J. F. PABION

L'axiomatisation de la syntaxe et le second theorem de Gödel

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1974, tome 11, fascicule 4
, p. 27-87
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1974__11_4_27_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1974 t.11-4

L'AXIOMATISATION DE LA SYNTAXE
ET LE SECOND THEOREM DE GÖDEL

par J.F. PABION

INTRODUCTION.

Ce travail est divisé en trois parties :

1. Etude d'une classe de systèmes formels (les Σ-systèmes),
2. Axiomatisation de la syntaxe au moyen de ces systèmes,
3. Application au second théorème de Gödel.

Il se démarque de l'exposé fondamental de Feferman [1] principalement de deux manières :

D'une part par l'abandon de la technique usuelle d'arithmétisation, au profit d'une axiomatisation autonome de la syntaxe. L'idée, certainement plus naturelle dans la perspective métamathématique, n'est pas nouvelle. - cf. la présentation informelle de P. Findlay [2] (dont on trouve un accompte également dans [5], et surtout [7]) - mais nous pensons qu'un développement systematique de celle-ci n'a pas été entrepris. Il se trouve qu'elle est parfaitement maniable.

D'autre part, l'un des chaînons cruciaux de la démonstration de Ferferman est changé de signe. Il s'agit du théorème 5.4, qui joue dans [1] le rôle de la "troisième condition de dérivabilité" d'Hilbert-Bernays [4].

Présenté dans [1] comme une propriété des "formules prénexes bornées", selon la terminologie de Feferman, nous en extrayons une propriété d'un caractère plus général, aisément interprétable, et dont les vertus de stabilité expliquent l'intervention au niveau des RE-formules. Ceci conduit à une forme symétrique du second théorème de Gödel, qui met en opposition les manifestations extensionnelles et intentionnelles d'un même caractère.

Les définitions de base relatives aux langages et aux théories du premier ordre ne sont que très partiellement explicitées, mais l'exposé est compatible avec n'importe quelle présentation standard, par exemple [6] , pour ne citer qu'une des plus achevées. Nous considérons exclusivement des théories dont l'ensemble des constantes est fini. Ce n'est pas essentiel, mais cela élimine quelques difficultés purement techniques (par contre il est essentiel d'envisager des cas où l'ensemble des *axiomes* est infini, le passage du fini à l'infini changeant ici profondément la nature du problème de leur expression formelle).

Dans une théorie $\mathcal{T}$, appelons *concept* une classe de formules à n variables libres $x_1,\ldots,x_n$ équivalentes modulo $\mathcal{T}$. Pratiquement, un concept est défini par la donnée d'un représentant, mais on n'étudie que les propriétés communes à celui-ci, aux autres représentants de sa classe. En général - mais non toujours - une formule est désignée par une lettre latine, et un concept par un lettre grecque. La convention est respectée toutes les fois qu'une distinction s'impose entre formules et concepts. Le signe $\equiv$ sert à introduire des concepts par définition.

1 - THEORIE FORMELLE DES OBJETS SYNTAXIQUES.

1.1. Σ-SYSTEMES.

Appelons *Σ-systèmes* une théorie du premier ordre comportant parmi ses constantes l'individu ξ, une opération unaire $< >$ et une opération binaire $*$, et dont les axiomes comprennent ceux qui sont énumérés ci-dessous.

Avant de les indiquer, posons quelques définitions :

$x \in \mathrm{Prem} \equiv \forall u\ v\ [x \neq u * v]$,

$x \prec y \equiv \exists u\ [x = y \vee y = x * u]$,

$x \succ y \equiv \exists u\ [x = y \vee y = u * x]$.

Les axiomes comportent les clôtures universelles des formules suivantes :

1. $x \neq \langle x \rangle$,

2. $\xi \neq \langle x \rangle$,

3. $x \in \mathrm{Prem} \leftrightarrow x = \xi \vee \exists\, y\, [x = \langle y \rangle]$,

4. $x * (y * z) = (x * y) * z$,

5. $\langle x \rangle = \langle y \rangle \rightarrow x = y$,

6. $x * u = y * u \rightarrow x = y$.

7. $u * x = u * y \rightarrow x = y$,

8. $x \in \mathrm{Prem} \rightarrow (x \prec u * v \rightarrow x \prec u)$,

9. $x \in \mathrm{Prem} \rightarrow (x \succ u * v \rightarrow x \succ v)$.

10. Schéma d'induction : soit $\phi(x)$ une formule (contenant éventuellement d'autres variables libres) :

$$\phi(\xi) \wedge \forall\, x[\phi(x) \rightarrow \phi(\langle x \rangle)] \wedge \forall\, x\, y[\phi(x) \wedge \phi(y) \rightarrow \phi(x * y)] \rightarrow \forall x[\phi(x)] .$$

Dans ce qui suit, on désigne par S un Σ-système quelconque. On note S_0 le Σ-système restreint aux constantes et axiomes précédents.

1.2. LE MODELE STANDARD.

Les structures pour le langage de S_0 sont des algèbres de type :

$\langle 0, 1, 2 \rangle$.

Notons $\mathcal{A}_0$ l'algèbre de cette classe librement engendrée par l'ensemble vide.

Elle s'identifie avec l'algèbre des termes clos de S_0. $\mathcal{A}_0$ est ainsi un modèle de S_0, que nous appellerons modèle standard.

1.3. PREMIERE INSPECTION DE S.

Dans toute la suite, le signe " $\vdash$ " signifie "déduit dans S".

1.3.1 Principe de dualité.

Définissons dans S une nouvelle opération O par $x \circ y = y * x$.

Les axiomes 1 à 10 forment un système autodual vis à vis de l'échange de $*$ et 0. Donc, pour tout théorème F de S, on en obtient un autre en échangeant $*$ et 0 dans F. En particulier les notions $\measuredangle$ et $\succ$ sont en dualité. Nous donnerons le plus souvent une version de chaque théorème, nous réservant le droit d'utiliser la version duale sans autre explication.

1.3.2. $\vdash x \neq x * u$.

Démontrons-le par induction sur x.

Si $x = \xi$, cela découle de l'axiome 3, qui permet de conclure immédiatement aussi si x est de la forme $\langle y \rangle$.

Supposons le vrai pour x et pour y, et supposons que l'on ait : $x * y = (x * y) * u$. On a aussi (axiome 4) $x * y = x * (y * u)$.

D'où (axiome 7) $y = y * u$, contrairement à l'hypothèse faite sur y.

1.3.3. $\vdash x \measuredangle x$,

$\vdash x \measuredangle y \rightarrow (y \measuredangle z \rightarrow x \measuredangle z)$,

$\vdash x \measuredangle y \rightarrow (y \measuredangle z \rightarrow x = y)$,

$\vdash x \in \mathrm{Prem} \leftrightarrow \forall y \, [y \measuredangle x \rightarrow x = y]$,

$\vdash x \in \mathrm{Prem} \leftrightarrow \forall y \, [y \succ x \rightarrow x = y]$.

La réflexivité se déduit logiquement de la définition de $\measuredangle$, la transitivité de l'axiome 4. L'antisymétrie résulte de I.3.2. . Les deux autres propriétés découlent immédiatement des définitions.

1.3.4. Posons par définition :

$\langle x,y\rangle = \langle x\rangle * \langle y\rangle$

Cette notion joue le rôle de *couple* , car on a $\vdash \langle x,y\rangle = \langle u,v\rangle \rightarrow x = u \wedge y = v$. Puisque $\langle x\rangle \in$ Prem (axiome 3), $\langle x,y\rangle = \langle u,v\rangle$ implique $\langle x\rangle \prec \langle u\rangle$ (axiome 8). Pour la même raison $\langle u\rangle \prec \langle x\rangle$. Donc (I.3.3) $\langle x\rangle = \langle u\rangle$, d'où (axiome 5) x = u. On en tire (axiome 7) $\langle y\rangle = \langle v\rangle$ d'où y = v.

1.3.5. $\vdash x \in \mathrm{Prem} \rightarrow (u \prec x * y \rightarrow x \prec u)$,

$\vdash x \in \mathrm{Prem} \rightarrow (u \prec y * x \rightarrow u \prec y \vee u = y * x)$.

Etablissons par exemple le second résultat .

Soit $x \in$ Prem, tel que $u \prec y * x$. Il existe v tel que $y * x = u$ ou $y * x = u * v$.

Si $y * x \neq u$, $x \succ v$ (axiome 9). Si x = v , y = u (axiome 6), donc $u \prec y$. Sinon il existe w avec $y * x = u * (w * x) = (u * w) * x$. D'où (axiome 6), $y = u * w$, c'est-à-dire $u \prec y$.

1.4. ASPECTS DE L'INDUCTION DANS S.

1.4.1. Démonstrations par induction.

Elles reposent sur le schéma 10, mais il est utile d'en donner diverses formes ou corollaires éventuellement mieux adaptés dans certaines situations. Le lemme suivant affaiblit légèrement la prémisse du schéma 10.

LEMME 1. - *Pour toute formule* $\phi(x)$, *on a le théorème suivant :*

$$\vdash \Phi(\xi) \wedge \forall x[\phi(x) \rightarrow \phi(\langle x \rangle)] \wedge \forall x \forall y \in \mathrm{Prem}[\phi(x) \wedge \phi(y) \rightarrow \phi(x * y)] \rightarrow x[\phi(x)] \ .$$

Posons $\psi(x) = \forall y \prec x[\phi(x)]$. On a : $\psi(x) \rightarrow \phi(x)$, et pour $x \in \mathrm{Prem}$, $\psi(x) \longleftrightarrow \phi(x)$. Posons encore :

$F(y) = \psi(\xi) \wedge \forall x[\psi(x) \rightarrow \psi(\langle x \rangle)] \wedge \forall x \forall y \in \mathrm{Prem}[\psi(x) \wedge \psi(y) \rightarrow \psi(x * y)] \rightarrow$
$\forall x[\psi(x) \wedge \psi(y) \rightarrow \psi(x * y)]$

Supposons que l'on ait :

(1) $\phi(\xi) \wedge \forall x[\phi(x) \rightarrow \phi(\langle x \rangle)] \wedge \forall x \forall y \in \mathrm{Prem}[\phi(x) \wedge \phi(x) \rightarrow \phi(x * y)]$

Alors on a aussi : $\psi(\xi)$.

$\psi(x)$ implique $\phi(x)$, donc $\phi(\langle x \rangle)$ qui équivaut à $\psi(\langle x \rangle)$. Supposons $\psi(x)$ et $\psi(y)$ avec $y \in \mathrm{Prem}$. Soit $u \prec x * y$. Si $u = x * y$, comme on a aussi $\phi(x)$ et $\phi(y)$ on a $\phi(x * y)$. Si $u \prec x$, on a $\phi(u)$.

Donc on a $\psi(x * y)$. Ainsi (1) implique :

(2) $\psi(\xi) \wedge \forall x[\psi(x) \rightarrow \psi(\langle x \rangle)] \wedge \forall x \forall y \in \mathrm{Prem}[\psi(x) \wedge \psi(y) \rightarrow \psi(x * y)]$.

Assumons (2) et posons $F(y) = \forall x[\psi(x) \wedge \psi(y) \rightarrow \psi(x * y)]$.

(2) implique $F(y)$ pour tout $y \in \mathrm{Prem}$. En particulier, on a $F(\xi) \wedge \forall y[F(y) \rightarrow F(\langle y \rangle)]$.

Supposons que l'on ait $F(y) \wedge F(z)$, et supposons $\psi(x)$ et $\psi(y * z)$. Comme $\psi(x) \rightarrow \psi(y)$ pour tout $y * x$, on a aussi $\psi(y)$, donc - par $F(y)$ - $\psi(x * y)$. $F(z)$ implique alors $\psi((x * y) * z)$, soit $\psi(x * (y * z))$. Donc on a aussi $F(y * z)$. Ainsi (2) implique $\forall x\ y[\psi(x) \wedge \psi(y) \rightarrow \psi(x * y)]$, donc, par le schéma 10, $\forall x[\psi(x)]$, et à fortiori $\forall x[\phi(x)]$.

COROLLAIRE 1. - *Pour toute formule* $\phi(x)$, *on a le théorème :*

$$\vdash \forall x \in \mathrm{Prem}[\phi(x)] \wedge \forall x \,\forall y \in \mathrm{Prem}[\phi(x) \wedge \phi(y) \rightarrow \phi(x * y)] \rightarrow \forall x[\phi(x)].$$

COROLLAIRE 2. - (principe de minimalité) *Pour toute formule* $\phi(x)$:

$$\vdash \exists x[\phi(x)] \rightarrow \exists x[\phi(x) \wedge \forall y \prec x[\phi(y) \rightarrow y = x]].$$

Il existe bien entendu un principe dual pour $\succ$.

On l'obtient en appliquant le corollaire 1 à la formule : $F(x) = \exists y \prec x[\phi(y)] \rightarrow \exists x[\phi(x) \wedge \forall y \prec x[\phi(y) \rightarrow y = x]]$ et, en remarquant que $\exists x[\phi(x)] \rightarrow \exists x \,\exists y \prec x[\phi(y)]$.

