PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

IBRAHIM HALWANI

Sur les ordres d'Asano

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1974, tome 11, fascicule 4
, p. 107-121
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1974__11_4_107_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1974 t. 11-4

SUR LES ORDRES D'ASANO

par Ibrahim HALWANI

Dans [10] , J.C. Robson introduit la notion d'ordre d'Asano, notion basée sur les travaux de K. Asano [1] . G.O. Michler a étudié dans [7] la structure d'un ordre d'Asano ; il a donné aussi des conditions nécessaires pour qu'un anneau noethérien, ordre régulier dans son anneau simple des fractions, soit un ordre d'Asano. Par ailleurs, différentes caractérisations des ordres de K. Asano sont données dans le cas commutatif [9] .

Dans ce qui suit, on se propose d'étudier certaines conditions nécessaires et suffisantes, généralisant celle du cas commutatif, pour qu'un ordre $\mathcal{O}$ soit un ordre d'Asano dans son anneau des fractions.

L'anneau $\mathcal{O}$ considéré dans toute la suite est un anneau *unitaire, premier et noethérien, ordre régulier dans son anneau des fractions* S. Pour les définitions et propriétés fondamentales, on renvoie à [1] , [5] , [6] et [8] .

I.

DEFINITION 1.1. - *Si* $\mathcal{O}$ *est un ordre maximal de* S, *un* $\mathcal{O}$*-idéal* I *est dit un* c*-idéal si* $I = \bar{I} = (I^{-1})^{-1}$ *(avec* $I^{-1} = \{x \in S \ ; \ x I \subset \mathcal{O}_r(I) = \mathcal{O}\}$ *où* $\mathcal{O}_r(I)$ *désigne l'ordre à droite de* I*) (voir* [10] *).*

DEFINITION 1.2. - *$\mathcal{O}$ est dit ordre régulier de* S *si tout $\mathcal{O}$-diéal à gauche et tout $\mathcal{O}$-idéal à droite contiennent un $\mathcal{O}$-idéal bilatère.*

LEMME 1.3. - *Supposons que $\mathcal{O}$ soit un ordre maximal de* S. *Si tout idéal maximal de $\mathcal{O}$ est un* c*-idéal, alors $\mathcal{O}$ est un ordre d'Asano de* S.

On remarque d'abord que si A et B sont deux $\mathcal{O}$-idéaux tels que $A \subset B$; alors on a $\bar{A} \subset \bar{B}$, où $\bar{A} = (A^{-1})^{-1}$. De plus on voit facilement que $\overline{AA^{-1}} = \mathcal{O}$. Si, pour un $\mathcal{O}$-idéal A, on a $AA^{-1} \neq \mathcal{O}$, il existe alors un idéal maximal $\mathfrak{M}$ de $\mathcal{O}$ pour lequel on a

$$AA^{-1} \subset \mathfrak{M} \subset \mathcal{O} \;;$$

$$\text{d'où} \quad \overline{AA^{-1}} \subset \overline{\mathfrak{M}} \subset \mathcal{O} \quad \text{et ainsi } \overline{\mathfrak{M}} = \mathcal{O} .$$

Comme les idéaux maximaux de $\mathcal{O}$ sont supposés des c-idéaux, on a $\mathfrak{M} = \overline{\mathfrak{M}} = \mathcal{O}$ ce qui est absurde. Ainsi, on a $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathcal{O}$. $\mathcal{O}$ est un ordre d' Asano d'après le théorème 2.1. de [10] .

Dans le but de simplifier les énoncés (qui suivront, on va introduire la définition suivante.

DEFINITION 1.4. - *On dira que $\mathcal{O}$ est à extensions plates dans* S *(resp. maximales, resp. épimorphes) si, pour tout sous-anneau* B *de* S *contenant $\mathcal{O}$,* B *est un $\mathcal{O}$-module plat à gauche et à droite (resp.* B *un ordre maximal de* S, *resp. l'injection canonique $\mathcal{O} \longrightarrow B$ est un épimorphisme d'anneaux).*

Pour un idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}$, on note par $F'_{\mathfrak{p}}$ la famille d'idéaux bilatères de $\mathcal{O}$ non contenus dans $\mathfrak{p}$ et par $F_{\mathfrak{p}}$ la famille d'idéaux à gauche de $\mathcal{O}$ contenant chacun un élément de $F'_{\mathfrak{p}}$. Il est facile alors de voir que $F_{\mathfrak{p}}$ est une topologie additive à gauche sur $\mathcal{O}$ (au sens de [8]). Si M est un $\mathcal{O}$ -module à gauche, on notera par $M_{\mathfrak{p}}$ le localisé (selon Gabriel) de M par rapport à la famille $F_{\mathfrak{p}}$. Les notations qui suivront sont celles de [8].

On a le résultat bien connu suivant (qui se déduit du théorème 4.3. de [3] ou de la proposition 2.8. de [8]) :

LEMME 1.5. - *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} . \mathfrak{a} = \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ *pour tout* $\mathfrak{a} \in F_{\mathfrak{p}}$;

ii) Pour tout $\mathcal{O}$*-module à gauche* M, *les* $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ *-modules à gauche* $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \otimes_{\mathcal{O}} M$ *et* $M_{\mathfrak{p}}$ *sont isomorphes.*

Lorsque $F_{\mathfrak{p}}$ vérifie l'une de ces deux conditions, elle sera dite une *famille plate* (voir [4]).

