Publications du Département de mathématiques de Lyon

Alain Villeneuve

Une remarque sur le lemme de Borel-Cantelli

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1974, tome 11, fascicule 4
, p. 1-25
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1974__11_4_1_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1974 t.11-4

UNE REMARQUE SUR LE LEMME DE BOREL-CANTELLI

par Alain VILLENEUVE

0 - INTRODUCTION.

Dans ce qui suit, on désignera par $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et par $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements de $\mathcal{A}$.

Pour évaluer $P(\limsup_{n\geq 1} A_n)$, le traditionnel lemme de Borel-Cantelli règle définitivement le cas où $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < +\infty$: $P(\limsup_{n\geq 1} A_n) = 0$; et dans le cas où $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty$, il exige l'indépendance mutuelle des A_n pour conclure que $P(\limsup_{n\geq 1} A_n) = 1$.

R.M. Fischler [5] [6] [7] a donné des extensions de ce lemme dans le cas où la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ est mélangeante. Les différentes démonstrations proposées sont sans rapport avec la démonstration du cas traditionnel et, par ailleurs, Fischler [5] évoque la possibilité d'un point de vue différent à partir de résultats de Sucheston sur les suites 0-1.

Le but de cette note est d'abord de reprendre le point de vue évoqué par Fischler dans [5] pour donner de nouvelles démonstrations des extensions de Fischler et préciser leur lien avec le cas traditionnel, puis d'examiner le cas où la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ est stable pour montrer que le point de vue adopté est assez restrictif ; enfin de donner une extension dans le cas où la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ est mélangeante de Cesáro ou stable de Cesáro. Une possibilité d'extension est proposée en conclusion.

1 - CAS OU LA SUITE $(A_n)_{n\geq 1}$ EST MELANGEANTE.

Si $(B_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'événements de $\mathcal{A}$, pour tout $n\geq 1$, on désigne par 1_{B_n} l'indicatrice de B_n et par $\mathcal{A}(1_{B_n}, 1_{B_{n+1}}, \dots)$ la sous-tribu de $\mathcal{A}$ engendrée par les variables aléatoires $1_{B_n}, 1_{B_{n+1}}, \dots$.

DEFINITION 1. - *Une suite $(B_n)_{n\geq 1}$ d'événements de $\mathcal{A}$ est dite* 0-1 *si la tribu queue $\mathcal{A}_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}(1_{B_n}, 1_{B_{n+1}}, \dots)$ est équivalente à la tribu $\{\emptyset,\Omega\}$, c'est-à-dire si* $P(A) = 0$ *ou* $P(A) = 1$ *pour tout* $A \in \mathcal{A}_\infty$.

Si l'on envisage une autre probabilité Π sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et si l'équivalence avec la tribu $\{\emptyset,\Omega\}$ a lieu selon Π, on parlera de suite Π-(0-1).

La remarque élémentaire qui sert de point de départ est résumée dans le lemme suivant :

LEMME 1. - *Si la suite* $(A_n)_{n\geqslant 1}$ *admet une sous-suite* $(B_n)_{n\geqslant 1}$ *telle que :*

a) $(B_n)_{n\geqslant 1}$ *est une suite* $0-1$.

b) la suite $(1_{B_n})_{n\geqslant 1}$ *ne converge pas presque sûrement vers* 0, *alors*

$P(\limsup_{n\geqslant 1} A_n) = 1.$

Preuve. - De façon générale $D = \{\omega\in\Omega \mid 1_{B_n}(\omega) \not\to 0\}$ appartient à la tribu queue $\mathcal{A}_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}(1_{B_n}, 1_{B_{n+1}}, \ldots)$ associée à la suite $(1_{B_n})_{n\geqslant 1}$, car $\complement_\Omega D = \bigcap_{k=1}^{\infty} (\bigcup_{p=n}^{\infty} (\bigcap_{m=p}^{\infty} \{\omega\in\Omega \mid 1_{B_m}(\omega) | < \frac{1}{k}\}))$ pour tout $n\geqslant 1$, et, puisque la suite $(B_n)_{n\geqslant 1}$ est 0-1, $P(D) = 0$ ou $P(D) = 1$.

Puisque la suite $(1_{B_m})_{n\geqslant 1}$ ne converge pas presque sûrement vers 0, $P(D)>0$, donc $P(D) = 1$.

Or $D = \limsup_{n\geqslant 1} B_n$, car $1_{B_n}(\Omega) \subseteq \{0,1\}$ pour tout $n\geqslant 1$, et, puisque $(B_n)_{n\geqslant 1}$ est une sous-suite de $(A_n)_{n\geqslant 1}$, $D = \limsup_{n\geqslant 1} B_n \subsetneq \limsup_{n\geqslant 1} A_n$; donc $P(\limsup_{n\geqslant 1} A_n) = 1.$

La forme traditionnelle du lemme de Borel-Cantelli, établie habituellement à partir de la divergence de la série à termes négatifs $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1-P(A_n))$ (divergence qui montre, moyennant l'indépendance mutuelle des A_n, que

$P(\bigcap_{n=p}^{\infty} \complement_{\Omega} A_n) = 0$ pour tout $p \geqslant 1$, donc que $P(\liminf_{n \geqslant 1} \complement_{\Omega} A_n) = 0)$, apparait alors comme une conséquence du lemme 1, tout au moins quand $P(A_n) \not\to 0$.

