PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

MARC ASSOUS

Caractérisation du type d'ordre des barrières de Nash-Williams

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1974, tome 11, fascicule 4
, p. 89-106

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1974__11_4_89_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1974 t. 11-4

CARACTERISATION DU TYPE D'ORDRE DES BARRIERES DE NASH-WILLIAMS

par Marc ASSOUS

INTRODUCTION.

Un ensemble ordonné $(X, \leqslant)$ est appelé *bel ordre* lorsqu'il satisfait à la condition suivante :
Pour toute application f de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers dans X, il existe un couple d'entiers (i,j) tel que $i < j$ et $f(i) \leqslant f(j)$.

En 1965, C. Nash-Williams introduit le *meilleur ordre*, notion intermédiaire entre celle de bon ordre et celle de bel ordre. Pour cela il définit certains ensembles de parties finies de $\mathbb{N}$, les *barrières*, et une relation entre les éléments d'une barrière, la *consécutivité*, notée $\vartriangleleft$. Un ensemble X est alors *meilleur ordonné* lorsque, pour toute application $f : B \to X$ d'une barrière quelconque B dans X, il existe un couple (s,t) d'éléments de B tels que $s \vartriangleleft t$ et $f(s) \leqslant f(t)$. Dans ce cadre, l'ensemble $\mathbb{N}$ est une barrière particulière pour laquelle la relation $\vartriangleleft$ coïncide avec l'ordre usuel $<$ sur $\mathbb{N}$. Ainsi tout ensemble meilleur ordonné est *a fortiori* bel ordonné. Notons cependant que, sur les autres barrières que $\mathbb{N}$, cette relation $\vartriangleleft$ n'est plus un ordre.

M. Pouzet a établi [3] que toute barrière munie de l'ordre lexicographique est un bon ordre. Il est par suite possible de parler de type d'ordre (au sens de chaînes bien ordonnées) des barrières.

Le but essentiel de cet article est de caractériser les différents types d'ordres des barrières. Il a été déjà prouvé [3] que, pour tout ordinal indécomposable ω^{β}, il existe une barrière de ce type et que les types des barrières inférieurs à ω^{ω} sont indécomposables, mais qu'il en existe de type non indécomposables au delà de ω^{ω}.

Nous établirons ici qu'au delà de ω^{ω} les types des barrières sont de la forme $\omega^{\beta}.n$ avec $\beta \geqslant \omega$ et n entier, et que, réciproquement, pour tout ordinal $\beta > \omega$ et tout entier n, il existe une barrière de type $\omega^{\beta}.n$.

I. BARRIERES. QUELQUES PROPRIETES ELEMENTAIRES.

I.1. Terminologie et notations.

I.1.1. Suites d'entiers.

Une *suite d'entiers* est une application à valeurs dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers et dont le domaine est soit un intervalle initial $[0,\dots,n[$ si elle est finie, soit $\mathbb{N}$ sinon.

Dans tout ce qui suit, les suites d'entiers considérées finies ou non, seront toujours *strictement croissantes* (c'est-à-dire $s(n) < s(n+1)$ pour tout n du domaine de s). On pourra alors identifier la suite s à son image Im(s). Par exemple [4,5,8] est la suite s définie par $s(o) = 4$ $s(1) = 5$, $s(2) = 8$.

Lorsque s est une suite finie, on note $s(o)$ son premier terme, $\lambda(s)$ son dernier terme et $\ell(s)$ sa *longueur* c'est-à-dire le nombre de termes de son image. Par exemple si $s = [4,5,8]$, $s(o) = 4$ $\lambda(s) = 8$ et $\ell(s) = 3$.

Soit P une partie de $\mathbb{N}$. On note A(P) l'ensemble des suites finies de P, et $A_\omega(P)$ l'ensemble des suites infinies de P.

Soit B une partie de $A(\mathbb{N})$. On appelle *base de* B, la réunion notée $\bar{B}$ des images des éléments de B. $\bar{B}$ est ainsi une partie de $\mathbb{N}$.

I.1.2. Opérations sur les suites.

Pour toute suite s, on note $_*s$ la suite $s - \{s(o)\}$. Par exemple si $s = [2,4,5,7]$, $_*s = [4,5,7]$.

Si s est une suite finie, t une suite quelconque telles que $\lambda(s) < t(o)$ on note s+t la suite dont l'image est la réunion des images de s et t. Par exemple si $s = [2,5,7]$ et $t = [9,11,13,15]$ $s+t = [2,5,7,9,11,13,15]$.

