$. Soit $u \in B(G)^S$; les propriétés $u \in B(G)^*$ et $u^S \in B(G/G_s)^*$ sont équivalentes. Mais alors $E(G)$ et $(E(G/G_s))$ s'identifient par p , d'après (iii).

(v) Montrons que $B(G)^* \subset B(G)^S$. Tout d'abord, soit $u \in B(G)$; pour que $u \in B(G)^*$, il faut et il suffit que, pour tout $\alpha \in I(G)$ et tout $x \in G$, $u(\alpha(x)) = u(x)$; posons $u^\alpha = u \circ \alpha$. Si $u \in B(G)$, u s'écrit de manière unique $u = u_1^+ - u_1^- + i(u_2^+ - u_2^-)$, où $u_1^+, u_1^-, u_2^+, u_2^- \in P(G)$, avec $u_1^+ - u_1^- = \frac{u + \tilde{u}}{2}$ et $u_2 = \frac{u - \tilde{u}}{2i}$, $\|u_1\| = u_1^+(e) + u_1^-(e)$ et $\|u_2\| = u_2^+(e) + u_2^-(e)$. Soit $u \in B(G)^*$; pour tout $\alpha \in I(G)$, on a $u = u^\alpha = u_1^{+\alpha} - u_1^{-\alpha} + i(u_2^{+\alpha} - u_2^{-\alpha})$ et, par unicité, on a $u_1^{+\alpha} = u_1^+, u_2^{+\alpha} = u_2^+, u_1^{-\alpha} = u_1^-, u_2^{-\alpha} = u_2^-$ pour tout $\alpha \in I(G)$. Ainsi $u_1^+, u_1^-, u_2^+, u_2^-$ sont dans $P(G)^*$, donc dans $P(G)^S$; d'où $u \in B(G)^S$.

Donc, d'après (iii), p est un isomorphisme isométrique de $B(G)^*$ sur $B(G/G_s)^*$

En vertu de cette proposition, on peut étendre les résultats obtenus à tout groupe $G \in [FC]$. En particulier :

(2.2.9) PROPOSITION. - Soit $G \in [FC]$,

- (i) la transformation de Fourier s'étend en un isomorphisme de $C^*(G)^*$ sur $\mathcal{K}^\infty(E(G))$, de $B(G)^*$ sur $M^1(E(G))$ et de $A(G)^*$ sur $L^1(E(G), du)$.
- (ii) En conséquence, on a un produit de convolution sur $M^1(E(G))$ et sur $M^1(E(G), du)$ qui vérifie les propriétés énoncés en (2.2.5).

Cette proposition provient de (2.2.8), (2.2.4), (2.2.5), et (2.1.6).

(2.2.10) Remarques sur l'analyse harmonique centrale.

On sait (cf. [8] th. 2.6), que, pour que $G \in [SIN]$, il faut et il suffit qu'il existe une approximation de l'unité formée d'éléments de $P(G)^* \cap \mathcal{K}(G)$ et que, pour que $G \in [IN]$, il faut et il suffit que $P(G)^* \cap \mathcal{K}(G) \neq 0$.

Si $G \notin [\text{IN}]$, l'analyse harmonique centrale de G n'offre donc que peu d'intérêt. Si $G \in [\text{SIN}]$, il est possible d'espérer des résultats comparables à ceux obtenus pour $G \in [\text{FIA}]$. Examinons la classe $[\text{MOORE}]$.

D'après [2], on sait que, si $G \in [\text{MOORE}]$, \hat{G} est homéomorphe à $E(G)$, car G est le type I. D'autre part, comme G est amenable, on a une mesure de Plancherel μ sur \hat{G} , donc sur $E(G)$, de support égal à $E(G)$ et un théorème de Plancherel pour les fonctions centrales. Mais $E(G)$ est un espace localement quasi-compact. On montre (cf. [13], th. 5.2) que, si G vérifie le deuxième axiome de dénombrabilité, $E(G)$ n'est localement compact que si $G \in [\text{FC}]$. Donc, si $G \in [\text{MOORE}]$ et $G \notin [\text{FIA}]$ (exemple : $G = \mathbb{R} \times_s (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$), $E(G)$ n'est pas homéomorphe à $\mathcal{X}(C^*(G)^\#)$ et, par suite, la transformation de Fourier ne se prolonge pas en une isométrie de $C^*(G)^\#$ sur $\mathcal{K}^\infty(E(G))$.

REMARQUE. - Soit $G \in [\text{FIA}] \cap [\text{MOORE}]$. Alors $E(G)$ est homéomorphe à \hat{G} et $E(G)$ est un \ast -hypergroupe au sens de [3]. Par suite, d'après l'unicité (à une constante près) de la mesure invariante sur un \ast -hypergroupe [3], prop 3.2) la mesure de Plancherel est l'unique mesure "laissant invariant le produit de Kronecker" au sens de [23]. Ceci généralise le résultat de Tatsuuma [23] qui a établi cette propriété d'unicité pour les groupes compacts.

(2.2.11) Un exemple : L'algèbre de convolution du groupe des déplacements du plan.