APPLICATION.

$$\vdash \forall x \,\exists !\, y\,[y \in \mathrm{Prem} \wedge y \prec x]$$

$$\vdash \forall x \,\exists !\, y\,[y \in \mathrm{Prem} \wedge y \succ x]$$

L'unicité repose sur les axiomes 8, 9 et I.3.3.

Pour l'existence, on remarque $x \prec x$, donc il existe $y, y \prec x$. Donc il existe un y minimal parmi les $z \prec x$. Il est nécessairement dans Prem.

Ces théorèmes justifient deux définitions :

$$y = \text{Déb}(x) \equiv y \in \mathrm{Prem} \wedge y \prec x$$

$$y = \text{Fin}(x) \equiv y \in \mathrm{Prem} \wedge y \succ x$$

On note que pour tout x, déb(x) (Fin(x)) est soit égal à ξ , soit de la forme $\langle u \rangle$.

I.4.2. Concepts définis par des conditions de clôture.

Voici un schéma de définition courant dans le développement standard de la syntaxe : on donne des relations unaires $R_1(x),\dots,R_p(x)$, et des relations d'arité > 1, $S_1(x_1,\dots,x_{r_1},y),\dots,S_q(x_1,\dots,x_{r_q},y)$.

On considère alors le plus petit ensemble d'objets, X, qui satisfait aux conditions suivantes :

1. $R_i(x)$ implique $x \in X$, pour $i = 1,\dots,p$,

2. $x_1 \in X,\dots,x_{r_j} \in X$, $S_j(x_1,\dots,x_{r_j},y)$ impliquent $y \in X$, pour : $j=1,\dots,q$.

Notons qu'en prenant la disjonction $R(x)$ des R_i et la disjonction $S(x_1,\dots,x_n,y)$ des S_j on peut toujours se ramener à la donnée de deux relations. La définition standard des termes, des formules, des théorèmes, est du type précédent.

Voici l'équivalent formel de cette technique :

PROPOSITION 1. - *Soient* $\phi(x)$ **et** $\psi(x_1,\dots,x_n,y)$ *deux concepts dans* S. *Il existe un unique concept* $\gamma(x)$ *satisfaisant aux conditions suivantes :*

i. $\vdash \phi(x) \to \gamma(x)$

ii. $\vdash \gamma(x_1) \wedge \dots \wedge \gamma(x_n) \wedge \phi(x_1,\dots,x_n,y) \to \gamma(y)$,

iii. Pour toute formule $F(x)$:

$$\vdash \forall x[\phi(x) \to F(x)] \wedge \forall x_1 \dots x_n\, y[\psi(x_1,\dots,x_n,y) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} F(x_i) \to F(y)] \to \forall x[\gamma(x) \to F(x)].$$

(Notons que ϕ et ψ peuvent dépendre de paramètres, qui figurent alors dans γ. La formule $F(x)$ peut aussi contenir des paramètres).

Supposons que $\gamma_1(x)$ et $\gamma_2(x)$ satisfassent i, ii, iii. On a alors :

$$\vdash \gamma_1(x) \to \gamma_2(x)$$

$$\vdash \gamma_2(x) \to \gamma_1(x)$$

Donc il existe au plus un concept solution.

Etablissons son existence pour $n = 1$. Le cas général est analogue.

Soit $M(X)$ le concept suivant :

$$\forall Y < X \, \exists Y_1 < Y \, \exists u \, u_1 [\mathrm{Fin}(Y) = \langle u \rangle \wedge \mathrm{Fin}(Y_1) = \langle u_1 \rangle \wedge (\phi(u) \vee (Y_1 \neq Y \wedge \phi(u_1, u)))]$$

Posons enfin $\gamma(x) \equiv \exists X [M(X) \wedge \mathrm{Fin}(X) = \langle x \rangle]$.

Les conditions i et ii sont immédiates. Par exemple supposons :

$$\gamma(x) \wedge \psi(x,y)$$

Donc il existe X, $M(X) \wedge \mathrm{Fin}(X) = \langle x \rangle$.

Posons $Y = X * \langle y \rangle$. Il est clair que l'on a :

$$M(Y) \text{ et } \mathrm{Fin}(Y) = \langle y \rangle \text{ , donc } \gamma(y).$$

La condition iii se démontre en appliquant sur X le principe de minimalité (Corollaire 2) à la formule :

$$M(X) \wedge \mathrm{Fin}(X) = \langle x \rangle \wedge \neg F(x).$$

REMARQUE. - Si on pense à la définition des formules, $M(X)$ correspond à celle des formulations. Si on pense aux théorèmes, $M(X)$ correspond à la définition des *preuves*. $M(X)$ est donc plus qu'un intermédiaire.

Nous poserons en particulier :

$$D(X,x) \equiv M(X) \wedge Fin(X) = \langle x \rangle .$$

Nous dirons pour aller vite que $\gamma(x)$ a été défini ***par clôture*** à partir de ϕ et ψ.

EXEMPLE 1. - Partons des concepts suivants :

$$\phi(x) \equiv x = \xi$$

$$\psi(x,y) \equiv y = x * \xi$$

Le concept $\gamma(x)$ correspondant sera noté : $x \leqslant Ent$.

Intuitivement, il définit les objets :

$$\xi,\ \xi * \xi, \ldots, \xi * \xi * \ldots * \xi, \ldots$$

On peut les considérer comme une représentation des entiers > 0. La clause iii n'est autre que le principe de récurrence arithmétique.

EXEMPLE 2. - L'exemple suivant montre que l'on peut définir à l'aide de la proposition 1 le graphe de la relation $x \neq y$. Exprimons les conditions de clôture caractérisant ce graphe X en écriture ordinaire :

a. Conditions initiales.

X contient les couples des types suivants :

1. $\langle \xi , \langle x \rangle \rangle$
2. $\langle \xi , x * y \rangle$
3. $\langle \langle x \rangle , x * y \rangle$
4. $\langle \xi * u , \langle t \rangle * v \rangle$.

b. *On a de plus les clauses de clôture suivantes :*

5. $\langle x,y\rangle \in X$ implique $\langle y,x\rangle \in X$

6. $\langle x,y\rangle \in X$ implique $\langle\langle x\rangle,\langle y\rangle\rangle \in X$

7. $\langle x,y\rangle \in X$ implique $\langle u * x\ ,\ u * y\rangle \in X$

8. $\langle\langle x\rangle,\langle y\rangle\rangle \in X$ implique $\langle\langle x\rangle * u,\ \langle y\rangle * v\rangle \in X$

Le lecteur formalisera aisément ces conditions dans S. Ainsi :

1 s'écrit : $\exists y\,[x = \langle \xi\ ,\ \langle y\rangle\rangle]$

7 s'écrit : $\exists u\,v\,w\ [\,x = \langle v,w\rangle \wedge y = \langle u * v\ ,\ u * w\rangle]$

etc .

Notons $x \in X$ le concept correspondant au sens de la proposition 1.

$\exists u\,v\ [u \neq v \wedge x = \langle u,v\rangle]$ satisfait à toutes les conditions de clôture ci-dessus. Donc (condition iii) :

$$\vdash \langle x,y\rangle \in X \rightarrow x \neq y.$$

Posons alors : $F(x) = \forall y\,[x \neq y \rightarrow \langle x,y\rangle \in X]$.

Montrons, par induction sur x, $\forall x\,F(x)$. Ceci prouvera : $\vdash x \neq y \leftrightarrow \langle x,y\rangle \in X$

Pour $x = \xi$, si $y \neq x$, y est de la forme $\langle u\rangle$ ou $u * v$. On applique 1 et 2.

Supposons F(x) et testons $F(\langle x\rangle)$.

Si y n'est pas de la forme $\langle u\rangle$, on applique 1,3,5.

Si $y = \langle u\rangle$, alors $y \neq \langle x\rangle$ implique $u \neq x$, donc (hypothèse inductive) $\langle x,u\rangle \in X$.

Alors (6), $\langle\langle x\rangle,\ \langle u\rangle\rangle \in X$.

Supposons alors $F(x)$ et $(F(y)$ et testons $F(x*y)$. Soit $z \neq x*y$.

- Si $z = \xi$, ou $z = \langle t \rangle$, c'est clair d'après 2, 3, 5.
- Si z est du type $u*v$, posons $z = z' * z''$ avec $z' \in$ Prem.

Démontrons $\langle z, x * y \rangle \in X$ par induction sur x, sous la forme du corollaire 2. On suppose donc que x est minimal pour l'ordre $\succ$ parmi les objets tels qu'il existe y avec $F(x)$, $F(y)$ et $\neg F(x* y)$.

x ne peut être dans Prem. Pour cela, on examine les éventualités suivantes :

$x = z' = \xi$: alors $y \neq z''$, d'où $\langle y, z'' \rangle \in X$, puis :

$$\langle x * y \ , \ x * z'' \rangle \ \in X \qquad (7),$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \xi \ , \ z' \neq \xi \\ \\ x \neq \xi \ , \ z' = \xi \end{array}\right\} \ \langle x * y \ , \ z \rangle \in X \text{ d'après 4 et 5 },$$

$x = \langle x' \rangle$, $z' = \langle t \rangle$: dans ce cas, ou bien $x' \neq t$, d'où $z' \neq x$, donc $\langle z', x \rangle \in X$, puis $\langle x * y \ , \ z \rangle \in X$ d'après 5 et 8.

Ou bien $x' = t$, d'où $x = z'$. Alors $y \neq z''$ et on conclut par 7.

x ne pouvant être dans Prem, on a :

$$x = u * x' \text{ avec } u \in \text{Prem};$$

si $u = z'$, $x' * y \neq z''$, donc $\langle x' * y \ , \ z'' \rangle \in X$ et le résultat par 7.

si $u \neq z'$, on est ramené à 4, 8 et 5 comme ci-dessus.

1.4.3 Fonctions définies par induction.

Un concept $\phi(x_1,\ldots,x_n,y)$ dans S définit y comme fonction de $x_1,\ldots,x_n$ si $\vdash \forall x_1 \ldots x_n \exists ! \, y[\phi(x_1,\ldots,x_n,y)]$. On le note alors $y = F(X_1,\ldots,x_n)$ et on dit que F est une *fonction* définie dans S.

Deux fonctions $F(x_1,\ldots,x_n)$ et $G(x_1,\ldots,x_n)$ sont considérées comme identiques si les concepts $y = F(x_1,\ldots,x_n)$ et $y = G(x_1,\ldots,x_n)$ sont égaux.

Considérons la situation suivante :

Soient un concept $\phi(x)$ et une fonction $\lambda(x,y)$ satisfaisant aux conditions suivantes :

a. $\vdash \phi(x) \rightarrow (x \neq \lambda(u,v))$,

b. $\vdash x = \lambda(u,v) \wedge x = \lambda(u',v') \rightarrow u = u' \wedge v = v'$. On pose : $\psi(x_1,x_2,y) \equiv y = \lambda(x_1,x_2)$.

Par la proposition 1, on définit un concept $\gamma(x)$ à partir des conditions de clôture associées à ϕ et ψ.

Donnons maintenant deux fonctions $F(x)$ et $G(x,y,z,t)$. Dans ces conditions, nous affirmons qu'il existe une fonction $H(x)$ qui satisfait aux deux conditions suivantes :

i. $\vdash \phi(x) \rightarrow H(x) = F(x)$,

ii. $\vdash \gamma(x) \wedge \gamma(y) \wedge z = \lambda(x,y) \rightarrow H(z) = G(x,y, H(x), H(y))$.

De plus, si $H'(x)$ remplit les conditions précédentes, alors :

iii. $\vdash \gamma(x) \rightarrow H(x) = H'(x)$.

Voyons l'unicité. Les conditions i et ii ci-dessus assurent que $H(x) = H'(x)$ détermine un concept qui satisfait les conditions de clôtures associées à ϕ et ψ. iii résulte donc de la condition iii de la proposition 1.

Pour établir l'existence de H, on construit une famille de séquences de couples qui représentent intuitivement des graphes de restrictions finies de H, contenant toutes les informations nécessaires au calcul des valeurs à partir des relations de récurrence.

Posons pour cela :

$\phi_1(x) \equiv \exists\, u\, v\, [x = \langle\langle u,v \rangle\rangle \wedge \phi(u) \wedge v = F(u)]$,

$\psi_1(x_1,x_2,y) \equiv \exists\, u_1\, v_1\, u_2\, v_2\, u\, v[y = x_1 * x_2 * \langle\langle u,v \rangle\rangle \wedge Fin(x_1) =$

$\langle\langle u_1,v_1 \rangle\rangle \wedge Fin(x_2) = \langle\langle u_2,v_2 \rangle\rangle \wedge u = \lambda(u_1,u_2) \wedge v = G(u_1,u_2,v_1,v_2)]$.

Soit $\gamma_1(X)$ le concept dérivé de ϕ_1 et ψ_1 . Poeons :

$K(x,y) \equiv \exists\ X\ [\gamma_1(X) \wedge Fin(X) = \langle\langle x,y \rangle\rangle]$.

A l'aide de la clause iii de la proposition 1 appliquée à ϕ et ψ on démontre :

$$\vdash \forall x\ [\gamma(x) \rightarrow \exists\ !\ y\,[K(x,y)]]\ ;$$

on peut donc définir une fonction par :

$y = H(x) \equiv (\gamma(x) \wedge K(x,y)) \vee (\neg\gamma(x) \wedge y = x)$.