I.1.3. Comparaison des suites d'entiers.

Soit s une suite finie, t une suite quelconque.

On dit que t *débute par* s, ou que s *est un segment initial de* t, lorsque Im(s) est contenu dans Im(t) et que la restriction de t au domaine de s coïncide avec s. Notation $s \ll t$.

Exemple : $s = [1,2,5]$ $t = [1,2,5,7,8]$.

Cette relation est évidemment un ordre sur l'ensemble des suites finies.

On dit que t est *consécutive* à s lorsque t débute par $_*s$. Notation $s \triangleleft t$.

Exemple : $s = [1,3,4]$ $t = [3,4,9,10,12]$.

On définit enfin l'ordre lexicographique sur l'ensemble des suites par : $s \leqslant t$ lorsque $s \ll t$ ou lorsque $s(i) < t(i)$ pour le plus petit entier i tel que $s(i) \neq t(i)$

I.2. Barrières.

DEFINITION. - *Une* barrière *est une partie* B *de* A($\mathbb{N}$) *vérifiant les trois conditions suivantes :*

(B_1) *La base* $\bar{B}$ *de* B *est infinie ;*

(B_2) *Toute suite infinie de* $A_\omega(\bar{B})$ *débute par un élément de* B ;

(B_3) B *est libre pour l'inclusion c'est-à-dire que les images de deux éléments distincts de* B *sont incomparables pour l'inclusion.*

Exemples immédiats de barrières : l'ensemble $[\mathbb{N}]$ des suites de $\mathbb{N}$ de longueur 1 ; l'ensemble $[\mathbb{N}]^2$ des suites de $\mathbb{N}$ de longueur 2 ;plus généralement $[\mathbb{N}]^P$ des suites de $\mathbb{N}$ de longueur P.

Nous verrons plus loin des exemples de barrières dans lesquelles la longueur des éléments n'est pas bornée.

I.3. L'ordre lexicographique sur une barrière.

Nous reprenons ici un résultat essentiel donné en [3] .

PROPOSITION I.3. - *Toute barrière est bien ordonnée pour l'ordre lexicographique.*

Preuve. - Montrons que toute partie non vide C possède un plus petit élément. Soit c_0 le plus petit entier premier terme d'un élément s de C. Si $[c_0]$ appartient à C, c'est le plus petit élément de C et la proposition est démontrée. Sinon, soit c_1 le plus petit entier tel que $[c_0, c_1]$ soit le début d'un élément s de C. Si $[c_0, c_1]$ appartient à C, c'est le plus petit élément de C et la proposition est démontrée. Sinon on considère c_2 le plus petit entier tel que $[c_0, c_1, c_2]$ soit le début d'un élément s de C.

On construit de cette manière une suite $C^* = [c_0, c_1, c_2, \ldots,]$. Cette suite est nécessairement finie, sinon d'après la condition (B_2), il existerait un élément $[c_0, c_1, \ldots, c_p]$ dans B et, à cause de la condition (B_3), la suite $[c_0, c_1, \ldots, c_{p+1}]$ ne pourrait être le début d'un élément s de C. La suite C^* est donc finie et par construction c'est le plus petit élément de C.

REMARQUE. - Le bon ordre est une propriété tout à fait spéciale des barrières puisque $A(\mathbb{N})$ contenant une partie isomorphe à la chaîne Q des rationnels n'est pas bien ordonnée.

I.4. Décomposition d'une barrière.

Pour toute barrière B et tout élément s de $A(\bar{B})$ on note B_s l'ensemble des éléments de B qui débutent par s.

PROPOSITION I.4. [3] . - *Soient* B *une barrière et* s *un élément de* $A(\bar{B})$.
Si B_s *est fini non vide, alors* $B_s = \{s\}$. *Si* B_s *est infini, alors pour tout entier* k *de* $\bar{B}$ *tel que* $k > \lambda(s)$, *l'ensemble* $B_{s+[k]}$ *n'est pas vide et* B_s *est la somme lexicographique des* $B_{s+[k]}$ *pour* $k \in \bar{B}$.

Preuve. - Si B_s est fini, $\bar{B}_s$ l'est aussi et par suite $\bar{B} - \bar{B}_s$ est infini. Il existe donc une suite infinie t à valeurs dans $\bar{B} - \bar{B}_s$ telle que $\lambda(s) < t(s)$. Pour une telle suite t, il existe s' dans B tel que s+t débute par s'.