LEMME 1.6. - *Pour tout* $\mathcal{O}$*-idéal* $\mathfrak{a}$, *on a*

$$\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} = \{x \in S \; ; \exists \lambda \in \mathcal{O}, \lambda \notin \mathfrak{p} \; ; \lambda \mathcal{O} x \subset \mathfrak{a}\}.$$

En effet, soit $X = \{x \in S \; ; \exists \lambda \in \mathcal{O} \; , \; \lambda \notin \mathfrak{p} \; ; \lambda \mathcal{O} x \subset \mathfrak{a}\}$; montrons que $X = \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$. On vérifie aisément que l'injection canonique i ; $\mathfrak{a} \longrightarrow X$ est telle que : ker i $\in \mathcal{F}(F_{\mathfrak{p}})$ et coker i $\in \mathcal{F}(F_{\mathfrak{p}})$. Montrons que X est $F_{\mathfrak{p}}$-fermé, c'est-à-dire, d'après le lemme 1.1. de [8], que le morphisme $\psi_X : X \longrightarrow X_{\mathfrak{p}}$ est un isomorphisme.

Soit $x \in \ker \psi_X$; comme $\ker \psi_X \in \mathcal{F}(F_{\mathfrak{p}})$ on a :

$0^{\cdot}.x = \{\lambda \in \mathcal{O} \; ; \; \lambda x = 0\} \in F_{\mathfrak{p}}$.

Ainsi, il existe un idéal bilatère I de $\mathcal{O}$, non contenu dans $\mathfrak{p}$ et tel que $I \subset 0^{\cdot}.x$, d'où I.x = 0 et x = 0; car $\mathcal{O}$ est premier.

D'autre part, on sait que coker $\psi_X \in \mathcal{F}(F_{\mathfrak{p}})$;donc, si $\bar{x} \in$ coker ψ_X on a $\mathcal{O}\cdot.\bar{x} \in F_{\mathfrak{p}}$.

Ceci montre qu'il existe un idéal bilatère J de $\mathcal{O}$, $J \not\subset \mathfrak{p}$, pour lequel on a $J.\bar{x} = 0 \Longleftrightarrow Jx \subset X$.
Comme $\mathcal{O}$ est noethérien, on a :

$$J = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{O}\lambda_i \quad \text{et} \quad Jx = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{O}\lambda_i x \subset X.$$

Pour tout i, $\lambda_i\, x \in X$ entraine que, pour tout i, il existe $\gamma_i \in \mathcal{O} - \mathfrak{p}$ tel que $\gamma_i\, \mathcal{O}\, \lambda_i\, x \subset \mathfrak{a}$.

Ainsi, il existe $\gamma \in \mathcal{O} - \mathfrak{p}$ tel que $\gamma_i \mathcal{O} \lambda_i x \subset \mathfrak{a}$ pour $i = 1,\dots,n$.
D'où $\gamma J x \subset \mathfrak{a}$. Or $J \not\subset \mathfrak{p}$; il existe donc $\gamma_i \in \mathcal{O} - \mathfrak{p}$ tel que $\gamma_i\, \mathcal{O}\, x \subset \mathfrak{a}$ et ainsi, $x \in X$ entraine $\bar{x} = 0$.

X est donc $F_{\mathfrak{p}}$-fermé; comme ker i et coker i sont deux éléments de $\mathcal{F}(F_{\mathfrak{p}})$, on voit que X est le localisé de $\mathfrak{a}$ par rapport à la famille $F_{\mathfrak{p}}$; d'où $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} = X$.

LEMME 1.7. - *Si $\mathcal{O}$ est un ordre maximal régulier de* S, *si dans $\mathcal{O}$ tout idéal maximal contient un unique idéal premier minimal, alors $\mathcal{O}$ est un ordre d'Asano de* S.

Soit en effet $\mathfrak{p}$ un idéal premier minimal unique contenu dans l'idéal maximal $\mathfrak{m}$. Comme $\mathcal{O}_{\mathfrak{m}} \neq S$, d'après le Corollaire 1.2.7. de [2], on a

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{m}} = \bigcap_{\mathfrak{p}} \mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \text{ , où } \mathfrak{p} \text{ parcourt l'ensemble}$$

des c-idéaux premiers contenus dans $\mathfrak{m}$. Or un c-idéal premier est un $\mathcal{O}$-idéal premier minimal (proposition 0.11 de [2]) ; Comme $\mathfrak{m}$ ne contient que $\mathfrak{p}$ comme premier minimal, on a donc $\mathcal{O}_{\mathfrak{m}} = \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$.