COROLLAIRE 1. (Borel-Cantelli). - *Si les évènements $A_n (n \geqslant 1)$ sont mutuellement indépendants et si la série $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ diverge, on a :* $P(\limsup_{n \geqslant 1} A_n) = 1$.

Preuve. - Puisque les évènements A_n sont mutuellement indépendants, il résulte de la loi du tout ou rien de Kolmogorov que la suite $(A_n)_{n \geqslant 1}$ est 0-1. La suite $(1_{A_n})_{n \geqslant 1}$ ne converge pas presque sûrement vers 0. En effet, si $P(A_n) \not\to 0$, c'est une conséquence du théorème de la convergence dominée de Lebesgue, car $|1_{A_n}| \leqslant 1$ pour tout $n \geqslant 1$.

Si $\lim_{n \to +\infty} P(A_n) = 0$, puisque la série $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ diverge, il en est de même de la série $\sum_{n=1}^{\infty} (P(A_n)(1-P(A_n))$ et, puisque les variables aléatoires 1_{B_n} sont mutuellement indépendantes, il résulte du théorème de Lyapounov (cf. H. Cramer [3] p. 62) que $\frac{1_{A_1}+\ldots+1_{A_n} - (P(A_1)+\ldots+P(A_n))}{[P(A_1)(1-P(A_1))+\ldots+P(A_n)(1-P(A_n))]^{1/2}}$ converge en loi vers une loi de Gauss réduite ; et, en particulier, si $X_n = 1_{A_1}+\ldots+1_{A_n} - (P(A_1)+\ldots+P(A_n))$, $\lim_{n\to+\infty} P\{X_n < 0\} = \frac{1}{2}$.

Or, si la suite $(1_{A_n})_{n \geqslant 1}$ converge presque sûrement vers 0, la série $\sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n}$

converge presque sûrement, car $1_{A_n}(\Omega) \subset \{0,1\}$ pour tout $n \geq 1$, et, à partir de la divergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$, $X_n \xrightarrow{p.s.} -\infty$.

D'où $\lim_{n\to+\infty} P\{X_n < 0\} = 1$ et une contradiction.

Le lemme 1 permet alors de conclure que $P(\limsup_{n\geq 1} A_n) = 1$.

L'intérêt de cette démonstration, beaucoup moins directe que la démonstration habituelle , est donné par la remarque 1 ci-dessous.

Comme deuxième conséquence, le lemme 1 redonne avec de nouvelles démonstrations les extensions de Fischler aux suites mélangeantes.

DEFINITION 2. - *Une suite* $(B_n)_{n\geq 1}$ *d'évenements de* $\mathcal{A}$ *est dite* **mélangeante** *si pour tout* $A \in \mathcal{A}$, *on a* $\lim_{n\to+\infty} | P(B_n \cap A) - P(B_n) P(A) | = 0$.

Si, de plus, $\lim_{n\to+\infty} P(B_n) = \alpha$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$, *la suite* $(B_n)_{n\geq 1}$ *est dite* **mélangeante de densité** α .

COROLLAIRE 2 (FISCHLER). - *Si la suite* $(A_n)_{n\geq 1}$ *est mélangeante et si la suite numérique* $(P(A_n))_{n\geq 1}$ *ne converge pas vers* 0, *on a* $P(\limsup_{n\geq 1} A_n) = 1$.

Preuve. - Si la suite $(P(A_n))_{n\geq 1}$, à valeurs dans le compact $[0,1]$, ne converge pas vers 0, la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ admet une sous-suite $(B_n)_{n\geq 1}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} P(B_n) = \alpha > 0$.

Puisque la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ est mélangeante, selon Sucheston [11], la sous-suite $(B_n)_{n\geq 1}$ de $(A_n)_{n\geq 1}$ admet elle-même une sous-suite $(C_n)_{n\geq 1}$ qui est 0-1.

Puisque $\lim_{n\to+\infty} P(B_n) = \alpha > 0$, donc aussi $\lim_{n\to+\infty} P(C_n) = \alpha > 0$, il résulte du théorème de la convergence dominée de Lebesgue que la suite $(1_{C_n})_{n\geq 1}$ ne converge pas presque sûrement vers 0.

D'où $P(\limsup_{n\geq 1} A_n) = 1$ à partir du lemme 1.

REMARQUE 1- Les deux démonstrations précédentes montrent donc en particulier que la forme traditionnelle du lemme de Borel-Cantelli et la première extension de Fischler ont en fait la même origine : l'existence d'une sous-suite 0-1 qui a de bonnes propriétés. La proposition du paragraphe 2 montrera au contraire qu'il n'en est pas ainsi pour l'extension aux suites stables.

Dans le cas particulier où $\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = 0$ (ce qui implique le caractère mélangeant de la suite $(A_n)_{n\geq 1}$), Fischler a d'abord montré que l'on pouvait avoir $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty$ et $0 < P(\limsup_{n\geq 1} A_n) < 1$ [5] ; puis, sous l'hypothèse de l'existence d'une décomposition finie de la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ en sous-suites 0-1, que $P(\limsup_{n\geq 1} A_n) = 0$ ou $P(\limsup_{n\geq 1} A_n) = 1$ [7].

Montrons que ce dernier résultat est une conséquence immédiate du lemme 1.

COROLLAIRE 3 (FISCHLER). - *Si la suite* $(A_n)_{n\geq 1}$ *est telle que*

$\lim\limits_{n \to +\infty} P(A_n) = 0$ *(donc mélangeante),*

$(A_n)_{n\geq 1}$ *a une décomposition finie en sous suites* 0-1, *on a*

$P(\limsup\limits_{n\geq 1} A_n) = 0$ *ou* $P(\limsup\limits_{n\geq 1} A_n) = 1$.