Comme B_s n'est pas vide, d'après la condition (B_3) on ne peut avoir $s' \ll s$. Donc s' débute par s. Par suite s' appartient à B_s et d'après le fait que $\mathrm{Int}(t) \subset \bar{B} - \bar{B}_s$ on a nécessairement s = s'. Donc s appartient à B et $B_s = \{s\}$.
Si B_s est infini, alors pour tout $k \in \bar{B}$ tel que $k > \lambda(s)$ on peut, par la condition (B_2) construire un élément s' de B appartenant aussi à $B_{s+[k]}$. Donc les $B_{s+[k]}$ ne sont pas vides et il est clair alors que B est la somme lexicographique des $B_{s+[k]}$ pour $k \in \bar{B}$, $k > \lambda(s)$.

I.5. Propriétés de la consécutivité sur une barrière.

I.5.1. Soient s et t deux éléments d'une barrière B tel que t soit consécutif à s. D'après la condition (B_3) il résulte immédiatement que $\ell(s) \leq \ell(t)$.

I.5.2. LEMME. - *Si* s *et* t *sont deux éléments de* B *tels que* $\lambda(s) < t(o)$, *alors il existe une suite finie* $s_o, s_1, \ldots, s_n$ *d'éléments de* B *telle que* $s = s_o \vartriangleleft s_1 \vartriangleleft \ldots \vartriangleleft s_n = t$.

Preuve. - On considère $s = [a_o, a_1, \ldots, a_n]$. Pour tout $k > a_n$ il existe s_1 dans B tel que s_1 débute par $[a_1, \ldots, a_n, k]$. En particulier si $k = t(o)$, en itérant on construit la suite cherchée.

I.5.3. Si $\lambda(s) < t(o)$, alors $\ell(s) \leq \ell(t)$.

Cela résulte immédiatement de ce qui précède.

II. ETUDE DES BARRIERES DE TYPE INFERIEUR A ω^ω.

Toute barrière étant bien ordonnée par l'ordre lexicographique, on étudie dans ce paragraphe et dans celui qui suit les différents types d'ordre des barrières. (au sens de chaînes bien ordonnées).
Pour toute barrière B on note $\tau(B)$ son type d'ordre.

Il est clair que pour tout entier p, la barrière $[\mathbb{N}]^p$ est de type ω^p. C'est donc un ordinal indécomposable. (Rappelons que α est dit indécomposable lorsque $\alpha = \beta + \gamma$ implique $\gamma = o$ ou $\gamma = \alpha$)

Nous allons établir dans la proposition qui suit une généralisation d de ce résultat, proposition du reste annoncée dans [3] .

PROPOSITION II.1. - *Toute barrière* B *de type strictement inférieur à* ω^ω *est de type indécomposable* ω^n, *où* n *désigne le maximum des longueurs des éléments de* B.

Preuve. - Supposons que B_n soit une barrière de type β, avec $\omega^n < \beta \leq \omega^{n+1}$. Alors tout élément s de B est de longueur au plus égale à n. Sinon soit $s = [a_o, a_1, \ldots, a_n]$ un élément de longueur n+1. D'après les conditions (B_2) et (B_3) sur les barrières, il existe, pour tout entier $k_o > a_n$, un élément t_o qui débute par $[a_1, \ldots, a_n, k_o]$. Il existe alors, pour tout entier $k_1 > k_o$, un élément t_1 de B qui débute par $(a_2, \ldots, a_n, k_o, k_1)$. En itérant, la construction, il en résulte que B contient des éléments de longueur au moins égale à n+1, où les n+1 premiers termes sont quelconques.

L'application qui à $[k_o; k_1, \ldots, k_n]$ associe le plus petit élément de B qui débute par $(k_o, k_1, \ldots, k_n)$ est une injection croissante. Ce qui prouve que B est au moins de type ω^{n+1}, ce qui est contradictoire. Donc tous les éléments de B sont de longueur au plus égale à n.
De plus, il existe des éléments de longueur n, sinon B serait contenu dans $[\mathbb{N}]^{n-1}$ et donc serait de type inférieur ou égal à ω^{n-1}.

Soit alors s le plus petit élément de B (pour l'ordre lexicographique) de longueur n.
D'après (I.5.3.), tous les éléments de $\sum_{j > \lambda(s)} B_{[j]}$ sont de longueur n.
Donc le type de $\sum_{j > \lambda(s)} B_{[j]}$ est ω^n.