Si $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{p}$, il sera clair alors que $\mathfrak{m} \in F_{\mathfrak{p}}$, et puisque $F_{\mathfrak{p}}$ est plate (d'après le corollaire 2.0.3 de [2]), on a, à l'aide du lemme 1.5.
$\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} . \mathfrak{m} = \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$. D'où $\mathcal{O}_{\mathfrak{m}} . \mathfrak{m} = \mathcal{O}_{\mathfrak{m}}$, ce qui est impossible. On a donc $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$, et tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathcal{O}$ est premier minimal, donc un c-idéal, d'après la proposition 0.14 de [2] . $\mathcal{O}$ devient un ordre d'Asano par le lemme 1.3.

LEMME 1.8. - *Si* A *et* B *sont deux extentions de* $\mathcal{O}$ *dans* S , B *contenant* A, *et si* B *est un* A-*module à droite plat alors* B. (A·.b) = B *pour tout* b ∈ B. *Si de plus* B *est de type fini (sur* A), *alors il existe un idéal bilatère idempotent* X *de* A *tel que* BX = B *et* XB = X.

Il est évident que l'injection canonique A ⊂ S est un épimorphisme plat. Comme B est un A-module plat à droite, on déduit, d'après le lemme 4.2. de [8] , que l'injection A ⊂ B est un épimorphisme plat à gauche; donc, en appliquant le théorème 2.7. de [8] , on voit que l'injection A ⊂ B est pré-plat à gauche; c'est-à-dire, en posant : $A^{\cdot}.b = \{\lambda \in A \; ; \; \lambda b \in A\}$ on a : $B. \left[\bigcap_{i=1}^{n} (A^{\cdot}.b_i) \right] = B$ pour toute famille finie d'éléments b_i de B.

En particulier, comme $B = \sum_{i=1}^{m} \beta_i A$, on a : $B.X = B$, avec $X = \bigcap_{i=1}^{m} (A^{\cdot}.\beta_i)$.

Or il est clair que $X.B \subset A$; d'où $X.B.X \subset A.X = X$ (X étant un idéal à gauche). On a ainsi X.B = X. En particulier XA = X et X devient un idéal bilatère de A.

On a finalement $X.B.X = X^2 = X.B = X$.

PROPOSITION 1.9. - *Si* $\mathcal{O}$ *est à extentions plates dans* S, *alors c'est un ordre maximal de* S *s'il n'a pas d'idéaux bilatères idempotents propres.*

Soit $\mathfrak{a}$ un $\mathcal{O}$-idéal à droite. Comme $\mathcal{O}$ est noethérien, on voit que l'ordre à droite $\mathcal{O}_r(\mathfrak{a})$ de $\mathfrak{a}$ est un $\mathcal{O}$-module à droite de type fini et plat. Donc, d'après le lemme 1.8., il existe un idéal bilatère idempotent X de A tel que $\mathcal{O}_r(\mathfrak{a}).X = \mathcal{O}_r(\mathfrak{a})$ et $X.\mathcal{O}_r(\mathfrak{a}) = X$.

Or, $\mathcal{O}$ n'ayant d'idéaux bilatères idempotents que 0 et lui-même, on a nécessairement $X = \mathcal{O}$ et $\mathcal{O}_r(\mathfrak{a}) = \mathcal{O}$.
On montre de même que $\mathcal{O}_l(\mathfrak{b}) = \mathcal{O}$ pour tout $\mathcal{O}$-idéal à gauche $\mathfrak{b}$, ce qui prouve que $\mathcal{O}$ est un ordre maximal de S.

II. - A désigne une extension de $\mathcal{O}$ dans S, $\mathfrak{a}$ est un A-idéal bilatère fixé de A. On suppose aussi que A est un ordre maximal de S, donc, pour un A-idéal I, $\bar{I}$ désignera le A-idéal : $(I^{-1})^{-1}$.

LEMME 2.1. - *S'il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $A \subset \overline{\mathfrak{a}+\mathfrak{a}^2+\dots+\mathfrak{a}^n}$, *alors on a :* $\mathfrak{a}^{-1} \subset A$.

Soit $I_n = \mathfrak{a}+\dots+\mathfrak{a}^n$; on a : $A \subset \bar{I}_n \Rightarrow \mathfrak{a}^{-1} \subset \overline{\mathfrak{a}^{-1} I_n} \subset \overline{A+\mathfrak{a}+\dots+\mathfrak{a}^n}$.
Mais $A \subset \overline{I_n}$, d'où : $\mathfrak{a}^{-1} \subset \overline{I}$.

De cette façon on démontre : $\mathfrak{a}^{-i} \subset \overline{In}$ $\forall i \in \mathbb{N}$.
Or $\overline{In}$ est un c-idéal (relatif à A) d'où : $\exists \lambda \in A$ $\lambda \overline{In} \subset A$
$\Rightarrow \lambda\, \mathfrak{a}^{-i} \subset A$ $\forall i \in \mathbb{N}$, ce qui montre que : $\lambda\, A[\mathfrak{a}^{-1}] \subset A$
Par suite, $A[\mathfrak{a}^{-1}]$(1) est un ordre de S équivalent à A et le contenant, d'où, par maximalité de l'ordre A $A[\mathfrak{a}^{-1}] = A$ et $\mathfrak{a}^{-1} \subset A$.