Précisons d'abord l'hypothèse de l'existence d'une décomposition finie en sous-suites 0-1 ; à partir du résultat de Sucheston [11] affirmant que toute sous-suite d'une suite mélangeante admet elle -même une sous-suite 0-1, il est toujours possible d'assurer l'existence d'une décomposition d'une suite mélangeante $(A_n)_{n\geq 1}$ en une famille au plus dénombrable de sous-suites $(A_n^j)_{n\geq 1}$ $(j=1,2,\ldots)$ qui sont toutes 0-1 (chaque A_n appartenant à une et une seule sous-suite $(A_n^j)_{n\geq 1}$) ; dans le cas où la famille de sous-suites est finie, on parlera de décomposition finie de la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ en sous-suites 0-1.

Preuve. - Soit $(A_n^j)_{n\geq 1}$ $(j=1,2,\ldots,m)$ la décomposition finie de la suite $(A_n)_{n\geq 1}$.

S'il existe $j_o \in \{1,2,\ldots,m\}$ tel que la suite $(1_{A_n^{j_o}})_{n\geq 1}$ ne converge pas presque sûrement vers 0, il résulte du lemme 1 que $P(\limsup A_n) = 1$, car $(A_n^{j_o})_{n\geq 1}$ est une sous-suite 0-1.

Si, pour tout $j \in \{1,2,\ldots,m\}$, $1_{A_n^j} \xrightarrow{p.s.} 0$, alors aussi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1_{A_n^j}$ converge presque sûrement ; et il résulte de la réciproque du théorème d'associacivité des familles sommables à termes ≥ 0 que $\sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n}$ converge presque sûrement ; donc $1_{A_n} \xrightarrow{p.s.} 0$; et $P(\limsup_{n\geq 1} A_n) = 0$.

REMARQUE 2. - La condition de l'existence d'une décomposition finie en sous-suites 0-1 est nécessaire si $P(\limsup_{n\geq 1} A_n) = 0$ et non nécessaire si $P(\limsup_{n\geq 1} A_n) = 1$.

Si $P(\limsup_{n\geq 1} A_n) = 0$, $1_{A_n} \xrightarrow{p.s.} 0$ (cf. preuve du lemme 1) et la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ est 0-1 (cf. Sucheston [11] p. 452).

Dans le cas où $P(\limsup_{n\geq 1} A_n) = 1$, le caractère non nécessaire de l'existence d'une décomposition finie apparaît sur un exemple emprunté à Fischler [5] et légèrement adapté ici :

$\Omega = [0,1[$; $\mathcal{A}$ est la tribu des boréliens de Ω ; P est la mesure de Borel sur $\mathcal{A}$;

Si $(A_n)_{n\geq 1}$ est la suite définie par :

$$A_1 = [0,\tfrac{1}{2}[\ , \ A_2 = [\tfrac{1}{2},1[, \ldots, A_n = [\tfrac{j}{2^m}, \tfrac{j+1}{2^m}[,$$

où $n = 2^m+j$ est l'unique décomposition de $n\geq 1$ telle que $m\in\mathbb{N}$ et $0\leq j<2^m$,

on a : $\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = \lim_{m\to+\infty} \frac{1}{2^m} = 0$.

Et $P(\limsup_{n\geq 1} A_n) = 1$, car, pour tout $m\geq 0$,

$\left\{[\frac{j}{2^m}, \frac{j+1}{2^m}[\right\}_{j=0,1,\ldots,2^m-1}$ constitue un recouvrement de $\Omega = [0,1[$.

Il n'existe aucune décomposition finie de la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ en sous-suites 0-1.

En effet, soit $(B_n)_{n\geq 1}$ la sous-suite de $(A_n)_{n\geq 1}$ définie par $(B_n)_{n\geq 1} = \{A_n \in \mathcal{A} / A_n \subsetneq [0,\frac{1}{2}[\}$.

Un raisonnement analogue à celui concernant la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ permet d'affirmer que $P(\limsup_{n\geq 1} B_n) = \frac{1}{2}$.

Puisque $\lim_{n\to+\infty} P(B_n) = 0$, il résulte du corollaire 3 qu'il n'existe aucune décomposition finie de la suite $(B_n)_{n\geq 1}$ en sous-suites 0-1.

D'où le résultat car, si $(A_n)_{n\geq 1}$ admet une décomposition finie en sous-suites 0-1, cette décomposition détermine canoniquement une décomposition finie de la suite $(B_n)_{n\geq 1}$ en sous-suites 0-1 (puisque toute sous-suite d'une suite 0-1 est elle même 0-1).

REMARQUE 3. - Même dans le cas d'une suite $(A_n)_{n\geq 1}$ 0-1 (ce qui est une hypothèse plus forte que le caractère mélangeant (cf. Sucheston [11])), la divergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ ne suffit pas pour assurer que $P(\limsup_{n\geq 1} A_n) = 1$. En effet, soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ l'espace probabilisé introduit dans la remarque 2 et $A_n = [0, \frac{1}{n}]$ pour tout $n\geq 1$.

La suite $(A_n)_{n\geq 1}$ est 0-1 car $1_{A_n} \xrightarrow{p.s.} 0$ (cf. Sucheston [11] p.452).