Par ailleurs, chaque B_j pour $j \leq \lambda(s)$ est de type strictement plus petit que ω^n. Sinon il existerait dans $B_{[j]}$ des éléments de longueur au moins égale à n+1, ce qui est contradictoire avec le choix de s.
Comme $\sum_{j \leq \lambda(s)} B_{[j]}$ est une somme finie, son type est strictement plus petit que ω^n. Finalement le type de B, somme des types de $\sum_{j \leq \lambda(s)} B_{[j]}$ et de $\sum_{j > \lambda(s)} B_{[j]}$, est ω^n.

Q.E.D.

LEMME II.2. - *Toute barrière* B *de type strictement plus grand que* ω^n *ne peut contenir de sous-barrières de type inférieur ou égal à* ω^n.

Preuve. - Supposons qu'une telle sous-barrière B' existe. Soit ω^p son type d'ordre ($p \leq n$). La base de B' étant infinie, B' est cofinale dans B pour l'ordre lexicographique c'est-à-dire que tout élément s de B est majoré par un élément s de B est majoré par un élément s' de B'. Par suite pour tout s de B, il existe s' de B' tel que $\lambda(s) < s'(o)$. Mais d'après (I.5.3), il résulte que $\ell(s) \leq \ell(s')$.

B' étant de type ω, d'après la proposition précédente, $\ell(s') \leq p$, donc $\ell(s) \leq p$. Ainsi tout élément s de B est de longueur au plus égale à p ; donc le type de B est au plus ω^p , ce qui contredit l'hypothèse.

Il en résulte immédiatement le corollaire suivant (cité en [3]).

COROLLAIRE II.2. - *Toute sous-barrière d'une barrière de type inférieur ou égal à* ω^ω *est de même type.*

III. ETUDE DES BARRIERES DE TYPE SUPERIEUR A ω^ω.

Contrairement aux barrières de type inférieur à ω^ω, les types des barrières supérieures à ω^ω ne sont pas tous indécomposables. Nous avons cependant le résultat suivant :

PROPOSITION III. 1. - *Au-delà de* ω^ω , *les types des barrières sont tous de la forme* $\omega^\beta . n$, *où* β *désigne un ordinal quelconque et* n *un entier.*

Preuve. - Conformément à la décomposition de Cantor, le type de toute barrière est $\alpha_1 n_1+\ldots+\alpha_p n_p$, où les α_i sont des ordinaux indécomposables tels que $\alpha_1>\alpha_2>\ldots>\alpha_p$ et les n_i des entiers. Il existe alors un entier k et deux parties C et C' $(C\neq\emptyset)$ telles que $\sum_{i<k} B_{[i]}+C$ soit de type α_1 et $B_{[k]} = C+C'$.

Comme α_1 est indécomposable, nécessairement C est de type α_1. Par ailleurs, l'application de $B_{[k]}$ dans $\sum_{i>k} B_{[i]}$ qui à tout $s = [k,s(1),\ldots,s(n)]$ associe le plus petit élément t pour l'ordre lexicographique qui débute par $(s(1),\ldots,s(n))$ est une injection croissante. Donc le type de C est inférieur ou égal à $\alpha_2 n_2+\ldots+\alpha_p n_p$.

D'où $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 n_2+\ldots+\alpha_p n_p$.

Mais comme les α_i sont indécomposables, il existe alors i tel que $\alpha_1 \leqslant \alpha_i$; ce qui contredit $\alpha_1>\alpha_2>\ldots>\alpha_p$.

Il en résulte finalement que le type de B est nécessairement de la forme $\alpha_1.n_1$.

Q.E.D.

IV. CONSTRUCTION DE BARRIERES.

Dans ce paragraphe, nous allons donner une construction systématique de certaines barrières. Il en résultera notamment que pour tout ordinal $\beta \geqslant \omega$ et tout entier n, il existe une barrière de type $\omega^\beta.n$.

IV. 1. Concaténat [3].

DEFINITION. - *Etant données deux parties* P *et* Q *de* $A(\mathbb{N})$, *appelons* concaténat *de* P *et* Q *(noté* $Q*P$*) l'ensemble des suites* $s+t$ *pour* $s\in P$ *et* $t\in Q$ *lorsque cela est possible, c'est-à-dire pour* $\lambda(s) < t(o)$.

Lorsque P est réduit à un seul élément s, on note $Q * \{s\}$ ou même $Q * s$ ce concaténat.