On montre qu'elle satisfait les conditions i et ii imposées à H en analysant la définition de γ_1 , t en particulier en recourant aux clauses i et ii de la proposition 1.

REMARQUE. - Il peut être préférable de considérer la fonction H comme étant définie seulement pour x satisfaisant $\gamma(x)$.

Cette construction peut être compliquée de la manière suivante : au lieu de $\gamma(x,y)$ on donne plusieurs fonctions :

$\lambda_1(x_1,\ldots,x_{r_1})$,..., $\lambda_n(x_1,\ldots,x_{r_n})$.

De telle sorte que les conditions suivantes soient réalisées :

a. Simplicité des objets initiaux.

$\vdash \phi(x) \rightarrow x \neq \lambda_i(x_1,\ldots,x_{r_i})$, pour $i = 1,\ldots,n$.

b. Unicité des formes λ_i.

$$\vdash \lambda_i(x_1,\ldots,x_{r_i}) = \lambda_i(y_1,\ldots,y_{r_i}) \rightarrow x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_{r_i} = y_{r_i} ,$$

pour $i = 1,\ldots,n$.

c. Exclusion.

Pour $i \neq j$, $\vdash x = \lambda_i(x_1,\ldots,x_{r_i}) \rightarrow x \neq \lambda_j(y_1,\ldots,y_{r_j})$.

On donne alors des fonctions $F(x)$, $G_i(x_1,\ldots,x_{r_i} , y_1,\ldots,y_{r_i})$. Les conditions déterminant $H(x)$ sont les suivantes :

$$\phi(x) \rightarrow H(x) = F(x) ,$$

$$x = \lambda_i(x_1,\ldots,x_{r_i}) \rightarrow H(x) = G_i(x_1,\ldots,x_{r_i} , H(x_1),\ldots,H(x_{r_i})).$$

EXEMPLE 3. - Sur $x \in$ Ent, $x * \xi$ calcule la "fonction successeur" et $x * y$ calcule l'addition. La multiplication peut être construite par la technique précédente, en partant des fonctions :

$F(u;x) = u$ (u joue le rôle de paramètre)

$G(u, x, y, z, t) = z * t$.

On peut restituer de cette manière toutes les définitions par récurrence simple (il s'agit ici de leur contrepartie formelle - l'aspect extentionnel sera examiné plus loin).

EXEMPLE 4. - L'univers tout entier est engendré à partir des conditions de clôture associées aux concepts suivants :

$\phi(x) \equiv x = \xi$,

$\psi_1(x_1,y) \equiv y = \langle x \rangle$,

$\psi_2(x_1,x_2,y) \equiv y = x_1 * x_2$

(c'est le schéma 10 qui l'assure).

Définissons une fonction h(x) à partir des suivantes :

$F(x) = \xi$,

$G_1(x) = x * \xi$,

$G_2(x,y) = x * y * \xi$.

La fonction h(x) est calculée selon les règles suivantes :

$h(\xi) = \xi$,

$h(\langle x \rangle) = h(x) * \xi$,

$h(x * y) = h(x) * h(y) * \xi$.

h(x) mesure la complexité de x dans sa génération à partir de ξ au moyen des opérations $\langle\ \rangle$ et $*$.

Toute démonstration inductive dans S pourrait être remplacée par une récurrence sur h(x).

1.5. - COMPARAISON AVEC L'ARITHMETIQUE.

Soit $\mathcal{N}$ une variante de l'arithmétique du premier ordre, adaptée aux entiers > 0. Ses constantes sont 1, S, $+$, $.$ et ses axiomes sont les clôtures universelles des formules suivantes :

N1. $1 \neq S(x)$,

N2 $S(x) = S(y) \rightarrow x = y$,

N3 $x + 1 = S(x)$,

N4 $x + S(y) = S(x + y)$,

N5 $x . 1 = x$,

N6 $x . S(y) = x . y + x$,

N7 $\phi(1) \wedge \forall x[\phi(x) \rightarrow \phi(S(x)] \rightarrow \forall x[\phi(x)]$.

Les exemples 1 et 3 exposent la construction d'une interprétation de $\mathcal{N}$ dans S. C'est essentiellement la seule, en ce sens que l'on peut établir que deux interprétations de $\mathcal{N}$ dans S qui *satisfont au principe de récurrence étendu à toutes les formules de* S se correspondent dans un automorphisme définissable de S.

Inversement, les méthodes usuelles d'arithmétisation des formalismes procurent des interprétations de S_0 dans $\mathcal{N}$.

Toute théorie interprétable dans $\mathcal{N}$ l'est donc dans S_0 et vice-versa.

Toutefois la reconstruction de la syntaxe est plus naturelle dans un Σ-système.

1.6. QUELQUES CLASSES DE CONCEPTS.

Soit X un ensemble de formules d'un Σ-systèmes S. Considérons les conditions suivantes :

1. X contient les formules des types suivants :

$$x = y \ , \ x = \xi \ , \ y = \langle x \rangle \ , \ y = x_1 * x_2$$

2. X est clos par conjonctions, disjonctions et quantifications existentielles.

3. X est clos par les connexions de la logique des propositions

4. X est clos par les quantifications bornées $\forall x \prec y$, $\forall x \succ y$,

$$\exists x \prec y \ , \ \exists x \succ y.$$

Disons que X est E-*clos* s'il satisfait les conditions 1, 3, 4, et Σ-*clos* s'il satisfait les conditions 1, 2, 4.

$\mathcal{F}$ étant un ensemble de formules, on note :

$\mathcal{E}(\mathcal{F})$ le plus petit ensemble E-clos contenant $\mathcal{F}$,

$\mathcal{S}(\mathcal{F})$ le plus petit ensemble Σ-clos contenant $\mathcal{F}$.

On pose en particulier $\mathcal{E}(\emptyset) = \mathcal{E}_0$ et $\mathcal{S}(\emptyset) = \mathcal{S}_0$.

Soit maintenant K une classe de concepts. Soit $\mathcal{F}$ un ensemble de représentants des éléments de K. On note :

Σ(K) l'ensemble des concepts qui ont un représentant dans $\mathcal{S}(\mathcal{F})$,

E(K), l'ensemble des concepts qui ont un représentant dans $\mathcal{E}(\mathcal{F})$,

Δ(K) l'ensemble des concepts ϕ tels que $\phi \in \Sigma(K)$ et $\neg\phi \in \Sigma(K)$.

Il est clair que ces définitions ne dépendent pas du choix de l'ensemble $\mathscr{S}$ de représentants. On pose $\Sigma_\circ = \Sigma(\emptyset)$, $E_\circ = E(\emptyset)$, $\Delta_\circ = \Delta(\emptyset)$. On dit que K est Σ-clos (E-clos) si $K = \Sigma(K)$ $(E(K))$. On peut en donner une caractérisation directe en transposant les conditions de cloture 1,2,3,4 aux classes de concepts. Nous le ferons éventuellement sans autre explication.

Voici quelques propriétés immédiates :

$\Delta(K)$ satisfait 3 et 4 ;

Si K est clos par négation, $K \subset \Delta(K)$;

Si $\phi(x_1,\ldots,x_n) \in \Sigma(K)$, quels que soient les termes $t_1,\ldots,t_n$ de $S_\circ$ $\phi(t_1,\ldots,t_n) \in \Sigma(K)$.

On montre d'abord que si $t(x_1,\ldots,x_n)$ est un terme de $S_\circ$, $y=t(x_1,\ldots,x_n)$ appartient à $\Sigma_\circ$, par récurrence sur l'ordre de t, en remarquant :

$$\vdash y = t(t_1,\ldots,t_n) \longleftrightarrow \exists u_1 \ldots u_n[u_1 = t_1 \wedge \ldots \wedge u_n = t_n \wedge y = t(u_1,\ldots,u_n)] \text{ .}$$

Cela étant, pour toute formule $F(x_1,\ldots,x_n)$ on a de même :

$$\vdash F(t_1,\ldots,t_n) \longleftrightarrow \exists u_1 \ldots u_n[x_1 = t_1 \wedge \ldots \wedge x_n = t_n \wedge F(x_1 ,\ldots, x_n)] \text{ .}$$

- Les concepts suivants sont des $\Sigma_\circ$-concepts :

$x = y$, $x = \xi$, $y = \langle x \rangle$, $z = x*y$, $z = \langle x,y \rangle$,

$x \in \mathrm{Prem}$ (cf. axiome 3), $x \notin \mathrm{Prem}$,

$x \prec y$, $x \succ y$,

$y = \mathrm{Déb}(x)$, $y = \mathrm{Fin}(x)$.

LEMME 2. - *Dans la proposition 1, on peut ajouter :* $\gamma \in \Sigma(\phi,\psi)$.

Il suffit d'en reprendre la preuve, en remplaçant $Y_1 \neq Y$ par $\exists t\,[Y = Y_1 * t]$,

Plus précisément, si F et G sont des représentants de ϕ et ψ, la preuve fournit explicitement un représentant de γ dans $\mathcal{S}(F,G)$.

LEMME 3. - $x \neq y$ *définit un* Σ_o*-concept.*

Cela résulte de l'exemple 2 et du lemme 2.

LEMME 4. - *Soit* $F(x_1,\ldots,x_n)$ *une fonction définie dans* S. *Si* $y = F(x_1,\ldots,x_n)$ *appartient à* $\Sigma(K)$, *il appartient à* $\Delta(K)$.

Car $\vdash y \neq F(x_1,\ldots,x_n) \leftrightarrow \exists x[x = F(x_1,\ldots,x_n) \wedge x \neq y]$.

LEMME 5. - $\Delta(K)$ *est* E*-close. En particulier, si* K *est close par négation,* $E(K) \subset \Delta(K)$.

On a déjà remarqué que $\Delta(K)$ satisfait 3 et 4. Le lemme 4 montre que $\Delta(K)$ satisfait aussi 1.

En particulier, on a $E_o \subset \Delta_o$. La plupart des concepts déjà énumérés sont non seulement des Σ_o-concepts, mais des E_o-concepts :

$x = y$, $x = \xi$, $y = \langle x \rangle$, $y = x_1 * x_2$,

$x \in \mathrm{Prem}$ (car $\vdash x \in \mathrm{Prem} \longleftrightarrow \forall y \prec x[y = x]$),

$x \prec y$, $x \succ y$ (car $\vdash x \prec y \longleftrightarrow \exists u \prec y[x = u]$),

$y = \text{Déb}(x)$, $y = \text{Fin}(x)$.

$x \in \text{Ent}(\vdash x \in \text{Ent} \leftrightarrow \forall y < x \, \exists z > y [z = \xi])$.

Enfin si $t(x_1,\dots,x_n)$ est un terme de $S_\circ$, $y = t(x_1,\dots,x_n)$ définit un $\Delta_\circ$-concept.

LEMME 6. - *Dans les conditions de la proposition 1,* $M(X) \in \Delta(\phi,\psi,\neg\phi,\neg\psi)$.

En prouvant le lemme 2, on a déjà dû remarquer que $M(X) \in \Sigma(\phi,\psi)$.

D'autre part, sachant que pour tout x il existe au plus un u tel que $\text{Fin}(x) = \langle u \rangle$ on a l'équivalence :

$\exists u[\text{Fin}(x) = \langle u \rangle \wedge \phi(u,\dots)] \longleftrightarrow \text{Fin}(x) \neq \xi \wedge \forall u[\text{Fin}(x) \neq \langle u \rangle \vee \phi(u,\dots)]$;

donc $\neg M(X) \in \Sigma(\neg\phi,\neg\psi)$.

LEMME 7. - *Soit* K *une classe close par négation. Tout* $\phi \in \Sigma(K)$ *se met sous la forme* $\exists x[\psi]$ *avec* $\psi \in E(K)$. *OEn particulier on a :*

$$\Sigma(K) = \Sigma(\Delta(K)) = \Sigma(E(K)).$$

Soit X la classe des concepts de la forme $\exists x[\psi]$ avec $\psi \in E(K)$. On a déjà : $K \subset E(K) \subset X \subset \Sigma(K)$.

En particulier, X satisfait 1.

La clôture par quantification existentielle découle de l'équivalence :

$\vdash \exists x \, y[\phi] \longleftrightarrow \exists u \, \exists x < u \, \exists y > u[u = \langle x,y \rangle \wedge \phi]$.