LEMME 2.2. - *Si, pour un idéal* X *de* A, *on a* $X\,A[\mathfrak{a}] = A[\mathfrak{a}]$ *et* $\mathfrak{a}X \subset A$, *alors* $A[\mathfrak{a}] = A[\mathfrak{a}^2]$.

(1) On note $A[\mathfrak{a}]$ le plus petit sous-anneau de S contenant A et $\mathfrak{a}$.

$x \in A[\mathfrak{a}] \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in A+\mathfrak{a}+\mathfrak{a}^2+\ldots+\mathfrak{a}^n$. D'où, en regroupant les termes de puissance paires de $\mathfrak{a}$ on a :

$x \in A[\mathfrak{a}^2] + \mathfrak{a}.A[\mathfrak{a}^2]$. Par suite on a :

$$A[\mathfrak{a}] = A[\mathfrak{a}^2] + A[\mathfrak{a}^2]\mathfrak{a} = A[\mathfrak{a}^2] + \mathfrak{a}A[\mathfrak{a}^2] .$$

D'autre part, puisque A est un ordre maximal de S, on a :

$$A.\cdot\mathfrak{a} = A\cdot.\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{-1} \quad \text{donc } \mathfrak{a}X \subset A \Leftrightarrow X\mathfrak{a} \subset A.$$

Donc : $X.A[\mathfrak{a}] = X.A[\mathfrak{a}^2] + X\mathfrak{a}\ A[\mathfrak{a}^2] \subset A[\mathfrak{a}^2]$.

Comme $X.A[\mathfrak{a}] = A[\mathfrak{a}]$ on a $A[\mathfrak{a}] = A[\mathfrak{a}^2]$.

LEMME 2.3. - *Si pour* $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1} \subset \mathfrak{a}^{-1} + \mathfrak{a} + \ldots + \mathfrak{a}^n$, *alors on a*

$$\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1} \subset \mathfrak{a}^{-1} \cap A + (\mathfrak{a} + \ldots + \mathfrak{a}^n) \cap A.$$

Soient $x \in \mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1}$, $\alpha \in \mathfrak{a}^{-1}$, $a \in \mathfrak{a}+\ldots+\mathfrak{a}^n = I_n$ tels que $x = \alpha+a \Rightarrow \alpha = x - a$. D'où $A\alpha \subset Ax+Aa$.

Mais comme $Ax \subset A\ \mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1} \subset A$ et $Aa \subset AI_n \subset I_n$, on a $A\alpha \subset A + I_n$.

Supposons que $(A\alpha)^i \subset A+I_n$ pour un $i \in \mathbb{N}$. Alors on a $(A\alpha)^{i+1} \subset A\alpha+I_n.\alpha$.

Or $I_n.\alpha \subset (\mathfrak{a}+\ldots+\mathfrak{a}^n)\mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1}+\ldots+\mathfrak{a}^n\mathfrak{a}^{-1} \subset A+\mathfrak{a}+\ldots+\mathfrak{a}^{n-1}$

$\Rightarrow I_n.\alpha \subset A + I_n$.

Ainsi $(A\alpha)^{i+1} \subset A+I_n$. Ceci montre que : $(A\alpha)^i \subset A+I_n$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et même $'(A\alpha A)^i \subset A + In$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Par suite $A[\alpha] \subset A + I_n$. Donc il existe $\lambda \in A$ tel que : $\lambda.A[\alpha] \subset A$. D'où $A[\alpha] = A$, car A est un ordre maximal. On a donc $\alpha \in A$. Comme $x \in A$, on a aussi

$$a \in A \Rightarrow x \in \mathfrak{a}^{-1} \cap A + (\mathfrak{a}+\ldots+\mathfrak{a}^n) \cap A.$$

LEMME 2.4. - *Soient* $\mathfrak{p}$ *un idéal premier de* $\mathcal{O}$ *et* $F_{\mathfrak{p}}$ *la topologie additive à gauche correspondante. Supposons que* $A = \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ *soit un ordre maximal de* S. *Alors, si pour un* A*-idéal* $\mathfrak{a}$ *de* A *on a* $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1} \subset \mathfrak{a}^{-1}+\mathfrak{a}+\ldots+\mathfrak{a}^n$, *on a* $\mathfrak{a} \subset A$ *ou* $\mathfrak{a}^{-1} \subset A$ *ou* $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1} \subset (\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}}$.

Le lemme 2.3 montre que $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1} \subset \mathfrak{a}^{-1} \cap A + (\mathfrak{a}+\ldots+\mathfrak{a}^n) \cap A$.
Soit $x \in \mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1} \Rightarrow x = \alpha + a$ avec :

$\alpha \in \mathfrak{a}^{-1} \cap A$, $a \in In \cap A = (\mathfrak{a}+\ldots+\mathfrak{a}^n) \cap A$.

$\alpha \in A \Leftrightarrow \alpha \in \mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \Rightarrow \exists\, \lambda \notin \mathfrak{p}$ $\lambda \in \mathcal{O}$ tel que $\lambda \mathcal{O} \alpha \subset \mathcal{O}$ (lemme 1.6).

$a \in A \Rightarrow \exists\, \gamma \in \mathcal{O}$, $\gamma \notin \mathfrak{p}$ tel que $\gamma \mathcal{O} a \subset \mathcal{O}$.