En outre $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge et, puisque $1_{A_n} \xrightarrow{p.s.} 0$, $P(\limsup_{n\geq 1} A_n) = 0$.

Il faut noter que le résultat précédent ne dépend pas du tout de la "rapidité" de la divergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$, mais provient d'une "localisation" des événements A_n. Une certaine condition de "dispersion" des événements A_n permet de donner une forme plus analytique du lemme 1.

LEMME 2. - *Si la suite* $(A_n)_{n\geq 1}$ *admet une sous-suite* $(B_n)_{n\geq 1}$ *telle que* $(B_n)_{n\geq 1}$ *est une suite* 0-1 *et il existe* $\varepsilon>0$ *tel que* $\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n \cap A) = +\infty$, *pour tout* $A\in\mathcal{A}$ *tel que* $P(A)>1-\varepsilon$, *on a* $P(\limsup_{n\geq 1} A_n) = 1$.

Preuve. (ab absurdo).

Supposons que $P(\limsup_{n\geq 1} A_n)<1$; puisque $(B_n)_{n\geq 1}$ est une sous-suite 0-1 de $(A_n)_{n\geq 1}$ on a aussi $P(\limsup_{n\geq 1} B_n)<1$, donc $P(\limsup_{n\geq 1} B_n) = 0$.

Puisque $P(\limsup_{n\geq 1} B_n) = 0$, $1_{B_n} \xrightarrow{P.s.} 0$ et, puisque, pour tout $n\geq 1$, $1_{B_n}(\Omega) \subseteq \{0,1\}$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} 1_{B_n}$ converge presque sûrement.

Alors, si $X = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{B_n}$ et si, pour tout $k\geq 1$, $C_k = \{X<k\}$ puisque $\lim_{k\to+\infty} P(C_k) = 1$, pour tout $\varepsilon>0$ il existe un entier k_o tel que $P(C_{k_o})>1-\varepsilon$.

En outre $\int_{C_{k_o}} XdP \leq k_o$ et il résulte de la propriété de Beppo-Lévi appliquée à la suite croissante $\left\{ \sum_{n=1}^{m} 1_{B_n \cap C_{k_o}} \right\}_{m \geq 1}$ que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n \cap C_{k_o}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int 1_{B_n \cap C_{k_o}} dP\right) = \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} 1_{B_n \cap C_{k_o}}\right) dP$$

$$= \int_{C_{k_o}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} 1_{B_n}\right) dP = \int_{C_{k_o}} XdP \leq k_o$$

D'où la contradiction car $\varepsilon>0$ est quelconque.

REMARQUE 4. - Le lemme 2 est plus général que le corollaire 2. En effet, si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite mélangeante telle que la suite numérique $(P(A_n))_{n\geq 1}$ ne converge pas vers 0, la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ admet une sous-suite 0-1 $(B_n)_{n\geq 1}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} P(B_n) = \alpha>0$ (cf. preuve du corollaire 2) et, en particulier, il existe un entier $N\geq 1$ tel que $P(B_n) > \frac{\alpha}{2}$ pour $n>N$.

Alors, si $\varepsilon = \frac{\alpha}{4}$, pour tout $A \in \mathcal{A}$ tel que $P(A) > 1-\varepsilon$, on a $P(B_n \cap A) = P(B_n) - P(B_n \cap C_\Omega A) \geq \frac{\alpha}{4} > 0$, quel que soit $n > N$.

D'où la divergence de $\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n \cap A)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$ tel que $P(A) > 1-\varepsilon$ et les hypothèses du lemme 2.

REMARQUE 5. - Le lemme 2 donne un critère pour toute suite $(A_n)_{n\geq 1}$ "extraite" d'une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ dont la tribu queue est équivalente à $\{\emptyset, \Omega\}$ ("extraite" au sens : $A_n \in \mathcal{A}(X_n)$ tribu engendrée par X_n pour tout $n \geq 1$) ; c'est le cas, par exemple, pour une chaîne de Markov ergodique (cf. Revesz [10]) ou pour une chaîne de Markov récurrente dont l'ensemble des états est dénombrable, qui a des probabilités de transition stationnaires et telle que $P\{X_o = i\} = i$ pour un certain état i (cf. Blackwell et Freedman [2]).

2. - CAS OU LA SUITE $(A_n)_{n \geq 1}$ EST STABLE.

La notion de suite stable introduite et étudiée sous son aspect fonctionnel par Renyi [9] généralise d'une certaine façon la notion de suite mélangeante.

DEFINITION 3. - *Une suite* $(B_n)_{n \geq 1}$ *d'évènements de* $\mathcal{A}$ *est dite* stable *si*

$$\lim_{n \to +\infty} P(B_n \cap A) = Q(A) \text{ existe pour tout } A \in \mathcal{A}.$$

L'application $Q : A \mapsto Q(A)$, de $\mathcal{A}$ dans $[0,1]$ définit une mesure bornée et absolument continue par rapport à P (cf. Renyi [9]) ; si α désigne la densité de Q par rapport à P, on dit que la suite $(B_n)_{n \geq 1}$ est *stable de densité locale* α $(0 \leq \alpha \leq 1)$.

Dans le cas où la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ est stable, Fischler [6] , en utilisant une propriété de semi-ergodicité d'une suite stable, a donné une première approche de $P(\limsup_{\geq 1} A_n)$. Nous donnons ci-dessous une nouvelle preuve de ce résultat en le faisant apparaître comme une conséquence directe de l'aspect fonctionnel développé par Renyi.