PROPOSITION IV.1. - *B_1 et B_2 étant deux barrières de même base, $B_2 * B_1$ est encore une barrière de même base. En outre, si le type de B_1 est ω^{β_1} et celui de B_2 est ω^{β_2}, alors le type de $B_2 * B_1$ est $\omega^{\beta_2+\beta_1}$.*

Preuve. - (B_1). La base $\overline{B_2 * B_1}$ est infinie puisqu'on a évidemment, $\overline{B_2 * B_1} = \overline{B_1} = \overline{B_2}$.

(B_2). Soit s un élémant quelconque de $A_\omega(\overline{B_2 * B_1})$. Il faut prouver qu'il existe un élément t appartenant à B_2 B_1 tel que s débute par t. B_1 étant une barrière, il existe t_1 dans B_1 tel que s débute par t_1. Considérons alors $s - t_1$, élément de $A_\omega(\overline{B_2 * B_1})$ B_2 étant aussi une barrière il existe t_2 dans B_2 tel que $s-t_1$ débute par t_2. Il est clair alors que $t_1 + t_2$ appartient à $B_2 * B_1$ et que s débute par t_1+t_2.

Démontrons maintenant que $B_2 * B_1$ est libre pour l'inclusion. Soient s et t appartenant à $B_2 * B_1$ tels que $\mathrm{Im}(s) \subset \mathrm{Im}(t)$. On a $s = s_1+s_2$, $t = t_1+t_2$ avec des notations évidentes.

Supposons que $\mathrm{Im}(s_1) \cap \mathrm{Im}(t_2 \neq \emptyset$. Les suites étant strictement croissantes, on a nécessairement $\mathrm{Im}(s_2) \subset \mathrm{Im}(t_2)$. Donc $s_2 = t_2$ puisqu'ils appartiennent à la même barrière B_2, ce qui est absurde.

Donc $\mathrm{Im}(s_1) \cap \mathrm{Im}(t_2) = \emptyset$.

Finalement $\mathrm{Im}(s_1) \subset \mathrm{Im}(t_1)$ et $\mathrm{Im}(s_2) \subset \mathrm{Im}(t_2)$; donc $s_1=t_1$ et $s_2=t_2$, d'où $s = t$.

Démontrons enfin que $\tau(B_2 * B_1) = \omega^{\beta_2+\beta_1}$.

On a $B_2 * B_1 = \bigcup\limits_{s_1 \, B_1} (B_2 * s_1) = \sum\limits_{s_1 \in B_1} (B_2 * s_1)$.

Comme $\tau(B_2) = \omega^{\beta_2}$ est indécomposable, $\tau(B_2 * s_1) = \omega^{\beta_2}$, donc
$\tau(B_2 * B_1) = \omega^{\beta_2} \cdot \omega^{\beta_1} = \omega^{\beta_2+\beta_1}$. Q.D Q.E.D.

En particulier, il est clair que $[\mathbb{N}]^n = [\mathbb{N}]^{n-1} * [\mathbb{N}]$.

Par une récurrence immédiate, on retrouve le fait que le type de $[\mathbb{N}]^n$ est ω^n.

IV.2. Signalons un lemme que nous utiliserons par la suite et dont on trouvera une démonstration en [3].

LEMME IV.2. - *Soit* A *une partie de* $\mathbb{N}$ *ayant au moins deux éléments, et* f *une application croissante de* A *dans* A? *Si le cardinal de l'image de* f *est strictement inférieur au cardinal de* A, *alors il existe dans* A *deux éléments distincts* k *et* k' *tels que* f(k) = f(k') = k. *De plus, si* A *est infini, on peut trouver* k *strictement inférieur à* k'.

IV.3. Généralisation du concaténat [3] .

Par une récurrence immédiate, on définit le concaténat fini de barrières de même base $\mathbb{N}$. La proposition qui suit nous permettra de construire des barrières dont le type est supérieur à ω^ω.

PROPOSITION IV.3. - *Soit* $(B_i)_{i < \omega}$ *une famille de barrières de même base* N *et de types respectifs* ω^{β_i} *tels que* $(\beta_i)_i$ *soit une suite croissante de somme* β.
Alors l'ensemble $B = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} B_o * \dots * B_i * [i]$ *est une barrière de base* $\mathbb{N}$ *et de type* ω^β.

Preuve. - Il est clair que la base de B est $\mathbb{N}$. Toute suite infinie de $A_\omega(\bar{B})$ débute par un élément de B. Le raisonnement est identique à celui de la proposition IV.1.

Démontrons que B est libre poru l'inclusion.