$x = \alpha + a \Rightarrow \lambda \mathcal{O} \gamma \mathcal{O} x \subset \lambda \mathcal{O} \gamma \mathcal{O} \alpha + \lambda \mathcal{O} \gamma \mathcal{O} a$.

- Si $\lambda \mathcal{O} \alpha \subset \mathfrak{p}$ et $\gamma \mathcal{O} a \subset \mathfrak{p}$, on a

$\lambda \mathcal{O} \gamma \mathcal{O} x \subset \mathfrak{p}$ et $x \in (\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}}$ car $\lambda \mathcal{O} \gamma \not\subset \mathfrak{p}$ (lemme 1.6).

- Si $\lambda \mathcal{O} \alpha \not\subset \mathfrak{p}$ alors $\mathfrak{a} \subset A$, en effet :

$\lambda \mathcal{O} \alpha\, \mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{a} \subset A$. Comme $\lambda \mathcal{O} \alpha \not\subset \mathfrak{p}$ et comme $\mathfrak{a}$ est $\mathcal{O}$-idéal bilatère donc $\mathfrak{a} \subset A_{\mathfrak{p}} = A = \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$, car $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ est $F_{\mathfrak{p}}$-fermé (Lemme 1.1. de [8]).

- Si $\gamma \mathcal{O} a \not\subset \mathfrak{p}$, alors en remarquant que $\gamma \mathcal{O} a\, \overline{In}^{-1} \subset \gamma \mathcal{O} \overline{In}^{-1} \subset A$,

On a : $\overline{I}_n^{-1} \subset A_{\mathfrak{p}} = A$, d'où $A \subset \overline{I}_n = \overline{\mathfrak{a}+\ldots+\mathfrak{a}^n}$

$\mathfrak{a}^{-1} \subset A$ d'après le lemme 12.1.

LEMME 2.5. - *Soit* $A = \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$, *pour un idéal premier* $\mathfrak{p}$ *de* $\mathcal{O}$. *Si* A *est un ordre maximal de* S *et si* $\mathfrak{a}$ *est un* A*-ideal,* A*-module d'un côté de tupe fini , si de plus* $A[\mathfrak{a}] = A[\mathfrak{a}^2]$, *alors* $\mathfrak{a} \subset A$ *ou* $\mathfrak{a}^{-1} \subset A$ *ou* $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1} + \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{a} \subset (\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}}$.

Si, par exemple, $\mathfrak{a}$ est un A-module à gauche de type fini, on a :

$$\mathfrak{a} = \sum^{m} A x_i \quad \text{où } x_i \in \mathfrak{a}\ \forall i = 1\ldots m.$$

Mais $A[\mathfrak{a}] = A[\mathfrak{a}^2]$, d'où $x_i \in A[\mathfrak{a}^2]$ $\forall i = 1\ldots m$.
Ainsi, $\exists\, r \in \mathbb{N}$ tel que $\forall i = 1\ldots m$, $x_i \in A + \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{a}^4 + \ldots + \mathfrak{a}^{2r}$;
d'où : $\mathfrak{a} \subset A + \mathfrak{a}^2 + \ldots + \mathfrak{a}^{2r}$. Ce qui donne

$$\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1} \subset \mathfrak{a}^{-1} + \mathfrak{a} + \mathfrak{a}^3 + \ldots + \mathfrak{a}^{2r-1} \text{ et } \mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1} \subset \mathfrak{a}^{-1} + \mathfrak{a} + \ldots + \mathfrak{a}^{2r-1}.$$

Le lemme 2.4 donne alors le reste.

COROLLAIRE 2.6. – *Si* $A = \mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}$ *est un ordre maximal de* S, *si* $A[\mathfrak{a}] = A[\mathfrak{a}^2]$ *pour un* A*-idéal (bilatère)* $\mathfrak{a}$ *qui est un* A*-module à gauche ou à droite projectif, alors on a* $\mathfrak{a} \subset A$ *ou* $\mathfrak{a}^{-1} \subset A$.

Supposons, par exemple, que $\mathfrak{a}$ soit un A-module à droite projectif. Alors $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1} = A$ et $\mathfrak{a}$ devient de type fini (Lemme 1.2 de [8]). Donc $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1} \not\subset (\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}}$ (sinon on aura $A = (\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}}$ et $1 \in (\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}}$ ce qui est impossible). Le lemme 2.5 nous donne :

$$\mathfrak{a} \subset A \quad \text{ou} \quad \mathfrak{a}^{-1} \subset A.$$

LEMME 2.7. – *Si* A *est un ordre maximal noéthérien dans* S *pour lequel* $A[\mathfrak{a}]$ *est un* A*-module plat d'un côté, alors on a* $A[\mathfrak{a}] = A[\mathfrak{a}^{2}]$.