THEOREME 1 (FISCHLER). - *Si la suite* $(A_n)_{n\geq 1}$ *est stable de densité locale* α , *on a :* $P(\limsup_{n\geq 1} A_n) \geq P\{\alpha>0\}$.

Preuve. - Puisque la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ est stable de densité locale α , la suite des indicatrices 1_{A_n} converge faiblement vers α dans l'espace $L^2(\Omega,\mathcal{A},P)$ muni de sa structure habituelle d'espace hilbertien : $\langle X,Y\rangle = E(XY) = \int_\Omega XY\,dP$ pour tout couple (X,Y) d'éléments de $L^2(\Omega,\mathcal{A},P)$ (cf. Renyi [9]).

Il résulte alors d'un théorème de Banach et Saks [1] qu'il existe une sous-suite $(B_n)_{n\geq 1}$ de $(A_n)_{n\geq 1}$ telle que

$$X_n = \frac{1_{B_n}+\ldots+1_{B_n}}{n}$$

converge en moyenne quadratique vers α.

Alors, de façon générale, il existe une sous-suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ de $(X_n)_{n\geq 1}$ telle que $Y_n \xrightarrow{p.s.} \alpha$.

On a alors $\{\alpha>0\} \subseteq \limsup_{n\geq 1} B_n$ car si $\omega \in \liminf_{n\geq 1} C_\Omega B_n$, on a $\lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = 0$, donc aussi $\lim_{n\to+\infty} Y_n(\omega) = \alpha(\omega) = 0$.

REMARQUE 6. - En particulier, si la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ est stable de densité locale α et si $P\{\alpha=0\} = 0$, on a $P(\limsup_{n\geq 1} A_n) = 1$; ceci donne en particulier une nouvelle démonstration du corollaire 2 de 1, car toute suite mélangeante de densité $\alpha>0$ est une suite stable de densité locale constante α.

REMARQUE 7.- Il résulte d'une propriété de compacité faible dans les espaces de Hilbert que toute suite $(A_n)_{n\geq 1}$ d'événements de $\mathcal{A}$ admet une sous-suite stable (cf. Renyi [9]). Il est donc toujours possible d'assurer l'existence d'une décomposition d'une suite $(A_n)_{n\geq 1}$ quelconque en une famille au plus dénombrable de sous-suites stables $(A_n^j)_{n\geq 1}$ $(j=1,2,\dots)$ de densité locales respectives αj $(j=1,2,\dots)$ (chaque A_n appartenant à une et une seule sous-suite $(A_n^j)_{n\geq 1}$.). On a alors le résultat suivant :

COROLLAIRE. - *Soit* $(A_n)_{n\geq 1}$ *une suite quelconque d'événements de* $\mathcal{A}$. *Si* $(A_n)_{n\geq 1}$ *admet une décomposition* $(A_n^j)_{n\geq 1}$ $(j=1,2,\dots)$ *en sous-suites stables de densités locales respectives* α_j $(j=1,2,\dots)$ *vérifiant* $P(\bigcap_{j=1}^{\infty} \{\alpha j=0\})=0$, *on a* $P(\limsup_{n\geq 1} A_n) = 1$

Le lemme 1 peut être adapté au cas des suites stables de la façon suivante (P(A/C) désignant la probabilité conditionnelle de A par rapport à C) :

LEMME 3. - *Soit* $(A_n)_{n\geq 1}$ *une suite stable de densité locale* α *telle que* $0<P(C)<1$ $(C = \{\alpha=0\})$.

Si $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n \cap C) < +\infty$ *, on a* $P(\limsup_{n\geq 1} A_n) = P\{\alpha>0\}$;

Si la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ *admet une sous-suite* $(B_n)_{n\geq 1}$ *telle que* $(B_n)_{n\geq 1}$ *soit une suite* $P(\ /C)$ - (0-1) *et que* $({}^1B_n)_{n\geq 1}$ *ne converge pas* $P(\ /C)$ *presque sûrement vers* 0, *alors* $P(\limsup_{n\geq 1} A_n) = 1$.

Preuve. - De façon générale, si $\bar{C} = C_\Omega C$, on a :

$$P(\limsup_{n\geq 1} A_n) = P(\limsup_{n\geq 1} A_n) \cap C)) + P(\limsup_{n\geq 1} (A_n \cap \bar{C})).$$

On a $P(\limsup_{n\geq 1} (A_n \cap \bar{C})) = P(\bar{C})$.

Pour tout $A \in \mathcal{A}$, puisque la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ est stable de densité locale α, on a $\lim_{n\to+\infty} P((A_n \cap \bar{C}) \cap A) = Q(\bar{C} \cap A) = \int_{\bar{C}\cap A} \alpha dP = \int_A \alpha dP$; car $\int_C \alpha dP = 0$ et la suite $(A_n \cap \bar{C})_{n\geq 1}$ est stable de densité locale α.

Il résulte du théorème de Fischler que

$P(\limsup_{n\geq 1} (A_n \cap \bar{C})) \geq P\{\alpha>0\} = P(\bar{C})$; et l'égalité car

$\limsup_{n\geq 1} (A_n \cap \bar{C}) = (\limsup_{n\geq 1} A_n) \cap \bar{C} \subseteq \bar{C}$.

Si $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n \cap C)$ converge, à partir de la forme habituelle du lemme de Borel-Cantelli, on a $P(\limsup_{n\geq 1} (A_n \cap C)) = 0$, et la première partie du lemme 3.