Soient s et t deux éléments de B tels que $Im(s) \subset Im(t)$.

Raisonnons par l'absurde en supposant $s(o) \neq t(o)$. Posons $s(o)=i$ et $t(o)=j$. Comme $Im(s) \subset Im(t)$, nécessairement $j < i$. Alors s et t s'écrivent :

$$s = i + s_i + \dots + s_o \quad \text{avec} \quad s_k \in B_k \ ,$$

$$t = j + t_j + \dots + t_o \quad \text{avec} \quad t_k \in B_k .$$

Considérons maintenant l'application f de $\{o,1,\dots,i\}$ dans $\{o,1,\dots,j\}$ définie par :

$$f(k) = \text{Max} \ \{p \mid Im(s_k) \cap Im(t_p) \neq \emptyset\} \ .$$

f est parfaitement définie vu que Im(s) est contenu dans Im(t). De plus, il est clair que f est croissante.

En appliquant le lemme IV.2, il existe un entier p, $o \leq p \leq i$ tel que $f(p)=p$. On a alors $Im(s_p) \cap Im(t_p) \neq \emptyset$ et par suite $Im(s_p+\dots+s_o)$ est contenu dans $Im(t_p+\dots+t_o)$.

Comme $s_p+\dots+s_o$ et $t_p+\dots+t_o$ sont tous deux éléments de la barrière $B_o * \dots * B_p$, ils sont égaux et $s_p=t_p, \dots, s_o=t_o$.

Considérons alors l'alternative suivante :

Si $p = j$, les s_k pour $j \leq k \leq i$ ne seraient inclus dans aucun des t_k, $1 \leq k \leq j$ ce qui est absurde; si $p \neq j$, on recommence le raisonnement précédent pour les suites $[i] + s_i + \dots + s_{p+1}$

$$[j] + t_j + \dots + t_{p+1} .$$

La somme étant finie, on aboutit finalement à une contradiction.

Donc $s(o) = t(o)$. s et t sont alors éléments de la barrière $B_o * \ldots * B_k$; donc $s = t$.

Etudions le type de B. $(\beta_i)_{i<n}$ est une suite croissante et

$B_o * \ldots * B_i * [i]$ est de type ω^{β_i}. Comme $B = \sum_i B_o * \ldots * B_i * [i]$

son type est $\sum_i \omega^{\beta_i} = \omega^{\beta}$.

IV.4. Construction d'une barrière de type $\omega^{\beta}.n$, où β est un ordinal supérieur à ω et n un entier.

Nous avons construit des barrières de type ω^{β} où β est un ordinal limité.

Il est facile de voir qu'il existe des barrières de type $\omega^{\beta+p}$, où β est un ordinal limite et p un entier.

Pour cela il suffit de considérer une barrière A de type ω^{β} ($\omega\beta$ limite) et $B = A * [\mathbb{N}]^p$ qui est alors de type $\omega^{\beta+p}$.

Enfin, la proposition qui suit donne une construction de barrières de type $\omega^{\beta+p}.n$

PROPOSITION IV.4. - *Soit* $A = \sum_i A_o * \ldots * A_i * [i]$ *une barrière de type* ω^{β}, *où* $\beta = \sum_i \beta_i$ *avec* A_i *de type* ω^{β_i} , β_i *suite croissante*

$A' = \sum_i A_1 * \ldots * A_i * [i]$ *est aussi une barrière de type* ω^{β}.

Alors, pour tout entier $p \geqslant o$, *l'ensemble* B *défini par* $B_{[i]} = A^i * [\mathbb{N}]^p * [i]$ *pour* $o \leqslant i \leqslant n-2$ et $B_{[i]} = (A * [\mathbb{N}]^p)_{[i]}$ *pour* $i \geqslant n-1$ *est une barrière de type* $\omega^{\beta+p}.n$.

Preuve. - Il est clair que la base de B est $\mathbb{N}$ vu que A et A' sont de base $\mathbb{N}$. De plus, toute suite infinie débute par un élément de B puisque $A*[\mathbb{N}]^p$ et $A'*[\mathbb{N}]^p$ sont des barrières.

Démontrons que B est libre pour l'inclusion. Soient s et t appartenant à B tels que $Im(s) \subset Im(t)$. On a nécessairement $t(o) \leq s(o)$.