La clôture par $\vee$ et par $\wedge$ s'en déduit. On a ainsi :

$$\vdash \exists x[\phi] \wedge \exists y[\psi] \longleftrightarrow \exists x \, y[\phi \wedge \psi].$$

Enfin, on établit dans S :

$$\vdash \forall x < y \exists z[\phi] \leftrightarrow \exists Z \forall x < y \exists u < Z \exists z > u[\phi].$$

Le sens $\leftarrow$ est trivial. L'implication réciproque se démontre par induction sur y. Elle est triviale pour $y \in$ Prem. Supposons la vraie pour y, et soit $t \in$ Prem. On a :

$$\forall x < y * t \exists z[\phi(x,z)] \leftrightarrow \forall x < y \exists z[\phi(x,z)] \wedge \exists z[\phi(y * t, z)].$$

Assumons le membre gauche. Il existe donc Z et z tels que :

$$\forall x < y \exists u < Z \exists z > u[\phi(x,z)] \quad \text{et } \phi(y * t,z).$$

Il suffit de poser $Z' = Z * z$ pour avoir :

$$\forall x < y * t \exists u < Z' \exists z > u[\phi(x,z)] .$$

1.7. LE POINT DE VUE EXTENSIONNEL.

Regardons les concepts de S comme exprimant certaines relations entre les éléments de $\mathcal{A}_o$. Les rapports suivants sont classiques, à la terminologie près (dont le sens nous paraît clair) :

Soient $R(x_1,\dots,x_n)$ une relation sur $\mathcal{A}_o$, et $\phi(x_1,\dots,x_n)$ un concept dans S. Considérons les deux conditions suivantes :

(1) $R(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$ implique $S \vdash \phi(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$;

(2) $S \vdash \phi(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$ implique $R(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$.

Si (1) est satisfaite quels que soient $\sigma_1,\dots,\sigma_n \in \mathcal{A}_o$, disons que ϕ est *extensionnellement complet* pour R. Si la condition (2) est remplie quels que soient $\sigma_1,\dots,\sigma_n \in \mathcal{A}_o$, disons que ϕ est *extensionnellement compatible* avec R.

Si on a les deux propriétés à la fois, disons que ϕ est une *traduction extensionnelle* de R. Enfin ϕ est une représentation de R si ϕ et $\neg\phi$ sont respectivement extensionnellement complets pour R et non R.

Il est clair que si S est compatible, toute représentation est une traduction extensionnelle. Dans ce paragraphe, nous supposons implicitement que S est compatible.

Disons encore que $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ est *saturé* si quels que soient $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$ dans $\mathcal{A}_o$, $\phi(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$ est décidé dans S. Un concept est saturé si et seulement si il représente une certaine relation.

Dans toute la suite, notons S^* la théorie de même langage que S et dont les axiomes sont les axiomes 1 à 9 de S_o.

LEMME 8. - *Soit* σ *un terme clos de* S_o *de la forme* $\sigma_1 * \sigma_2 * \ldots * \sigma_n$, *où* σ_i *est soit égal à* ξ, *soit de la forme* $< u_i >$. *On a :*

$$S^* \vdash x < \sigma \leftrightarrow x = \sigma_1 \vee x = \sigma_1 * \sigma_2 \vee \ldots \vee x = \sigma_1 * \sigma_2 * \ldots * \sigma_n ,$$

$$S^* \vdash x > \sigma \leftrightarrow x = \sigma_n \vee x = \sigma_{n-1} * \sigma_n \vee \ldots \vee x = \sigma_1 * \ldots * \sigma_{n-1} * \sigma_n .$$

Preuves par récurrence sur n, en utilisant notamment 1.3.5. .

LEMME 9. - *Si* $F(x_1,\ldots,x_n) \in \mathcal{G}_o$, *on a, quels que soient* $\sigma_1,\ldots,\sigma_n \in \mathcal{A}_o$:

(i) $\mathcal{A}_o \models F(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) \Rightarrow S^* \vdash F(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$

Si $F(x_1,\ldots,x_n) \in \mathcal{E}_o$, *on a, quels que soient* $\sigma_1,\ldots,\sigma_n \in \mathcal{A}_o$:

(i) comme ci-dessus, et de plus :

(ii) $\mathcal{A}_o \models \neg F(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) \Rightarrow S \vdash \neg F(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$.

On traite d'abord le cas $F \in \mathcal{S}_0$ en raisonnant par récurrence sur le nombre d'opérations permettant de construire F à partir des formules basiques : $x = y$, $x = \xi$, $y = \langle x \rangle$, $y = x_1 * x_2$. Le lemme 8 sert en particulier à traiter les quantifications bornées.

On sait d'autre part qu'il existe $E(x,y) \in \mathcal{S}$ tel que $S_0 \vdash x \neq y \leftrightarrow E(x,y)$.

Ceci donne la condition (ii) pour les formules basiques.

Cela étant si $F \in \mathcal{E}_0$, on démontre qu'il existe $F' \in \mathcal{E}_0$, *logiquement* équivalente à F, obtenue à partir des formules basiques et de leurs négations par conjonctions, disjonctions et quantifications bornées. Le cas (ii) se traite alors de la même manière que le cas (i).

Ce lemme peut être généralisé dans une certaine mesure au cas où F comporte des prédicats extérieurs. La difficulté est qu'on ne peut recourir directement au modèle standard, sauf en faisant des hypothèses sur S.

Etant donnés des prédicats $r_1,\ldots,r_n$ dans S, de poids respectifs $p_1,\ldots,p_n$ notons $\mathcal{B}(r_1,\ldots,r_n)$ l'ensemble des formules de la forme suivante :

$$r_i(x_1,\ldots,x_{p_i}) \quad i = 1,\ldots,n.$$

Posons aussi :

$$\mathcal{E}(r_1,\ldots,r_n) = \mathcal{E}(\mathcal{B}(r_1,\ldots,r_n)) ,$$
$$\mathcal{S}(r_1,\ldots,r_n) = \mathcal{S}(\mathcal{B}(r_1,\ldots,r_n)).$$

Pour chaque i, considérons une relation R_i sur $\mathcal{A}_0$, attribuable à r_i.

Soit $\mathcal{A}_0(R_1,\ldots,R_n)$ l'expansion ainsi obtenue. Nous pouvons alors énoncer :

PROPOSITION 2. - *Dans les conditions précédentes :*

(i) Si $F(x_1,\dots,x_m) \in \mathcal{S}(r_1,\dots,r_n)$, *et si chaque* $r_i(x_1,\dots,x_{p_i})$ *est extensionnellement complète pour* R_i *dans* S , *alors quels que soient* $\sigma_1,\dots,\sigma_m \in \mathcal{A}_o$:

$$\mathcal{A}_o(R_1,\dots,R_n) \models F(\sigma_1,\dots,\sigma_m) \Longrightarrow S \models F(\sigma_1,\dots,\sigma_m).$$

(ii) Si $F(x_1,\dots,x_m) \in \mathcal{E}(r_1,\dots,r_n)$ *et si chaque* $r_i(x_1,\dots,x_{p_i})$ *est une représentation dans* S *de* $R_i(x_1,\dots,x_{p_i})$, *alors quels que soient* $\sigma_1,\dots,\sigma_m \in \mathcal{A}_o$:

$$\mathcal{A}_o(R_1,\dots,R_n) \models F(\sigma_1,\dots,\sigma_m) \Longrightarrow S \vdash F(\sigma_1,\dots,\sigma_m),$$

$$\mathcal{A}_o(R_1,\dots,R_n) \models \neg F(\sigma_1,\dots,\sigma_m) \Longrightarrow S \vdash \neg F(\sigma_1,\dots,\sigma_m) .$$

La preuve est analogue à celle du lemme 9.

On utilisera souvent la proposition 2 de la manière suivante :

Etant donné S et des concepta $\phi_1,\dots,\phi_n$ dans S, on introduit des prédicats nouveaux $r_1,\dots,r_n$ et des définitions du type :

$$\phi_i(x_1,\dots,x_{p_i}) \longleftrightarrow r_i(x_1,\dots,x_{p_i}).$$

D'où une extension par définition S^+ de S dans laquelle tout $\phi \in \Sigma(\phi_1,\dots,\phi_n)$ a un représentant dans $\mathcal{S}(r_1,\dots,r_n)$ et tout $\phi \in E(\phi_1,\dots,\phi_n)$ a un représentant dans $\mathcal{E}(r_1,\dots,r_n)$.

Le lemme 9 a un corollaire intéressant.

LEMME 10. - *Si* $\phi(x_1,\dots,x_n) \in \Sigma_o$, *on a, quels que soient* $\sigma_1,\dots,\sigma_n \in \mathcal{A}_o$:

$$\mathcal{A}_o\ \phi(\sigma_1,\dots,\sigma_n) \Longrightarrow S_o \vdash \phi(\sigma_1,\dots,\sigma_n).$$

En particulier, tout Δ_o*-concept est saturé.*

Ceci provient de ce que $\mathcal{A}_o$ est un modèle de S_o. En particulier, tant dans S_o que dans $\mathcal{A}_o$, il n'y a pas lieu de distinguer les divers représentants d'un même concept de S_o. En l'absence d'un modèle standard de S, on ne peut tirer de conséquence analogue de la proposition 2. Mais on peut préciser les choses moyennant une hypothèse supplémentaire sur S.

Disons que S est *ω-compatible* s'il n'existe pas dans S de formule F(x) satisfaisant les deux conditions suivantes :

a. Pour tout $\sigma \in \mathcal{A}_o$, $S \vdash \neg F(\sigma)$;

b. $S \vdash \exists x\, F(x)$.

La technique usuelle de contraction des quantifications existentielles (cf. preuve du lemme 7) permet d'étendre les conditions aux formules :

$$F(x_1,\ldots,x_n).$$

(C'est une adaptation naturelle du concept usuel d'ω-compatibilité, qui pourrait d'ailleurs s'y ramener via l'interprétation des entiers dans S. Mais la procédure ne présenterait aucun avantage).

LEMME 11. - *Si* S *est ω-compatible et si* $\phi(x,y)$ *représente une relation* R(x,y), *alors* $\exists y\, \phi(x,y)$ *est une traduction extensionnelle de "il existe* y, R(x,y)".

LEMME 12. - *Si* S *est* ω*-compatible et si* $\mathscr{D}$ *est la classe des concepts saturés dans* S, *on a :* $\Delta(\mathscr{D}) = \mathscr{D}$.

$\mathscr{D}$ étant close par négation on a : $\mathscr{D} \subset \Delta(\mathscr{D})$.

Notons que $\mathscr{D}$ est E-close : la condition 3 est immédiate. La condition 4 résulte du lemme 8, et la condition 1 du lemme 10. Donc $E(\mathscr{D}) = \mathscr{D}$.

Ainsi, si $\phi(x) \in \Delta(\mathscr{D})$, il existe $\psi_1(x,y)$, $\psi_2(x,y) \in E(\mathscr{D}) = \mathscr{D}$ tels que :

$$\vdash \phi(x) \longleftrightarrow \exists y[\psi_1(x,y)] \ ,$$

$$\vdash \neg \phi(x) \longleftrightarrow \ y \ [\psi_2(x,y)] \ .$$

Alors :

$$\vdash \phi(x) \vee \neg \ \phi(x) \longleftrightarrow \exists y[\psi_1(x,y) \vee \psi_2(x,y)] \ , \text{ avec } \ \psi_1 \vee \psi_2 \in \mathscr{D} \ .$$

D'après le lemme 11, pour tout $\sigma \in \mathcal{A}_0$, puisque $S \vdash \phi(\sigma) \vee \neg \ \phi(\sigma)$, il existe $\tau \in \mathcal{A}_0$ avec $S \vdash \psi_1(\sigma,\tau)$ ou $S \vdash \psi_2(\sigma,\tau)$. Donc:

$$S \vdash \phi(\sigma) \quad \text{ou} \quad S \vdash \neg \ \phi(\sigma) \ .$$

Le lemme 6 peut ainsi être complété par la remarque suivante : si S est ω-compatible, et si ϕ et ψ sont saturés, M(X) est saturé.

Si ϕ et ψ représentent R et S, et si C est l'ensemble défini par les conditions de clôture correspondantes , γ est une traduction extensionnelle de C.

2 - FORMALISATION DE LA SYNTAXE.

2.1. OBJETS SYNTAXIQUES.

Considérons un langage du premier ordre L, fixé une fois pour toutes dans la suite, sauf mention expresse du contraire.

Les signes de L sont :

- les signes logiques : $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\exists$, $\forall$, $=$,
- les signes de ponctuation: (,) , [,] ,
- les constantes : $r_1,\ldots,r_n$ (individus, prédicats ou signes fonctionnels),
- les variables : x_1 , $x_2,\ldots,x_n$,... .

Appelons *objets syntaxiques* les éléments du plus petit ensemble contenant L et clos pour la formation des suites finies.

Pour tout objet syntaxique σ , on note (σ) la suite de seul terme σ considérée comme distincte de σ . On note $\sigma\,\tau$ le concaténé de σ et τ.

Les objets syntaxiques munis de la concaténation et de l'opération $\sigma \rightarrow (\sigma)$ constituent une algèbre librement engendrée par L.

Exploitons cette propriété pour en donner une représentation dans $\mathfrak{A}_0$:

Il suffit d'indiquer l'image de chaque symbole $s \in$ L.

Définissons tout d'abord une application de $\mathbb{N} - \{0\}$ dans $\mathfrak{A}_0$:

$\bar{1} = \xi$,

$\overline{n+1} = \bar{n} * \xi$.

Cela étant, établissons le dictionnaire suivant :

$$\neg \qquad\qquad \rceil \quad r_1 \;\cdots\; r_n \qquad\qquad x_1 \quad \cdots \quad x_k \;\cdots$$

$$\langle \overline{1} \rangle \; \langle \overline{2} \rangle \ldots \langle \overline{12} \rangle \; \langle \overline{13} \rangle \ldots \langle \overline{12 + n} \rangle \;\; \langle \overline{12 + n + 1} \rangle \ldots \langle \overline{12 + n + k} \rangle \ldots$$

Ainsi à tout objet syntaxique σ est associé canoniquement un terme clos $\bar{\sigma}$ de S_o.