Si la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ admet une sous-suite $(B_n)_{n\geq 1}$ $P(\ /C)$ - (0-1) et telle que la suite $(1_{B_n})_{n\geq 1}$ ne converge pas $P(\ /C)$ presque sûrement vers 0, il résulte du lemme 1 que $P(\limsup A_n/C) = 1$, donc $P((\limsup_{n\geq 1} A_n)\cap C) = P(C)$; et la deuxième partie du lemme 3 puisque $P(C) + P(\bar{C}) = 1$.

REMARQUE 8. - Bien sûr, les hypothèses du lemme 3 peuvent être modifiées et présentées comme dans le corollaire 3 du lemme 1, puisque la suite $(A_n\cap C)_{n\geq 1}$ est mélangeante de densité 0, ou bien comme dans le lemme 2.

L'aspect restrictif du lemme 1 dans le cas des suites stables apparaît dans le résultat suivant .

PROPOSITION. - *Si* $(A_n)_{n\geq 1}$ *est une suite stable de densité locale* α *et si* α *n'est pas presque sûrement constante, la suite* $(A_n)_{n\geq 1}$ *n'admet pas de sous-suite* (0-1).

Preuve. - (ab absurdo)

Si $(B_n)_{n\geq 1}$ est une sous-suite (0-1) de $(A_n)_{n\geq 1}$, la suite $(B_n)_{n\geq 1}$ est mélangeante (cf. Sucheston [11]).

Puisque la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ est stable de densité locale α , donc aussi la sous-suite $(B_n)_{n\geq 1}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} P(E_n) = \int_\Omega \alpha\, dP = E(\alpha).$$

et la suite mélangeante $(B_n)_{n\geq 1}$ est mélangeante de densité $E(\alpha)$;

donc :

$$\lim_{n\to+\infty} P(B_n \cap A) = E(\alpha)\, P(A) = \int_A E(\alpha)\, dP,$$

pour tout $A \in \mathcal{A}$.

En outre, puisque $(B_n)_{n>1}$ est stable de densité locale α, on a

$$\lim_{n\to+\infty} P(B_n \cap A) = \int_A \alpha dP,$$

pour tout $A \in \mathcal{A}$.

On a donc $\alpha = E(\alpha)$ P-presque partout ; et la contradiction.

COROLLAIRE. - *Il existe des suites* $(A_n)_{n\geq 1}$ *n'ayant aucune sous-suite* (0-1) *et telles que* $P(\limsup_{n\geq 1} A_n) = 1$.

Preuve. - Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ l'espace probabilisé défini par : $\Omega = [0,1]$; $\mathcal{A}$: tribu des boréléens de $[0,1]$ et P : mesure de Borel sur $\mathcal{A}$.

Si f est une application continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$ et, si pour tout $n\geq 1$, $A_n = \bigcup_{k=0}^{n-1} \left[\frac{k}{n}, \frac{k+f(\frac{k}{n})}{n}\right]$, la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ est stable de densité locale f (cf. Renyi [9] p. 300).

En particulier, si f est presque sûrement non nulle, il résulte du théorème de Fischler que $P(\limsup_{n\geq 1} A_n) \geq P\{f>0\} = 1$.

D'où le résultat, à partir de la proposition précédente, pour toute suite $(A_n)_{n\geq 1}$ associée à une application f, continue, non presque sûrement constante et presque sûrement non nulle, de $[0,1]$ dans $[0,1]$.

3. - CAS OU LA SUITE $(A_n)_{n\geq 1}$ EST MELANGEANTE DE CESARO.

La remarque 8 a montré les limites de la méthode basée sur l'existence d'une sous-suite (0,1) ayant de bonnes propriétés. Au contraire la méthode fonctionnelle utilisée en 2 dans la nouvelle démonstration du théorème 1 de Fischler peut être reprise pour obtenir une nouvelle extension du lemme de Borel-Cantelli.

DEFINITION 4 (Fischler). - *Une suite* $(B_n)_{n\geq 1}$ *d'événements de* $\mathcal{A}$ *est dite* mélangeante de Cesàro *de densité* α *si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} P(B_j \cap A) = \alpha P(A)$, *pour tout* $A \in \mathcal{A}$.

En particulier, il résulte du classique théorème de convergence en moyenne de Cesàro que toute suite mélangeante de densité α est une suite mélangeante de Cesàro de densité α et il résulte de l'inégalité triangulaire que toute suite faiblement mélangeante de densité α au sens de Renyi ([8] p. 226) est mélangeante de Cesàro de densité α.

On a alors l'extension suivante .

THEOREME 2. - *Si la suite* $(A_n)_{n\geqslant 1}$ *d'événements de* $\mathcal{A}$ *est mélangeante de Cesáro de densité* $\alpha>0$, *on a* $P(\limsup_{n\geqslant 1} A_n) = 1$

Preuve. - Reprenant la preuve du théorème 1 de Renyi ([9] p. 295) pour les variables aléatoires $X_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} 1_{A_j}$ de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$, si $(A_n)_{n\geqslant 1}$ est mélangeante de Cesáro de densité α, la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge faiblement vers α dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Il résulte alors du théorème de Banach et Saks, déjà cité [1], qu'il existe une sous-suite $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ de $(X_n)_{n\geqslant 1}$ telle que $Z_n = \frac{Y_1+\ldots+Y_n}{n} \xrightarrow{\text{m.q}} \alpha$.