Deux cas se présentent :

Si $t(o) \geq n-1$, alors $s(o) \geq n-1$ et s et t appartiennent tous deux à la barrière $A*[\mathbb{N}]^p$, donc $s = t$;

Si $t(o) \leq n-2$:

soit $s(o) \leq n-2$ et s et t appartiennent tous deux à la barrière $\sum_i A'*[\mathbb{N}]^p*[i]$; donc $s = t$.

Soit $s(o) \geq n-1$, nous allons prouver que ceci n'est pas possible.

Puisque $t(o) \leq n-2$ t s'écrit $t = t(o)+t$, avec $t_1 \in A'*[\mathbb{N}]^p$.

Mais il existe alors t' dans $A*[\mathbb{N}]^p$ tel que t' débute par t_1.

Comme $Im(s)$ est contenu dans $Im(t)$ et comme $s(o) \neq t(o)$, nécessairement $Im(s) \subset Im(t) \subset Im(t')$. Or s et t' appartiennent tous deux à la barrière $A*[\mathbb{N}]^p$, donc $s = t'$. Ce qui est absurde car t_1 est un début strict de t'.

B est donc une barrière.

Il est alors clair que son type est $\omega^{\beta+p}.n$ vu que :

$$\tau(B_{[o]}) = \tau(B_{[1]}) = \dots = \tau(B_{[n-2]}) = \omega^{\beta+p} ,$$

$$\tau(\sum_{i \geq n-1} B_{[i]}) = \omega^{\beta+p} .$$

Ce qui achève la démonstration de la proposition.

IV.5. Exemple d'une barrière de type $\omega^{\omega+2}$ contenant une barrière de type $\omega^{\omega+1}$.

Nous avons vu (proposition II.2) que toute sous-barrière d'une barrière de type indécomposable inférieur à ω^ω est de même type. On peut se demander si ce résultat reste vrai au-delà de ω^ω. En fait il n'en est rien comme le montre le contre-exemple suivant .

Soit A la barrière "canonique" de type ω^ω : elle est constituée des suites s telles que $\ell(s) = s(o)+1$. La barrière $A' = A * [\mathbb{N}]$ est alors de type $\omega^{\omega+1}$.

On définit B de la manière suivante :

$$B_{[2n]} = \bigcup_i \{[2n\ ,\ 2i+1] + s' \mid \ell(s') = s'(o)\} \cup \bigcup_i (A'_{[2i]} * [2n]),$$

$$B_{[2n+1]} = A'_{[2n+1]}.$$

Remarquons de suite que $B_{[2n]}$ est de type $\omega^{\omega+1}$ et $B_{[2n+1]}$ de type $\omega^{\omega+1}$ et B_{2n+1} de type ω^ω.

Démonstrons que B est une barrière.

Il est clair que la base de B est $\mathbb{N}$, donc infinie et que toute suite infinie de $\mathbb{N}$ débute par un élément de B.

Montrons que B est libre pour l'inclusion.

Soient deux éléments s et t de B tels que $Im(s) \subset Im(t)$. On a nécessairement $t(o) \leq s(o)$.

<u>1er CAS.</u> $t(o) = s(o)$. Il est facile de voir que $s = t$. En effet, si $s(o)$ est impair s et t appartiennent tous deux à la barrière A' et donc $s = t$; si $s(o)$ est pair, posons $s(o) = 2n$; si s et t sont tous deux contenus dans $\bigcup_i A'_{[2i]} * [2\ n]$ ou dans l'ensemble des $[2n,2i+1] + s'$ avec $\ell(s') = s'(o)$, le résultat est immédiat à cause des longueurs.

Si $s = [2n,2i] + s'$ avec $\ell(s') = s'(o)$ et $t = [2n,2j+1] + t'$ avec $\ell(t') = t'(o)$, on a une contradiction :

$t'(o) \leq 2i < s'(o)$, donc $\ell(t') < \ell(s')$ qui contredit $Im(s') \subset Im(t')$.

Enfin, si $s = [2n,2i+1] + s'$ avec $\ell(s') = s'(o)$, $t = [2n,2j] + t'$ avec $\ell(t') = t'(o)$, on aboutit de la même façon à une contradiction.

2-ème CAS. $t(o) < s(o)$. Démon trons que cela est impossible.

Plusieurs cas sont à envisager.

2.1. - $t(o)$ est impair ; soit $t(o) = 2n+1$.

Si $s(o)$ est impair, alors s et t appartiennent à A' et donc $s=t$, absurde.

Si $s(o)$ est pair, $s(o) = 2p$.

On considère alors les cas $s(1)$ impair, et $s(1)$ pair.