L étant choisi, la correspondance précédente est parfaitement définie, et détermine une injection de l'ensemble des objets syntaxiques de L dans la structure standard $\mathfrak{A}_o$. Pratiquement, nous identifierons les objets syntaxiques σ avec leur conotation canonique $\bar{\sigma}$ dans $\mathfrak{A}_o$. Les relations entre objets syntaxiques deviennent ainsi des relations sur la structure standard, auxquelles nous appliquerons les notions de complétude extensionnelle, compatibilité extensionnelle et traduction extensionnelle et représentation par l'intermédiaire du dictionnaire établi précédemment.

2.2. RECONSTRUCTION DES NOTIONS DE LA SYNTAXE.

Voici une liste de notions que nous appellerons les *notions de base :*

1. Enumération des divers symboles logiques et de ponctuation,
2. Enumération des constantes de L ,
3. Notion de variable ,
4. Notion d'assemblage (suite finie de symboles) ,
5. Notion de séquence (suite finie d'assemblages) ,
6. Notion d'occurence.

7. Notion de terme,
8. Notion de formule ,
9. Notion d'occurrence libre (liée),
10. Notion de terme libre pour une variable dans une formule,
11. Notion d'énoncé,
12. Notion d'axiome logique,
13. Règle d'inférence,
14. Notion de théorème logique.

Il s'y ajoute des *notions relatives :*

15. Notion d'axiome propre,
16. Notion de preuve (à partir des axiomes propres),
17 Notion de théorème.

Nous allons voir que :

Du point de vue intentionnel, les notions de base admettent une description naturelle dans S, et les notions relatives une description dépendant uniformément de la donnée d'un concept d'axiome propre.

Du point de vue extensionnel, on peut comparer les concepts obtenus aux relations qu'ils formalisent.

1 et 2 consistent simplement à exhiber un nombre fini de termes clos de $S_\circ$, qui dénotent canoniquement les symboles correspondants selon la règle décrite en 2.1.. Ceci donne naissance à une suite finie de concepts du type :

$$x = \theta \quad ,$$

où θ est un terme clos de S_0. Un tel concept est donc dans Δ_0 (cf les remarques à la suite du lemme 5).

On peut abstraire une notion générale de *symbole* en posant :

$$x \in \mathrm{Symb} \equiv \exists y \in \mathrm{Ent}\ [x = \langle y \rangle].$$

Ce concept appartient à Σ_0. Mais on a aussi :

$$x \notin \mathrm{Symb} \equiv x \notin \mathrm{Prem} \vee x = \xi \vee \exists y [x = \langle y \rangle \wedge \ y \notin \mathrm{Ent}] .$$

ce qui montre que $x \notin \mathrm{Symb}$ appartient aussi à Σ_0.

Donc $x \in \mathrm{Symb}$ appartient à Δ_0 .

Le concept de *variable* est défini par :

$$x \in \mathrm{Var} \equiv \exists y \in \mathrm{Ent}[x = \langle y \rangle \wedge \overline{12 + n + 1} < y] .$$

Ici encore, nous voyons que ce concept appartient à Δ_0.

La notion d'assemblage ($x \in \mathrm{Ass}$) est construite à partir des conditions de clôture liées aux concepts suivants :

$$\phi(x) \equiv x \in \mathrm{Symb}$$

$$\psi(x_1, x_2, y) \equiv y = x_1 * x_2.$$

Par le lemme 5, $x \in \mathrm{Ass}$ appartient à Σ_0. On a aussi dans S :

$$\vdash x \notin \mathrm{Ass} \leftrightarrow \exists y < x\ [\mathrm{Fin}(y) \notin \mathrm{Symb}] .$$

Ceci montre que la notion d'assemblage est dans Δ_0.

On ferait des remarques analogues pour la notion de séquence ($x \in \mathrm{Seq}$) déduite par clôture des concepts suivants :

$\phi(x) \equiv \exists\, y \in \mathrm{Ass}\ [x = \langle y \rangle]$,

$\psi(x_1, x_2, y) \equiv y = x_1 * x_2$.

Notons ici que l'on a :

$\vdash \neg\phi(x) \longleftrightarrow x \notin \mathrm{Prem}\ \vee x = \xi\ \vee \exists\, y\, [y \notin \mathrm{Ass} \wedge x = \langle y \rangle]$.

" x est une occurence de y dans z" se traduit par :

$x \langle\, z \wedge \mathrm{Fin}(x) = y.$

C'est donc un concept de Δ_0.

Les notions de terme et de formule relèvent à nouveau de la proposition 1. Explicitons à titee d'exemple la définition des termes si L est le langage de la théorie $\mathcal{A}^p$ décrite en 1.5. On part des concepts suivants :

$\phi_1(x) \equiv x \in \mathrm{Var}$,

$\phi_2(x) \equiv x = \bar{1}$,

$\psi_1(x_1, y) \equiv y = \bar{S} * \bar{(} * x_1 * \bar{)}$,

$\psi_2(x_1, x_2, y) \equiv y = x_1 * \bar{+} * x_2$,

$\psi_3(x_1, x_2, y) \equiv y = x_1 * \bar{\cdot} * x_2$.

Tous ces concepts sont dans Δ . Donc la notion de terme $(x \in \mathrm{Ter})$ appartient à Σ_0 . En réalité, elle appartient à Δ_0, ce qu'on peut montrer de la manière suivante :

- Par le lemme 7, le concept M(X) introduit dans la proposition 1 relatif à $\phi_1 \vee \phi_2$ et $\psi_1 \vee \psi_2 \vee \psi_3$ appartient à Δ_0 . Il suffit denc de montrer qu'on peut borner le quantificateur existentiel qui s'introduit dans l'expression de $x \in \mathrm{Ter}$. On y parvient en adaptant la remarque standard selon laquelle un terme est construit à partir d'une suite de ses sous-assemblages.

Une remarque analogue vaut pour le concept de formule ($x \in For$). La formalisation naturelle de la définition des occurences libres ou liées se fait au moyen de connexions et de quantifications bornées à partir des concepts déjà construits : ceci ne donne naissance qu'à des Δ_o-concepts. Il en va de même de la notion d'énoncé ($x \in En$) qui en dérive directement.

Les règles d'inférence se ramènent à des descriptions simples à partir des notions précédentes. Par exemple, la règle de détachement ("modus ponens") est traduite par le Δ_o-concept.

$$x_1 = \bar{(} * x_2 * \bar{)} * \bar{\rightarrow} * \bar{(} * y * \bar{)}.$$

Le traitement des substitutions relève de la technique de la section 1.4.3. On reste dans la classe des Σ_o-concepts, et comme le résultat est un concept fonctionnel, c'est un Δ_o-concept.

Cela étant, la description des axiomes logiques ($x \in AL$) ne produit que des Δ_o-concepts, liés à quelques formes utilisant les concepts précédents. Par le lemme 7, la notion de preuve logique est traduite par un Δ_o-concept. On en déduit que celle de *théorème logique* est un Σ_o-concept (et on peut montrer que ce n'est pas un Δ_o-concept).

Appelons *concept d'axiome* dans S, un concept $\alpha(x)$ (qui peut très bien dépendre de paramètres) pour lequel on a :

$$\vdash \alpha(x) \rightarrow x \in En \ .$$

A chaque concept d'axiome $\alpha(x)$, la proposition 1 associe un concept de théorème $Prov_\alpha(x)$.

Notons en particulier $\mathrm{Prov}_o(x)$ celui qui dérive de $x \neq x$. C'est une expression de : "x est un théorème logique".

Le lemme 2 et les remarques ci-dessus donnent immédiatement le :

LEMME 14. - Prov_α *appartient à* $\Sigma(\alpha(x))$.

On n'a pas en général $\mathrm{Prov}_\alpha(x) \in \Delta(\alpha(x), \neg\alpha(x))$, mais le lemme 7 montre que le concept de *preuve* correspondant à $\alpha(x)$ appartient, lui, à $\Delta(\alpha(x), \neg\alpha(x))$. Ceci fournit le résultat suivant qui découle aussi du lemme 7.

LEMME 15. - *Il existe* $\phi(x,y) \in \Delta(\alpha(x), \neg\alpha(x))$ *tel que :*

$$\vdash \mathrm{Prov}_\alpha(x) \longleftrightarrow \exists y[\phi(x,y)]$$

En résumé : Les notions de base numérotées de 1 à 13 donnent toutes naissance à des Δ_o-concepts.

La notion de théorème logique est Σ_o,

La notion relative $\mathrm{Prov}_\alpha(x)$ appartient à $\Sigma(\alpha)$.

Il convient maintenant de juger cette formalisation des définitions syntaxiques :

du point de vue extensionnel,

du point de vue intensionnel.

2.3. LE CONTENU EXTENSIONNEL DE CETTE FORMALISATION.

La réponse est contenue pour l'essentiel dans les lemmes 9, 10, 11, 12 et la proposition 2.

Les concepts de base sont décrits à l'intérieur de S_0 . Donc :

a. Les concepts qui formalisent les notions 1 à 13 sont des *représentations* de ces notions. Si S est compatible, le lemme 8 montre que ce sont des *traductions extensionnelles.*

b. $Prov_0(x)$ est *extensionnellement complet* pour la notion de théorème logique. Si S est ω -compatible, les lemmes 13 et 15 montrent que c'est une *traduction extensionnelle.*

Plus généralement :

PROPOSITION 3. - *Soit* $\mathcal{T}$ *une théorie de langage* L. *Notons* T *l'ensemble des axiomes propres de* $\mathcal{T}$. *Soit d'autre part un concept d'axiome* $\theta(x)$ *dans* S .

i. Si $\theta(x)$ *est extensionnellement complet pour* $x \in T$, $Prov_\theta(x)$ *est extensionnellement complet pour les théorèmes de* $\mathcal{T}$.

ii. Si $\theta(x)$ *est une représentation de* $x \in T$, *et si* S *est* ω*-compatible, alors* $Prov_\theta(x)$ *est une traduction extensionnelle de la notion de théorème de* $\mathcal{T}$.

2.4. L'ADEQUATION INTENSIONNELLE DE LA FORMALISATION.

Il ne suffit pas évidemment que les notions de la syntaxe soient converties explicitement en formules de S. Il faut encore qu'un lot suffisant de preuves concernant ces notions soient convertibles en démonstrations formelles dans S.

Grossièrement, on peut dire que toutes les preuves "constructives", fondées essentiellement sur le raisonnement par récurrence, sont reproductibles dans S (pour autant, bien entendu, qu'elles ne fassent intervenir que des notions définissables dans S). Il faudra éventuellement en adapter la formulation pour rester dans le cadre de S. Voici par exemple comment se manifeste le *théorème de la déduction :*

Soit $\alpha(x)$ un concept d'axiome dans S. On en définit un nouveau (dépendant d'un nouveau paramètre y) par :

$\beta(x) \equiv \alpha(x) \vee (x = y \wedge y \in En)$.

On peut alors, *pour chaque* $\alpha(x)$ (et uniformément) trouver une dérivation formelle dans S de :

$$Prov_{\beta}(x) \rightarrow Prov_{\alpha}(\overline{(} * y * \overline{)} * \overline{\rightarrow} * \overline{(} * x * \overline{)}) \ .$$

Il suffit d'adapter la démonstration standard par récurrence sur la longueur d'une preuve de x à partir de β.

L'affirmation portant sur tous les $\alpha(x)$ possibles est alors un métathéorème sur S : le "métathéorème de la déduction" procure une infinité d'exemples du "théorème de la déduction".

De manière générale, toutes les règles dérivées (réduction à l'absurde, généralisation, interversion des prémisses, etc. **se rétablissent** sans problème dans S, puisqu'en réalité leur preuve standard ne fait inter-

intervenir aucun principe étranger à ceux que nous avons mis dans les axiomes de S.

Par contre, il n'est pas question de trouver en tout Σ-système un cadre adéquat pour traiter la sémantique (sinon dans des versions constructives qui n'en restituent qu'un morceau).

2.5. CAS OU L CONTIENT LES CONSTANTES DE S.

Supposons désormais que L *contienne les constantes de* S '(et par suite de S_o). Examinons ce que cette situation apporte de nouveau.
Chaque objet syntaxique σ de S est canoniquement dénoté par un terme clos $\bar{\sigma}$ de S_o . A son tour $\bar{\sigma}$ est dénoté par un terme $\bar{\bar{\sigma}}$ de S_o. Ceci détermine une opération unaire sur $\mathfrak{A}_o$.

La définition explicite de cette opération utilise un procédé récurrent que nous avons appris à formaliser dans la section 1.4.3.

De manière précise, reprenons l'engendrement de l'univers au moyen des concepts $\phi(x)$, $\psi_1(x_1,y)$, $\psi_2(x_1,x_2,y)$ explicités dans l'exemple 4.

Calculons une fonction y = Not(x) au moyen des fonctions suivantes :

$F(x) = \bar{\bar{\xi}}$ (ξ étant un individu de L, est dénoté par un terme $\bar{\xi}$ de S_o),

$G_1(x) = \bar{\langle} * x * \bar{\rangle}$,

$G_2(x,y) = x * \bar{*} * y$.