Il existe alors une sous-suite $(Z_{n_k})_{k\geqslant 1}$ de $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ qui converge presque sûrement vers α, c'est-à-dire $\lim_{k\to+\infty} Z_{n_k}(\omega) = \alpha$ pour tout $\omega \in C$ avec $P(C) = 1$.

On a alors $C \subseteq \limsup_{n\geqslant 1} A_n$.

Si $\omega \notin \limsup_{n\geqslant 1} A_n$, il existe $n_\omega \geqslant 1$ tel que $n > n_\omega$ implique $1_{A_n}(\omega) = 0$ et par suite, $\lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} 1_{A_j}(\omega) = 0$.

Alors, puisque $(Y_n(\omega))_{n\geqslant 1}$ est une sous-suite de $(X_n(\omega))_{n\geqslant 1}$, $\lim_{n\to+\infty} Y_n(\omega) = 0$ et donc, à partir du théorème de convergence en moyenne de Cesáro, $\lim_{n\to+\infty} Z_n(\omega) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} Y_j(\omega) = 0$.

Puisque $(Z_{n_k}(\omega))_{k\geq 1}$ est une sous-suite de $(Z_n(\omega))_{n\geq 1}$ on a alors $\lim_{k\to+\infty} Z_{n_k}(\omega) = 0$, et, comme $\alpha>0$, $\omega \notin C$.

D'où $P(\limsup_{n\geq 1} A_n) = 1$.

REMARQUE 9. - La démonstration précédente peut être simplifiée si on a l'hypothèse plus précise $X_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} 1_{A_j} \xrightarrow{m.q.} \alpha$. En général, il n'en est rien, car l'hypothèse de convergence en moyenne quadratique de X_n (qui ne peut être une convergence en moyenne quadratique que vers α) est équivalente au caractère uniformément mélangeant de Cesáro de la suite $(A_n)_{n\geq 1}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \{\sup_{A\in\mathcal{A}} \mid \frac{1}{n} \sum_{j=1} P(A_j \cap A) - \alpha P(A) \mid\} = 0.$$

(cf. Fischler [6] p. 75).

Comme la notion de suite stable de densité locale α généralise la notion de suite mélangeante de densité α , on peut généraliser la notion de suite mélangeante de Cesáro de densité α par la notion de suite stable de Cesáro de densité locale α et donner l'extension du théorème 1.

DEFINITION 5. - *Une suite* $(B_n)_{n\geq 1}$ *d'événements de* $\mathcal{A}$ *est dite* stable de Cesáro *si* $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} P(B_j \cap A) = Q(A)$, *pour tout* $A \in \mathcal{A}$.

PROPOSITION. - *Si* $(B_n)_{n\geq 1}$ *est une suite stable de Cesáro, c'est-à-dire si* $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} P(B_j \cap A) = Q(A)$ *existe pour tout* A *de* $\mathcal{A}$,

$Q(A)$ *est une mesure absolument continue par rapport à* P.

Preuve. - Par définition, Q est une application de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}^+$, additive car P est additive.

Si $(A_k)_{k\geq 1}$ est une famille dénombrable d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{A}$, on a $Q(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} Q(A_k)$;

La série $\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} P(B_j \cap A_k))$ est uniformément convergeante par rapport à n car $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} P(B_j \cap A_k) \leq P(A_k)$, pour tout $k\geq 1$ et tout $n\geq 1$, avec $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)$.

On a alors : $\sum_{k=1}^{\infty} Q(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} P(B_j \cap A_k))$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} P(B_j \cap A_k))$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (\sum_{k=1}^{\infty} P(B_j \cap A_k))$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} P(B_j \cap (\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)) = Q(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k).$$

En outre, si $P(A) = 0$, $P(B_j \cap A) = 0$ pour tout $j\geq 1$, donc $Q(A) = 0$ et Q est absolument continue par rapport à P.

En particulier, il résulte du théorème de Radon-Nikodym qu'il existe une variable aléatoire α telle que $Q(A) = \int_A \alpha dP$, avec $0 < \alpha \leq 1$. On dit alors que $(B_n)_{n \geq 1}$ est *stable de Cesáro de densité locale* α.

REMARQUE 10. - En notant que toute suite stable est une suite stable de Cesáro, la preuve de la proposition ci-dessus constitue une autre démonstration du théorème 2 de Renyi [9] p. 296. Comme exemple non trivial de suite stable de Cesáro on peut considérer une suite construite à partir d'une famille finie ou dénombrable de suites mélangeantes de Cesáro de la même façon que, dans l'exemple 5 de Renyi [9] p. 301, une suite stable est construite à partir d'une famille finie ou dénombrable de suites mélangeantes.

THEOREME 3. - *Si la suite* $(A_n)_{n \geq 1}$ *est stable de Cesáro de densité locale* α, *on a* $P(\limsup_{n \geq 1} A_n) \geq P\{\alpha > 0\}$.

Preuve. - Il suffit de reprendre exactement la preuve du théorème 2 à partir du théorème de Banach et Saks [1] pour montrer que

$$\{\omega \in \Omega \,|\, \alpha(\omega) > 0\} \subseteq \limsup_{n \geq 1} A_n.$$

4. CONCLUSION. - Indiquons en conclusion une autre direction possible pour étendre le lemme de Borel-Cantelli.

LEMME 4.-. *Si une suite* $(A_n)_{n\geq 1}$ *d'événements de* $\mathcal{A}$ *admet une sous-suite* $(B_n)_{n\geq 1}$ *telle que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = +\infty \quad \textit{et}$$

$$\frac{1_{B_1}+\dots+1_{B_n}}{P(B_1)+\dots+P(B_n)} \xrightarrow{P} \alpha\ ,\ \text{avec } P\{\alpha=0\} = 0,$$

alors $P(\limsup_{n\geq 1} A_n) = 1$.