A noethérien $\Rightarrow \mathfrak{a} = \sum_{i=1}^{m} A x_i$. Soit pour $i = 1,\dots,m$, $X_i = A \cdot x_i$ et soit $X = \bigcap_{1}^{m} X$. On a, en supposant que $A[\mathfrak{a}]$ est un A-module plat à gauche et en appliquant le lemme 1.8, on a

$$X.A[\mathfrak{a}] = A[\mathfrak{a}] .$$

Or $x_i X \subset x_i X_i \subset A$ pour $i = 1,\dots,m$;

d'où $\mathfrak{a} X \subset A$. Le lemme 2.2 est ainsi applicable; on a alors $A[\mathfrak{a}] = A[\mathfrak{a}^2]$.

LEMME 2.8. – *Si* $A[\mathfrak{a}^2]$ *est un ordre maximal dans* S, *alors* $A[\mathfrak{a}] = A[\mathfrak{a}^2]$.

Ceci résulte de l'égalité $A[\mathfrak{a}] = A[\mathfrak{a}^2] + A[\mathfrak{a}^2]\mathfrak{a}$ qui, puisque $\mathfrak{a}$ est un A-idéal, montre que $A[\mathfrak{a}]$ est un ordre équivalent à $A[\mathfrak{a}^2]$ (voir la démonstration du lemme 2.2).

III. - Le deuxième paragraphe a deux applications importantes pour l'anneau $\mathcal{O}$ lorsque celui-ci a tout ses "idéaux premiers minimaux" projectifs comme $\mathcal{O}$-module à gauche et à droite.

A - On suppose que l'anneau unitaire, premier, noethérien $\mathcal{O}$ soit à extensions plates dans son anneau des fractions S. En particulier, $\mathcal{O}$ devient un ordre maximal de S s'il n'a pas d'idéaux bilatères idempotents autre que 0 et lui-même (proposition 1.9). De plus, pour un idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ devient un ordre maximal de S (Corollaire 1.1.2 de [2]). On supposera que $\mathcal{O}$ est sans idéaux idempotents propres.

LEMME 3.1. - *Pour tout idéal premier* $\mathfrak{p}$, $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ *est un anneau noethérien.*

Comme $\mathcal{O}$ est à extensions plates dans S, l'injection canonique $\mathcal{O} \to \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ est un morphisme plat. C'est donc un morphisme pré-plat (voir le lemme 1.8), donc un épimorphisme d'anneaux d'après [8]. Comme $\mathcal{O}$ est noethérien, on déduit que $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ l'est.

LEMME 3.2. - *Pour tout* $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$*-idéal* $\mathfrak{a}$, *qui est un* $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$*-module projectif d'un côté, on a :* $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ *ou* $\mathfrak{a}^{-1} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$.

On sait déjà que $\mathcal{O}$, et par suite $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ sont deux ordres maximaux de S. Le lemme 2.7. montre, puisque $\mathcal{O}$ est noethérien, que

$\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}[\mathfrak{a}] = \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}[\mathfrak{a}^2]$. Car $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ est, comme $\mathcal{O}$, à extensions plates dans S. Le lemme résulte alors du corollaire 2.6.

LEMME 3.3. - *Si les idéaux premiers minimaux de* $\mathcal{O}$ *sont projectifs (des deux côtés) alors tout idéal premier propre de* $\mathcal{O}$ *contient au plus un idéal premier minimal.*

Soient en effet u et v deux idéaux premiers minimaux de $\mathcal{O}$, contenus dans le même idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}$. Comme u et v sont projectifs et comme $\mathcal{O}$ est un ordre maximal de S, on a, d'après le lemme 1.2 de [10] :

$$uu^{-1} = u^{-1}u = \mathcal{O} = vv^{-1} = v^{-1}v \ .$$

D'où $(uv^{-1})\ (vu^{-1}) = \mathcal{O} = (vu^{-1}(uv^{-1})$;
Ce qui montre, d'après le même lemme que uv^{-1} est un $\mathcal{O}$-module à gauche et à droite projectif et de type fini. On peut donc appliquer le théorème 4.7 de [3] pour obtenir le $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ - module projectif : $\mathfrak{a} = (uv^{-1})_{\mathfrak{p}}$ avec $\mathfrak{a}^{-1} = (vu^{-1})_{\mathfrak{p}}$. Le lemme 3.2 montre que $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ ou $\mathfrak{a}^{-1} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$.
Si on a par exemple $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$, alors :

$$(uv^{-1})_{\mathfrak{p}} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \iff u_{\mathfrak{p}}.v_{\mathfrak{p}}^{-1} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$$, car u et v sont deux c-idéaux.

D'où $u_{\mathfrak{p}} \subset v_{\mathfrak{p}}$.

Or $\alpha \in u \Rightarrow \alpha \in v_{\mathfrak{p}} \Rightarrow \exists\, \lambda \in \mathcal{O}$ $\lambda \notin \mathfrak{p}$ tel que $\lambda\mathcal{O}\alpha \subset v$; or $\lambda \notin \mathfrak{p} \Rightarrow \lambda \notin v$

car $v \subset \mathfrak{p}$, d'où $\alpha \in v$. Ce qui montre que $u \subset v$ et $u = v$ par minimalité de v. On obtient le même résultat dans le cas où $\mathfrak{a}^{-1} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$.