L'opération Not satisfait donc aux relations suivantes :

Not $(\xi) = \bar{\xi}$,

$\mathrm{Not}(\langle x \rangle) = \bar{\langle} * \mathrm{Not}(x) * \bar{\rangle}$,

$\mathrm{Not}(x * y) = \mathrm{Not}(x) * \bar{*} * \mathrm{Not}(y)$.

Ce sont exactement les doubles formels des conditions de récurrence sur la structure standard.

Le procédé de définition montre clairement que $y = \mathrm{Not}(x)$ est un Σ_o-concept, et par suite un Δ_o-concept (lemme 4).

Le lemme 9 conduit au résultat suivant :

LEMME 16. - *Pour tout objet syntaxique* σ *de* L , $S_o^* \vdash x = \mathrm{Not}(\bar{\sigma}) \leftrightarrow x = \bar{\bar{\sigma}}$.

Par le lemme 9 , $S_o^* \vdash \bar{\bar{\sigma}} = \mathrm{Not}(\bar{\sigma})$.

On démontre ensuite $S_o^* \vdash \exists !\, x\, [x = \mathrm{Not}(\bar{\sigma})]$ par récurrence sur l'ordre de σ.

2.6. α-COMPLETUDE.

Introduisons une notation. Soit $A(x_1,\ldots,x_n)$ un terme ou une formule de L. $\overline{A(x_1,\ldots,x_n)}$ est un terme clos de S_o. Si on y remplace formellement chaque occurence de $\bar{x}_i$(en se limitant, si A est une formule, à celles qui proviennent d'une occurence libre de x_i dans A) par x_i, on obtient un terme, généralement non clos, que nous désignerons par $\bar{A}(x_1,\ldots,x_n)$.

Si $t_1,\ldots,t_n$ sont des termes de L, on a la relation suivante :

$$\bar{A}(\bar{t}_1,\ldots,\bar{t}_n) = \overline{A(t_1,\ldots,t_n)}.$$

DEFINITION. - Soit $\alpha(x)$ un concept d'axiome dans S. Une formule $F(x_1,\ldots,x_n)$ de S sera dite *α-complète* si elle satisfait à la condition suivante :

$$(3) \quad S \vdash F(x_1,\ldots,x_n) \rightarrow (\bigwedge_{i=1}^{n} y_i = \mathrm{Not}(x_i) \rightarrow \mathrm{Prov}_\alpha(\overline{F}(y_1,\ldots,y_n))).$$

C'est une propriété de la *formule*, et non du concept qu'elle définit. Par contre, α intervient bien en tant que *concept* dans S.
Nous dirons qu'un concept ϕ est *α-complet* s'il a au moins un représentant α-complet.

REMARQUE. Cette définition part de l'idée suivante : une proposition, énoncée dans un certain cadre conceptuel, peut être *vraie* et non *prouvable*. Mais il n'en reste pas moins que le seul pmoyen d'accéder *par des voies logiques* à la découverte de sa vérité est de la prouver (éventuellement dans un cadre plus large que le cadre d'origine). (3) exprime que, si F est vrai de certains objets $x_1,\ldots,x_n$, alors on peut le déduire des axiomes définis par α. L'analogie avec la complétude extensionnelle est claire, mais il s'agit ici d'une question interne au formalisme. Nous reviendrons sur ce point dans la section suivante.

LEMME 17. - *Les formules suivantes sont α-complètes pour tout α :*

$$x = y \ , \ x = \xi \ , \ y = \langle x \rangle \ , \quad z = x * y \ .$$

Il doit être clair que nous raisonnons *dans* S.

Soient x et y. Posons u = Not(x) et v = Not(y). En sorte que u et v "sont" des termes clos de S_0.

Supposons $x = y$. Alors $u = v$. Donc $u * \bar{=} * v$ "est" un théorème logique, et a fortiori Prov $(u * \bar{=} * v)$.

Supposons maintenant que $y = \langle x \rangle$. Alors $v = \bar{\langle} * u * \bar{\rangle}$, et par suite $v * \bar{=} * \bar{\langle} * u * \bar{\rangle}$ est un théorème logique.

Les autres cas sont analogues.

LEMME 18. - *Si* F *et* G *sont* α*-complètes, il en est de même de* $F \vee G$, $F \wedge G$, $\exists x [F]$.

Vérification immédiate.

En particulier, les formules qui définissent $x \prec y$, $y \succ x$, $x \notin$ Prem sont α-complètes pour tout α.

LEMME 20. - *Soit* $\alpha(x)$ *un concept d'axiome dans* S, *tel que* $\mathrm{Prov}_\alpha(x)$ *soit extensionnellement complet pour l'ensemble des axiomes de* S_o^*. *L'ensemble des formules* α*-complètes est* Σ*-clos. En particulier, toute* Σ_o*-formule est* α*-complète.*

D'après les lemmes 17 et 18, il suffit de vérifier la stabilité par les quantifications des types $\forall x \succ y$ et $\forall x \prec y$. Les deux se font de la même manière.

Soit F(x) une formule α-complète (si elle contient d'autres variables libres, la démonstration s'adapte en conséquence). Posons :

$$G(y) = \forall x \prec y \; [\phi(x)].$$

Par l'axiome 3, on peut représenter le concept $x \in \mathrm{Prem}$ par la Σ_o-formule :

$$x = \xi \vee \exists y \, [x = \langle y \rangle] = \mathrm{PREM}(x).$$

Par les lemmes 17 et 18, PREM(x) est α-complète.

Cela étant, passons dans S :

Soit $y \in \mathrm{Prem}$, tel que $G(y)$, c'est-à-dire $F(y)$. Posons $v = \mathrm{Not}(y)$. On a donc $\mathrm{Prov}_A(\bar{F}(v))$.

Or $F(y) \to \exists x < y \, [F(x)]$ est dérivé dans la logique seule (si on remplace $x < y$ par sadéfinition standard). On a donc aussi $\mathrm{Prov}_\alpha(\bar{G}(v))$.

Cela étant soient y et $z \in \mathrm{Prem}$, tels que $G(y * z)$, et que :

$$G(y) \to (v = \mathrm{Not}(y) \to \mathrm{Prov}_\alpha(\bar{G}(v))).$$

On a :

$$\mathrm{PREM}(z) \to (G(y * z) \leftrightarrow G(y) \wedge F(y * z)).$$

Ceci se démontre en n'utilisant que les axiomes 1 à 9 (cf. 1.3.5).

La preuve se formalise donc à partir de α, et l'on obtient, en posant $v = \mathrm{Not}(y)$ et $w = \mathrm{Not}(z)$ et en remarquant que l'on a déjà :

$$\mathrm{Prov}_\alpha(\overline{\mathrm{PREM}}(w)),$$

$$\mathrm{Prov}_\alpha(\bar{G}(v * \bar{*} * w) * \overline{\longleftrightarrow} * \bar{G}(v) * \bar{\wedge} * \bar{F}(v * \bar{*} * w)).$$

Cela étant, supposant $G(y * z)$, nous avons $F(y * z)$, donc :

$$\mathrm{Prov}_\alpha(\bar{F}(x * \bar{*} * w)).$$

Nous avons aussi G(y), et par hypothèse inductive $Prov_{\alpha}(\overline{G}(v))$.

Le résultat espéré en dérive, et par le corollaire 1 nous obtenons la condition $\underset{\sim}{3}$ pour G(x).

COROLLAIRE 3. - *Dans les conditions du lemme 20, si un concept d'axiome* $\theta(x)$ *dans* S *est* α*-complet,* $Prov_{\theta}(x)$ *est* α*-complet.*

Plus précisément, la démonstration de la proposition 1 fournit explicitement un représentant α-complet de $Prov_{\theta}(x)$ quand on part d'un représentant α-complet de $\theta(x)$.

Ce corollaire est parallèle à la proposition 3, (i).

Dans la majorité des cas, nous aurons besoin de moins de subtilités grâce au lemme suivant :

LEMME 21. - *Si* $\alpha(x)$ *est un concept d'axiome dans* S *extensionnellement complet pour l'ensemble des axiomes de* S, *alors pour tout concept* α*-complet* ϕ *, tout représentant de* ϕ *est* α*-complet.*

Si ϕ est α-complet, ϕ a un représentant α-complet de F. Pour tout autre représentant F', l'équivalence $F \longleftrightarrow F'$ se déduit dans S. Par la proposition 3 (i), $S \vdash Prov_{\alpha}(\overline{F} * \overline{\longleftrightarrow} * \overline{F}')$. Donc la condition (3) pour F implique la condition (3) pour F'.

Ainsi, sous l'hypothèse du lemme 21, il est à nouveau inutile de distinguer les concepts de leurs représentants.

REMARQUE. Si $\alpha(x)$ est extensionnellement complet pour les axiomes de S_o, le lemme 20 montre que tout Δ_o-concept est α-complet ainsi que sa négation. C'est là un équivalent formel du théorème sur la représentabilité des relations récursives dans l'arithmétique finie.

LEMME 22. - *On suppose* S *ω-compatible. Soit* $\alpha(x)$ *un concept d'axiome dans* S *extensionnellement compatible avec l'ensemble des théorèmes de* S, *et saturé. Soit* $\mathcal{C}_\alpha$ *la théorie du langage* L *dont les axiomes sont les énoncés* B *tels que* $S \vdash \alpha(\bar{B})$. *Si* $F(x)$ *est une formule α-complète dans* S *, on a pour tout objet syntaxique* σ :

$$S \vdash F(\bar{\sigma}) \Longleftrightarrow \mathcal{C}_\alpha \vdash F(\bar{\sigma})$$

S est une extension de $\mathcal{C}_\alpha$ d'où un sens évident.
$\alpha(x)$ est une représentation de l'ensemble des axiomes de $\mathcal{C}_\alpha$.

S étant ω-compatible, $Prov_\alpha(x)$ est une traduction extensionnelle de l'ensemble des théorèmes de $\mathcal{C}_\alpha$ (proposition 3 (ii)). Cela étant, si $S \vdash F(\bar{\sigma})$, par la condition (3) et le lemme 16 :

$$S \vdash Prov_\alpha(\bar{F}(\bar{\bar{\sigma}}))\ ,\ \text{soit}\ S \vdash Prov_\alpha(\overline{F(\bar{\sigma})}).$$

Donc $\mathcal{C}_\alpha \vdash F(\bar{\sigma})$.

Ainsi la A-complétude d'une formule a des conséquences relatives aux preuves dans S des exemples de celle-ci pour certains termes clos. Elle impose aussi des restrictions sur le contenu extensionnel de la formule :

Disons que deux formules F(x) et G(x) sont *extensionnellement équivalentes* si pour tout objet syntaxique σ :

$$S \vdash F(\bar{\sigma}) \Longleftrightarrow S \vdash G(\bar{\sigma}),$$

LEMME 23. - *Dans les conditions du lemme 22, toute formule* α*-complète est extensionnellement équivalente à un élément de* $\Sigma(\alpha)$.

Soit F(x) une formule α-complète. Posons :

$G(x) = \exists y\, [\, y = \mathrm{Not}(x) \wedge \mathrm{Prov}_\alpha(\bar{F}(y))\,]$.

$y = \mathrm{Not}(x)$ et $z = \bar{F}(y)$ sont des Δ_o-concepts, que l'on peut représenter par des Σ_o-formules. D'autre part Prov(x) appartient à $\Sigma(\alpha)$. Donc G(x) définit un concept de $\Sigma(\alpha)$. D'après la condition (3), $S \vdash F(x) \rightarrow G(x)$. Inversement, si $S \vdash G(\bar{\sigma})$, $S \vdash \mathrm{Prov}_\alpha(\overline{F(\bar{\sigma})})$ d'où $S \vdash F(\bar{\sigma})$ (cf. preuve du lemme 22).

LEMME 24. - *Etant donnée une formule* F(x) , *on peut trouver effectivement une formule* $F^*(x)$ *telle que :*

i. $F^*(x) \in \mathcal{P}(F)$,

ii. $\neg F^*(x)$ *est équivalent dans* S *à un élément de* $\mathcal{P}(\neg F)$,

iii. Pour que F(x) *soit* α*-complète pour un concept d'axiome* $\alpha(x)$, *il faut et il suffit que l'on ait :*

$$S \vdash F^*(x) \rightarrow \mathrm{Prov}_\alpha(x).$$

Posons :

$F^*(x) = \exists uv\ [F(u) \wedge v = \mathrm{Not}(u) \wedge x = \bar{F}(v)]$.

On a bien $F^*(x) \in \Sigma(F)$

Supposons que $F(x)$ soit α-complète pour un concept d'axiome $\alpha(x)$.

Soit x tel que $F^*(x)$. Donc il existe u et v avec :

$$F(u)\ ,\ v = \mathrm{Not}(u),\ x = \bar{F}(v).$$

Puisque F est α-complète, on a $\mathrm{Prov}_\alpha(x)$.

Inversement, si $F^*(x) \to \mathrm{Prov}_\alpha(x)$, soit x tel que $F(x)$. Posons $y = \mathrm{Not}(x)$ et $z = \bar{F}(y)$. On a $F^*(z)$, donc $\mathrm{Prov}_\alpha(z)$, et F est α-complète.