Si $s(1)$ est impair, soit $s(1) = 2i+1$; $s = [2p,2i+1]+s'$, $\ell(s')=s'(o)$,

$t = [2n+1,t(1)] + t'$, $\ell(t')=t(1)$;

$t(1) \leq 2p < s'(o)$; donc $(t') < \ell(s')$, ce qui contredit $Im(s') \subset Im(t')$.

Si $s(1)$ est pair, soit $s(1) = 2i$; $s =[2p;2i]+s'$, $\ell(s')=2i$;

$t =[2n+1,t(1)] +t'$, $\ell(t')=t(1)$;

$t(1) \leq 2p < 2i$; donc $\ell(t') < \ell(s')$, ce qui contredit $Im(s') \subset Im(t')$.

2.2. - $t(o)$ est pair, soit $t(o) = 2n$.

On considère les cas $t(1)$ impair , $t(1)$ pair.

Si $t(1)$ est impair, $t(1) = 2i+1$ ou bien $s(o) = 2p+1$ est impair et on a :

$s = [2p+1,s(1)] +s'$, $\ell(s')=s(1)$,

$t = [2n,2i+1] +t'$, $\ell(t') = t'(o)$.

Alors $t'(o) \leq s(1)$, d'où $\ell(t') \leq \ell(s')$ ce qui contredit $Im(s(1)+s') \subset Im(t')$.

ou bien $s(o) = 2p$ est pair et deux cas se présentent :

$s(1)$ impair : $s(1) = 2j+1$ et $s = [2p,2j+1]+s'$ $\ell(s')=s'(o)$

$t = [2n,2i+1]+t'$ $\ell(t')=t'(o)$;

$t'(o) \leq 2n < s'(o)$ et $\ell(t') < \ell(s')$ qui contredit $Im(s') \subset Im(t')$;

$s(1)$ pair : $s(1) = 2j$ et $s = [2p,2j]+s'$, $\ell(s') = 2j$,

$t = [2n, 2i+1]+t'$, $\ell(t') = t'(o)$;

$t'(o) < 2j$, donc $\ell(t') < \ell(s')$, ce qui contredit $Im(s') \subset Im(t')$.

Si $t(1)$ est pair, soit $t(1)=2i$; ou bien $s(o)=2p+1$ est impair et on a

$s = [2p+1, s(1)] + s'$, $\ell(s') = s(1)$,
$t = [2n, 2i] + t'$, $\ell(t') = 2i$,

alors $\ell(t') < \ell(s')$, ce qui contredit $Im(s') \subset Im(t')$; ou bien $s(o) = 2p$ est pair et deux cas se présentent: $s(1)$ impair ; $s(1) = 2j+1$ et
$s = [2p, 2j+1] + s'$, $\ell(s') = s'(o)$,
$t = [2n, 2i] + t'$, $\ell(t') = 2i$,
$\ell(t') < s'(o) = \ell(s')$ qui contredit $Im(s') \subset Im(t')$,

$s(1)$ pair ; $s(1) = 2j$ et $s = [2p, 2j] + s'$, $\ell(s') = 2j$,
$t = [2n, 2i] + t'$, $\ell(t') = 2i$;

$2i < 2j$ donc $\ell(t') < \ell(s')$ qui contredit $Im(s') \subset Im(t')$.

Ce qui achève de prouver que B est libre pour l'inclusion. B est donc une barrière.

Il est clair que son type est $\omega^{\omega+2}$.

Considérons maintenant l'ensemble B' des suites de B dont la base est l'ensemble des entiers impairs.

B' est une sous-barrière de B de type $\omega^{\omega+1}$. Q.E.D.

Nous ignorons cependant s'il existe une barrière de type $\omega^{\omega+1}$ qui contient une sous-barrière de type ω^{ω}.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] E. COROMINAS, *Théorie ordinale*, Cours de D.E.A.,(Univ. Lyon-1).

[2] C. St. J.A. NASH-WILLIAMS, *On well quasi-ordering transfinite trees*, Proc. Camb. Philos. Soc. 64 (1965), p. 697-720.

[3] M. POUZET, *Sur les prémeilleurs ordres*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), t.22,2(1972), p. 1-20.

[4] M. POUZET , *Sur certaines algèbres préordonnées*, Thèse 3e cycle, Université de Lyon-1, (1970)

Manuscrit remis en avril 1974.

Marc-Roland ASSOUS
Département de Mathématiques
Université Claude Bernard - Lyon. 1
43, bd du 11 novembre 1918
69621 - VILLEURBANNE