Preuve. - Si $X_n = \dfrac{1_{B_1}+\dots+1_{B_n}}{P(B_1)+\dots+P(B_n)} \xrightarrow{P} \alpha$, il existe une sous-suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ de $(X_n)_{n\geq 1}$ telle que $Y_n \xrightarrow{p.s.} \alpha$.

Puisque $\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = +\infty$, pour tout $\omega\in\Omega$ tel que $\alpha(\omega) \neq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} 1_{B_n}(\omega) = +\infty$ et $\{\alpha\neq 0\} \subseteq \limsup_{n\geq 1} B_n$.

Donc, si $P\{\alpha=0\} = 0$, $P(\limsup_{n\geq 1} B_n) = 1$ et $P(\limsup_{n\geq 1} A_n) = 1$.

COROLLAIRE. - *Si une suite* $(A_n)_{n\geq 1}$ *d'événements de* $\mathcal{A}$ *admet une sous-suite* $(B_n)_{n\geq 1}$ *telle que :* $\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = +\infty$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=i+1}^{n} \operatorname{cov}(1_{B_i}, 1_{B_j})\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n} P(B_i)\right)^2} = 0\ ,$$

on a $P(\limsup_{n\geq 1} A_n) = 1$.

Preuve. - Pour tout $n \geq 1$, $\sigma^2\left(\frac{1_{B_1}+\ldots+1_{B_n}}{P(B_1)+\ldots+P(B_n)}\right) \leq \frac{1}{P(B_1)+\ldots+P(B_n)} +$
$+ \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1+1}^{n} \operatorname{cov}(1_{B_i}, 1_{B_j})}{\left(\sum_{i=1}^{n} P(B_i)\right)^2}$

et à par partir des hypothèses :

$$\lim_{n \to +\infty} \sigma^2\left(\frac{1_{B_1}+\ldots+1_{B_n}}{P(B_1)+\ldots+P(B_n)}\right) = 0$$

Alors, comme $E\left(\frac{1_{B_1}+\ldots+1_{B_n}}{P(B_1)+\ldots+P(B_n)}\right) = 1$ pour tout $n \geq 1$,

$\frac{1_{B_1}+\ldots+1_{B_n}}{P(B_1+\ldots+P(B_n)} \xrightarrow{m.q.} 1$ et le résultat à partir du lemme 4.

En particulier, si les B_n sont deux à deux indépendants, $P(\limsup_{n \geq 1} A_n) = 1$; c'est le résultat de Erdos et Renyi [4] présenté un peu différemment.

Pour avoir une nouvelle extension du lemme de Borel-Cantelli, il serait donc intéressant de déterminer, par exemple, à quelles conditions

$X_n = \frac{1_{B_1}+\ldots+1_{B_n}}{P(B_1)+\ldots+P(B_n)} \xrightarrow{\mathscr{L}} \alpha$ avec α constante non nulle et $\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = +\infty$

puisqu'en général la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ n'est pas uniformément bornée sur Ω (si $\lim_{n \to +\infty} P(B_n) = 0$), il ne faut pas exclure à priori le cas où $\alpha \neq 1$ (cas où $X_n \not\xrightarrow{m.q.} \alpha$).

[1] BANACH et SAKS, *Sur la convergence forte dans les espaces* L^p, Studia Math. 2 (1930), p. 51-57.

[2] BLACKWELL and FREEDMAN, *The tail σ-field of a Markov chain and a theorem of Orey*, Ann. Math. Statist. 35 (1964), p. 1291-1295.

[3] CRAMER, *Random variables and probability distributions*, Cambridge University Press (1970).

[4] ERDOS and RENYI, *On cantor's series with convergent* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{qk}$. , Ann. Univ. Sci. Budapest, section Math. 2 (1959), p. 93-109.

[5] FISCHLER, *Borel-Cantelli type theorems for mixing sets*, Acta. Math. Acad. Sci. Hungar 18 (1967), p. 67-69.

[6] FISCHLER, *The strong law of large numbers for indicators of mixing sequences*, Acta. Math. Acad. Sci. Hungar 18 (1967), p. 71-81.

[7] FISCHLER, *Decomposition and composition of mixing sequences*, J. Math. Anal. Appl. 21 (1968), p. 389-395.

[8] RENYI, *On mixing sequences of sets*, Acta. Math. Acad. Sci. Hungar. 9 (1958), p. 215-228.

[9] RENYI, *On stable sequences of sets*, Sankya Indian J. Statis. , série A, vol. 25, part. 3 (1963), p. 293-302.

[10] REVESZ, *A generalization of the zero-one law*, Ann. Univ. Sci. Budapest sect. Math. 2 (1959), p. 111-113.

[11] SUCHESTON, *On mixing and the 0-1 law*, J. Math. Anal. Appl. 6 (1963), p. 447-456.

Manuscrit remis le 1er septembre 1974.

Alain VILLENEUVE
Département de Mathématiques
Université Claude Bernard, Lyon-1
43, bd du 11 novembre 1918
69621-VILLEURBANNE