Il reste à montrer ii. Notons que :

$$S \vdash F^*(x) \leftrightarrow \exists u < x\, \exists v > u\, \exists xw[F(w) \wedge v = \mathrm{Not}(w) \wedge x = \bar{F}(v)].$$

D'où :

$$S \vdash \neg F^*(x) \leftrightarrow \forall u < x\, \forall v > u\, \forall w\ [v = \mathrm{Not}(w) \to (\neg F(w) \vee x \neq \bar{F}(v))]$$

On démontre (par induction sur x) :

$$S \vdash \mathrm{Not}(x) = \mathrm{Not}(y) \to x = y.$$

Ainsi la formule :

$$\forall w\ [v = \mathrm{Not}(w) \to (\neg F(w) \vee x \neq \bar{F}(v))]$$

est équivalente dans S à :

$$\forall w\ [v \neq \mathrm{Not}(w)] \vee \exists\ w\ [v = \mathrm{Not}(w) \wedge (\neg F(w) \vee x \neq \bar{F}(v)]\ .$$

Le second facteur appartient à $\mathcal{S}(\neg F)$. Quant au premier, il équivaut à la négation de : $\exists\ w\ [v = \mathrm{Not}(w)]$,

qui définit dans S un concept équivalent à celui de terme clos de S_0, lequel est un Δ_0-concept.

REMARQUES.

1. En particulier, $F^*(x)$ détermine un concept d'axiome $\phi(x)$ tel que $F(x)$ soit ϕ-complète.

2. Les conditions (i) et (ii) impliquent que si $F(x)$ est décidable sur les termes clos de S_o, il en est de même de $F^*(x)$.

Si $A(x)$ est une formule de S qui définit un concept d'axiome, posons :

$$A^+(x) = A(x) \vee A^*(x).$$

LEMME 25. - *Si* $A(x)$ *est extensionnellement complet pour les axiomes de* S_o, $A^+(x)$ *est* A^+*-complet.*

Car l'ensemble des formules A^+-complètes est Σ-clos, $A(x)$ est A^+-complet d'après le lemme 24, et $A^+ \in \Sigma(A)$.

Notons que l'on a encore $\neg A^+$ équivalent à un élément de $\Sigma(\neg A)$.

2.7. INTERPRETATION DE LA A-COMPLETUDE.

Soit $\mathcal{C}$ une extension d'un Σ-système S.

Nous nous proposons d'utiliser S pour axiomatiser la syntaxe de $\mathcal{C}$.

Le point crucial est dans le choix d'une formule $A(x)$ exprimant dans S : "x est un axiome de $\mathcal{C}$ ".

Feferman [1] a clairement démontré que le fait que $A(x)$ représente dans S l'ensemble des axiomes de $\mathcal{C}$ n'est pas en soi un gage d'adéquation. Il y a trop de formules représentant un même ensemble , et non équivalentes dans S, donc n'exprimant pas la *même chose* du point de vue de l'intention.

Si A(x) représente dans S l'ensemble des axiomes de $\mathcal{T}$, on a pour tout objet syntaxique σ:

(i) Si σ est un axiome de $\mathcal{T}$, $S \vdash A(\bar{\sigma})$,

(ii) Si σ n'est pas un axiome de $\mathcal{T}$, $S \vdash \neg A(\bar{\sigma})$,

Il en résulte notamment :

(i') Si σ est un axiome de $\mathcal{T}$, $\mathcal{T} \vdash A(\bar{\sigma})$

(ii') Si σ n'est pas un axiome de $\mathcal{T}$, $\mathcal{T} \vdash \neg A(\bar{\sigma})$.

A l'intérieur de $\mathcal{T}$, on ne peut pas parler de $\mathcal{T}$ autrement que par la médiation d'une expression A(x) des axiomes de $\mathcal{T}$. Mais A(x) *étant choisi,* il détermine *intentionnellement une* théorie dont on peut formellement explorer les propriétés dans S (ou dans $\mathcal{T}$). En particulier, on peut exprimer que A(x) est une représentation de A(x) dans la théorie définie par A(x), ce qui est l'équivalent formel des conditions (i') et (ii') ci-dessus. Cela donne la condition suivante :

(iii) A(x) et $\neg$ A(x) sont A-complètes.

Il paraît normal que pour être une *bonne représentation* de l'ensemble des axiomes de $\mathcal{T}$, A(x) soit tel que l'on puisse formellement dériver dans S un lot suffisant de propriétés de $\mathcal{T}$, pourvu qu'elles admettent une formulation naturelle dans S. C'est justement le cas des conditions (i') et (ii').

REMARQUE. Si A(x) est une Σ_o-formule extensionnellement complète pour les axiomes de S_o , le lemme 20 entraîne que A(x) est A-complète. C'est essentiellement le théorème 5.4. de Feferman [1] . Ce dernier remplaçait la troisième condition de dérivabilité d'Hilbert-Bernays. Il en sera de même ici pour la condition : " A(x) est A-complet".

3. LE SECOND THEOREM DE GÖDEL.

3.1. CHOIX D'UN CADRE.

Soit $\mathcal{T}$ une théorie de langage L. La *donnée* effective de $\mathcal{T}$ suppose une certaine *manière* de la donner, c'est-à-dire un critère -non nécessairement effectif au sens de récursif - pour en reconnaître les axiomes. Nous supposons qu'on ait pu formaliser cette donnée dans un Σ-système S. On dispose notamment dans S d'un concept d'axiome $\theta(x)$ que pour certaines raisons - que nous ne cherchons pas à expliciter pour le moment - nous considérons comme une traduction de "x est un axiome de $\mathcal{T}$".

Si $\alpha(x)$ est un concept d'axiome quelconque dans S, posons :

$$\mathrm{Comp}_\alpha \equiv \neg \exists x \; [\mathrm{Prov}_\alpha(x) \wedge \mathrm{Prov}_\alpha(\bar{\neg} * \bar{(} * \; x * \bar{)})]$$

Comp_α exprime la compatibilité de la théorie dont l'ensemble des axiomes est intentionnellement décrit par α. En particulier, comp_θ exprime la compatibilité de $\mathcal{T}$, dans l'exacte mesure où $\theta(x)$ exprime l'appartenance à l'ensemble des axiomes de $\mathcal{T}$.

Nous nous plaçons dans l'hypothèse particulière où S est interprétable dans $\mathcal{C}$. Intuitivement, cela signifie que $\mathcal{C}$ est "assez forte" pour formaliser sa propre description. Une interprétation de S dans $\mathcal{C}$ comporte une extension par définition $\mathcal{C}^+$ de $\mathcal{C}$, contenant les constantes de S et un prédicat unaire N tel que les relativisés par N des axiomes de S soient déduits dans $\mathcal{C}^+$.

Pour simplifier l'exposé, contentons nous du cas où $\mathcal{C}^+$ est une extension de S, laissant tomber N et la relativisation devenus inutiles. Ce n'est peut-être pas la circonstance la plus naturelle, mais elle suffit pour suggérer la preuve générale obtenue en relativisant çà et là quelques quantificateurs.

Par rapport à $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}^+$ a un nombre fini de constantes nouvelles et d'axiomes nouveaux $\alpha_1,\dots,\alpha_n$. S convient aussi bien à la description du langage L^+ de $\mathcal{C}^+$, et si nous posons :

$$\theta^+(x) \equiv \theta(x) \vee x = \overline{\alpha}_1 \vee \dots \vee x = \overline{\alpha}_n .$$

Nous avons (en formalisant la propriété de conservation des définitions) :

$$S \vdash \mathrm{Comp}_\theta \longleftrightarrow \mathrm{Comp}_{\theta^+} .$$

On peut donc finalement se restreindre au cas où $\mathcal{C}$ *est une extension* de S. Ainsi dans ce qui suit nous considérons :

- un Σ-système S ,
- une extension $\mathcal{C}$ de S, de langage L .

S est considéré comme théorie des objets syntaxiques de L.

Nous supposons une fois pour toutes S *compatible*.

3.2. EXPRESSION FORMELLE DES AXIOMES DE $\mathcal{C}$.

Demandons-nous maintenant pour quelles raisons un concept d'axiome $\alpha(x)$ dans S peut être considéré comme une définition formelle des axiomes de $\mathcal{C}$. Cela dépend de la manière dont $\mathcal{C}$ est donnée. Il y a le cas trivial où $\mathcal{C}$ a un nombre fini d'axiomes. Dans d'autres circonstances (cas de l'arithmétique, de la théorie de Zermelo-Fraenkel) on a un schéma qui donne naissance à une infinité d'axiomes, mais dont on a une description naturelle dans S_o (comme ce fut le cas pour les axiomes logiques). En toute généralité on peut seulement énumérer quelques conditions d'adéquation plus ou moins désirables. Ici encore on peut les classer en *conditions extentionnelles* et *conditions intentionnelles*.

Conditions d'adéquation extentionnelle.

La plus forte est le cas où $\alpha(x)$ est une *représentation* dans S de l'ensemble des axiomes de $\mathcal{C}$. S étant compatible, cela revient à dire que dans toute extension compatible de S, $\alpha(x)$ est une traduction extentionnelle de la même relation.

On peut affaiblir cette condition en posant que $\alpha(x)$ est une représentation de l'ensemble des axiomes de $\mathcal{C}$ dans une extension "correcte" de S. En particulier, disons que $\alpha(x)$ est une *sous-représentation* d'une relation R, si $\alpha(x)$ est une représentation de R dans un Σ-système S' ω-compatible contenant S (ce qui suppose S ω-compatible).

Par exemple, si $\alpha(x)$ est un concept dans S_o , $\alpha(x)$ est une sous-représentation de la relation qu'il détermine dans le modèle standard.

Il n'est pas impossible qu'un même concept soit une sous-représentation de plusieurs relations distinctes. Toutefois :

LEMME 24. - *Si* S *est* ω*-compatible, et si* $\alpha(x)$ *est de la forme* $\exists y \quad \beta(x,y)$, *où* $\beta(x,y)$ *est saturé dans* S , *alors* $\alpha(x)$ *est une rsous-représentation d'au plus une relation.*

Car dans toute extension ω -compatible S' de S, $\alpha(x)$ est une traduction extensionnelle de :

$$\text{il existe } \mu \text{ , } S \vdash \beta(\sigma,\mu) \text{ .}$$

Conditions d'adéquation intentionnelle.

Certaines propriétés de $\mathcal{T}$ ont une traduction dans S pour autant qu'on ait déjà une expression de la notion d'axiome de $\mathcal{T}$, $\alpha(x)$. Par exemple $Comp_\alpha$ exprime la compatibilité de $\mathcal{T}$. Cherchons des propriétés relatives à la description de $\mathcal{T}$. $\mathcal{T}$ étant une extension de S c'est en particulier une extension de S_o^* . Si $\alpha_1,\ldots,\alpha_9$ sont les axiomes de S_o^*, on a donc la condition suivante :

$$S \vdash x = \overline{\alpha}_1 \vee \ldots \vee x = \overline{\alpha}_9 \rightarrow \alpha(x).$$

(Par contre, exprimer que $\mathcal{T}$ est une extension de S nous renvoie d'abord au problème de l'expression des axiomes de S, dont l'ensemble est infini).

Nous avons vu que si $\alpha(x)$ est une représentation dans $\mathcal{C}$ de l'ensemble des axiomes de $\mathcal{C}$, cela s'exprime formellement dans S par la α-complétude de A(x) et $\neg$ A(x), pour un certain représentant A(x) de $\alpha(x)$.

Plus particulièrement, la condition "A(x) est α-complète " peut s'interpréter comme une manière d'exprimer que la donnée de chaque axiome α de $\mathcal{C}$ s'accompagne d'un moyen de prouver dans $\mathcal{C}$ que α est un axiome de $\mathcal{C}$, ou encore, c'est une manière d'attester au niveau formel que $\alpha(x)$ est extentionnellement complet dans $\mathcal{C}$ pour l'ensemble des axiomes de $\mathcal{C}$. Le lemme suivant précise le lien entre la propriété proprement dite et son expression formelle.

LEMME 25. - *Soit* $\mathcal{C}$ *une extension de* S. *Si* A(x) *est une sous-représentation de l'ensemble des axiomes de* $\mathcal{C}$ *dans* S *et si* A(x) *est* A-*complète dans* $\mathcal{S}$. *Alors* A(x) *est extensionnellement complète dans* $\mathcal{C}$ *pour l'ensemble des axiomes de* $\mathcal{C}$.

Il existe une extension ω-compatible S' de S dans laquelle A(x) représente l'ensemble des axiomes de $\mathcal{C}$. Alors (proposition 3) $\text{Prov}_A(x)$ est une traduction extensionnelle dans S' de la notion de théorème de $\mathcal{C}$. Cela étant, si α est un théorème de $\mathcal{C}$, $S' \vdash A(\bar{\alpha})$, donc (puisque S' est extension de S) $S' \vdash \text{Prov}_A(\overline{\mathbf{A}(\bar{\alpha})})$. D'où $\mathcal{C} \vdash A(\bar{\alpha})$.