PROPOSITION 3.4. - *Dans les mêmes conditions qu'au lemme 3.3, les idéaux maximaux de $\mathcal{O}$ sont premiers minimaux; de plus $\mathcal{O}$ est un ordre d'Asano de* S.

C'est une conséquence du lemme 1.7. et du lemme précédent.

On peut résumer les résultats obtenus comme suit :

THEOREME 3. 5. - *Soit $\mathcal{O}$ un anneau unitaire, premier, noethérien, ordre régulier dans son anneau des fractions* S . *Alors $\mathcal{O}$ est un ordre d'Asano dans* S *si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

(i) $\mathcal{O}$ n'a pas d'idéaux bilatères idempotents propres ;

(ii) $\mathcal{O}$ est à extensions plates dans S ;

(iii) Les idéaux premiers minimaux sont tous des $\mathcal{O}$-modules à gauche et à droite projectifs.

La condition nécessaire se déduit facilement de [10] .

B. - Notre anneau unitaire premier noethérien $\mathcal{O}$ va être supposé dans cette partie à extensions maximales dans son anneau des fractions S, $\mathfrak{p}$ désignera un idéal premier propre de $\mathcal{O}$.

LEMME 3.6. - *Si* $\mathfrak{a}$ *est un* $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$*-idéal, projectif d'un côté, alors*

$$\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \quad ou \quad \mathfrak{a}^{-1} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$$

Soit $A = \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$; on a $A[\mathfrak{a}] = A[\mathfrak{a}^2]$ par le lemme 2.8, puisque $\mathcal{O}$ est à extensions maximales. Pour la même raison $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ est un ordre maximal de S. donc d'après le corollaire 2.6 on a : $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ ou $\mathfrak{a}^{-1} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$.

LEMME 3.7. - *Si les idéaux premiers minimaux de* $\mathcal{O}$ *sont projectifs comme* $\mathcal{O}$*-module à gauche et à droite, alors tout idéal premier de* $\mathcal{O}$ *contient un unique idéal premier minimal.*

Le lemme 3.6 permet de faire une démonstration identique à celle du lemme 3.3, puisque $\mathcal{O}$ est par hypothèse un ordre maximal de S.

Le lemme 1.7 permet alors d'énoncer :

PROPOSITION 3.8. - *Si* $\mathcal{O}$ *est un ordre régulier de* S *dont les idéaux premiers minimaux sont des* $\mathcal{O}$*-modules à gauche et à droite projectifs, alors* $\mathcal{O}$ *est un ordre d'Asano dans* S.

THEOREME 3.9. - *Soit* $\mathcal{O}$ *un anneau unitaire, premier, noethérien, ordre régulier dans son anneau des fractions* S. *Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathcal{O}$ *est un ordre d'Asano dans* S*;*

(ii) $\mathcal{O}$ *est à extensions maximales dans* S *et les idéaux premiers minimaux de* $\mathcal{O}$ *sont des* $\mathcal{O}$*-modules à gauche et à droite projectifs.*

IV. - La condition imposée aux idéaux premiers minimaux de $\mathcal{O}$, d'être projectifs, lorsque $\mathcal{O}$ est à extensions plates dans S. pourra être remplacée par une autre condition portant sur les localisés $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ de $\mathcal{O}$ par rapport aux idéaux premiers de $\mathcal{O}$. En fait, en supposant que $\mathcal{O}_{\mathfrak{m}}$, pour tout idéal bilatère maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathcal{O}$, possède un idéal bilatère maximal unique $\mathfrak{M}$, on verra que le théorème 3.5 pourra être rétabli avec ce petit changement. D'ailleurs, le théorème auquel on va aboutir sera un résultat plus fort que celui obtenu dans [2] (§ 4).

PROPOSITION 4.1. - *Si* A *est un ordre maximal noethérien (d'un anneau* S) *possèdant un plus grand idéal bilatère* $\mathfrak{M}$, *et si* $\mathfrak{a}$ *est un* A-*idéal tel que* $A[\mathfrak{a}]$ *soit un* A-*module plat des deux côtés alors on a* $\mathfrak{a} \subset A$ *ou* $\mathfrak{a}^{-1} \subset A$.

Supposons que $\mathfrak{a} \not\subset A$. Le lemme 2.7 montre qu'il existe un idéal X de A tel que $XA[\mathfrak{a}] = A[\mathfrak{a}]$, avec $X = \bigcap\limits_1^n X_i$ où $X_i = A \cdot x_i$, $\mathfrak{a} = \sum\limits_{i=1}^n A x_i$.

D'où : $(\mathfrak{a}.A)X = \mathfrak{a} X \subset A$, par suite $AX \subset \bigcap\limits_1^n X_i = X$ et X est ainsi un idéal bilatère de A.