Nous utilisons les notations et résultats donnés par Vilenkin [25].

Soit $G = \mathbb{M}(2)$ le groupe des déplacements du plan. G est produit semi-direct $G = NK$ du groupe $N = \mathbb{R}^2$ des translations du plan par le groupe $K = \mathbb{SO}(2, \mathbb{R})$ des rotations ; pour (x, α) et $(x', \alpha') \in G$, on a $(x, \alpha)(x', \alpha') = (x + \alpha(x'), \alpha + \alpha')$ où $\alpha(x') = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$, si on écrit $x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$ et si α et α' désignent les angles des rotations.

Le dual \hat{K} de K n'est autre que \mathbb{Z} et tout caractère $\chi_n \in \hat{K}$ se définit par $\chi_n(\alpha) = e^{-in\alpha}$. Le caractère χ_n se prolonge en un caractère de dimension un de G , noté encore χ_n et défini par $\chi_n(x, \alpha) = e^{-in\alpha}$. Toutes les autres représentations unitaires irréductibles de G peuvent s'exprimer sous la forme $(T_{ir}; L^2(U, d\theta))$ pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$, où $d\theta$ est la mesure de Haar normalisée sur U ; elles sont précisément définies par :

$$T_{ir}(x, \alpha) f(\theta) = e^{ir \|x\| \cos(\theta - \alpha)} f(\theta - \alpha).$$

Toutes les algèbres $L^1(G)^{\chi_n}$ sont commutatives; désignons par Z_n l'ensemble des fonctions sphériques de classe χ_n et de type positif. Soit J_0 la fonction de Bessel d'ordre zéro, ($J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \cos \theta} d\theta$).

Vilenkin [25] montre que $Z_0 = \{\phi_s : (x, \alpha) \mapsto J_0(s \|x\|) \mid x \in \mathbb{R}_+\}$. Or on a

$$L^1(G)^{\chi_n} = \chi_n L^1(G)^{\chi_0} = \chi_n L^1(G)^{\chi_0}; \text{ ainsi } Z_n = \{\phi_s : (x, \alpha) \mapsto e^{-in\alpha} J_0(s \|x\|) \mid s \in \mathbb{R}_+\}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, l'espace Z_n est homéomorphe à \mathbb{R}_+ et on

$$L^1(G)^{\chi_n} = \{f \in L^1(G) \mid f(x, \alpha) = \phi(x) e^{-in\alpha},$$

où $\phi \in L^1(\mathbb{R}_+, r dr)\}$.

Ainsi l'algèbre $L^1(G)^{\chi_n}$ s'identifie à l'algèbre $L^1(\mathbb{R}_+, r dr)$ munie du produit défini par :

$$f * g(t) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\sqrt{t^2 + r^2 + 2rt \cos \theta}) d\theta \right) g(r) r dr ;$$

ce produit s'écrit encore :

$$f * g(t) = \int_0^\infty \left(\frac{2}{\pi} \int_{|t-r|}^{t+r} \frac{sf(s) ds}{\sqrt{4t^2 r^2 - (s^2 - t^2 - r^2)^2}} \right) g(r) r dr.$$

Pour faciliter l'écriture, posons pour t et $r > 0$:

$$a(t,r)(s) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} (4t^2r^2 - (s^2 - t^2 - r^2)^2)^{-1/2} & \text{si } |t-r| < s < t+r, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Pour t et $r > 0$, on a $a(t,r) \in L^1(\mathbb{R}_+, s ds)$ et, ainsi,

$$(1) \quad f * g(t) = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty a(t,r)(s) f(s) s ds \right) g(r) r dr.$$

La transformation de Fourier, appelée dans ce cas *transformation de Bessel*, peut se définir comme il suit. Pour $f \in L^1(\mathbb{R}_+, r dr)$ et pour $\phi_t \in Z_n$, ($t \in \mathbb{R}_+$), on a $f(\phi_t) = \int_0^\infty f(r) J_0(tr) r dr$. En remarquant que, pour $f \in L^1(\mathbb{R}_+, r dr) \cap L^2(\mathbb{R}_+, r dr)$, on a $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}_+, r dr)$ et $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$, on en déduit que la mesure de Plancherel sur Z_n identifié à \mathbb{R}_+ est $d\mu(r) = r dr$. Par suite le produit de convolution sur Z_n est donné par la formule (1).

Soient ϕ_t et $\phi_s \in Z_n$; calculons $\delta_{\phi_t} * \delta_{\phi_s}$, que nous noterons $\delta_t * \delta_s$, pour tous $t, s \in \mathbb{R}_+$. D'après la formule de multiplication de la fonction de Bessel suivante :

$$J_0(t) J_0(s) = \frac{2}{\pi} \int_{|t-s|}^{t+s} \frac{J_0(r) r dr}{\sqrt{4t^2s^2 - (r^2 - t^2 - s^2)^2}} = \int_0^\infty a(t,s)(r) J_0(r) r dr,$$

On obtient :

$$\delta_t * \delta_s(f) = \int_0^\infty a(t,s)(r) f(r) r dr, \text{ pour tout } t, s \in \mathbb{R}_+ \text{ et tout } f \in \mathcal{K}^\infty(\mathbb{R}_+),$$

en écrivant que $\phi_t(x) \phi_s(x) = \int_0^\infty a(t,s)(r) \phi_r(x) r dr$.