3.3. LA METHODE DIAGONALE.

Soit A(x) une formule qui détermine dans S un concept d'axiome $a(x)$.

$Prov_A(x)$ désigne dans ce qui suit le représentant de $Prov_\alpha(x)$ obtenu en effectuant sur A(x) les constructions de la proposition 1. En particulier $Prov_A(x) \in \mathcal{P}(A(x))$ (et bien entendu $Prov_\alpha(x) \in \Sigma(\alpha)$).

Posons :

$t(x,y) = \overline{\exists x_1}\ \overline{[* \bar{x}_1 * \bar{=} * y * \bar{\wedge} * x *]}$

C'est un terme de S_o. Soit la formule :

$F_A(x) = \forall\, y\, [y = Not(x) \to \neg Prov_A(t(x,y))]$.

Posons enfin :

$U_A = \exists x_1 [x_1 = \overline{F_A(x_1)} \wedge F_A(x_1)]$.

LEMME 26. - $S^* \vdash U_A \leftrightarrow \neg Prov_A(\overline{U}_A)$.

Nous savons que :

$S^*_o \vdash y = Not(\overline{F_A(x_1)}) \leftrightarrow y = \overline{\overline{F_A(x_1)}}$ (Lemme 16).

On remarque aussi que :

$t(\overline{F_A(x_1)}, \overline{\overline{F_A(x_1)}}) = \overline{U}_A$;

Et que $U_A \leftrightarrow F_A(\overline{F_A(x_1)})$ est un théorème logique.

Donc : $S^* \vdash U_A \leftrightarrow \forall y [y = \overline{\overline{F_A(x_1)}} \to \neg Prov_A(t(\overline{F_A(x_1)}, y))]$.

Soit : $S^* \vdash U_A \leftrightarrow \neg Prov_A(t(\overline{F_A(x_1)}, \overline{\overline{F_A(x_1)}}))$, ce qui est le résultat demandé.

On pourrait très facilement dériver du lemme 26 le *premier* théorème de Godel, dont voici une moitié :

LEMME 27. - *Soit* $\mathcal{C}$ *une extension de* S. *Si* A(x) *est extentionnellement complet dans* $\mathcal{C}$ *pour l'ensemble des axiomes de* $\mathcal{C}$, *et si* $\mathcal{C} \vdash U_A$, $\mathcal{C}$ *est incompatible.*

Si $\mathcal{C} \vdash U_A$, $\mathcal{C} \vdash \neg \mathrm{Prov}_A(\overline{U}_A)$ (lemme 26). Mais d'après l'hypothèse sur A(x) , $\mathcal{C} \vdash \mathrm{Prov}_A(\overline{U}_A)$. Donc $\mathcal{C}$ est incompatible.

Le point crucial du *second* **théorème est une** formalisation du **lemme** précédent.

LEMME 28. - *Soit* A(x) *une formule qui définit un concept d'axiome dans* S. *On suppose que :*

a. A(x) *est extensionnellement complète dans* S *pour les 9 axiomes de* S_o^*.

b. A(x) *est* A-*complète*

Alors $S \vdash \mathrm{Comp}_A \rightarrow U_A$

D'après le lemme 20 et la condition a, l'ensemble des formules A-complètes est Σ-clos. Comme il contient A(x), il contient tout élément de $\mathcal{G}$ (A) et en particulier $\mathrm{Prov}_A(x)$. On a donc :

$$S \vdash \mathrm{Prov}_A(\overline{U}_A) \rightarrow (y = \mathrm{Not}(\overline{U}_A) \rightarrow \mathrm{Prov}_A(\overline{\mathrm{Prov}_A(y)})).$$

Soit, compte tenu du lemme 16 :

$$S \vdash \mathrm{Prov}_A(\overline{U}_A) \rightarrow \mathrm{Prov}_A(\overline{\mathrm{Prov}_A}(\overline{\overline{U}}_A)),$$

où $\overline{\mathrm{Prov}_A}(\overline{\overline{U}}_A) = \overline{\mathrm{Prov}_A(\overline{U}_A)}$.

Ainsi :

(1) $\quad S \vdash \mathrm{Prov}_A(\overline{U}_A) \rightarrow \mathrm{Prov}_A(\overline{\mathrm{Prov}_A(\overline{U}_A)})$.

D'autre part, par le lemme 26 :

$$S^{*} \vdash U_A \rightarrow \neg\, \mathrm{Prov}_A(\overline{U}_A)$$

Donc par la condition a et la proposition 3 :

$$S \vdash \mathrm{Prov}_A(\overline{U_A \rightarrow \neg\, \mathrm{Prov}_A(\overline{U}_A)})$$

D'où $\quad S \vdash \mathrm{Prov}_A(\overline{U}_A) \rightarrow \mathrm{Prov}_A(\overline{\neg\, \mathrm{Prov}_A(\overline{U}_A)})$.

La confrontation de (1) et (2) donne :

$$S \vdash \mathrm{Prov}_A(\overline{U}_A) \rightarrow \neg\, \mathrm{Comp}_A.$$

Ce qui, compte tenu du lemme 26, constitue le résultat annoncé.

3.4. LE SECOND THEOREME DE GODEL.

PROPOSITION 4. - *Soit $\mathcal{T}$ une extension compatible d'un Σ-système* S. *Soit* A(x) *une formule de* S *définissant un concept d'axiome extensionnellement complet dans* S *pour les axiomes de* S_o^{*}. *Si* $\mathcal{T} \vdash \mathrm{Comp}_A$, A(x) *ne peut être à la fois* A*-complète dans* S *et extensionnellement complète dans* $\mathcal{T}$ *pour l'ensemble des axiomes de* $\mathcal{T}$ *.*

Supposons A(x) A-complète dans S. D'après le lemme 28 :

$$S \vdash \mathrm{Comp}_A \rightarrow U_A$$

Donc si $\mathcal{C} \vdash \mathrm{Comp}_A$, $\mathcal{C} \vdash U_A$.

Par le lemme 27, si $\mathcal{C}$ est compatible il est impossible que A(x) soit extensionnellement complète dans $\mathcal{C}$ pour l'ensemble des axiomes de $\mathcal{C}$.

COROLLAIRE 4. - *Soit* $\mathcal{C}$ *une extension compatible d'un* Σ*-système* S. *Si* $\alpha(x)$ *est un* Σ_α *-concept d'axiome dans* S *, extensionnellement complet dans* S *pour l'ensemble des axiomes de* $\mathcal{C}$ *,* Comp_α *n'est pas déduit dans* $\mathcal{C}$ *.*

Soit $A(x) \in \mathcal{S}_o$ un représentant de $\alpha(x)$. Posons $B(x) = x \in E_n \wedge \mathrm{Prov}_A(x)$. On a encore $B(x) \in \mathcal{S}_o$ et de plus :

$$S \vdash \mathrm{Prov}_B(x) \leftrightarrow \mathrm{Prov}_A(x), \text{ de sorte que :}$$

$$S \vdash \mathrm{Comp}_B \leftrightarrow \mathrm{Comp}_A$$

Si A(x) est extentionnellement complet dans S pour l'ensemble des axiomes de $\mathcal{C}$, B(x) est extentionnellement complet dans S pour l'ensemble des axiomes de S_o^*. L'ensemble des formules B-complètes est donc Σ-clos et puisque $B \in \mathcal{S}_o$, B(x) est B-complète. Il suffit alors d'appliquer la proposition 4.

PROPOSITION 5. - *Soit* $\mathcal{C}$ *une extension compatible d'un* Σ*-système* ω*-compatible* S. *Soit* A(x) *une sous-représentation dans* S *de l'ensemble des axiomes de* $\mathcal{C}$ *. Si* A(x) *est* A*-complète dans* S *et extentionnellement complète dans* S *pour les axiomes de* S_o^*, Comp_A *n'est pas déduit dans* $\mathcal{C}$.

D'après le lemme 24, A(x) est extensionnellement complète dans $\mathcal{E}$ pour l'ensemble des axiomes de $\mathcal{E}$. On peut donc appliquer la proposition 4.

3.5. DISCUSSION.

Dans notre présentation, la notion de Σ_o-concept joue un rôle équivalent à celui des RE-formules au sens de Feferman [1] . De manière précise, il existe une PR-extension du système $\mathcal{P}$ de Feferman -l'arithmétique formelle- qui est un Σ-système extension conservative de S_o. Les Σ_o-concepts dans S_o s'identifient aux RE-concepts.

Ainsi le corollaire 4 est essentiellement équivalent au théorème 5.6. de Feferman [1] .

La notion de A-complétude abstraît la propriété exprimée par le théorème 5.4. de [1] . En ce sens, on peut lui reprocher de résulter d'une lecture à l'envers de la preuve de Feferman. Nous pensons cependant que la notion est intéressante en elle-même, pour plusieurs raisons .

Elle a un contenu significatif dans l'ensemble des conditions d'adéquation.

Elle jouit de bonnes propriétés de stabilité (parallèles à celles de la notion correspondante de complétude extensionnelle) qui généralisent celles des RE-formules et expliquent dans une certaine mesure que ces dernières fournissent des représentations privilégiées pour les relations récursivement énumérables (les conditions extensionnelles de stabilité de ces relations sont rétablies au niveau formel).

La proposition 4 est une forme symétrique du second théorème de Gödel : elle exhibe une incompatibilité entre deux-niveaux d'adéquation. La proposition 5 fait apparaître cependant que ces niveaux ne sont pas de statuts égaux : le niveau formel est plus fort, sous réserve de conditions d'adéquation très faibles, ce que l'on pouvait d'ailleurs suspecter *à priori.*

Le théorème 5.9. dans [1] établit pour certaines théories $\mathcal{C}$ -telles que l'arithmétique formelle, ZF, ou notre système S_0 - un procédé qui à toute représentation A de l'ensemble des axiomes de $\mathcal{C}$ dans le Σ-système S associe une autre représentation A^* pour laquelle $S \vdash Comp_{A^*}$. La proposition 4 ci-dessus montre que $A^*(x)$ ne peut être A^*-complète dans S. Une analyse de la construction impliquée dans 5.9 fait apparaître que $Comp_{A^*}$ n'exprime la compatibilité de $\mathcal{C}$ que si on sait déjà que $\mathcal{C}$ est compatible (on a $S \vdash \forall x\, [A(x) \rightarrow A^*(x)] \leftrightarrow Comp_A$). Ainsi $A^*(x)$ n'est pas une expression intentionnellement correcte de la notion d'axiome de $\mathcal{C}$. Cet exemple en appelle un autre, symétrique : trouver une expression A(x) A-complète de l'ensemble des axiomes de $\mathcal{C}$ pour laquelle $\mathcal{C} \vdash Comp_A$. La proposition 5 paraît exclure la possibilité d'une réalisation autre que fortement tératologique de eette situation.

Terminons par une remarque : la *négation* de la A-complétude peut très bien faire partie de conditions *d'adéquation*. C'est notamment le cas si on cherche à décrire une théorie non récursivement énumérable dans une théorie récursivememt énumérable. Ainsi on dispose dans ZF d'une définition *intentionnellement* irréprochable de l'ensemble des énoncés de l'arithmétique valides dans le modèle standard. Cette définition ne saurait être extensionnellement complète et, puisqu'on établit dans ZF l'existence de tels énoncés valides mais dont la validité n'est pas démontrable, elle n'est pas complète vis à vis d'une expression normale des axiomes de ZF. Cette situation ne peut se produire quand on interprète la syntaxe d'une théorie dans elle-même, mais il n'est pas exclu *a priori* qu'on soit naturellement invité à tourner le dos à l'auto-complétude en certains cas. Les formes connues du second théorème de Gödel ne donnent aucun résultat pour une telle éventualité.

Plus généralement, on peut se demander s'il existe des formes *purement intentionnelles* du second théorème de Gödel, alors que celles que nous avons présentées expriment plutôt un équilibre entre l'aspect extensionnel et l'aspect intentionnel. (En un sens, la non dérivabilité de l'existence d'un cardinal inaccessible dans ZF est une forme intentionnelle du second théorème de Gödel, mais la récursivité de ZF permet de la réduire au cas usuel).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] S. FEFERMAN, *Arithmetization of metamathematics in a general setting*, Fund. Math. V. 49 (1960), p. 35-92.

[2] P. FINDLAY, *Godelian sentences : a non numerical approach*, Mind n.s, v. 51 (1942), p. 259-265.

[3] K. GÖDEL, *Uber formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und Wervander System I*, Monats, für Math. und Phys. vol. 38 (1931), p p. 173-198 (traduction anglaise dans "the undecidable" - textes receuillis par M. Davis Raven Press New-York (1965)).

[4] D. HILBERT et P. BERNAYS, *Grundlagen der mathematik*, Springer Verlag, Vol. 2 Berlin (1939).

[5] J. LADRIERE, *Les limitations internes des formalismes*, Gauthiers-Villars, Paris (1957).

[6] R. SHOENFIELD, *Mathematical logic*, Addison Wesley - Londres (1967).

[7] W. V. QUINE, *Concatenation as a basis for arithmetic*, Journal of Symb. Log. Vol. 11 (1946), p. 105-114.

J.F. PABION
Département de Mathématiques
Université Claude Bernard - Lyon 1
43, bd du 11 novembre 1918
69621-VILLEURBANNE