Comme $\mathfrak{a} \not\subset A$, on a $X \neq A$ et $X \subset M$, on a

$$\mathfrak{M}.A[\mathfrak{a}] = A[\mathfrak{a}] \text{ et } 1 = \sum_{j=1}^m Mj\, x'_j, \text{ où } x'_j \in A[\mathfrak{a}] .$$

Soit $r \in \mathbb{N}$ tel que $x'_j \in A + \mathfrak{a} + \ldots + \mathfrak{a}^r$, $\forall$ a = 1...m ; On a

$$1 \in \mathfrak{M}(A + \mathfrak{a} + \ldots + \mathfrak{a}^r) \subseteq \mathfrak{M} + \mathfrak{a} + \ldots + \mathfrak{a}^r \Longrightarrow 1 \in \mathfrak{M} + (\mathfrak{a} + \ldots + \mathfrak{a}^r) \cap A ,$$

Ce qui prouve que $(\mathfrak{a} + \ldots + \mathfrak{a}^r) \cap A \not\subset \mathfrak{M}$ (sinon 1 sera dans $\mathfrak{M}$). Or $(\mathfrak{a} + \ldots + \mathfrak{a}^r) \cap A$ est un idéal bilatère de A; d'où, puisque $\mathfrak{M}$ est l'unique idéal maximal :

$$(\mathfrak{a} + \ldots + \mathfrak{a}^r) \cap A = A \quad \text{et} \quad A \subset \mathfrak{a} + \ldots + \mathfrak{a}^r.$$

Comme A est un ordre maximal, on a $\mathfrak{a}^{-1} \subset A$ d'après le lemme 2.1.

COROLLAIRE 4.2. - *Si $\mathcal{O}$ est un ordre maximal de* S *et si, pour un idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ est noethérien et possède un idéal bilatère maximal unique, alors, pour tout $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$- idéal $\mathfrak{a}$ tel que $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}[\mathfrak{a}]$ soit un $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-module plat des deux côtés on a $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ ou $\mathfrak{a}^{-1} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$.*

PROPOSITION 4.3. - *Si $\mathcal{O}$ est un ordre maximal, régulier, noethérien et à extensions plates dans* S, *si de plus, pour tout idéal maximal $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ a un idéal bilatère maximal unique, alors tout idéal maximal $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}$ contient au plus un idéal premier minimal.*

Soient en effet u et v deux idéaux premiers minimaux contenus dans l'idéal maximal $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}$. u et v sont des c-idéaux d'après la proposition 0.11 de [2] ; d'où le c-idéal $\mathfrak{a} = (u.v^{-1})_{\mathfrak{p}}$ de $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$, avec $\mathfrak{a}^{-1} = (v.u^{-1})_{\mathfrak{p}}$, la multiplication étant celle des c-diéaux. ($\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}^{-1}$ sont des c-idéaux de $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ d'après la proposition 1.1.4 de [2]).

Ici, on ne sait pas si $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1} = \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ ou non, mais l'on va appliquer le lemme 4.1. En effet $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ est un ordre maximal de S puisque $\mathcal{O}$ l'est. De plus $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ est noethérien (lemme 3.1). Comme, par hypothèse, $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ a un idéal bilatère maximal unique et est à extensions plates dans S, on voit, d'après le lemme 4.1, que $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ ou $\mathfrak{a}^{-1} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$. On démontre alors, comme dans le lemme 3.3, que u=v. La proposition 4.3 et le lemme 1.7, permettent alors d'énoncer le théorème suivant :

THEOREM 4.4. - *Soit $\mathcal{O}$ un anneau unitaire, premier noethérien et ordre régulier dans anneau des fractions* S . *Alors $\mathcal{O}$ est un ordre d'Asano dans* S, *si et seulement s'il vérifie les conditions suivantes :*

(i) $\mathcal{O}$ n'a pas d'idéaux bilatères idempotents ;

(ii) $\mathcal{O}$ est à extensions plates dans S ;

(iii) pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}_{\mathfrak{m}}$ a un unique idéal bilatère maximal.

Remarquons que la condition : " $\mathcal{O}$ n'a pas d'idéaux bilatères idempotents" paraît être indispensable. En effet dans [10] (§ 4), Robson construit un exemple d'anneau premier noethérien ordre, non maximal dans son anneau des fractions, mais qui est héréditaire.

BIBLIOGRAPHIE. -

1 K. ASANO, *Zur Arithmetik in Schiefringen I,* Osaka J. math. 1 (1949), p. 98-134.

2 M. CHAMARIE, *Thèse de 3ème cycle,* Université de Lyon-1 (1973).

3 O. GOLDMAN, *Rings and modules of quotients,* J. algebra, 13,(1969) p. 10-47.

4 M. HACQUE, *Localisations exactes et localisations plates,* Pub. Dep. Math (Lyon) t. 6-2 (1969), p. 97-117.

5 N. JACOBSON, *The theory of rings,* Math. surveys, 2 (1943).

6 G. MAURY, *La condition "intégralement clos" dans quelques structures algébriques I,* Ann. Sci. Ecole norm. sup., t. 78 (1961), p. 31-100.

7 G.O. MICHLER, *Asano orders,* Proc. London Math. Soc. 19 (1969), p. 40-59.

8 N. POPESCU et SPIRCU, *Quelques observations sur les épimorphismes plats à gauche d'un anneau,* J. Algebra, 16 (1970), p. 40-59.

9 F. RICHMAN, *Generalized quotient rings,* Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1965), p. 794-799.

10 J.C. ROBSON, *Non commutative Dedekind rings,* J. Algebra, 9 (1968), p. 249-265.