Cette dernière formule signifie en outre que pour tous $t, s \in \mathbb{R}_+$,
 on a $\bar{\chi}_n \phi_t \phi_s \in A(G)^{\chi_n}$, car $a(t,s) \in L^1(\mathbb{R}_+, r dr)$, mais $\bar{\chi}_n \phi_t \phi_s \notin L^1(\mathbb{R}_+, r dr)$

Enfin $A(G)^{\chi_n}$ est l'image par la transformation de Bessel de $L^1(\mathbb{R}_+, r dr)$
 ou encore l'ensemble des $f * g$, exprimés par la formule (1), pour $f, g \in L^2(\mathbb{R}_+, r dr)$

Nous étudierons, dans un autre travail, les algèbres de convolution
 du groupe $SL(2, \mathbb{R})$, en utilisant les techniques et résultats de Vilenkin [26],
 Takahaski [22] et Pukansky [16].

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] G. ARSAC, *Sur l'espace de Banach engendrée par les coefficients d'une représentation unitaire*, thèse, Lyon, 1973.
- [2] J. DIXMIER, *Les C^* -algèbres et leurs représentations*, Gauthier-Villars, Paris, 1964.
- [3] C. DUNKL, *The measure algebra of a locally compact hypergroup*.
 Trans. Amer. Math. Soc., 179, (1973), p. 331-348.
- [4] P. EYMAR, *L'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact*,
 Bull. Soc. Math. France. 92 (1964), p. 181-236.
- [5] R. GANGOLLI, *On the Plancherel formula and the Paley-Wiener theorem*,
 Ann. of Math., 93 (1971), p. 150-165.
- [6] R. GODEMENT, *Introduction aux travaux de Selberg*, Séminaire Bourbaki,
 n° 144, 1957.
- [7] F. GREENLEAF, *Invariant means on topological groups and their applications*,
 Princeton, 1968.
- [8] S. GROSSER et M. MOSKOWITZ, *Compactness conditions in topological groups*,
 J. Reine Angew Math. 246, (1971), p. 1-40.
- [9] S. HELGASON, *Représentations of semi-simple Lie groups*, C.I.M.E. Rome
 1971.

- [10] E. KANIUTH et G. SCHLICHTING, *Zur harmonischen Analyse klassenkompakter Gruppen*, Invent. Math. 10 (1970) p. 332-345.
- [11] A. KLEPPNER et R. LIPSMAN, *The Plancherel formula for group extensions*, Ann. Sci. Ecole. Norm. Sup. 5 (1972) p. 459-516.
- [12] H. LEPTIN, *Zur harmonischen Analyse klassenkompakter Gruppen*, Invent. Math. 5 (1968) p. 249-254.
- [13] J. LIUKKONEN, *Dual spaces of groups with precompact conjugacy classes*, Trans. Amer. Math. Soc. 180 (1973) p. 85-108.
- [14] M. MIZONY, *Analyse harmonique sphérique*, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. A 278 (1974) p. 1995-1997.
- [15] R. MOSAK, *The L^1 and C^* algebras of $[FIA]_B$ groups and their representations*, Trans. Amer. Math. Soc. 163 (1972), p. 277-310.
- [16] L. PUKANSZKY, *On the Kronecker products of irreducible representations of the 2×2 real unimodular group*. Trans. Amer. Math. Soc. 100 (1961) p. 116-152.
- [17] C. RICKART, *General theory of Banach algebras*, Princeton, 1960.
- [18] L. ROBERTSON, *A note on the structure of Moore groups*, Bull. Amer. Math. Soc. 75 (1969) p. 594-598.
- [19] A. SILBERGER, Proc. Amer. Math. Soc. n° 21 (1969) p. 437-440.
- [20] R. SPECTOR, *Théorie des hypergroupes*, Orléans, 1973.
- [21] R. TAKAHASHI, *Über p-adische Kugelfunktionen ...* J. Math. Soc. Japan, 20 (1968) p. 350-364.
- [22] R. TAKAHASHI, *Sur les fonctions sphériques et la formule de Plancherel dans le groupe hyperbolique*, Japan Math. j. 31 (1961) p. 55-90.
- [23] N. TATSUUMA, *Uniqueness of the Plancherel measure*, Proc. Japan Acad. 47 (1971) p. 252-256.
- [24] G. VAN DIJK, *Spherical functions on $PGL(2)$* , Indag. Math. n° 31 (1969) p. 213-225.

- [25] N. Ja. VILENKIN, *Fonctions spéciales et théorie de la représentation des groupes*, Paris, Dunod. 1969.
- [26.] G. WARNER, *Harmonic analysis on semi-simple Lie groups*, T.1 et 2, New-York, Springer-Verlag 1972.

Michel MIZONY
Département de Mathématiques
Université Claude Bernard
43, bd du 11 novembre 1918
69621-VILLEURBANNE